Charakterisierung der Kapitalwertmethode mittels der internen Zinsfaktoren

Rudolf Pleier

November 2021

1 Klassische Endwertmethode und Kapitalwertmethode

Der klassische **Endwert** $E_n(\mathbf{X}) = E_n(\mathbf{X},q)$ eines Zahlungsstroms $\mathbf{X} = (X_0,\dots,X_n)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n+1}$ wird mit einem für alle Zinsperioden $[k\text{-}1,k]$ (im Allgemeinen Jahre; $k = 1,\dots,n$) der Laufzeit $n \in \mathbb{N}$ konstanten und nicht (in Haben- und Sollzinsfaktor) gespaltenen **Kalkulationszinsfaktor** $q = q_K = 1 + i_K \in]0,\infty[$ ($i_K \in]\text{-}1,\infty[$ Kalkulationszinssatz) folgendermaßen definiert:

$$E_n(\mathbf{X}) = E_n(\mathbf{X},q) = \sum_{j=0}^{n} X_j q^{n-j} = X_0q^n + X_1q^{n-1} + \dots + X_n.$$

Anstelle der angegebenen expliziten Berechnung des Polynomwerts $E_n(\mathbf{X},q)$ kann eine effizientere Berechnung mit wesentlich geringerem Rechenaufwand nach dem Horner-Schema[1] erfolgen:

$$E_0(\mathbf{X},q) = X_0,$$
$$E_j(\mathbf{X},q) = E_{j-1}(\mathbf{X},q)\cdot q + X_j \qquad (j = 1,\dots,n).$$

Die klassische **Endwertmethode** (E-Beurteilung, Abk. EWM) vergleicht und beurteilt Zahlungsströme $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit der klassischen Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X})$ als Nutzenfunktion:

$\mathbf{X} \succcurlyeq_E \mathbf{Y}$ (**X** ist mindestens so vorteilhaft wie **Y**)
$:\Leftrightarrow E_n(\mathbf{X}) \geq E_n(\mathbf{Y})$;
$\mathbf{X} \succ_E \mathbf{O}$ (**X** ist vorteilhaft bzw. vorteilhafter als $\mathbf{O} = (0,\dots,0)^\mathsf{T}$)
$:\Leftrightarrow E_n(\mathbf{X}) > E_n(\mathbf{O}) = 0$.

Damit sind auch die folgenden weiteren Endwert-Relationen der E-Beurteilungen und E-Vergleiche für die Zahlungsströme des $\mathbb{R}^{n+1}$ festgelegt:

$\mathbf{X} \sim_E \mathbf{Y}$ (**X** ist indifferent zu **Y** bzw. genauso vorteilhaft wie **Y**)
$:\Leftrightarrow E_n(\mathbf{X}) = E_n(\mathbf{Y})$;
$\mathbf{X} \succ_E \mathbf{Y}$ (**X** ist vorteilhafter als **Y**)
$:\Leftrightarrow E_n(\mathbf{X}) > E_n(\mathbf{Y})$;
$\mathbf{X} \prec_E \mathbf{Y}$ (**X** ist unvorteilhafter als **Y**)
$:\Leftrightarrow E_n(\mathbf{X}) < E_n(\mathbf{Y})$;
$\mathbf{X} \sim_E \mathbf{O}$ (**X** ist indifferent bzw. neutral)
$:\Leftrightarrow E_n(\mathbf{X}) = 0$;

[1] Das Horner-Schema ist benannt nach dem englischen Mathematiker William George Horner (1786–1837). Die vom englischen Mathematiker Augustus De Morgan (1806–1871) nach Horner benannte Rechenvorschrift zur Berechnung eines Polynomwerts bei wesentlich geringerem Rechenaufwand wurde aber schon 15 Jahre vorher im Jahr 1804 vom italienischen Mathematiker Paolo Ruffini (1765–1822) veröffentlicht und war auch schon viel früher bekannt, nämlich dem chinesischen Mathematiker Jia Xian im 11. Jahrhundert, dem irakischen Mathematiker As-Samaw'al ibn Yahya al-Maghribī im 12. Jahrhundert und dem chinesischen Mathematiker Zhu Shijie im Jahr 1303. Eine Darstellung des Horner-Schemas findet man beispielsweise im Duden (1985), S. 270–272.
Für die Bildung der Potenz q^2 wird eine Multiplikation, für q^3 eine weitere Multiplikation mit q usw. benötigt. So werden für die Bildung der Potenzen $q^2, q^3, \dots, q^n$ insgesamt n - 1 Multiplikationen durchgeführt. Anschließend werden für die Multiplikation der Potenzen $q, q^2, \dots, q^n$ mit den Koeffizienten X_j noch n weitere Multiplikationen benötigt. Bei der expliziten Berechnung von $P_n(q)$ kommen zu den $2n$ - 1 Multiplikationen dann noch n Additionen für die Aufsummierung der $n + 1$ Monome X_jq^{n-j} ($j = 0,\dots,n$) hinzu. Insgesamt benötigt man für die explizite Berechnung $3n$ - 1 Rechenoperationen, für die rekursive Berechnung nach dem Horner-Schema dagegen nur $2n$ Rechenoperationen.

$\mathbf{X} \prec_E \mathbf{O}$ ($\mathbf{X}$ ist unvorteilhaft)
$:\Leftrightarrow E_n(\mathbf{X}) < 0.$

Der klassische **Kapitalwert** (Barwert) $B_n(\mathbf{X}) = B_n(\mathbf{X},q)$ eines Zahlungsstroms $\mathbf{X} = (X_0,\ldots,X_n)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n+1}$ wird mit einem für alle Zinsperioden $[k\text{-}1,k]$ (im Allgemeinen Jahre; $k = 1,\ldots,n$) der Laufzeit $n \in \mathbb{N}$ konstanten und nicht (in Haben- und Sollzinsfaktor) gespaltenen **Kalkulationszinsfaktor** $q = q_K = 1 + i_K \in\ ]0,\infty[$ ($i_K \in\ ]\text{-}1,\infty[$ Kalkulationszinssatz) folgendermaßen definiert:

$$B_n(\mathbf{X}) = B_n(\mathbf{X},q) = \sum_{j=0}^{n} X_j q^{-j} = X_0 + X_1 q^{-1} + \ldots + X_n q^{-n}$$
$$= E_n(\mathbf{X},q)/q^n.$$

Die klassische **Kapitalwertmethode** (Barwertmethode, B-Beurteilung, Abk. KWM, BWM) vergleicht und beurteilt Zahlungsströme $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit der klassischen Barwertfunktion $B_n(\mathbf{X})$ als Nutzenfunktion:

$\mathbf{X} \succcurlyeq_B \mathbf{Y}$ ($\mathbf{X}$ ist mindestens so vorteilhaft wie $\mathbf{Y}$)
$:\Leftrightarrow B_n(\mathbf{X}) \geq B_n(\mathbf{Y});$
$\mathbf{X} \succ_B \mathbf{O}$ ($\mathbf{X}$ ist vorteilhaft bzw. vorteilhafter als $\mathbf{O} = (0,\ldots,0)^\mathsf{T}$)
$:\Leftrightarrow B_n(\mathbf{X}) > B_n(\mathbf{O}) = 0.$

