Horner-Schema, Quotientenpolynome und Verrechnungskonto-Zinsfaktoren eines Zahlungsstroms

Rudolf Pleier

Februar 2022

Die Beurteilung eines Zahlungsstroms $\mathbf{X} = (X_0,X_1,\ldots,X_n)^\mathrm{T} \in \mathbb{R}^{n+1}$ hinsichtlich seiner Vorteilhaftigkeit mit Hilfe der klassischen **Methode des internen Zinssatzes** (MIZ) verwendet einen festen, für alle Zinsperioden $[k\text{-}1,k]$ ($k = 1,\ldots,n$) der Laufzeit $n \in \mathbb{N}$ konstanten und nicht (in Haben- und Sollzinsfaktor) gespaltenen Kalkulationszinsfaktor $q = q_K > 0$ und einen ebenfalls auf die Zinsperioden bezogenen einzelnen internen Zinsfaktor $q_0 = q_{int}(\mathbf{X})$ des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$. Als ein eingeschränkter Anwendungsbereich dieser MIZ wird in der Literatur gerne die Menge der **Verrechnungskonto-Zahlungsströme** (VK-Zahlungsströme, sog. isoliert durchführbare Zahlungsströme) $\mathbf{X}$ angegeben, die jeweils auf einem fiktiven Konto mit dem internen Zinsfaktor $q_{int}(\mathbf{X})$ als Kontozinsfaktor verrechnet werden können, sodass die Kontostände C_j während der Laufzeit keinen Vorzeichenwechsel aufweisen und der Kontoendstand C_n gleich Null ist. Für diese VK-Zahlungsströme $\mathbf{X}$ ist die MIZ konsistent zur Kapitalwertmethode (KWM) und der jeweilige interne Zinsfaktor $q_{int}(\mathbf{X})$ auch noch ökonomisch interpretierbar als der Kontozinsfaktor eines Verrechnungskontos. Spezialfälle der VK-Zahlungsströme sind die regulären Zahlungsströme und die Normalzahlungsströme. Eine Verallgemeinerung der VK-Zahlungsströme speziell mit positivem VK-Zinsfaktor wird durch die NU-Zahlungsströme gegeben, die genau einen positiven internen Zinsfaktor aufweisen, der noch eine Vorzeichenwechselstelle der Endwertfunktion ist.
Bei der näheren Untersuchung der VK-Zahlungsströme $\mathbf{X}$ bzw. der zugehörigen Endwertfunktionen $E_n(\mathbf{X},q)$ trifft man auf die Begriffe Quotientenpolynome, Horner-Schema und Horner-Schema-Polynome, die hier nachfolgend eingehender behandelt werden. Insbesondere wird auch eine Aussage über die Vielfalt der Verrechnungskontozinsfaktoren (VK-Zinsfaktoren) eines Zahlungsstroms hergeleitet.

Zum Anwendungsbereich der MIZ mit der ihr eigenen Verwendung eines einzelnen internen Zinsfaktors ist anzumerken, dass dieser noch auf die Menge der NU- und NF-Zahlungsströme (Definition bei Pleier 2021, S. 293, 301) erweitert werden kann. Dabei wird bei der Begründung der MIZ für die NU-Zahlungsströme aber schon deutlich, dass hierbei tatsächlich die Vielfachheiten der internen Zinsfaktoren eine entscheidende Rolle spielen. Eine genauere Untersuchung dieses Gesichtspunkts führt dann zu einer auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ universell anwendbaren Verallgemeinerung der Methode, nämlich zur ‚Methode der Vielfachheiten der internen Zinsfaktoren (MVIZ)'. Damit ist das Mysterium des eingeschränkten Anwendungsbereichs der Methode des internen Zinssatzes gelöst.

1 Horner-Schema, Horner-Schema-Polynome und Quotientenpolynome

Die Quotientenpolynome stehen in enger Beziehung zu den Horner-Schema-Polynomen und zur Taylorentwicklung. Die Wechselbeziehungen werden nachfolgend hergeleitet. Als Anwendung der dabei auch für die k-ten Ableitungen der Horner-Schema-Polynome erhaltenen Rekursionsformel können diverse Eigenschaften für einen positiven Darlehenszinsfaktors bzw. positiven Anlagezinsfaktor hergeleitet werden.

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist ein Polynom $P_n(q)$ n-ten Grades, das finanzmathematisch als Endwertfunktion $E_n(q) = E_n(\mathbf{X},q)$ eines Zahlungsstroms $\mathbf{X} = (X_0,X_1,\ldots,X_n)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($X_0 \neq 0$) zum Kalkulationszinsfaktor q angesehen werden kann:

$$P_n(q) = E_n(q) = E_n(\mathbf{X},q) = X_0q^n + X_1q^{n-1} +... + X_{n-1}q + X_n.$$

Der Polynomwert $P_n(q) = E_n(q)$ kann hinsichtlich des Rechenaufwands effizienter rekursiv mittels des sog. **Horner-Schemas**[1] und der zugehörigen j-ten **Horner-Schema-Polynome** $E_j(q)$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} E_0(q) &= X_0, \\ E_j(q) &= E_{j-1}(q)\cdot q + X_j \\ &= X_0q^j + ... + X_j \qquad\qquad (j = 1,\ldots,n), \\ P_n(q) &= E_n(q) = (\ldots((X_0\cdot q + X_1)\cdot q + X_2)\cdot q + \ldots)\cdot q + X_n. \end{aligned}$$

Statt der $2n$ - 1 rechnerisch aufwendigeren Multiplikationen[2] und der n Additionen bei der expliziten Berechnung des Polynomwerts $P_n(q)$ hat man bei rekursiven Berechnung nach dem Horner-Schema nur n Multiplikationen und n Additionen, also einen geringeren Rechenaufwand.

Die Horner-Schema-Polynome können auch als spezielle Quotientenpolynome angesehen werden: In absteigender Reihenfolge ($j = n, n$-1, …, 1) ergibt sich nämlich das (j-1)-te Horner-Schema-Polynom $E_{j-1}(q)$ als das zur Stelle $q_0 = 0$ gehörige Quotientenpolynom des j-ten Horner-Schema-Polynoms $E_j(q)$. Mit $E_j(0) = X_j$ gilt nämlich

$$E_{j-1}(q) = \frac{E_j(q) - X_j}{q} = \frac{E_j(q) - E_j(0)}{q - 0} \qquad (j = n,\ldots,1;\ q \neq 0).$$

Die Koeffizienten des Polynoms $E_j(q)$ sind dabei die ersten j+1 Koeffizienten X_k ($k = 0,\ldots,j$) des Polynoms $P_n(q) = E_n(q)$.

Allgemeiner lassen sich zu einer beliebig vorgegebenen Stelle $q_0 \in \mathbb{R}$ ausgehend vom Polynom

$$P_n(q) = X_0q^n + X_1q^{n-1} +...+ X_n \qquad (X_0 \neq 0)$$

und vom speziellen Polynomwert $P_n(q_0)$ in absteigender Reihenfolge für $m = n, n$-1, …, 1 sukzessive die **Quotientenpolynome**

$$\begin{aligned} P_{m-1}(q) &= P_{m-1}(q;q_0) = \frac{P_m(q) - P_m(q_0)}{q - q_0} = \sum_{j=0}^{m-1} a_j^{(m-1)} q^{m-1-j} \\ &= a_0^{(m-1)}\, q^{m-1} + a_1^{(m-1)}\, q^{m-2} + \ldots + a_{m-1}^{(m-1)} \qquad (m = n,\ldots,1;\ q \neq q_0) \end{aligned}$$

vom Grad m-1 bilden. Umgekehrt hat man bei bekanntem Quotientenpolynom $P_{m-1}(q)$ und Funktionswert $P_m(q_0)$ des Quotientenpolynoms $P_m(q)$ ($m = 0,\ldots n$) an der Stelle q_0 auch in aufsteigender Reihenfolge eine **Rekursionsformel für das Quotientenpolynom** $P_m(q)$:

---

1 Das Horner-Schema und die Horner-Schema-Polynome sind benannt nach dem englischen Mathematiker William George Horner (1786–1837). Die vom englischen Mathematiker Augustus De Morgan (1806–1871) nach Horner benannte Rechenvorschrift zur Berechnung eines Polynomwerts bei wesentlich geringerem Rechenaufwand wurde aber schon 15 Jahre vorher im Jahr 1804 vom italienischen Mathematiker Paolo Ruffini (1765–1822) veröffentlicht und war auch schon viel früher bekannt, nämlich dem chinesischen Mathematiker Jia Xian im 11. Jahrhundert, dem irakischen Mathematiker As-Samaw'al ibn Yahya al-Maghribī im 12. Jahrhundert und dem chinesischen Mathematiker Zhu Shijie im Jahr 1303. Eine Darstellung des Horner-Schemas findet man beispielsweise im Duden (1985), S. 270–272.

2 Für die Bildung der Potenz q^2 wird eine Multiplikation, für q^3 eine weitere Multiplikation mit q usw. benötigt. So werden für die Bildung der Potenzen q^2, q^3, …, q^n insgesamt n - 1 Multiplikationen durchgeführt. Anschließend werden für die Multiplikation der Potenzen q, q^2, …, q^n mit den Koeffizienten X_j noch n weitere Multiplikationen benötigt. Bei der expliziten Berechnung von $P_n(q)$ kommen zu den $2n$ - 1 Multiplikationen dann noch n Additionen für die Aufsummierung der $n + 1$ Monome X_jq^{n-j} ($j = 0,\ldots,n$) hinzu. Insgesamt benötigt man für die explizite Berechnung $3n$ - 1 Rechenoperationen, für die rekursive Berechnung nach dem Horner-Schema dagegen nur $2n$ Rechenoperationen.

$$P_m(q) = (q - q_0)P_{m-1}(q) + P_m(q_0) \qquad (m = 1,\ldots,n).$$

Durch Koeffizientenvergleich[3] dieser auf den beiden Seiten der Gleichung stehenden Polynome

$$P_m(q) = \sum_{j=0}^{m} a_j^{(m)} q^{m-j}$$

und

$$\begin{aligned}(q - q_0)P_{m-1}(q) + P_m(q_0) &= (q - q_0)\sum_{j=0}^{m-1} a_j^{(m-1)} q^{m-1-j} + P_m(q_0) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} a_j^{(m-1)} q^{m-j} - \sum_{j=1}^{m} q_0 a_{j-1}^{(m-1)} q^{m-j} + P_m(q_0)\end{aligned}$$

erhält man für die Koeffizienten der Potenzen q^{m-j} ($j = 0,\ldots,m$) die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_0^{(m)} &= a_0^{(m-1)}, \\ a_j^{(m)} &= a_j^{(m-1)} - q_0 a_{j-1}^{(m-1)} \qquad (j = 1,\ldots,m\text{-}1), \\ a_m^{(m)} &= -\, q_0 a_{m-1}^{(m-1)} + P_m(q_0). \end{aligned}$$