Äquivalenz der klassischen Methoden: Da die klassischen Nutzenfunktionen zum Vergleich von Zahlungsströmen, nämlich die Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X})$, die Barwertfunktion (Kapitalwertfunktion) $B_n(\mathbf{X})$, die Zeitwertfunktion $Z_{m,n}(\mathbf{X})$ (zum Vergleichszeitpunkt m) und die Annuitätenfunktion $\alpha_n(\mathbf{X})$ sich untereinander jeweils nur durch einen positiven konstanten Faktor unterscheiden,

$B_n(\mathbf{X}) = E_n(\mathbf{X})/q^n,$
$Z_{m,n}(\mathbf{X}) = E_n(\mathbf{X})/q^{m-n},$
$\alpha_n(\mathbf{X}) = E_n(\mathbf{X})/E_n(\mathbf{A})$ $\qquad$ ($\mathbf{A} \gtrdot 0$, d. h. $\mathbf{A} \geq 0 \wedge \mathbf{A} \neq 0$),

liefern sie dieselbe Präferenzordnung (Pleier, 2021, S. 209)

$\succcurlyeq_E\ =\ \succcurlyeq_B\ =\ \succcurlyeq_Z\ =\ \succcurlyeq_A.$

Demzufolge ist die nachfolgende Charakterisierung der Endwertmethode mittels interner Zinsfaktoren auch eine Charakterisierung der anderen klassischen Methoden, nämlich der Barwertmethode (Kapitalwertmethode, Abk. BWM, KWM), Zeitwertmethode und Annuitätenmethode. Den nachfolgenden Text findet man auch im Thema „Charakterisierung der Endwertmethode mittels interner Zinsfaktoren“. Diese Charakterisierung mittels interner Zinsfaktoren stimmt aber nur auf einem eingeschränkten Anwendungsbereich mit der traditionellen Methode *des* internen Zinssatzes (MIZ) überein, die nur einen *einzigen* internern Zinssatz verwendet (Beispiele für Zahlungsströme des eingeschränkten Anwendungsbereichs der MIZ sind die NU-Zahlungsströme, NF-Zahlungsströme, VK-Zahlungsströme mit positivem oder nichtpositivem VK-Zinsfaktor, reguläre Zahlungsströme, Normalzahlungsströme und Zahlungsströme gemäß den Beispielen 7.2 und 7.3 in Pleier, 2021).

2 Charakterisierung der klassischen Kapitalwertmethode bzw. klassischen Endwertmethode mittels interner Zinsfaktoren

2.1 Charakterisierung der E-Beurteilung eines Zahlungsstroms

Allein mittels der Nullstellendarstellung der Polynomfunktion $q \in \mathbb{R} \mapsto E_n(\mathbf{X},q) \in \mathbb{R}$ und einfacher Kurvendiskussion lässt sich nachfolgend die Endwertmethode zur Beurteilung eines Zahlungsstroms $\mathbf{X} = (X_0,\ldots,X_n)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mittels der internen Zinsfaktoren von $\mathbf{X}$ charakterisieren.

Der spezielle Nullzahlungsstrom **O** wird bei der Endwertmethode für jeden Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ als indifferent beurteilt und besitzt jeden beliebig fixierten Kalkulationszinsfaktor $q = q_K$ als internen Zinsfaktor, also als Nullstelle der Endwertfunktion: $E_n(\mathbf{O},q) \equiv 0$. Für $\mathbf{X} = \mathbf{O}$ ist somit schon die E-Indifferenz gleichbedeutend dazu, dass der vorgegebene Kalkulationszinsfaktor q_K als ein interner Zinsfaktor von **X** auftritt.

Ebenso ist für einen beliebigen Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $E_n(\mathbf{X},q_K) = 0$ die E-Indifferenz gleichbedeutend zum Auftreten des Kalkulationszinsfaktors q_K als interner Zinsfaktor von **X**. Die weitere Betrachtung befasst sich jetzt mit einem Zahlungsstrom **X** mit $E_n(\mathbf{X},q_K) \neq 0$, damit $\mathbf{X} \neq \mathbf{O}$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit einem Zahlungsstrom **X**, für den die erste Komponente von Null verschieden ist: $X_0 \neq 0$. Weiter wird dabei zunächst eine **Investition X** ($X_0 < 0$) betrachtet, da die Argumentation für eine Finanzierung **X** ($X_0 > 0$) analog verläuft.

Für fest gedachtes Koeffizienten-(n+1)-Tupel **X** erhält man für die Polynomfunktion $q \mapsto E_n(\mathbf{X},q)$ nach einer Folgerung aus dem Gauß-d'Alembertschen Fundamentalsatz der Algebra (Nullstellensatz für Polynome) die folgende Produktdarstellung mittels ihrer reellen Nullstellen (siehe z. B. Köhler 2006, S. 169, Korollar 12.14):

$$E_n(\mathbf{X},q) = p_0(q)\cdot(q - q_1)\cdot\ldots\cdot(q - q_m)$$

mit den nicht notwendigerweise verschiedenen reellen Nullstellen q_j ($j = 1,\ldots,m$, $0 \le m \le n$) von $E_n(\mathbf{X},q)$ und dem auf $\mathbb{R}$ nullstellenfreien reellen Polynom $p_0(q)$, das als Produkt von X_0 und den Linearfaktoren $(q - q_j)$ der konjugiert komplexen Nullstellen $q_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ von $E_n(\mathbf{X},q)$ gebildet wird. Dabei sind das Polynom $p_0(q)$ und die reellen Nullstellen q_j bis auf ihre Reihenfolge eindeutig bestimmt.
Weiter erhält man dann die Produktdarstellung

$$E_n(\mathbf{X},q) = p_0(q)\cdot(q - q_1)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(q - q_s)^{m_s}$$

mit den eindeutig bestimmten verschiedenen reellen Nullstellen q_j ($j = 1,\ldots,s$, $0 \le s \le n$) und deren Vielfachheiten (Ordnungen) $m_j \in \mathbb{N}$. Außerdem erhält man zu jeder reellen Nullstelle q_j die Produktdarstellung

$$E_n(\mathbf{X},q) = f_j(q)\cdot(q - q_j)^{m_j}$$

mit der in einer Umgebung von q_j nullstellenfreien Funktion $f_j(q)$. Demnach ist bei ungerader Vielfachheit m_j der Nullstelle q_j diese eine Vorzeichenwechselstelle und bei gerader Vielfachheit diese keine Vorzeichenwechselstelle. Die Vorzeichenwechselstellen von $E_n(\mathbf{X},q)$ sind also genau die reellen Nullstellen q_j mit jeweils ungerader Vielfachheit m_j.

Es werden nun speziell die im offenen Intervall $]q_K,\infty[$ gelegenen verschiedenen reellen Nullstellen q_j mit ihren jeweiligen Vielfachheiten m_j betrachtet. Ist $G_{>q_K}$ die Anzahl der Nullstellen q_j in $]q_K,\infty[$ mit jeweils gerader Vielfachheit m_j, so ist deren Gesamtvielfachheit (Gesamtordnung)

$g_{>q_K}$ als Summe der geraden m_j

ebenfalls gerade. Ist $U_{>q_K}$ die Anzahl der Nullstellen q_j in $]q_K,\infty[$ mit jeweils ungerader Vielfachheit m_j, so kann deren Gesamtvielfachheit $u_{>q_K}$ gerade oder ungerade sein: Ist die Anzahl $U_{>q_K}$ gerade, so ist

$u_{>q_K}$ als die Summe der ungeraden m_j

gerade. Ist die Anzahl $U_{>q_K}$ ungerade, so ist $u_{>q_K}$ als die Summe der ungeraden m_j ungerade.
Ist

$$m_{>q_K} = m_{>q_K}(\mathbf{X})$$

die Gesamtordnung der reellen Nullstellen von $E_n(\mathbf{X},q)$ **im Intervall** $]q_K,\infty[$ (die zu q_K gehörige rechtsseitige Gesamtvielfachheit der internen Zinsfaktoren von **X**), so gilt

$$m_{>q_K} = u_{>q_K} + g_{>q_K}.$$

Da $g_{>q_K}$ stets gerade ist, ist die Gesamtordnung $m_{>q_K}$ genau dann ungerade bzw. gerade, wenn dies für $u_{>q_K}$ bzw. für $U_{>q_K}$ gilt:

$$m_{>q_K} \text{ ungerade} \Leftrightarrow U_{>q_K} \text{ ungerade;}$$
$$m_{>q_K} \text{ gerade} \quad \Leftrightarrow U_{>q_K} \text{ gerade.}$$

Außerdem zeigt die Polynomfunktion

$$q \mapsto E_n(\mathbf{X},q) = X_0 q^n \left[1 + \frac{X_1}{X_0 q} + \ldots + \frac{X_n}{X_0 q^n}\right]$$

wegen $X_0 < 0$ (**X** Investition) das Grenzverhalten $E_n(\mathbf{X},q) \longrightarrow -\infty$ bei $q \longrightarrow \infty$ und ist daher für große q negativ.

Demzufolge besitzt bei ungerader Gesamtordnung $m_{>q_K}$ die Polynomfunktion $E_n(\mathbf{X},q)$ eine ungerade Anzahl $U_{>q_K}$ von Vorzeichenwechselstellen im Intervall $]q_K,\infty[$, sodass der Funktionswert $E_n(\mathbf{X},q_K)$ im linken Intervallrandpunkt q_K nichtnegativ ist. Mit der zusätzlichen Voraussetzung $E_n(\mathbf{X},q_K) \neq 0$ folgt bei ungeradem $U_{>q_K}$ sogar die Ungleichung $E_n(\mathbf{X},q_K) > 0$.

Analog folgt bei gerader Gesamtordnung $m_{>q_K}$, dass der Funktionswert $E_n(\mathbf{X},q_K)$ nichtpositiv ist und bei der zusätzlichen Voraussetzung $E_n(\mathbf{X},q_K) \neq 0$ sogar negativ ist.

Insgesamt erhält man zum vorgegebenen Kalkulationszinsfaktor q_K die folgende Charakterisierung der Endwertmethode für die Beurteilung einer Investition **X** ($X_0 < 0$) mittels der internen Zinsfaktoren von **X** bzw. der Nullstellen der Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X},q)$ im Intervall $]q_K,\infty[$. Präziser formuliert erfolgt diese Charakterisierung mittels der Ungerad- bzw. Geradzahligkeit der Anzahl $U_{>q_K}$ der Nullstellen von jeweils ungerader Vielfachheit im Intervall $]q_K,\infty[$ oder mittels der Ungerad- bzw. Geradzahligkeit der Gesamtvielfachheit $m_{>q_K}$ der Nullstellen in $]q_K,\infty[$. Damit wird die Endwertmethode bzw. die Kapitalwertmethode charakterisiert durch die Ungerad- bzw. Geradzahligkeit der Gesamtordnung der internen Zinsfaktoren von **X** rechts des Kalkulationszinsfaktors q_K.

Die Charakterisierung der E-Beurteilungen mittels der Gesamtordnung $m_{>q_K}$ der Nullstellen von $E_n(\mathbf{X},q)$ im Intervall $]q_K,\infty[$, also rechts des Kalkulationszinsfaktors q_K (> 0), für eine **Investition** $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($X_0 < 0$):

$\mathbf{X} \succcurlyeq_E \mathbf{O}$ (**X** ist E-indifferent oder echt E-vorteilhaft)
$\Leftrightarrow q_K$ ist ein interner Zinsfaktor von $\mathbf{X} \vee m_{>q_K}$ ungerade;

$\mathbf{X} \preccurlyeq_E \mathbf{O}$ (**X** ist E-indifferent oder echt E-unvorteilhaft)
$\Leftrightarrow q_K$ ist ein interner Zinsfaktor von $\mathbf{X} \vee m_{>q_K}$ gerade;

$\mathbf{X} \sim_E \mathbf{O}$ (**X** ist E-indifferent)
$\Leftrightarrow q_K$ ist ein interner Zinsfaktor von **X**;

$\mathbf{X} \succ_E \mathbf{O}$ (**X** ist (echt) E-vorteilhaft)
$\Leftrightarrow q_K$ ist kein interner Zinsfaktor von $\mathbf{X} \wedge m_{>q_K}$ ungerade;

$\mathbf{X} \prec_E \mathbf{O}$ (**X** ist (echt) E-unvorteilhaft)
$\Leftrightarrow q_K$ ist kein interner Zinsfaktor von $\mathbf{X} \wedge m_{>q_K}$ gerade.

Der Funktionsgraph der Endwertfunktion für ein Beispiel einer E-vorteilhaften Investition **X** mit einer ungeraden Gesamtvielfachheit $m_{>q_K}$ der internen Zinsfaktoren im Intervall $]q_K,\infty[$ ist in der folgenden Abbildung 1 dargestellt.

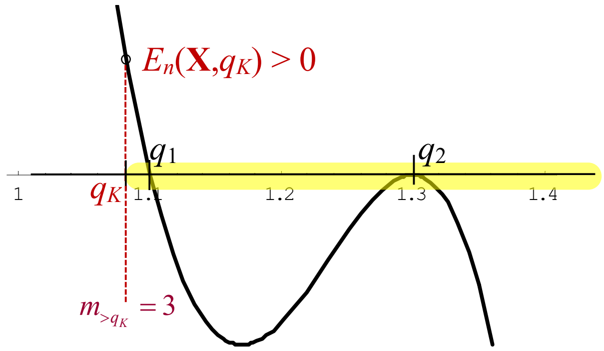

Abb. 1 Der Graph der Endwertfunktion $q \mapsto E_n(\mathbf{X},q)$ einer für den Kalkulationszinsfaktor q_K E-vorteilhaften Investition $\mathbf{X}$ mit ungerader rechtsseitiger Gesamtvielfachheit $m_{>q_K}$ der internen Zinsfaktoren

Analog erhält man die folgende Charakterisierung der Endwertmethode für die Beurteilung einer Finanzierung $\mathbf{X}$ ($X_0 > 0$) mittels der internen Zinsfaktoren:

Die Charakterisierung der E-Beurteilungen mittels der Gesamtordnung $m_{>q_K}$ der Nullstellen von $E_n(\mathbf{X},q)$ im Intervall $]q_K,\infty[$, also rechts des Kalkulationszinsfaktors q_K (> 0), für eine **Finanzierung** $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($X_0 > 0$):

$\mathbf{X} \sim_E \mathbf{O}$ ($\mathbf{X}$ ist E-indifferent) $:\Leftrightarrow$ q_K ist ein interner Zinsfaktor von $\mathbf{X}$;

$\mathbf{X} \succ_E \mathbf{O}$ ($\mathbf{X}$ ist (echt) E-vorteilhaft) $:\Leftrightarrow$ q_K ist kein interner Zinsfaktor von $\mathbf{X} \wedge m_{>q_K}$ gerade;

$\mathbf{X} \prec_E \mathbf{O}$ ($\mathbf{X}$ ist (echt) E-unvorteilhaft) $:\Leftrightarrow$ q_K ist kein interner Zinsfaktor von $\mathbf{X} \wedge m_{>q_K}$ ungerade.