Durch Auflösen des gestaffelten linearen Gleichungssystems nach den Koeffizienten $a_j^{(m-1)}$ ($j = 0,1,\ldots,m$-1) erhält man die folgende **Rekursionsformel** zur Berechnung der von der Stelle q_0 abhängigen Koeffizienten $a_j^{(m-1)} = a_j^{(m-1)}(q_0)$ des Quotientenpolynoms $P_{m-1}(q) = P_{m-1}(q;q_0)$ und des „Divisionsrestes" $P_m(q_0)$ aus den Koeffizienten $a_j^{(m)}$ des vorhergehenden Polynoms $P_m(q)$ ($m = n,\ldots,1$):

$$\begin{aligned} a_0^{(m-1)} &= a_0^{(m)} \quad (= \ldots = a_0^{(n)} = X_0 \neq 0), \\ a_j^{(m-1)} &= q_0 a_{j-1}^{(m-1)} + a_j^{(m)} \qquad (j = 1,\ldots,m\text{-}1), \\ a_m^{(m-1)} &:= P_m(q_0) = q_0 a_{m-1}^{(m-1)} + a_m^{(m)}. \end{aligned}$$

Dabei sind speziell für $m = n$ die $a_j^{(n)} = X_j$ ($j = 0,1,\ldots,n$) die Koeffizienten des Ausgangspolynoms $P_n(q) = E_n(q)$. In der schematischen Darstellung der Abbildung 1 für diese Rekursionsformel, die als das zum Polynom $P_m(q)$ und zur Stelle q_0 gehörige (einfache) **Horner-Schema** bezeichnet wird, befinden sich die Koeffizienten $a_j^{(m)}$ des Polynoms $P_m(q)$ in der ersten Zeile und die Koeffizienten $a_j^{(m-1)}$ des Polynoms $P_{m-1}(q)$ und der Funktionswert $P_m(q_0)$ in der dritten Zeile. Dieses Horner-Schema dient hier zur rekursiven Berechnung des Polynomwerts $P_m(q_0)$ über die Zwischenergebnisse $a_j^{(m-1)}$.

$P_m(q)$	$a_0^{(m)}$	$a_1^{(m)}$	$a_2^{(m)}$	…	$a_{m-1}^{(m)}$	$a_m^{(m)}$
+		$q_0 \cdot a_0^{(m-1)}$	$q_0 \cdot a_1^{(m-1)}$	…	$q_0 \cdot a_{m-2}^{(m-1)}$	$q_0 \cdot a_{m-1}^{(m-1)}$
$q_0 \cdot$	$a_0^{(m-1)}$	$a_1^{(m-1)}$		…	$a_{m-1}^{(m-1)}$	$P_m(q_0)$

Abb. 1 Horner-Schema für das Polynom $P_m(q)$ und die Stelle $q = q_0$ zur Berechnung des Polynomwerts $P_m(q_0)$ über die Zwischenergebnisse $a_j^{(m-1)}$ ($j = 0,\ldots,m$-1).

[3] Den Koeffizientenvergleich bzw. Identitätssatz für Polynome findet man beispielsweise bei Hildebrandt (2006), S. 164, Kor. 2, und Köhler (2006), S. 217f, Kor. 15.9 u. Satz 15.10.

Speziell für $m = n$ wird in der nachfolgenden Abbildung 2 das Horner-Schema für die Berechnung des Polynomwerts $P_n(q_0)$ des Ausgangspolynoms $P_n(q)$ an der Stelle q_0 über die Zwischenergebnisse $a_j^{(n-1)}$ $(j = 0,\ldots,n\text{-}1)$ dargestellt. Die Koeffizienten $a_j^{(n-1)}$ des Quotientenpolynoms $P_{n\text{-}1}(q)$ genügen dabei der Rekursionsformel

$$a_0^{(n-1)} = X_0,$$

$$a_j^{(n-1)} = q_0 a_{j-1}^{(n-1)} + X_j \qquad (j = 1,\ldots,n\text{-}1),$$

$$a_n^{(n-1)} := P_n(q_0) = q_0 a_{n-1}^{(n-1)} + X_n\,,$$

welche mit der obigen Rekursionsformel der Horner-Schema-Polynomwerte $E_j(q)$ an der Stelle q_0 übereinstimmt. Demnach stimmen die Koeffizienten $a_j^{(n-1)} = a_j^{(n-1)}(q_0)$ des Quotientenpolynoms $P_{n\text{-}1}(q)$ mit den speziellen Horner-Schema-Werten $E_j(q_0)$ überein:

$$a_j^{(n-1)} = E_j(q_0) \ \text{ für } j = 0,\ldots,n\text{-}1,$$

$$P_n(q_0) = q_0 a_{n-1}^{(n-1)} + X_n = E_n(q_0).$$

$P_n(q)$	X_0	X_1	X_2	…	$X_{n\text{-}1}$	X_n
+		$q_0 \cdot a_0^{(n-1)}$	$q_0 \cdot a_1^{(n-1)}$	…	$q_0 \cdot a_{n-2}^{(n-1)}$	$q_0 \cdot a_{n-1}^{(n-1)}$
$q_0 \cdot$	$a_0^{(n-1)} = X_0$	$a_1^{(n-1)} = E_1(q_0)$		…	$a_{n-1}^{(n-1)} = E_{n-1}(q_0)$	$P_n(q_0)$

Abb. 2 Horner-Schema für das Polynom $P_n(q)$ und die Stelle $q = q_0$ zur Berechnung des Polynomwerts $P_n(q_0)$ über die Zwischenergebnisse $a_j^{(n-1)} = E_j(q_0)$ $(j = 0,\ldots,n\text{-}1)$.

Eine **Anwendung** dieser Eigenschaft für den Index $m = n$, also der Beziehung $a_j^{(n-1)} = E_j(q_0)$, erfolgt im Abschnitt 7.1 beim Beweis der Charakterisierung eines Verrechnungskontozinsfaktors (VK-Zinsfaktors) q_0 von $E_n(q)$, d. h. einer Stelle $q_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$E_n(q_0) = 0,\ \mathbf{E}(q_0) = (E_0(q_0),\ldots, E_n(q_0))^{\mathsf{T}} \le \mathbf{O} \text{ oder} \ge \mathbf{O} = (0,\ldots,0)^{\mathsf{T}},$$

durch das Auftreten von Quotientenpolynomkoeffizienten $a_j^{(n-1)}$ ohne Vorzeichenwechsel.

Als Folgerung erhält man hieraus noch die notwendige Nichtpositivität der weiteren reellen Nullstellen der Endwertfunktion $E_n(q)$ neben einem VK-Zinsfaktor q_0 von $\mathbf{X}$ bzw. $E_n(q)$. Außerdem wird eine Aussage über die Vielfalt der VK-Zinsfaktoren gefolgert.

Finanzmathematische Interpretation der Horner-Schema-Polynomwerte und der Quotientenpolynomwerte

Die Horner-Schema-Polynomwerte

$$E_j(q) = E_j(\mathbf{X},q) = E_{j\text{-}1}(q)\cdot q + X_j \qquad (E_0(q) = X_0;\ \cdot j = 1,\ldots,n)$$

zu einem Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ und einer Stelle $q \in \mathbb{R}$ lassen sich interpretieren als die Kontostände eines neu angelegten fiktiven Verrechnungskontos mit dem Kontozinsfaktor q, auf welches zu den Zeitpunkten $t = j$ die Zahlungen X_j eingezahlt werden. Da in der Bankenpraxis im Allgemeinen der Haben- und Sollzinsfaktor eines Kontos sich unterscheiden, ist diese Deutung der $E_j(q)$ als Kontostände zu einem nicht gespaltenen Kontozinsfaktor q realitätsnäher, wenn sie keinen Vorzeichenwechsel aufweisen:

$$\mathbf{E}(q) = (E_0(q),\ldots, E_n(q))^{\mathsf{T}} \ge \mathbf{O} \text{ oder} \le \mathbf{O}.$$

Allgemeiner können auch die zu einem Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ und zu Stellen $q_0, q \in \mathbb{R}$ gebildeten Quotientenpolynomwerte

$$P_m(q) = \Delta q \cdot P_{m\text{-}1}(q) + P_m(q_0) \qquad (P_0(q) = X_0;\ \Delta q = q - q_0;\ m = 1,\ldots,n)$$

als die Kontostände eines Verrechnungskontos interpretiert werden, das den Kontozinsfaktor Δq verwendet und auf welches die Zahlungen $Y_m := P_m(q_0)$ zu den Zeitpunkten $t = m$ eingezahlt werden. Für die realitätsnähere Interpretation wird noch ein Vorzeichenwechsel der Kontostände $P_m(q)$ ausgeschlossen:

$$\mathbf{P}(q) = (P_0(q),\ldots, P_n(q))^{\mathsf{T}} \geq \mathbf{O} \text{ oder } \leq \mathbf{O}.$$

Im Spezialfall $q_0 = 0$ erhält man wieder die Aussage für die Horner-Schema-Polynome $P_m(q;q_0{=}0) = E_m(q)$.

2 Horner-Schema-Polynome der Quotientenpolynome

Ausgehend von dem zum Polynom $P_n(q)$ und zur Stelle $q_0 \in \mathbb{R}$ gehörigen Quotientenpolynom $P_m(q)$ berechnen sich nun für beliebiges $m \in \{n, n\text{-}1, \ldots, 1\}$ die zum Polynom $P_m(q)$ bzw. dessen Koeffizienten $a_j^{(m)}$ ($j = 0,\ldots,m$) und der Stelle q gehörigen Horner-Schema-Polynomwerte $H_j^{(m)}(q)$ ($j = 0,1,\ldots,m$) nach der folgenden Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} H_0^{(m)}(q) &= a_0^{(m)} \ (= X_0), \\ H_j^{(m)}(q) &= q\cdot H_{j-1}^{(m)}(q) + a_j^{(m)} = a_0^{(m)} q^j + a_1^{(m)} q^{j\text{-}1} + \ldots + a_j^{(m)} \qquad (j = 1,\ldots,m), \\ H_m^{(m)}(q) &= P_m(q). \end{aligned}$$

Die Horner-Schema-Werte $H_j^{(m)}(q)$ ($j = 0,1,\ldots,m$) findet man also in der dritten Zeile des zum Polynom $P_m(q)$ und zur Stelle q gehörigen Horner-Schemas, das man erhält, wenn man in Abbildung 1 die Koeffizienten $a_j^{(m)}(q_0)$ übernimmt und q_0 durch q ersetzt.

Speziell für den Index $m = n$ sind wegen $a_j^{(n)} = X_j$ die zum Ausgangspolynom $P_n(q) = E_n(q)$ und zur Stelle q gehörigen Horner-Schema-Polynomwerte $H_j^{(n)}(q)$ gleich den oben angegebenen $E_j(q)$ (siehe Abbildung 2 mit q statt q_0):

$$H_j^{(n)}(q) = E_j(q) \qquad (j = 0,1,\ldots n).$$

Spezialfall: Die zur speziellen Stelle $q = q_0$ und zum Polynom $P_m(q;q_0)$ bzw. dessen Koeffizienten $a_j^{(m)}(q_0)$ ($j = 0,\ldots,m$) gehörigen Horner-Schema-Werte $H_j^{(m)}(q_0)$ werden in obiger Abbildung 1 in der dritten Zeile berechnet und sind daher gleich den Koeffizienten $a_j^{(m-1)}$ des Quotientenpolynoms $P_{m\text{-}1}(q)$:

$$H_j^{(m)}(q_0) = a_j^{(m-1)} \qquad (j = 0,1,\ldots,m\text{-}1).$$

Der m-te Wert ist $H_m^{(m)}(q_0) = P_m(q_0)$.