2.2 Charakterisierung des E-Vergleichs von Zahlungsströmen

Mittels der obigen Charakterisierung der E-Beurteilung eines Zahlungsstroms erhält man aufgrund der Linearität der Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X},q)$ bezüglich des Koeffizienten-(n+1)-Tupels $\mathbf{X}$ auch eine Charakterisierung des E-Vergleichs von Zahlungsströmen.

Mit dem Differenzzahlungsstrom $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$ der Zahlungsströme $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$, der zunächst als **Investition** angenommen wird, gilt nämlich folgende Charakterisierung des E-Vergleichs:

$\mathbf{X} \succcurlyeq_E \mathbf{Y}$ $\Leftrightarrow E_n(\mathbf{X}) \geq E_n(\mathbf{Y}) \Leftrightarrow E_n(\mathbf{D}) = E_n(\mathbf{X}) - E_n(\mathbf{Y}) \geq 0$
$\Leftrightarrow$ q_K ist ein interner Zinsfaktor von $\mathbf{D} \vee m_{>q_K}(\mathbf{D})$ ungerade.

Weiter erhält man

$\mathbf{X} \preccurlyeq_E \mathbf{Y}$ $\Leftrightarrow$ q_K ist ein interner Zinsfaktor von $\mathbf{D} \vee m_{>q_K}(\mathbf{D})$ gerade;

$\mathbf{X} \sim_E \mathbf{Y}$ $\Leftrightarrow$ q_K ist ein interner Zinsfaktor von $\mathbf{D}$;

$\mathbf{X} \succ_E \mathbf{Y}$ $\Leftrightarrow$ q_K ist kein interner Zinsfaktor von $\mathbf{D} \wedge m_{>q_K}(\mathbf{D})$ ungerade;

$\mathbf{X} \prec_E \mathbf{Y}$ $\Leftrightarrow$ q_K ist kein interner Zinsfaktor von $\mathbf{D} \wedge m_{>q_K}(\mathbf{D})$ gerade.

Die entsprechende Charakterisierung des E-Vergleichs der Zahlungsströme $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ für den Fall, dass der Differenzzahlungsstrom $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$ eine **Finanzierung** ist, lautet:

$\mathbf{X} \sim_E \mathbf{Y}$ $\Leftrightarrow$ q_K ist ein interner Zinsfaktor von $\mathbf{D}$;

$\mathbf{X} \succ_E \mathbf{Y}$ $\Leftrightarrow$ q_K ist kein interner Zinsfaktor von $\mathbf{D} \wedge m_{>q_K}(\mathbf{D})$ gerade;

$\mathbf{X} \prec_E \mathbf{Y}$ $\Leftrightarrow$ q_K ist kein interner Zinsfaktor von $\mathbf{D} \wedge m_{>q_K}(\mathbf{D})$ ungerade.

2.3 Charakterisierung der B-Beurteilung und des B-Vergleichs

Aufgrund der oben begründeten Äquivalenz der klassischen Endwertmethode zur klassischen Barwertmethode (Kapitalwertmethode) erhält man die nachfolgende Charakterisierung der B-Beurteilung und des B-Vergleichs.

Die Charakterisierung der B-Beurteilungen mittels der Gesamtordnung $m_{>q_K}$ der Nullstellen von $E_n(\mathbf{X},q)$ im Intervall $]q_K,\infty[$, also rechts des Kalkulationszinsfaktors q_K (> 0), für eine **Investition** $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($X_0 < 0$):

$\mathbf{X} \sim_B \mathbf{O}$ ($\mathbf{X}$ ist B-indifferent)
$\Leftrightarrow q_K$ ist ein interner Zinsfaktor von $\mathbf{X}$;

$\mathbf{X} \succ_B \mathbf{O}$ ($\mathbf{X}$ ist (echt) B-vorteilhaft)
$\Leftrightarrow q_K$ ist kein interner Zinsfaktor von $\mathbf{X} \wedge m_{>q_K}$ ungerade;

$\mathbf{X} \prec_B \mathbf{O}$ ($\mathbf{X}$ ist (echt) B-unvorteilhaft)
$\Leftrightarrow q_K$ ist kein interner Zinsfaktor von $\mathbf{X} \wedge m_{>q_K}$ gerade.

Der Funktionsgraph der Barwertfunktion für ein Beispiel einer B-vorteilhaften Investition $\mathbf{X}$ mit einer ungeraden Gesamtvielfachheit $m_{>q_K}$ der internen Zinsfaktoren im Intervall $]q_K,\infty[$ ist in der folgenden Abbildung 2 dargestellt.

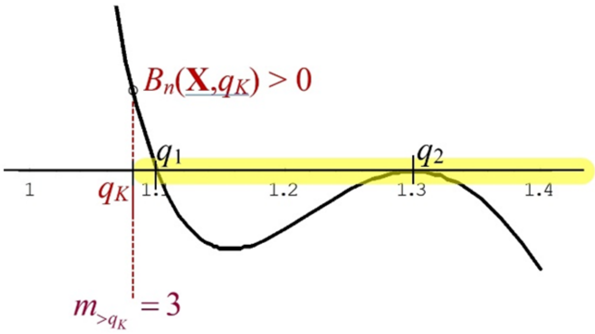

Abb. 2 Der Graph der Barwertfunktion $q \mapsto B_n(\mathbf{X},q)$ einer für den Kalkulationszinsfaktor q_K B-vorteilhaften Investition $\mathbf{X}$ mit ungerader rechtsseitiger Gesamtvielfachheit $m_{>q_K}$ der internen Zinsfaktoren

Analog erhält man die folgende Charakterisierung der Barwertmethode für die Beurteilung einer Finanzierung $\mathbf{X}$ ($X_0 > 0$) mittels der internen Zinsfaktoren:

Die Charakterisierung der B-Beurteilungen mittels der Gesamtordnung $m_{>q_K}$ der Nullstellen von $E_n(\mathbf{X},q)$ im Intervall $]q_K,\infty[$, also rechts des Kalkulationszinsfaktors q_K (> 0), für eine **Finanzierung** $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($X_0 > 0$):

$\mathbf{X} \sim_B \mathbf{O}$ ($\mathbf{X}$ ist B-indifferent)
$:\Leftrightarrow q_K$ ist ein interner Zinsfaktor von $\mathbf{X}$;

$\mathbf{X} \succ_B \mathbf{O}$ ($\mathbf{X}$ ist (echt) B-vorteilhaft)
$:\Leftrightarrow q_K$ ist kein interner Zinsfaktor von $\mathbf{X} \wedge m_{>q_K}$ gerade;

$\mathbf{X} \prec_B \mathbf{O}$ ($\mathbf{X}$ ist (echt) B-unvorteilhaft)
$:\Leftrightarrow q_K$ ist kein interner Zinsfaktor von $\mathbf{X} \wedge m_{>q_K}$ ungerade.

Mit dem Differenzzahlungsstrom $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$ der Zahlungsströme $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$, der zunächst als **Investition** angenommen wird, gilt nämlich folgende Charakterisierung des B-Vergleichs:

$\mathbf{X} \succcurlyeq_B \mathbf{Y}$ $\Leftrightarrow B_n(\mathbf{X}) \geq B_n(\mathbf{Y}) \Leftrightarrow B_n(\mathbf{D}) = B_n(\mathbf{X}) - B_n(\mathbf{Y}) \geq 0$
$\Leftrightarrow q_K$ ist ein interner Zinsfaktor von $\mathbf{D} \vee m_{>q_K}(\mathbf{D})$ ungerade.

$\mathbf{X} \preccurlyeq_B \mathbf{Y}$ $\Leftrightarrow q_K$ ist ein interner Zinsfaktor von $\mathbf{D} \vee m_{>q_K}(\mathbf{D})$ gerade;

X $\sim_B$ **Y** $\Leftrightarrow$ q_K ist ein interner Zinsfaktor von **D**;
X $\succ_B$ **Y** $\Leftrightarrow$ q_K ist kein interner Zinsfaktor von **D** $\wedge$ $m_{>q_K}(\mathbf{D})$ ungerade;
X $\prec_B$ **Y** $\Leftrightarrow$ q_K ist kein interner Zinsfaktor von **D** $\wedge$ $m_{>q_K}(\mathbf{D})$ gerade.

Die entsprechende Charakterisierung des B-Vergleichs der Zahlungsströme **X** und **Y** für den Fall, dass der Differenzzahlungsstrom **D** = **X** - **Y** eine **Finanzierung** ist, lautet:
X $\sim_B$ **Y** $\Leftrightarrow$ q_K ist ein interner Zinsfaktor von **D**;
X $\succ_B$ **Y** $\Leftrightarrow$ q_K ist kein interner Zinsfaktor von **D** $\wedge$ $m_{>q_K}(\mathbf{D})$ gerade;
X $\prec_B$ **Y** $\Leftrightarrow$ q_K ist kein interner Zinsfaktor von **D** $\wedge$ $m_{>q_K}(\mathbf{D})$ ungerade.

3 Universelle Methode der Vielfachheiten der internen Zinsfaktoren

Die obigen Aussagen für die Beurteilung und den Vergleich von Zahlungsströmen sind auch noch richtig, wenn man allgemeiner eine **Investition als lexikonegativen Zahlungsstrom** und eine **Finanzierung als lexikopositiven Zahlungsstrom** definiert. Dabei heißt ein Zahlungsstrom

$$\mathbf{X} = (0,..,0,X_m,\ldots,X_n)^{\mathsf{T}} \neq \mathbf{O}$$

lexikopositiv (bzw. lexikonegativ), wenn seine erste von Null verschiedene Komponente X_m positiv (bzw. negativ) ist. Die Charakterisierung der E-Beurteilung mittels der rechtsseitigen Gesamtvielfachheit $m_{>q_K}$ gilt dann universell auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ und die Charakterisierung des E-Vergleichs auf ganz $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$.

Mit dieser Charakterisierung erhält man also sowohl für die Beurteilung als auch für den Vergleich von Zahlungsströmen eine Methode der internen Zinsfaktoren, die auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ bzw. auf ganz $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ definiert und äquivalent (ergebniskonsistent) ist zur Endwertmethode, zur Barwertmethode (Kapitalwertmethode) und zur Zeitwertmethode. Die Formulierung dieser universell anwendbaren **Methode der Vielfachheiten der internen Zinsfaktoren** (MVIZ) findet man bei Pleier (2021) in den Abschnitten 7.5 und 7.13. Im Gegensatz zur bisher üblichen **Methode *des* internen Zinssatzes** (MIZ), die nur einen einzigen irgendwie ausgewählten internen Zinssatz mit ungerader Nullstellenordnung verwendet, fällt bei der MVIZ die Einschränkung auf einen begrenzten Anwendungsbereich weg. Die MVIZ ist die Verallgemeinerung einer jeden irgendwie definierten MIZ mit einem einzelnen internen Zinsfaktor. Damit ist auch das Mysterium der Einschränkung des Anwendungsbereichs (Bereichs der Konsistenz zur EWM) der traditionellen MIZ aufgeklärt.

I-Beurteilung einer Investition X $\in \mathbb{R}^{n+1}$ nach der MVIZ:
X ist I-indifferent (**X** $\sim_I$ **O**) $:\Leftrightarrow$ $q = q_K$ ist ein interner Zinsfaktor von **X**;
X ist I-vorteilhaft (**X** $\succ_I$ **O**) $:\Leftrightarrow$ q_K ist kein interner Zinsfaktor von **X** $\wedge$ $m_{>q_K}$ ungerade;
X ist I-unvorteilhaft (**X** $\prec_I$ **O**) $:\Leftrightarrow$ q_K ist kein interner Zinsfaktor von **X** $\wedge$ $m_{>q_K}$ gerade.

I-Beurteilung einer Finanzierung X $\in \mathbb{R}^{n+1}$ nach der MVIZ:
X ist I-indifferent (**X** $\sim_I$ **O**) $:\Leftrightarrow$ $q = q_K$ ist ein interner Zinsfaktor von **X**;
X ist I-vorteilhaft (**X** $\succ_I$ **O**) $:\Leftrightarrow$ q_K ist kein interner Zinsfaktor von **X** $\wedge$ $m_{>q_K}$ gerade;
X ist I-unvorteilhaft (**X** $\prec_I$ **O**) $:\Leftrightarrow$ q_K ist kein interner Zinsfaktor von **X** $\wedge$ $m_{>q_K}$ ungerade.

I-Vergleich von zwei Zahlungsströmen X, **Y** $\in \mathbb{R}^{n+1}$, für welche der Differenzzahlungsstrom **D** = **X** - **Y** o. E. eine **Investition** ist, nach der MVIZ:

X ist I-indifferent zu **Y** (**X** $\sim_{\mathrm{I}}$ **Y**) :$\Leftrightarrow$ q_K ist ein interner Zinsfaktor von **D**;

X ist I-vorteilhafter als **Y** (**X** $>_{\mathrm{I}}$ **Y**) :$\Leftrightarrow$ q_K ist kein interner Zinsfaktor von **D** $\wedge$ $m_{>q_K}(\mathbf{D})$ ungerade;

X ist I-unvorteilhafter als **Y** (**X** $<_{\mathrm{I}}$ **O**) :$\Leftrightarrow$ q_K ist kein interner Zinsfaktor von **D** $\wedge$ $m_{>q_K}(\mathbf{D})$ gerade.

Zur Illustration dieser universellen I-Beurteilung und dieses universellen I-Vergleiches werden noch zwei Zahlenbeispiele angegeben.