Speziell für $m = n$ gehören zum Polynom $P_n(q)$ bzw. dessen Koeffizienten X_j die Horner-Schema-Werte $H_j^{(n)}(q_0) = E_j(q_0)$ ($j = 0,\ldots n$).

Für den **Spezialfall** $q_0 = 0$ wurde oben in Abschnitt 1 bereits das (j-1)-te Horner-Schema-Polynom $E_{j\text{-}1}(q)$ als das zur Stelle $q_0 = 0$ gehörige Quotientenpolynom des j-ten Horner-Schema-Polynoms $E_j(q)$ interpretiert. Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion ergibt sich daher ausgehend vom Polynom $P_n(q) = E_n(q)$ sukzessive für $m = n\text{-}1, \ldots, 0$, dass die Horner-Schema-Polynome $E_m(q)$ des Ausgangspolynom $P_n(q)$ gleich den Quotientenpolynomen $P_m(q)$ des Ausgangspolynoms $P_n(q)$ zur Stelle $q_0 = 0$ sind:

$$P_m(q;q_0{=}0) = E_m(q) \qquad (m = n,n\text{-}1,\ldots,0).$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt für diesen Fall

$$a_j^{(m)}(q_0{=}0) = X_j \qquad (j = 0,\ldots,m;\ m = n,\ldots,0).$$

Demzufolge besitzen hier auch die Horner-Schema-Polynome $H_j^{(m)}(q;q_0{=}0)$ der $P_m(q;q_0{=}0)$ und die Horner-Schema-Polynome $E_j(q)$ von $P_n(q)$ dieselben Koeffizienten $a_k^{(m)}(q_0{=}0) = X_k$ $(k = 0,\ldots,j)$, sodass die Polynome gleich sind.

Im Spezialfall $q_0 = 0$ stimmt das zu einem Quotientenpolynom $P_m(q)$ des Ausgangspolynoms $P_n(q)$ gehörige j-te Horner-Schema-Polynom $H_j^{(m)}(q;q_0{=}0)$ überein mit dem j-ten Horner-Schema-Polynom $E_j(q)$ des Ausgangspolynoms $P_n(q)$:

$$H_j^{(m)}(q;q_0{=}0) = E_j(q) \qquad (j = 0,\ldots,m;\ m = 0,\ldots,n).$$

3 Vollständiges Horner-Schema

Die Nacheinanderberechnung der n Horner-Schemata für das Polynom $P_n(q)$ zur Bestimmung der Koeffizienten der n Quotientenpolynome $P_{m-1}(q)$ $(m = n,\ldots,1)$ zu einer fest vorgegebenen Stelle $q_0 \in \mathbb{R}$ wird als **vollständiges Horner-Schema** bezeichnet. Dabei werden also der Reihe nach absteigend für $m = n,\ldots,1$ die Koeffizienten $a_j^{(m-1)}$ des Quotientenpolynoms $P_{m-1}(q)$ und der Polynomwert $P_m(q_0)$ berechnet. Nach n Schritten erhält man das konstante Polynom

$$P_0(q) \equiv a_0^{(0)} = X_0\ (\neq 0).$$

In der **ausführlichen schematischen Darstellung** beginnt man mit dem (einfachen) Horner-Schema zur Berechnung des Polynomwerts $P_n(q_0) = E_n(q_0)$ und schreibt in die erste Zeile die Koeffizienten $a_j^{(n)} = X_j$ des Polynoms $P_n(q)$. Die zweite und dritte Zeile werden sukzessive von links nach rechts gemeinsam berechnet. Der erste Term der zweiten Zeile ist 0. Der erste Term der dritten Zeile ist die Summe der darüberstehenden Terme der ersten und zweiten Zeile, also hier gleich $a_0^{(n)} = X_0$. Die Terme der zweiten Zeile berechnen sich ab dem zweiten Term als Produkt von q_0 und dem in der vorherigen Spalte stehenden Term der dritten Zeile. Die Terme der dritten Zeile berechnen sich als Summe der darüberstehenden Terme der ersten und zweiten Zeile. In der dritten Zeile stehen dann die Koeffizienten $a_j^{(n-1)}$ des Quotientenpolynoms $P_{n-1}(q)$ und ganz rechts der Polynomwert $P_n(q_0)$.
Man nimmt nun diese dritte Zeile als die erste Zeile des darauffolgenden Horner-Schemas zur Berechnung des Polynomwerts $P_{n-1}(q_0)$ und fährt fort bis zur Berechnung von $P_0(q_0)$.

Für eine **komprimierte Darstellung** des vollständigen Horner-Schemas lässt man jede zweite Zeile (zur Multiplikation mit q_0) weg und führt in der darauffolgenden Zeile ab der Berechnung des zweiten Terms sogleich die beiden Rechenoperationen aus, also die Multiplikation des linksstehenden Terms mit q_0 und die Addition des darüberstehenden Terms.[4] Man erhält dann das unten in der Abbildung 3 angegebene komprimierte vollständige Horner-Schema, bei dem in der ersten Zeile die Koeffizienten X_j des Ausgangspolynoms $P_n(q) = E_n(q)$ stehen und in den daruntergelegenen Zeilen jeweils die Koeffizienten $a_j^{(m-1)}$ $(j = 0,\ldots,m\text{-}1)$ des Quotientenpolynoms $P_{m-1}(q)$ und ganz rechts der Polynomwert $P_m(q_0)$ $(m = n,\ldots,1)$. In der ersten Zeile des komprimierten Schemas stehen also die Koeffizienten X_j des Ausgangspolynoms $P_n(q)$ und in der ersten Koeffizientenspalte die Elemente $a_0^{(m)}$ $(m = n,\ldots,0)$ mit dem Wert X_0. Die übrigen Elemente $a_j^{(m-1)}$ des komprimierten Schemas erhält man, indem man jeweils zum

[4] Die komprimierte Darstellung des *einfachen* Horner-Schemas für die Berechnung des Polynomwerts $P_n(q_0) = E_n(q_0)$ über die Zwischenergebnisse $E_j(q_0)$ $(j = 0,\ldots,n\text{-}1)$ findet man auch bei Arens et al. (2010), S. 96.

q_0-fachen des links davon stehenden Koeffizienten $a_{j-1}^{(m-1)}$ den darüberstehenden Koeffizienten $a_j^{(m)}$ addiert: $a_j^{(m-1)} = q_0 a_{j-1}^{(m-1)} + a_j^{(m)}$.

Da das vollständige Horner-Schema ganz rechts auch die Polynomwerte $P_m(q_0)$ ($m = n,\ldots,0$) der Quotientenpolynome $P_m(q)$ an der Stelle q_0 liefert, ist es, wie nachfolgend in Abschnitt 4 noch gezeigt wird, auch ein Verfahren zur Bestimmung der Koeffizienten b_j der Entwicklung von $P_n(q) = E_n(q)$ an der Stelle q_0, d. h. der Darstellung als Polynom in $u = q - q_0$ ($b_j := P_j(q_0)$). Und da diese Koeffizienten b_j eng mit den Ableitungen $P_n^{(n-j)}(q_0)$ der Polynomfunktion $P_n(q)$ an der Stelle q_0 zusammenhängen, liefert das vollständige Horner-Schema auch ein Verfahren zur Bestimmung dieser Ableitungen: $P_n^{(n-j)}(q_0) = (n-j)!b_j = (n-j)!P_j(q_0)$.

Im **Spezialfall** $q_0 = 0$ haben alle Elemente der j-ten Koeffizientenspalte den Wert X_j ($j = 0,\ldots,n$), sodass die Quotientenpolynome $P_m(q)$ gleich den Horner-Schema-Polynomen $E_m(q)$ ($m = n,\ldots,0$) sind.

Polynom	Koeffizienten								
$P_n = E_n$	$X_0 = a_0^{(n)}$	$X_1 = a_1^{(n)}$	$X_2 = a_2^{(n)}$		…		$X_{n-2} = a_{n-2}^{(n)}$	$X_{n-1} = a_{n-1}^{(n)}$	$X_n = a_n^{(n)}$
P_{n-1}	$X_0 = a_0^{(n-1)}$	$a_1^{(n-1)}$	$a_2^{(n-1)}$		…		$a_{n-2}^{(n-1)}$	$a_{n-1}^{(n-1)}$	$P_n(q_0) = E_n(q_0)$
P_{n-2}	$X_0 = a_0^{(n-2)}$	$a_1^{(n-2)}$	$a_2^{(n-2)}$		…		$a_{n-2}^{(n-2)}$	$P_{n-1}(q_0)$	
P_m					$a_j^{(m)}$		…		
P_{m-1}	$X_0 = a_0^{(m-1)}$	$a_1^{(m-1)}$	$a_2^{(m-1)}$	$a_{j-1}^{(m-1)}$	$a_j^{(m-1)}$	$a_{m-1}^{(m-1)}$	$P_m(q_0)$		
⋮				…					
⋮			…						
P_1	$X_0 = a_0^{(1)}$	$a_1^{(1)}$	$P_2(q_0)$						
$P_0 \equiv X_0$	$X_0 = a_0^{(0)}$	$P_1(q_0)$							
	$X_0 = P_0(q_0)$								

Abb. 3 Vollständiges Horner-Schemas für das Polynom $P_n(q)$ und die Stelle $q = q_0$ zur Berechnung der Koeffizienten $a_j^{(m)}$ der Quotientenpolynome $P_m(q)$ ($m = n$-1,…,0) und der Funktionswerte $P_m(q_0)$ ($m = n,\ldots,0$) in komprimierter Darstellung.