Beispiel 1 Beurteilung eines einzelnen Zahlungsstroms

Für den Zahlungsstrom

$$\mathbf{Z} = (-100.000;+335.000;-374.060;+139.216)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^4$$

($n = 3$) ergeben sich die internen Zinsfaktoren als die reellen Nullstellen der Endwertfunktion $E_3(\mathbf{Z},q)$ mittels der Funktion `Solve` oder `NSolve` des Softwaresystems Mathematica von Wolfram Research (Aufruf mit `NSolve[EnZ[q]==0,q]`) zu

$$q_1 = 1{,}10; \qquad q_2 = 1{,}12; \qquad q_3 = 1{,}13.$$

Bei Verwendung des Kalkulationszinsfaktors $q_K = 1{,}095$ ($i_K = 9{,}5\%$) ist für **Z** die zu q_K gehörige rechtsseitige Gesamtvielfachheit

$$m_{>q_K} = 3,$$

also ungerade und somit die Investition **Z** nach der MVIZ vorteilhaft.

Bei Verwendung von $q_K = 1{,}110$ ($i_K = 11{,}0\%$) ist $m_{>q_K} = 2$, also gerade und somit die Investition **Z** nach der MVIZ unvorteilhaft. Der Graph der Endwertfunktion $E_3(\mathbf{Z},q)$ für den Zahlungsstrom **Z** wird in Abbildung 3 dargestellt. △

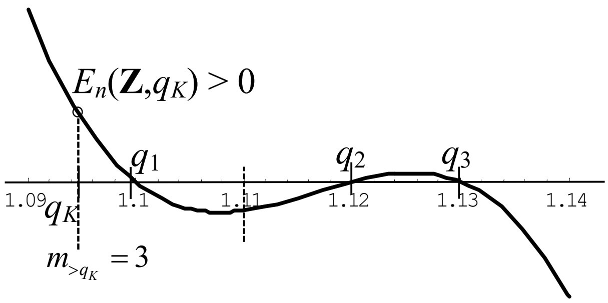

Abb. 3 Der Graph der Endwertfunktion $q \mapsto E_n(\mathbf{Z},q)$ der Investition **Z**, die für den Kalkulationszinsfaktor $q_K = 1{,}095$ mit ungerader rechtsseitiger Gesamtvielfachheit $m_{>q_K}$ E-vorteilhaft ist und für den Kalkulationszinsfaktor $q_K = 1{,}110$ mit geradem $m_{>q_K}$ E-unvorteilhaft ist.

Beispiel 2 Vergleich zweier Zahlungsströme

Die Zahlungsströme

$$\mathbf{X} = (-110.000;-58.400;+86.740;+121.660)^{\mathsf{T}},$$
$$\mathbf{Y} = (-100.000;-90.000;+120.000;+110.000)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^4$$

besitzen den Differenzzahlungsstrom

$\mathbf{D} = (-10.000;+31.600;-33.260;+11.660)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^4$

mit den internen Zinsfaktoren

$q_1 = 1{,}00; \qquad q_2 = 1{,}06; \qquad q_3 = 1{,}10.$

Bei dem Kalkulationszinsfaktor $q_K = 1{,}05$ ($i_K = 5{,}0\%$) ist für $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$ die rechtsseitige Gesamtvielfachheit

$m_{>q_K}(\mathbf{D}) = 2$

gerade, somit nach der MVIZ die Investition $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$ unvorteilhaft und **X** unvorteilhafter als **Y**. △

Die MIZ als Spezialfall der MVIZ für spezielle Zahlungsströme

Bei der Beurteilung eines Zahlungsstroms stimmt die allgemeinere MVIZ überein mit der spezielleren MIZ auf der Menge der **NU-Zahlungsströme**, d. h. der Zahlungsströme **X**, die jeweils nur einen einzigen positiven internen Zinsfaktor $q_{int} = q_{int}(\mathbf{X})$ besitzen und für die dieser noch eine Nullstelle ungerader Ordnung der Endwertfunktion $E_n(q) = E_n(\mathbf{X},q)$ ist. In diesem Spezialfall der NU-Zahlungsströme lautet die Beurteilung mittels der MIZ folgendermaßen (Pleier 2021, S. 294):

I-Beurteilung einer Investition X $\in \mathbb{R}^{n+1}$ nach der MIZ:

X ist I-indifferent ($\mathbf{X} \sim_\mathrm{I} \mathbf{O}$) $:\Leftrightarrow q_{int} = q_K$;

X ist I-vorteilhaft ($\mathbf{X} \succ_\mathrm{I} \mathbf{O}$) $:\Leftrightarrow q_{int} > q_K$;

X ist I-unvorteilhaft ($\mathbf{X} \prec_\mathrm{I} \mathbf{O}$) $:\Leftrightarrow q_{int} < q_K$.

I-Beurteilung einer Finanzierung X $\in \mathbb{R}^{n+1}$ nach der MIZ:

X ist I-indifferent ($\mathbf{X} \sim_\mathrm{I} \mathbf{O}$) $:\Leftrightarrow q_{int} = q_K$;

X ist I-vorteilhaft ($\mathbf{X} \succ_\mathrm{I} \mathbf{O}$) $:\Leftrightarrow q_{int} < q_K$;

X ist I-unvorteilhaft ($\mathbf{X} \prec_\mathrm{I} \mathbf{O}$) $:\Leftrightarrow q_{int} > q_K$.

Anzumerken ist hier, dass es neben dieser Definition der MIZ mittels des einzigen *positiven* internen Zinsfaktors q_{int} von ungerader Nullstellenordnung auch noch andere Möglichkeiten für die Definition der MIZ gibt, welche zumindest die schwache Relation mittels der Ungleichung für einen einzelnen internen Zinsfaktor q_{int} und den Kalkulationszinsfaktor q_K beschreiben. Zwei Beispiele derartiger I-Beurteilungen mit der grafischen Darstellung des eingeschränkten Definitionsbereichs werden bei Pleier (2021), S. 308–312, angegeben.

Weiter können nach der oben für die NU-Zahlungsströme beschriebenen MIZ auch noch die **NF-Zahlungsströme** konsistent zur MVIZ bzw. EWM beurteilt werden, d. h. die Zahlungsströme, die jeweils keinen positiven internen Zinsfaktor besitzen. Für den Vergleich mit dem Kalkulationszinsfaktor q_K kann dann jeder beliebige nichtpositive interne Zinsfaktor $q_{int} = q_{int}(\mathbf{X})$ verwendet werden oder, falls kein interner Zinsfaktor existiert, rein formal der nichtreelle interne Zinsfaktor $q_{int} := -\infty$ (Pleier 2021, S. 302). Bei der Begründung der MIZ für die NU-Zahlungsströme wird schon deutlich, dass hierbei tatsächlich die Vielfachheiten der internen Zinsfaktoren rechts des Kalkulationszinsfaktors eine entscheidende Rolle spielen.

Spezialfälle der NU-Zahlungsströme sind die **VK-Zahlungsströme X** (Verrechnungskonto-Zahlungsströme, sog. isoliert durchführbare Zahlungsströme) speziell mit positivem VK-Zinsfaktor, welcher der einzige positive interne Zinsfaktor $q_{int} = q_{int}(\mathbf{X})$ von **X** ist, außerdem noch eine einfache Nullstelle der Endwertfunktion $E_n(q) = E_n(\mathbf{X},q)$ ist und dessen Horner-Schema-Vektor keinen Vorzeichenwechsel aufweist: Mit den Horner-Schema-Polynomen

$$E_j(q) = X_0 q^j + X_1 q^{j-1} + \ldots + X_{j-1} q + X_j \quad (j = 0,\ldots,n)$$

gilt

$$\mathbf{E}(q_{int}) = (E_0(q_{int}),E_1(q_{int}),\ldots,E_n(q_{int}))^\mathsf{T} \leq \mathbf{O} \text{ bei einer Investition } \mathbf{X},$$
$$\mathbf{E}(q_{int}) = (E_0(q_{int}),E_1(q_{int}),\ldots,E_n(q_{int}))^\mathsf{T} \geq \mathbf{O} \text{ bei einer Finanzierung } \mathbf{X}.$$

In der Literatur werden vorwiegend diese VK-Zahlungsströme mit positivemVK-Zinsfaktor für einen möglichen Anwendungsbereich der MIZ angegeben, da für diese Zahlungsströme neben der Konsistenz der MIZ zur EWM bzw. BWM auch noch zusätzlich die beliebte **ökonomische Interpretierbarkeit** des internen Zinsfaktors q_{int} als der Kontozinsfaktor q_{Kto} eines Verrechnungskontos gegeben ist.

Dabei buchen Kilger[2] (1965), S. 776, und mit Bezug auf diesen auch Blohm[3] und Lüder[4] (1995), S. 90f, und Götze[5] (2008), S. 97, die Investition **X** *zu Gunsten* eines Verrechnungskonto mit dem Kontozinsfaktor $q_{Kto} = q_{int}$. Sie sprechen dann von dem zu allen Zahlungszeitpunkten nichtpositiven „Vermögenswert“

$$C_j = E_j(\mathbf{X},q_{int}) \leq 0 \qquad (j = 0,\ldots,n)$$

und bezeichnen **X** als sogenannte „isoliert durchführbare Investition (reine Investition)“, da beim Kontostand C_j kein Vorzeichenwechsel auftritt und somit zusätzlich zur Verbuchung auf dem Kreditkonto (mit Sollzinsfaktor $q_{Kto} = q_{int}$) keine ergänzende Kapitalanlage zu einem Habenzinsfaktor benötigt wird.

Altrogge[6] (1996), S. 313, 317, 325, dagegen bucht die Investition **X** *zu Lasten* des Verrechnungskontos, bucht also die Zahlungen X_j vom Konto ab, und bezeichnet dann die Nichtnegativität der Kontostände

$$\tilde{C}_j = - E_j(\mathbf{X},q_{int}) \geq 0 \qquad (j = 0,\ldots,n)$$

als die „nichtnegative Kapitalbindung (Kapitalfestlegung)“ der Investition **X** auf dem als Anlagekonto geführten Verrechnungskonto.

Herzberger[7] (1999), S. 144–146, bucht ebenfalls **X** vom Konto ab und bezeichnet die Eigenschaft der Nichtnegativität der Kontostände $\tilde{C}_j$ als das „Sparkontenprinzip“, also die Wahrung eines nichtnegativen Kontostands, bei der „jährlichen Bilanz der Investition“.

Spezialfälle der VK-Zahlungsströme mit positivem VK-Zinsfaktor wiederum sind die **regulären Zahlungsströme X**, die in ihrer (endlichen) reellen Zahlenfolge $(X_0,X_1,\ldots,X_n)$ genau einen Vorzeichenwechsel aufweisen. Für die Laufzeiten $n = 1$ und $n = 2$ stimmen die NU-Zahlungsströme mit den regulären Zahlungsströmen überein. Ab der Laufzeit $n \geq 3$ kann durch Beispiele gezeigt werden, dass die regulären Zahlungsströme eine echte Teilmenge der Menge der NU-Zahlungsströme bilden (Beweise bei Pleier 2021, S. 289f, 295–297).

Nicht nach der oben für die NU-Zahlungsströme beschriebenen MIZ in Konsistenz zur MVIZ bzw. EWM beurteilt werden können im Allgemeinen die Zahlungsströme mit einem einzigen positiven internen Zinsfaktor gerader Nullstellenordnung oder mit mehreren verschiedenen positiven internen Zinsfaktoren.

Rechenaufwand und Kondition der Berechnung der internen Zinsfaktoren

Vergleicht man den Rechenaufwand der Endwertmethode (EWM) oder der Barwertmethode (BWM) mit dem der Methode der Vielfachheiten der internen Zinsfaktoren (MVIZ), so ist es viel einfacher nur den Endwert $E_n(\mathbf{X},q)$ oder den Barwert (Kapitalwert) $B_n(\mathbf{X},q) = E_n(\mathbf{X},q)/q^n$ an der Stelle des Kalkulationszinsfaktors $q = q_K$ (> 0) zu berechnen als die Gesamtheit der internen Zins-

[2] Wolfgang Kilger (1927–1986) war ein deutscher Wirtschaftswissenschaftler und Professor an der Universität des Saarlandes.

[3] Hans Blohm (1920–2005) war ein deutscher Wirtschaftswissenschaftler und Professor für Produktionswirtschaft an der TU Berlin und der TU Chemnitz.

[4] Klaus Lüder (1935–) ist ein deutscher Ökonom und Professor für Betriebswirtschaftslehre an der Universität Hamburg und der Deutschen Hochschule Speyer.

[5] Uwe Götze (1960–) ist ein deutscher Wirtschaftswissenschaftler und Professor für Unternehmensrechnung an der TU Chemnitz.

[6] Günter Altrogge (1939–2014) war ein deutscher Ökonom und Professor für Betriebswirtschaftslehre an der Universität Hamburg.

[7] Jürgen Herzberger (1940–2009) war ein deutscher Mathematiker und Professor der Angewandten Mathematik an der Universität Oldenburg.

faktoren zu bestimmen. Bei der im Allgemeinen nötigen iterativen Bestimmung der Nullstellen des Polynoms $E_n(\mathbf{X},r)$ wird von einem Softwaresystem wie z. B. Mathematica von Wolfram Research nämlich intern eine Vielzahl von Funktionswerten des Polynoms $E_n(\mathbf{X},r)$ berechnet. Schon hinsichtlich des Rechenaufwands bei der praktischen Anwendung wäre also die EWM der MVIZ vorzuziehen.

Weiter ist bei der praktischen Anwendung der MIZ und MVIZ zu beachten, dass die Nullstellenbestimmung für ein Polynom $E_n(\mathbf{X},r) = X_0 r^n + \ldots + X_n$ in der Standarddarstellung mit den Koeffizienten X_j $(j = 0,\ldots,n)$ schlecht konditioniert ist. Dabei können schon einfache Nullstellen schlecht konditioniert sein, während mehrfache Nullstellen stets schlecht konditioniert sind. Dies heißt, dass ein kleiner relativer Fehler in den als Ausgangsdaten vorgegebenen Koeffizienten X_j große relative Fehler in den Rechenresultaten für die Polynomnullstellen bewirkt. Bei einer speziellen Wahl des Kalkulationszinsfaktors q_K kann dann eine relativ kleine Abänderung der X_j schon zu einer anderen Gesamtvielfachheit der reellen Nullstellen im Intervall $]q_K,\infty[$ und zu einer anderen Beurteilung von **X** führen. Eine ausführlichere Betrachtung zur Empfindlichkeit der Polynomnullstellen in Abhängigkeit von den Polynomkoeffizienten findet man bei Stoer (1994), S. 333–335. Das folgende Zahlenbeispiel zeigt, wie eine geringe relative Änderung einer Zahlungsstromkomponente in der Größenordnung von 10^{-6} schon eine Änderung der Beurteilung des Zahlungsstroms verursachen kann.