4 Entwicklung der Quotientenpolynome und deren *k*-ten Ableitungen an der Stelle q_0

Durch die Ausführung der n Divisionsschritte erhält man eine Darstellung des Polynoms

$$P_n(q) = b_0\cdot(q - q_0)^n + b_1\cdot(q - q_0)^{n-1} + \ldots + b_{n-1}\cdot(q - q_0) + b_n = \sum_{j=0}^{n} b_j (q - q_0)^{n-j}$$

als Polynom in $u = q - q_0$ mit den Koeffizienten

$$b_j := P_j(q_0) \qquad (j = 0,1,\ldots,n).$$

Aus der Rekursionsformel der Quotientenpolynome erhält man nämlich nach dem Prinzip der vollständigen Induktion die **Entwicklung an der Stelle** q_0:

$$\begin{aligned} P_n(q) &= P_n(q_0) + (q - q_0)P_{n-1}(q) \\ &= P_n(q_0) + (q - q_0)[P_{n-1}(q_0) + (q - q_0)P_{n-2}(q)] \\ &= P_n(q_0) + (q - q_0)P_{n-1}(q_0) + (q - q_0)^2 P_{n-2}(q) \\ &\ldots \end{aligned}$$

$$= P_n(q_0) + (q - q_0)P_{n-1}(q_0) + \ldots + (q - q_0)^m P_{n-m}(q) \qquad (m = 0,\ldots,n)$$
$$\ldots$$
$$= P_n(q_0) + (q - q_0)P_{n-1}(q_0) + \ldots + (q - q_0)^n P_0(q_0)$$
$$= \sum_{j=0}^{n} b_j (q - q_0)^{n-j} \qquad \text{mit } b_j := P_j(q_0).$$

Die Funktionswerte $P_m(q_0)$ der Quotientenpolynome $P_m(q)$ ($m = 0,1,\ldots,n$) an der Stelle $q = q_0$ stehen in enger Beziehung zu den Ableitungen des Ausgangspolynoms $P_n(q)$ an dieser Stelle: Durch Koeffizientenvergleich der obigen Entwicklung von $P_n(q)$ an der Stelle q_0 mit der **Taylorentwicklung**[5]

$$P_n(q) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(q_0)}{k!}(q - q_0)^k$$

der Funktion $P_n(q)$ an der Stelle q_0 erhält man nämlich für die k-te Ableitung von $P_n(q)$ an der Stelle q_0 die Beziehung

$$P_n^{(k)}(q_0) = k!P_{n-k}(q_0) = k!b_{n-k} \qquad \text{für } k = 0,1,\ldots,n,$$
$$P_n^{(k)}(q_0) = 0 \qquad \text{für } k > n.$$

Das vollständige Horner-Schema ist also auch ein Verfahren zur Bestimmung aller k-ten Ableitungen $P_n^{(k)}(q_0)$ der Polynomfunktion $P_n(q)$ an einer Stelle q_0.

Analog zum Ausgangspolynom $P_n(q)$ erhält man auch für die Quotientenpolynome $P_m(q)$ an der Stelle q_0 die entsprechende Entwicklung

$$P_m(q) = P_m(q_0) + (q - q_0)P_{m-1}(q)$$
$$\ldots$$
$$= P_m(q_0) + P_{m-1}(q_0)(q - q_0) + \ldots + P_0(q_0)(q - q_0)^m$$
$$= b_m + b_{m-1}(q - q_0) + \ldots + b_1(q - q_0)^{m-1} + b_0(q - q_0)^m$$
$$= \sum_{j=0}^{m} b_j (q - q_0)^{m-j} \qquad (m = 0,1,\ldots,n)$$

und für deren k-te Ableitung bei q_0 die Beziehung:

$$P_m^{(k)}(q_0) = k!P_{m-k}(q_0) = k!b_{m-k} \qquad \text{für } k = 0,1,\ldots,m;\ m = 0,\ldots,n,$$
$$P_m^{(k)}(q_0) = 0 \qquad \text{für } k > m.$$

Speziell für $k = m$ ($m = 0,1,\ldots,n$) ist die m-te Ableitung von $P_m(q)$ bei q_0

$$P_m^{(m)}(q_0) = m!P_0(q_0) = m!X_0 \ (\neq 0).$$

Durch k-malige Differentiation der Entwicklung des Quotientenpolynoms $P_m(q)$ an der Stelle q_0 (als Polynom in $u = q - q_0$) erhält man die entsprechende Entwicklung der k-ten Ableitung $P_m^{(k)}(q)$ des Quotientenpolynoms $P_m(q)$:

$$P_m^{(k)}(q) = \sum_{j=0}^{m-k} (m - j)\cdot\ldots\cdot(m - j - k + 1)b_j u^{m-j-k} \qquad (u = q - q_0)$$
$$= m\cdot\ldots\cdot(m-k+1)X_0 u^{m-k} + \ldots + k\cdot\ldots\cdot 1\cdot b_{m-k} \qquad (1 \le k \le m \le n).$$

[5] Die Taylorentwicklung ist benannt nach dem britischen Mathematiker Brook Taylor (1685–1731). Den Taylorschen Satz mit der Taylorschen Formel und der Taylorentwicklung als den wichtigsten Satz der lokalen Analysis findet man beispielsweise in Bronstein et al. (1997), S. 352, 378–380, 641, im Teubner-Taschenbuch der Mathematik, Teil 1 (1996), S. 269–273, 296–298, Duden (1985), S.600–603, dtv-Atlas zur Mathematik, Band 2 (1994), S. 299, und Köhler (2006), S. 204–210.

5 Zwei Rekursionsformeln für die *k*-ten Ableitungen der Quotientenpolynome

Aus der Rekursionsformel der Quotientenpolynome $P_m(q)$ erhält man auch zwei Rekursionsformeln für die k-ten Ableitungen $P_m^{(k)} = P_m^{(k)}(q)$ dieser Polynome. Mit den Abkürzungen $u = u(q) = q - q_0$ und $b_m = P_m(q_0)$ ergibt sich nämlich durch Differenzieren der obigen (in Abschnitt 1 hergeleiteten) Rekursionsformel

$$P_m(q) = uP_{m-1}(q) + b_m \qquad (m = 1,\dots,n)$$

nach dem Prinzip der vollständigen Induktion nach k

$$P_m' = P_{m-1} + uP_{m-1}',$$
$$P_m'' = 2P_{m-1}' + uP_{m-1}'',$$
$$\dots$$
$$P_m^{(k)} = k\,P_{m-1}^{(k-1)} + u\,P_{m-1}^{(k)} \qquad (k = 1,2,\dots,m,\dots)$$

bzw. wieder ausführlicher geschrieben die **erste Rekursionsformel** für die k-ten Ableitungen der Quotientenpolynome:

$$P_m^{(k)}(q) = k\,P_{m-1}^{(k-1)}(q) + (q - q_0)\,P_{m-1}^{(k)}(q) \qquad (m = 1,\dots,n;\ k = 1,2,\dots).$$

Mittels vollständiger Induktion nach m lässt sich auch noch sukzessive die k-te Ableitung auf der rechten Seite eliminieren. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
P_m^{(k)} &= k\,P_{m-1}^{(k-1)} + u\,P_{m-1}^{(k)} && \text{(Anwend. 1. Rek.formel auf } P_{m-1}^{(k)}\text{)}\\
&= k\,P_{m-1}^{(k-1)} + u[k\,P_{m-2}^{(k-1)} + u\,P_{m-2}^{(k)}]\\
&= k\,P_{m-1}^{(k-1)} + uk\,P_{m-2}^{(k-1)} + u^2\,P_{m-2}^{(k)} && \text{(Anwend. 1. Rek.formel auf } P_{m-2}^{(k)}\text{)}\\
&\dots\\
&= k\,P_{m-1}^{(k-1)} + uk\,P_{m-2}^{(k-1)} + \dots + u^{m-1}k\,P_0^{(k-1)} + u^m\,P_0^{(k)}
\end{aligned}$$

und wegen $P_0^{(k)} \equiv 0$ für $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
P_m^{(k)} &= k\,P_{m-1}^{(k-1)} + uk\,P_{m-2}^{(k-1)} + \dots + u^{m-1}k\,P_0^{(k-1)}\\
&= k\cdot \sum_{j=0}^{m-1} u^j P_j^{(k-1)}(q)
\end{aligned}$$

Weiter erhält man wegen $P_j^{(k-1)}(q) \equiv 0$ für die ersten k-1 Indizes $j < k$-1 und $P_{k-1}^{(k-1)}(q) = (k\text{-}1)!X_0$ ($\neq 0$) schließlich die **zweite Rekursionsformel**, welche die k-te Ableitung von $P_m(q)$ aus den (k-1)-ten Ableitungen der m - k + 1 Polynome $P_j(q)$ (k-1 $\leq j \leq m$-1) bestimmt:

$$\begin{aligned}
P_m^{(k)}(q) &= k\cdot \sum_{j=k-1}^{m-1} (q - q_0)^j P_j^{(k-1)}(q) \qquad (m = 1,\dots,n;\ k = 1,2,\dots)\\
&= k\cdot \left[(q - q_0)^{k-1}(k\text{-}1)!X_0 + (q - q_0)^k P_k^{(k-1)}(q) + \dots + (q - q_0)^{m-1} P_{m-1}^{(k-1)}(q)\right].
\end{aligned}$$

In dieser Formel ist für $1 \leq k \leq m \leq n$, $q \neq q_0$ zumindest der erste Summand von Null verschieden.

6 Zwei Rekursionsformeln für die *k*-ten Ableitungen der Horner-Schema-Polynome

Im Spezialfall $q_0 = 0$ ergeben sich wegen der Übereinstimmung $P_m(q;q_0{=}0) = E_m(q)$ ($m = 0,\ldots,n$) aus den obigen Rekursionsformeln für die k-ten Ableitungen der Quotientenpolynome auch zwei Rekursionsformeln für die k-ten Ableitungen der Horner-Schema-Polynome:

$$E_m^{(k)}(q) = k\,E_{m-1}^{(k-1)}(q) + q\,E_{m-1}^{(k)}(q) \qquad (k = 1,2,\ldots;\ m = 1,\ldots,n),$$

$$\begin{aligned} E_m^{(k)}(q) &= k\cdot \sum_{j=k-1}^{m-1} q^j E_j^{(k-1)}(q) \\ &= k\cdot \left[q^{k-1}(k\text{-}1)!X_0 + q^k E_k^{(k-1)}(q) + \ldots + q^{m-1}E_{m-1}^{(k-1)}(q)\right] \qquad (1 \le k \le m \le n). \end{aligned}$$

Man erhält diese Formeln auch durch mehrmaliges Differenzieren der Rekursionsformel

$$E_m(q) = qE_{m-1}(q) + X_m$$

der Horner-Schema-Polynome. Die Erstere dieser beiden Rekursionsformeln findet man bei Moore[6] (1979), S.118, und mit Bezug auf diesen auch bei Herzberger[7] (1999), S.146, die diese bei Vorliegen eines **positiven Darlehenszinsfaktors** q_1 ($q_1 > 0$ mit $E_n(q_1) = 0$, $\mathbf{E}(q_1) \ge \mathbf{O}$) zum Beweis der Positivität der k-ten Ableitungswerte $E_n^{(k)}(q_1)$ (k =1,...,n) von $E_n(q)$ bei q_1 und der daraus resultierenden Ungleichung $E_n(q) > E_n(q_1)$ für die Endwertfunktion $E_n(q)$ und zum Beweis der Positivität der Ableitungen $E_n^{(k)}(q)$ (k = 1,...,n) im Intervall $q > q_1$ verwenden. Diese und weitere Eigenschaften eines positiven Darlehenszinsfaktors werden im nachfolgenden Abschnitt 7 hergeleitet. So kann dort für einen positiven Darlehenszinsfaktors q_1 auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$ die Positivität der Quotientenpolynome $P_m(q)$ ($m = n$-1,...,0) und der k-ten Ableitungen $P_m^{(k)}(q)$ bis zur Ordnung $k = m$ und im Intervall $]q_1,\infty[$ die Positivität der Horner-Schema-Polynome $E_m(q)$ (m = 0,1,...,n-1) und der k-ten Ableitungen $E_m^{(k)}(q)$ (k = 1,...,m; m = 1,...,n) bewiesen werden.

7 Eigenschaften der Quotientenpolynome und Horner-Schema-Polynome zu einem Verrechnungskontozinsfaktor

Bei der Beurteilung eines Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ hinsichtlich seiner Vorteilhaftigkeit mittels der klassischen Methode des internen Zinssatzes (MIZ) wird in der Literatur als Anwendungsbereich der MIZ gerne die Menge der **Verrechnungskonto-Zahlungsströme** (VK-Zahlungsströme, sog. isoliert durchführbare Zahlungsströme) angegeben.[8] Dies sind Zahlungsströme, die einen internen Zinsfaktor $q_0 \in \mathbb{R}$ besitzen, dessen Horner-Schema-Vektor $\mathbf{E}(q_0)$ keinen Vorzeichenwechsel aufweist:

---

6 Ramon Edgar Moore (1929–2015) war ein US-amerikanischer Mathematiker, der vor allem bekannt ist für seine Intervallarithmetik. Er war Professor an der University of Wisconsin-Madison, University of Texas-Arlington und Ohio State University.

7 Jürgen Herzberger (1940–2009) war ein deutscher Mathematiker und Professor der Angewandten Mathematik an der Universität Oldenburg.

8 In der Literatur werden diesbezügliche Aussagen nur für einen positiven VK-Zinsfaktor q_0 und o. E. meist für Investitionen **X** formuliert. Dabei buchen Kilger (1965), S. 776, und mit Bezug auf diesen auch Blohm und Lüder (1995), S. 90f, und Götze (2008), S. 97, die Investition **X** *zu Gunsten* eines Verrechnungskonto mit dem Kontozinsfaktor $q_{Kto} = q_0$. Sie sprechen dann von dem zu allen Zahlungszeitpunkten nichtpositiven „Vermögenswert“ $C_j = E_j(\mathbf{X},q_0)$ (≤ 0, $j = 0,\ldots,n$) und bezeichnen **X** als sogenannte „isoliert durchführbare Investition (reine Investition)“, da beim Kreditkontostand C_j kein Vorzeichenwechsel auftritt und somit zusätzlich zur Verbuchung auf dem Konto (mit Sollzinsfaktor $q_{Kto} = q_0$) keine ergänzende Kapitalanlage zu

$$q_0 \in \mathbb{R} \text{ mit } E_n(q_0) = 0 \wedge \mathbf{E}(q_0) = (E_0(q_0),\ldots, E_n(q_0))^{\mathsf{T}} \geq \mathbf{O} \text{ oder } \leq \mathbf{O}.$$

Ein derartiger interner Zinsfaktor q_0 wird hier wegen der finanzmathematischen Interpretierbarkeit des zugehörigen Horner-Schema-Vektors als Kontostandsvektor als **Verrechnungskontozinsfaktor** (VK-Zinsfaktor) des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ bezeichnet. Im Falle einer Investition $\mathbf{X}$ ($X_0 < 0$) wird q_0 als **Anlagezinsfaktor** und im Falle einer Finanzierung $\mathbf{X}$ ($X_0 > 0$) wird q_0 als **Darlehenszinsfaktor** bezeichnet.

Im Falle eines positiven VK-Zinsfaktors q_0 ist dieser die einzige positive Nullstelle, eine einfache Nullstelle und somit eine Vorzeichenwechselstelle der Endwertfunktion $E_n(q)$ (Beweis unten in Abschnitt 7.1). Im Falle eines nichtpositiven VK-Zinsfaktors q_0 ist die Endwertfunktion $E_n(q)$ auf der positiven Halbachse nullstellenfrei, sodass kein positiver interner Zinsfaktor existiert.[9]

Auf diese VK-Zahlungsströme kann daher die MIZ mit der ihr eigenen Verwendung eines einzelnen internen Zinsfaktors problemlos in Konsistenz zur Kapitalwertmethode angewandt werden. Außerdem ist für diese Zahlungsströme noch die beliebte ökonomische Interpretierbarkeit des internen Zinsfaktors q_0 als der Kontozinsfaktor q_{Kto} eines Verrechnungskontos gegeben, auf welches der Zahlungsstrom gebucht wird und dessen Kontostände $C_j = E_j(q_0)$ das Vorzeichen nicht wechseln.

In der nachfolgenden Abbildung 4 erfolgt eine grafische Darstellung der Zahlungen X_j einer Finanzierung $\mathbf{X} = (X_0,\ldots,X_n)^{\mathsf{T}}$ ($X_0 > 0$) und der nichtnegativen Horner-Schema-Werte $E_j(q_0)$ zu einem positiven Darlehenszinsfaktor q_0.

einem Habenzinsfaktor benötigt wird. Altrogge (1996), S. 313, 317, 325, dagegen bucht die Investition $\mathbf{X}$ *zu Lasten* des Verrechnungskontos, bucht also die Zahlungen X_j von einem Anlagekonto ab, und bezeichnet dann die Nichtnegativität der Kontostände $\tilde{C}_j = - E_j(\mathbf{X},q_0)$ (≥ 0, $j = 0,\ldots,n$) als die „nichtnegative Kapitalbindung (Kapitalfestlegung)“ der Investition $\mathbf{X}$ auf dem Verrechnungskonto. Herzberger (1999), S. 144–146, bucht ebenfalls $\mathbf{X}$ vom Konto ab und bezeichnet die Eigenschaft der Nichtnegativität der Anlagekontostände $\tilde{C}_j$ als das „Sparkontenprinzip“ bei der „jährlichen Bilanz der Investition“. Ein umfassenderer Anwendungsbereich der MIZ in Gestalt der Menge der NU- und NF-Zahlungsströme (Definition bei Pleier, 2021, S. 293, 301) und auch eine auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ universell anwendbare Verallgemeinerung der Methode wird in den Themen ‚Methode des internen Zinssatzes und Methode der Vielfachheiten der internen Zinsfaktoren‘ und ‚Charakterisierung der Endwertmethode mittels interner Zinsfaktoren‘ angegeben. Dabei wird bei der Begründung der MIZ für die NU-Zahlungsströme schon deutlich, dass hierbei tatsächlich die Vielfachheiten der internen Zinsfaktoren eine entscheidende Rolle spielen.

Wolfgang Kilger (1927–1986) war ein deutscher Wirtschaftswissenschaftler und Professor an der Universität des Saarlandes. Hans Blohm (1920–2005) war ein deutscher Wirtschaftswissenschaftler und Professor für Produktionswirtschaft an der TU Berlin und der TU Chemnitz. Klaus Lüder (1935–) ist ein deutscher Ökonom und Professor für Betriebswirtschaftslehre an der Universität Hamburg und der Deutschen Hochschule Speyer. Uwe Götze (1960–) ist ein deutscher Wirtschaftswissenschaftler und Professor für Unternehmensrechnung an der TU Chemnitz. Günter Altrogge (1939–2014) war ein deutscher Ökonom und Professor für Betriebswirtschaftslehre an der Universität Hamburg.

[9] Eigenschaften eines VK-Zinsfaktors werden bei Pleier (2021), S. 286–290, 303f., bewiesen.

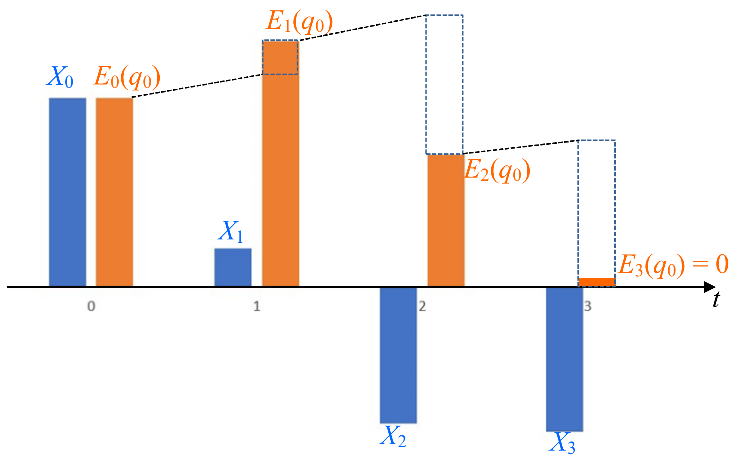

Abb. 4 Grafische Darstellung der zeitlichen Entwicklung der Zahlungen X_j einer Finanzierung $\mathbf{X} = (X_0,X_1,X_2,X_3)^\mathsf{T}$ und der nichtnegativen Horner-Schema-Werte $E_j(q_0)$ zu einem positiven Darlehenszinsfaktor q_0.

7.1 Charakterisierung eines Verrechnungskontozinsfaktors mittels Quotientenpolynomkoeffizienten ohne Vorzeichenwechsel

Es wird nun eine funktionentheoretische Charakterisierung eines Verrechnungskontozinsfaktors q_0 eines Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($X_0 \neq 0$) mittels der Koeffizienten des Quotientenpolynoms $P_{n\text{-}1}(q)$ angegeben.

Eine reelle Zahl $q_0 \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Verrechnungskontozinsfaktor des Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($X_0 \neq 0$), d. h.

$$E_n(q_0) = 0 \wedge \mathbf{E}(q_0) \geq \mathbf{O} \text{ oder } \leq \mathbf{O},$$

wenn die Koeffizienten a_j ($= a_j^{(n-1)} = E_j(q_0)$ nach Abschnitt 1) des zur Stelle q_0 und zur Endwertfunktion $E_n(q) = P_n(q)$ gehörigen Quotientenpolynoms

$$P_{n\text{-}1}(q) = \frac{E_n(q) - E_n(q_0)}{q - q_0} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j q^{n-1-j}$$

keinen Vorzeichenwechsel haben:

$$a_0 = X_0 > 0,\ a_j \geq 0 \ \text{ für } j = 1,\ldots,n\text{-}1 \ \text{ oder}$$
$$a_0 = X_0 < 0,\ a_j \leq 0 \ \text{ für } j = 1,\ldots,n\text{-}1.$$

Der **Beweis** ergibt sich dadurch, dass nach Abschnitt 1 die Koeffizienten a_j des Quotientenpolynoms der Endwertfunktion $E_n(q)$ mit den Horner-Schema-Werten $E_j(q_0)$ der Stelle q_0 übereinstimmen.

Die funktionentheoretische Bedeutung der Existenz eines Verrechnungskontozinsfaktors q_0 des Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($X_0 \neq 0$) liegt demnach in der Möglichkeit einer Produktdarstellung der Endwertfunktion

$$E_n(q) = E_n(q) - E_n(q_0) = (q - q_0)\cdot P_{n\text{-}1}(q)$$

mit dem Linearfaktor $q - q_0$ und einem Polynom $P_{n\text{-}1}(q)$ vom Grad n-1, dessen Koeffizient a_0 zur höchsten Potenz $q^{n\text{-}1}$ von Null verschieden ist und dessen weitere Koeffizienten $a_1, \ldots, a_{n\text{-}1}$ im Falle $a_0 > 0$ alle nichtnegativ und im Falle $a_0 < 0$ alle nichtpositiv sind.