Beispiel 3 Änderung der Beurteilung des Zahlungsstroms bei kleiner relativer Änderung einer Zahlungsstromkomponente

Für den Zahlungsstrom

$$\mathbf{Z} = (-100.000;+334.000;-471.840;+471.984;-371.840;+137.984)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^6$$

erhält man die komplexen Nullstellen der Endwertfunktion $E_5(\mathbf{Z},q)$ mittels der Funktion `NSolve` des Softwaresystems Mathematica von Wolfram Research (Aufruf mit `NSolve[E5Z[q]==0,q]`) zu

$$q_1 = 1{,}100; \quad q_{2,3} = 1{,}120; \quad q_{4,5} = \pm\, \mathrm{I}\ (\mathrm{I} = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}).$$

Bei Verwendung des Kalkulationszinsfaktors

$$q_K = 1{,}116\ (i_K = 11{,}6\%)$$

liegen nur die beiden internen Zinsfaktoren $q_{2,3}$ von **Z** im offenen Intervall $]q_K,\infty[$, sodass die zu q_K gehörige rechtsseitige Gesamtvielfachheit der internen Zinsfaktoren

$$m_{>q_K}(\mathbf{Z}) = 2,$$

also gerade ist und somit die Investition **Z** nach der MVIZ unvorteilhaft ist. Der zum Kalkulationszinsfaktor q_K gehörige Endwert $E_5(\mathbf{Z},q_K)$ ist negativ:

$$E_5(\mathbf{Z},q_K) = -\,0{,}06 < 0.$$

Verändert man den Zahlungsstrom **Z** relativ geringfügig in der ersten Nachkommastelle der letzten Komponente Z_5, so erhält man für den modifizierten Zahlungsstrom

$$\tilde{\mathbf{Z}} = (-100.000;+334.000;-471.840;+471.984;-371.840;+137.984{,}2)^{\mathsf{T}}$$

die komplexen Nullstellen der Endwertfunktion $E_5(\tilde{\mathbf{Z}},q)$ zu

$$\tilde{q}_1 = 1{,}103; \quad \tilde{q}_2 = 1{,}111; \quad \tilde{q}_3 = 1{,}126; \quad \tilde{q}_{4,5} = -\,2{,}42\cdot 10^{-7} \pm \mathrm{I},$$

die ungerade rechtsseitige Gesamtvielfachheit

$$m_{>q_K}(\tilde{\mathbf{Z}}) = 1,$$

also nach MVIZ die Vorteilhaftigkeit der Investition $\tilde{\mathbf{Z}}$. Der zu q_K gehörige Endwert $E_5(\tilde{\mathbf{Z}},q_K)$ von $\tilde{\mathbf{Z}}$ ist positiv:

$$E_5(\tilde{\mathbf{Z}},q_K) = +\,0{,}14 > 0.$$

Die Änderung des Polynomkoeffizienten Z_5 zu $\tilde{Z}_5$ bedeutet eine sehr kleine relative Änderung in der Höhe von

$(\tilde{Z}_5 - Z_5)/Z_5 = 0{,}2/137.984 = 1{,}45\cdot 10^{-6}$.

Dagegen resultieren beim Endwert an der Stelle q_K und bei den internen Zinsfaktoren die relativen Änderungen

$$(E_5(\tilde{\mathbf{Z}},q_K) - E_5(\mathbf{Z},q_K))/E_5(\mathbf{Z},q_K) = -\,3{,}48;$$

$$(\tilde{q}_1 - q_1)/q_1 = 2{,}9\cdot 10^{-3};$$

$$(\tilde{q}_2 - q_2)/q_2 = -\,8{,}1\cdot 10^{-3};$$

$$(\tilde{q}_3 - q_3)/q_3 = 5{,}2\cdot 10^{-3};$$

die 10^6-mal bzw. 10^3-mal größer sind als die relative Änderung von Z_5.

Bei der hier vorliegenden speziellen Wahl des Kalkulationszinsfaktors q_K führt dies dann auch noch zur Änderung des Vorzeichens des Endwerts $E_5(\mathbf{Z},q_K)$ bei q_K, zur Änderung der rechtseitigen Gesamtvielfachheit $m_{>q_K}(\mathbf{Z})$ und zur Änderung der Beurteilung des Zahlungsstroms $\mathbf{Z}$. Die folgende Abbildung 3 zeigt den Graphen der Endwertfunktion und die internen Zinsfaktoren in Teil a) für den unvorteilhaften ursprünglichen Zahlungsstrom $\mathbf{Z}$ und in Teil b) für den vorteilhaften modifizierten Zahlungsstrom $\tilde{\mathbf{Z}}$. △

a) b)

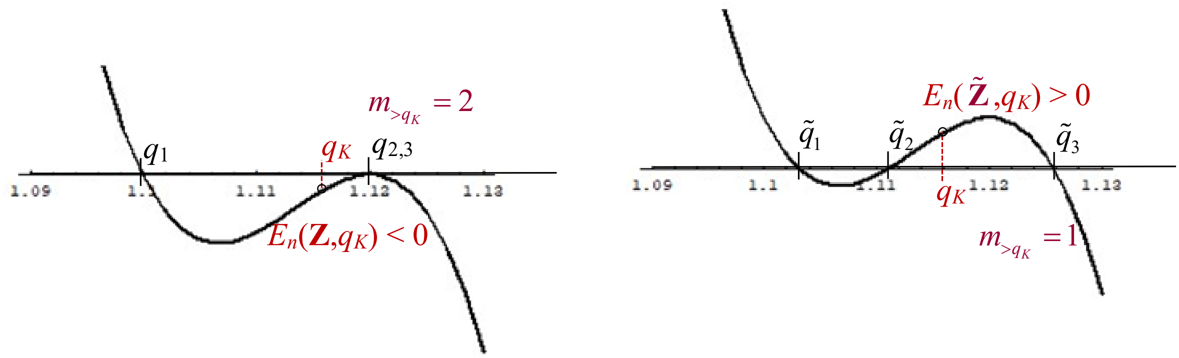

Abb. 3 Die Graphen der Endwertfunktionen a) $q \mapsto E_n(\mathbf{Z},q)$ und b) $q \mapsto E_n(\tilde{\mathbf{Z}},q)$ der unvorteilhaften Investition $\mathbf{Z}$ und der vorteilhaften abgeänderten Investition $\tilde{\mathbf{Z}}$.

Literatur

Altrogge G. (1996), Investition, Oldenbourg Verlag, München Wien, 4. Auflage.

Blohm H., Lüder K. (1995), Investition, Vahlen Verlag, München, 8. Auflage.

Duden (1985), Rechnen und Mathematik, Das Lexikon für Schule und Praxis, Bibliographisches Institut, Mannheim, 4. Auflage.

Götze U. (2008), Investitionsrechnung, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 6. Auflage.

Herzberger J. (1999), Einführung in die Finanzmathemartik, Oldenbourg Verlag, München Wien.

Kilger W. (1965), Zur Kritik am internen Zinsfuß, Zeitschrift für Betriebswirtschaft (ZfB) Band 35, S.765–798.

Köhler G. (2006), Analysis, Heldermann Verlag, Lemgo.

Pleier R. (2021), Finanzmathematik, Tredition, Hamburg, 2. Auflage.

Stoer J. (1994), Numerische Mathematik 1, Springer, Berlin Heidelberg New York, 7. Auflage.