Somit ist bei Vorliegen eines beliebigen Verrechnungskontozinsfaktors $q_0 \in \mathbb{R}$ das Quotientenpolynom $P_{n\text{-}1}(q)$ stets nullstellenfrei auf $]0,\infty[$: Beispielsweise gilt im Falle $a_0 = X_0 > 0$ die Abschätzung

$$P_{n\text{-}1}(q) \geq a_0 q^{n\text{-}1} > 0 \text{ für } q > 0.$$

Aus der Produktdarstellung $E_n(q) = (q - q_0) \cdot P_{n\text{-}1}(q)$ ergeben sich dann die folgenden Aussagen über die Nullstellen von $E_n(q)$ auf der positiven Halbachse:

Nullstellenverteilung der Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X},q)$ auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$ für einen VK-Zahlungsstrom X:

(1) Im Falle eines **positiven VK-Zinsfaktors** q_0 des Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($X_0 \neq 0$) ist die Stelle q_0 eine einfache Nullstelle und die einzige positive Nullstelle von $E_n(q)$.

(2) Im Falle eines **nichtpositiven VK-Zinsfaktors** q_0 ist $E_n(q)$ nullstellenfrei auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$.

Bei Existenz eines positiven VK-Zinsfaktors gibt es insbesondere keinen weiteren positiven VK-Zinsfaktor und bei Existenz eines nichtpositiven VK-Zinsfaktors gibt es gar keinen positiven VK-Zinsfaktor. Aufgrund der zweiten Aussage gibt es bei Existenz eines positiven VK-Zinsfaktors dann auch noch keinen nichtpositiven VK-Zinsfaktor. Insgesamt erhält man die folgende Aussage zur Vielfalt der VK-Zinsfaktoren:

Vielfalt der VK-Zinsfaktoren eines Zahlungsstroms:

(1) Ein **positiver VK-Zinsfaktor** q_0 des Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($X_0 \neq 0$) ist stets auf ganz $\mathbb{R}$ der einzige VK-Zinsfaktor von **X**.

(2) Neben einem **nichtpositiven VK-Zinsfaktor** q_0 gibt es keinen positiven VK-Zinsfaktor, also höchstens noch nichtpositive VK-Zinsfaktoren. Die Anzahl K der nichtpositiven VK-Zinsfaktoren kann dabei im Allgemeinen die Werte 1, 2, …, n-2, n annehmen.[10]

Aus der obigen Charakterisierung des Verrechnungskontozinsfaktors ergeben sich außerdem die Folgerungen der nachfolgenden Abschnitte 7.2 bis 7.6.

7.2 Nullstellenfreiheit des ersten Quotientenpolynoms $P_{n\text{-}1}(q)$ und dessen *k*-ten Ableitungen $P_{n-1}^{(k)}(q)$ auf der positiven Halbachse bei einem beliebigen Verrechnungskontozinsfaktor q_0

Bei Vorliegen eines **beliebigen Verrechnungskontozinsfaktors** $q_0 \in \mathbb{R}$ des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ ($X_0 \neq 0$; $E_n(q_0) = 0$, $\mathbf{E}(q_0) \geq \mathbf{O}$ oder $\leq \mathbf{O}$) sind das zur Endwertfunktion $E_n(q) = P_n(q)$ und zur Stelle q_0 gehörige erste Quotientenpolynom $P_{n\text{-}1}(q)$ und alle seine Ableitungen $P_{n-1}^{(k)}(q)$ bis zur Ordnung $k = n$-1 auf der positiven Halbachse $q > 0$ entweder positiv im Falle $X_0 > 0$ oder negativ im Falle $X_0 < 0$:

$$\begin{aligned} P_{n\text{-}1}(q) &= \sum_{j=0}^{n-1} a_j q^{n-1-j} \quad \geq a_0 q^{n\text{-}1} > 0 \text{ für } q > 0 \quad \text{bei } a_0 = X_0 > 0 \text{ bzw.} \\ &\qquad\qquad\qquad\quad\; \leq a_0 q^{n\text{-}1} < 0 \text{ für } q > 0 \quad \text{bei } a_0 = X_0 < 0, \\ P_{n-1}^{(k)}(q) &= \sum_{j=0}^{n-1-k} (n\text{-}1\text{-}j) \cdot \ldots \cdot (n\text{-}j\text{-}k) a_j q^{n-1-j-k} \\ &= (n\text{-}1) \cdot \ldots \cdot (n\text{-}k) a_0 q^{n\text{-}1\text{-}k} + \ldots + k \cdot \ldots \cdot 1 \cdot a_{n\text{-}1\text{-}k} \end{aligned}$$

[10] Diese letzte Aussage über die mögliche Anzahl der nichtpositiven VK-Zinsfaktoren eines Zahlungsstroms wird bewiesen im Thema ‚Verrechnungskontozinsfaktoren eines Zahlungsstroms'.

$\geq (n\text{-}1)\cdot\ldots\cdot(n\text{-}k)a_0q^{n-1-k} > 0$ für $q > 0$ bei $a_0 = X_0 > 0$ bzw.

$\leq (n\text{-}1)\cdot\ldots\cdot(n\text{-}k)a_0q^{n-1-k} < 0$ für $q > 0$ bei $a_0 = X_0 < 0$

$(k = 1,\ldots,n\text{-}1;\ n \geq 2)$.

Insbesondere folgt für einen beliebigen Darlehenszinsfaktor $q_0 \in \mathbb{R}$ ($X_0 > 0$) bei $n \geq 2$ aus der Positivität der ersten Ableitung $P'_{n-1}(q)$, dass das Quotientenpolynom $P_{n\text{-}1}(q)$ auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$ streng monoton steigend ist. Daraus kann auch noch einmal geschlossen werden, dass das Quotientenpolynom $P_{n\text{-}1}(q)$ positiv auf der positiven Halbachse ist:

$$P_{n\text{-}1}(q) > P_{n\text{-}1}(0) = a_{n\text{-}1} \geq 0 \text{ für } q > 0.$$

Die Positivität des Quotientenpolynoms $P_{n\text{-}1}(q)$ in $]0,\infty[$ findet eine Anwendung im Beweis der Nichtpositivität der weiteren Nullstellen[11] von $E_n(q)$ neben einem beliebigen Darlehenszinsfaktor $q_0 \in \mathbb{R}$ (siehe Abschnitt 7.1). Die Positivität der weiteren Quotientenpolynome $P_m(q)$ ($m = n\text{-}2,\ldots,1$) auf der positiven Halbachse wird unten in Abschnitt 7.4 nur für einen *nichtnegativen* Darlehenszinsfaktor q_0 bewiesen.

Speziell für einen *nichtnegativen bzw. positiven* Verrechnungskontozinsfaktor q_0 werden nachfolgend noch weitere Eigenschaften für sämtliche Quotientenpolynome $P_m(q)$ ($m = n\text{-}1,\ldots,0$) und Horner-Schema-Polynome $E_m(q)$ angegeben. Es wird dies hier nur für einen nichtnegativen bzw. positiven *Darlehens*zinsfaktor q_0 des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ ($X_0 > 0$; $E_n(q_0) = 0$, $\mathbf{E}(q_0) \geq \mathbf{O}$) formuliert. **Analoge Aussagen** gelten aber auch für einen nichtnegativen bzw. positiven *Anlage*zinsfaktor q_0 eines Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ ($X_0 < 0$; $E_n(q_0) = 0$, $\mathbf{E}(q_0) \leq \mathbf{O}$).

7.3 Nichtnegativität bzw. Positivität der Koeffizienten der Quotientenpolynome $P_m(q)$ und der Funktionswerte $P_m(q_0)$ für einen nichtnegativen bzw. positiven Darlehenszinsfaktor q_0

Für einen **nichtnegativen Darlehenszinsfaktor** q_0 einer Finanzierung $\mathbf{X}$ ($X_0 > 0$; $E_n(q_0) = 0$, $\mathbf{E}(q_0) \geq \mathbf{O}$) sind die im vollständigen Horner-Schema der Endwertfunktion $E_n(q)$ und der Stelle q_0 in Abbildung 3 angegebenen Koeffizienten $a_j^{(m)}$ ($j = 0,\ldots,m$) und die Funktionswerte $P_m(q_0) = b_m$ der Quotientenpolynome $P_m(q)$ ($m = n\text{-}1,\ldots,0$) alle nichtnegativ:

$$a_j^{(m)} \geq 0\ (j = 0,\ldots,m),$$

$$P_m(q_0) = b_m \geq 0 \qquad (m = n\text{-}1,\ldots,0).$$

Stets ist der bei der höchsten Potenz auftretende Koeffizient $a_0^{(m)} = X_0$ positiv und insbesondere $b_0 = P_0(q_0) = a_0^{(0)} = X_0$ positiv.

Für einen **positiven Darlehenszinsfaktor** q_0 sind die Koeffizienten $a_j^{(m)}$ ($j = 0,\ldots,m$) der Quotientenpolynome $P_m(q)$ für die Indizes $m = n\text{-}2,\ldots,0$, also erst ab dem zweiten Quotientenpolynom, und die Funktionswerte $P_m(q_0) = b_m$ für die Indizes $m = n\text{-}1,\ldots,0$, also ab dem ersten Quotientenpolynom, alle positiv:

$$a_j^{(m)} > 0\ (j = 0,\ldots,m) \quad \text{für } m = n\text{-}2,\ldots,0,$$

$$P_m(q_0) = b_m > 0 \quad \text{für } m = n\text{-}1,\ldots,0.$$

Der **Beweis** ergibt sich nach dem Prinzip der vollständigen Induktion, indem man beim Index $m = n - 1$ beginnt und den Induktionsschluss absteigend für die weiteren Indizes m durchführt. Induktionsbeginn für $m = n - 1$: Für einen Darlehenszinsfaktor $q_0 \in \mathbb{R}$ ($X_0 > 0$; $E_n(q_0) = 0$, $\mathbf{E}(q_0) \geq \mathbf{O}$) sind im vollständigen Horner-Schema des Polynoms $E_n(q)$ zunächst die in der

[11] Diese Aussage wird im Thema ‚Verechnungskontozinsfaktoren eines Zahlungsstroms‘ bewiesen.

zweiten Zeile der komprimierten Darstellung von Abbildung 3 aufgeführten Koeffizienten nach Abschnitt 7.1 alle nichtnegativ und der erste Koeffizient ($j = 0$) sogar positiv:

$$a_0^{(n-1)} = a_0 = E_0(q_0) = X_0 > 0, \qquad (j = 0),$$

$$a_j^{(n-1)} = a_j = E_j(q_0) \geq 0 \qquad (j = 1,...,n\text{-}1).$$

Ist der Darlehenszinsfaktor q_0 noch als **nichtnegativ** vorausgesetzt, dann folgt nach dem Prinzip der vollständigen Induktion auch die Nichtnegativität der Elemente in den nachfolgenden Zeilen. Aus der Induktionsannahme für den Index m, also

$$a_0^{(m)} = X_0 > 0,$$

$$a_j^{(m)} \geq 0 \qquad (j = 1,...,m),$$

ergibt sich nämlich der Induktionsschluss von m auf m-1 für $m = n$-1,...,1 und dabei jeweils noch von j-1 auf j für $j = 1,\ldots,m$-1 folgendermaßen:

$$a_0^{(m-1)} = X_0 > 0 \qquad (j = 0),$$

$$a_j^{(m-1)} = q_0 a_{j-1}^{(m-1)} + a_j^{(m)} \geq q_0 a_{j-1}^{(m-1)} \geq 0 \qquad (j = 1,\ldots,m\text{-}1).$$

Aus der Nichtnegativität von q_0 und der Koeffizienten der Quotientenpolynome folgt dann noch die Nichtnegativität der Funktionswerte:

$$b_m = P_m(q_0) = a_m^{(m-1)} = q_0 a_{m-1}^{(m-1)} + a_m^{(m)} \geq q_0 a_{m-1}^{(m-1)} \geq 0 \qquad (j = m),$$

$$b_0 = P_0(q_0) = a_0^{(0)} = X_0 > 0 \qquad (m = 0).$$

Ist der Darlehenszinsfaktor q_0 **positiv** vorausgesetzt, so folgt unter Verwendung der oben bereits bewiesenen Nichtnegativität der Koeffizienten $a_j^{(m)}$ für die Indizes $m = n$-1,…,1 jeweils per vollständige Induktion von j-1 auf j für $j = 1,\ldots,m$-1 noch die Positivität der Koeffizienten $a_j^{(m-1)}$ von $P_{m\text{-}1}(q)$ und des Funktionswerts $P_m(q_0)$:

$$a_0^{(m-1)} = X_0 > 0 \qquad (j = 0),$$

$$a_j^{(m-1)} = q_0 a_{j-1}^{(m-1)} + a_j^{(m)} \geq q_0 a_{j-1}^{(m-1)} > 0 \qquad (j = 1,\ldots,m\text{-}1),$$

$$b_m = P_m(q_0) = a_m^{(m-1)} = q_0 a_{m-1}^{(m-1)} + a_m^{(m)} \geq q_0 a_{m-1}^{(m-1)} > 0 \qquad (j = m),$$

$$b_0 = P_0(q_0) = a_0^{(0)} = X_0 > 0 \qquad (m = 0).$$

□

7.4 Positivität aller Quotientenpolynome $P_m(q)$ und der zugehörigen *k*-ten Ableitungen $P_m^{(k)}(q)$ auf der positiven Halbachse für einen nichtnegativen Darlehenszinsfaktor q_0

Aus der in Abschnitt 7.3 bewiesenen Nichtnegativität der Koeffizienten $a_j^{(m)}$ der Quotientenpolynome $P_m(q)$ ($m = 0,\ldots n$-1) und der Positivität von $a_0^{(m)}$ für einen nichtnegativen Darlehenszinsfaktor q_0 ergibt sich nun auch die Positivität der Quotientenpolynome $P_m(q)$ und die Positivität von deren Ableitungen $P_m^{(k)}(q)$ auf der positiven Halbachse $q > 0$. Dagegen kann aber aus der Nichtnegativität der Koeffizienten b_j der Entwicklung der $P_m(q)$ an der Stelle q_0 und der Positivität von b_0 diese Positivität der $P_m(q)$ und $P_m^{(k)}(q)$ im nachfolgenden Abschnitt 7.5 nur im Intervall $q > q_0$ gefolgert werden.

Für einen positiven Darlehenszinsfaktor q_0 ergeben sich nach der in Abschnitt 7.3 begründeten Positivität der Koeffizienten $a_j^{(m)}$ ($m = n$-2,…,0) und der Funktionswerte $P_m(q_0)$ ($m = n$-1,…,0) für die Quotientenpolynome $P_m(q)$ und deren k-ten Ableitungen $P_m^{(k)}(q)$ bis zur Ordnung $k = m$ auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$ auch noch die unten folgenden Abschätzungen mit konstanten positiven unteren Schranken.

Für einen **nichtnegativen Darlehenszinsfaktor** q_0 einer Finanzierung $\mathbf{X}$ ($X_0 > 0$; $E_n(q_0) = 0$, $\mathbf{E}(q_0) \geq \mathbf{O}$) gelten für die Quotientenpolynome $P_m(q)$ ($m = 1,\dots n$-1) und deren k-ten Ableitungen $P_m^{(k)}(q)$ bis zur Ordnung $k = m$ auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$ folgende Abschätzungen:

$$P_0(q) \equiv a_0^{(0)} = X_0 > 0 \qquad (m = 0),$$

$$P_m(q) = \sum_{j=0}^{m} a_j^{(m)} q^{m-j} \geq a_0^{(m)} q^m > 0 \quad \text{für } q > 0 \qquad (m = 1,\dots n\text{-}1),$$

$$\begin{aligned} P_m^{(k)}(q) &= \sum_{j=0}^{m-k} (m-j)\cdot\ldots\cdot(m-j-k+1) a_j^{(m)} q^{m-j-k} \\ &= m\cdot\ldots\cdot(m-k+1) a_0^{(m)} q^{m-k} + \ldots + k\cdot\ldots\cdot 1\cdot a_{m-k}^{(m)} \\ &\geq m\cdot\ldots\cdot(m-k+1) a_0^{(m)} q^{m-k} > 0 \quad \text{für } q > 0 \qquad (1 \leq k \leq m \leq n\text{-}1). \end{aligned}$$

Für einen **positiven Darlehenszinsfaktor** q_0 gelten für die Quotientenpolynome $P_m(q)$ vom Grad $m \leq n$-2 und deren k-ten Ableitungen $P_m^{(k)}(q)$ bis zur Ordnung $k = m$ auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$ auch noch die folgenden Abschätzungen mit konstanten positiven unteren Schranken:

$$P_m(q) = \sum_{j=0}^{m} a_j^{(m)} q^{m-j} > a_m^{(m)} \ (> 0) \quad \text{für } q > 0 \qquad (m = 1,\dots n\text{-}2),$$

$$\begin{aligned} P_m^{(k)}(q) &= \sum_{j=0}^{m-k} (m-j)\cdot\ldots\cdot(m-j-k+1) a_j^{(m)} q^{m-j-k} \\ &> k!\, a_{m-k}^{(m)} \ (> 0) \quad \text{für } q > 0 \qquad (1 \leq k \leq m \leq n\text{-}2). \end{aligned}$$

In der Abbildung 5 sind zum positiven Darlehenszinsfaktor $q_0 = 1{,}10$ der bereits für die Abbildung 4 verwendeten Finanzierung $\mathbf{X} = (X_0,X_1,X_2,X_3)^\mathsf{T} = (100;20;-73;-77)^\mathsf{T}$ die Endwertfunktion $E_3(q)$ und die auf der positiven Halbachse $]0,\infty[$ positiven Quotientenpolynome $P_j(q)$ ($j = 0, 1, 2$) dargestellt.

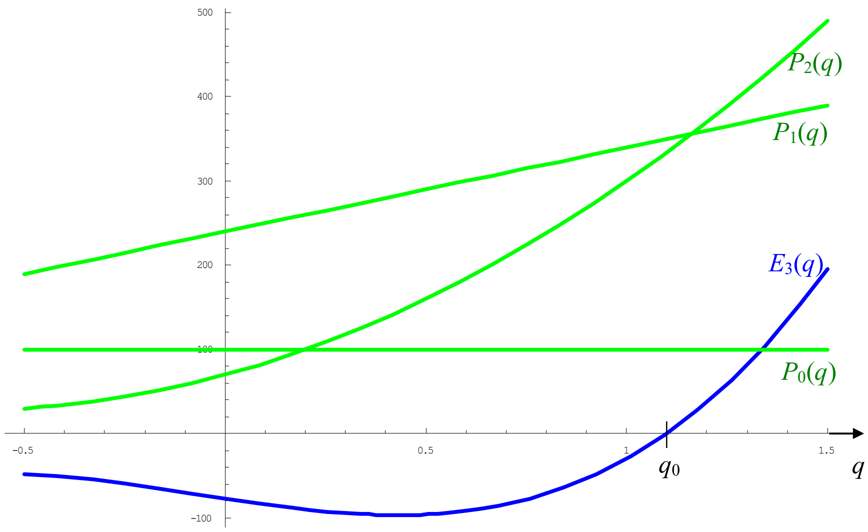

Abb. 5 Grafische Darstellung der Endwertfunktion $E_3(q)$ und der auf $]0,\infty[$ positiven Quotientenpolynome $P_j(q)$ für eine Finanzierung $\mathbf{X}$ mit einem positiven Darlehenszinsfaktor q_0.

7.5 Positivität der Quotientenpolynome $P_m(q)$ und der zugehörigen *k*-ten Ableitungen $P_m^{(k)}(q)$ im Intervall $q > q_0$ für einen nichtnegativen Darlehenszinsfaktor q_0

Verwendet man bei Vorliegen eines nichtnegativen bzw. positiven Darlehenszinsfaktors q_0 einer Finanzierung **X** ($X_0 > 0$; $E_n(q_0) = 0$, $\mathbf{E}(q_0) \geq \mathbf{O}$) nur die in Abschnitt 7.4 angegebenen Vorzeichenbedingungen für die Werte $b_m = P_m(q_0)$ ($m = 0,...,n$-1), so erhält man Abschätzungen und daraus die Positivität dieser Funktionen **nur im kleineren Intervall** $q > q_0$ ($u = q - q_0 > 0$). Es haben nämlich die Taylorentwicklungen der Quotientenpolynome (siehe Abschnitt 4)

$$P_m(q) \quad = \sum_{j=0}^{m} b_j u^{m-j} = b_0 u^m + \ldots + b_{m-1} u + b_m \qquad (u = q - q_0;\ m = 0,\ldots,n\text{-}1,n)$$

an der Stelle q_0 und die der zugehörigen k-ten Ableitungen

$$\begin{aligned} P_m^{(k)}(q) &= \sum_{j=0}^{m-k} (m-j)\cdot\ldots\cdot(m-j-k+1) b_j u^{m-j-k} \\ &= m\cdot\ldots\cdot(m-k+1) X_0 u^{m-k} + \ldots + k\cdot\ldots\cdot 1\cdot b_{m-k} \qquad (1 \leq k \leq m \leq n). \end{aligned}$$

bis zur Ordnung $k = m$ nichtnegative bzw. positive Koeffizienten und bei der höchsten Potenz u^{m-k} (wegen $b_0 = X_0$) den positiven Koeffizienten X_0 für $k = 0$ bzw. $m\cdot\ldots\cdot(m-k+1)X_0$ für $1 \leq k \leq m$.

Für einen **nichtnegativen Darlehenszinsfaktor** q_0 einer Finanzierung **X** ($X_0 > 0$; $E_n(q_0) = 0$, $\mathbf{E}(q_0) \geq \mathbf{O}$) sind daher im Intervall $q > q_0$ die Endwertfunktion $E_n(q)$, die Quotientenpolynome $P_m(q)$ vom Grad m mit $1 \leq m \leq n$-1 und deren Ableitungen $P_m^{(k)}(q)$ der Ordnung k mit $1 \leq k \leq m \leq n$ alle positiv: Für $q > q_0$ erhält man nämlich die Abschätzungen

$$\begin{aligned} &E_n(q) \geq b_0 u^n > 0 && \text{für } m = n, \\ &P_m(q) \geq b_0 u^m > 0 && \text{für } 1 \leq m \leq n\text{-}1, \\ &P_0(q) \equiv a_0^{(0)} = X_0 > 0 && \text{für } m = 0, \\ &P_m^{(k)}(q) \geq m\cdot\ldots\cdot(m-k+1) X_0 u^{m-k} > 0 && \text{für } 1 \leq k \leq m \leq n, \\ &P_m^{(m)}(q) \equiv m! X_0 > 0 && \text{für } k = m\ ,\ 0 \leq m \leq n. \end{aligned}$$

Weiter folgt aus der Gültigkeit der Ungleichung

$$P_m(q) > b_m = P_m(q_0)$$

im Intervall $]q_0,\infty[$, dass das Quotientenpolynom $P_m(q)$ in diesem Intervall keine weitere Stelle q besitzt, in der der Funktionswert $P_m(q_0)$ angenommen wird. Speziell für den Index $m = n$ wird die Gültigkeit der Ungleichung $E_n(q) > E_n(q_0) = 0$ im Intervall $]q_0,\infty[$ nachfolgend in Abschnitt 7.6 auch noch über die Taylorentwicklung der Horner-Schema-Polynome hergeleitet.

7.6 Positivität der Horner-Schema-Polynome $E_m(q)$ $(0 \leq m \leq n)$, der ersten Ableitungen $E_m'(q)$ $(1 \leq m \leq n)$ und Nichtnegativität bzw. Positivität der *k*-ten Ableitungen $E_m^{(k)}(q)$ $(2 \leq k \leq m \leq n)$ im Intervall $q > q_0$ für einen nichtnegativen bzw. positiven Darlehenszinsfaktor q_0

Zunächst sind für einen nichtnegativen bzw. positiven Darlehenszinsfaktor q_0 einer Finanzierung **X** ($X_0 > 0$; $E_n(q_0) = 0$, $\mathbf{E}(q_0) \geq \mathbf{O}$) neben den Funktionswerten $E_m(q_0)$ ($m = 0,1,\ldots,n$-1) auch die k-ten Ableitungen $E_m^{(k)}(q_0)$ der Horner-Schema-Polynome $E_m(q)$ ($m = 1,...,n$) von der ersten bis zur m-ten Ordnung an der Stelle $q = q_0$ alle nichtnegativ bzw. positiv. Man kann nämlich die folgenden Abschätzungen beweisen:

$$
\begin{array}{lll}
E_0(q_0) & = X_0 > 0, & \\
E_m(q_0) & \geq 0 & \text{für } k = 0;\ m = 1,\ldots,n\text{-}1,n, \\
E_m{}'(q_0) & \geq X_0 > 0 & \text{für } k = 1 \leq m \leq n, \\
E_m^{(k)}(q_0) & \geq k!q_0^{k-1}X_0 \geq 0\ (> 0) & \text{für } 2 \leq k \leq m \leq n, \\
E_m^{(k)}(q_0) & = 0 & \text{für } k > m,\ m = 0,1,\ldots,n.
\end{array}
$$

Ein **Beweis** für diese Abschätzungen bzw. Vorzeichenbedingungen an der Stelle $q = q_0$ ergibt sich nicht direkt aus den Koeffizienten X_j der Horner-Schema-Polynome, da für diese (mit Ausnahme von X_0) im Allgemeinen keine Vorzeichenbedingungen erfüllt sind. Vielmehr geht man hier von der Nichtnegativität der Horner-Schema-Werte $E_m(q_0)$ ($m = 0,\ldots,n$-1) des Darlehenszinsfaktors q_0 (≥ 0) aus und verwendet die in Abschnitt 6 angegebene zweite Rekursionsformel für die k-ten Ableitungen $E_m^{(k)}(q)$ der Horner-Schema-Polynome speziell an der Stelle $q = q_0$, also

$$E_m^{(k)}(q_0) = k\cdot \sum_{j=k-1}^{m-1} q_0{}^j E_j{}^{(k-1)}(q_0) \qquad (1 \leq k \leq m \leq n),$$

und das Prinzip der vollständigen Induktion. Mit $E_j^{(j)}(q_0) = j!X_0$ ($j = 0,1,\ldots,n$) erhält man so sukzessive

$$
\begin{array}{lll}
E_m{}'(q_0) & = 1\cdot\sum_{j=0}^{m-1} q_0{}^j E_j(q_0) & (\text{Verwendung von } E_j(q_0) \geq 0 \text{ für } j = 1,\ldots,m\text{-}1) \\
& \geq 1q_0{}^0\, E_0(q_0) = X_0 \qquad > 0 & (k = 1;\ m = 1,\ldots,n), \\
E_m{}''(q_0) & = 2\cdot\sum_{j=1}^{m-1} q_0{}^j E_j{}'(q_0) & (E_j{}'(q_0) \geq 0 \text{ für } j = 2,\ldots,m\text{-}1) \\
& \geq 2q_0{}^1E_1{}'(q_0) = 2q_0 1!X_0 \ \geq 0\ (> 0) & (k = 2;\ m = 2,\ldots,n)
\end{array}
$$

und per vollständiger Induktion (mit Induktionsschluss k-1 $\longrightarrow k$; $k \geq 1$)

$$
\begin{array}{lll}
E_m^{(k)}(q_0) & = k\cdot \sum_{j=k-1}^{m-1} q_0{}^j E_j{}^{(k-1)}(q_0) & (E_j^{(k-1)}(q_0) \geq 0 \text{ für } j = k,\ldots,m\text{-}1) \\
& \geq k\cdot q_0^{k-1}\, E_{k-1}^{(k-1)}(q_0) = q_0^{k-1}k!X_0 \geq 0\ (> 0) & (2 \leq k \leq m \leq n).
\end{array}
$$

Da die Horner-Schema-Polynome $E_m(q)$ vom Grad m sind, sind deren k-ten Ableitungen $E_m^{(k)}(q)$ für $k > m$ identisch Null und insbesondere $E_m^{(k)}(q_0) = 0$ für $k > m$. □

Beweis der Aussagen in der Überschrift von Abschnitt 7.6: Als Folgerung aus dieser eben bewiesenen Nichtnegativität bzw. Positivität der Ableitungswerte $E_m^{(k)}(q_0)$ ($k = 0,1,2,...,m$) an der Stelle eines nichtnegativen Darlehenszinsfaktors q_0 erhält man mittels der Taylorentwicklung

$$
\begin{aligned}
E_m(q) &= \sum_{k=0}^{m} \frac{E_m^{(k)}(q_0)}{k!}(q - q_0)^k \\
&= E_m(q_0) + E_m{}'(q_0)(q - q_0) + \sum_{k=2}^{m} \frac{E_m^{(k)}(q_0)}{k!}(q - q_0)^k
\end{aligned}
$$

für das Horner-Schema-Polynom $E_m(q)$ im Intervall $q > q_0$ (≥ 0) dann noch die Ungleichung

$$
\begin{array}{ll}
E_m(q) \geq E_m(q_0) + E_m{}'(q_0)(q - q_0) & (E_m{}'(q_0) > 0 \text{ für } m \geq 1) \\
\quad > E_m(q_0) \geq 0 \qquad \text{für } m = 1,...,n\text{-}1,n. &
\end{array}
$$

Außerdem gilt hier für den Index $m = 0$ für alle $q \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $E_0(q) \equiv X_0 > 0$. Insgesamt erhält man daher die folgende Aussage über die Horner-Schema-Polynome:

Für einen **nichtnegativen Darlehenszinsfaktor** q_0 einer Finanzierung $\mathbf{X}$ ($X_0 > 0$; $E_n(q_0) = 0$, $\mathbf{E}(q_0) \geq \mathbf{O}$) sind die Horner-Schema-Polynome $E_m(q)$ für alle Indizes $m = 0,1,\ldots,n$ im Intervall $q > q_0$ positiv:

$$E_m(q) > 0 \text{ für } q > q_0,\ m = 0,1,\ldots,n.$$

Speziell für den Index $m = n$ wurde die Positivität der Endwertfunktion $E_n(q)$ in $q > q_0$ bereits oben im Abschnitt 7.5 über die Quotientenpolynome bewiesen. Für den Fall $q_0 > 0$ findet man dieses Ergebnis (ohne explizite Angabe des Induktionsbeweises) bei Moore (1979), S.118. Eine Verschärfung der Aussage von Moore gibt Herzberger (1999), S.145f., indem er für einen positiven Darlehenszinsfaktor q_0 mittels der Positivität des Quotientenpolynoms $P_{n-1}(q)$ beweist, dass für die Endwertfunktion $E_n(q)$ sogar auf der gesamten positiven Halbachse $]0,\infty[$ neben q_0 keine weitere Nullstelle mehr existiert. Diese Aussage wird in Abschnitt 7.1 noch allgemeiner für einen beliebigen VK-Zinsfaktor $q_0 \in \mathbb{R}$ bewiesen.

Weiter erhält man für einen **nichtnegativen bzw. positiven Darlehenszinsfaktor** q_0 mittels Differentiation der Taylorentwicklung der Horner-Schema-Polynome $E_m(q)$ ($m = 1,\ldots,n$) aus den obigen Abschätzungen für die Ableitungswerte $E_m^{(k)}(q_0)$ ($k = 0,1,2,\ldots,m$) im Intervall $q > q_0$ noch die Abschätzungen mit konstanten unteren Schranken und damit die Nichtnegativität bzw. Positivität der k-ten Ableitungen $E_m^{(k)}(q)$ ($k = 1,\ldots,m$):

$$\begin{aligned} E_m'(q) &= \sum_{j=1}^{m} \frac{E_m^{(j)}(q_0)}{(j-1)!}(q-q_0)^{j-1} \\ &\geq E_m'(q_0) \quad \geq X_0 \qquad > 0 && (q_0 \geq 0;\ k = 1), \\ E_m^{(k)}(q) &= \sum_{j=k}^{m} \frac{E_m^{(j)}(q_0)}{(j-k)!}(q-q_0)^{j-k} \\ &\geq E_m^{(k)}(q_0) \quad \geq k!\,q_0^{k-1} X_0 \quad \geq (>)\ 0 && (q_0 \geq 0 \text{ bzw. } q_0 > 0;\ 2 \leq k \leq m \leq n). \end{aligned}$$

Bei einem nichtnegativen Darlehenszinsfaktor q_0 sind also im Intervall $q > q_0$ die Horner-Schema-Polynome $E_m(q)$ ($m = 0,1,\ldots,n$) und die ersten Ableitungen $E_m'(q)$ ($m = 1,\ldots,n$) positiv und die k-ten Ableitungen $E_m^{(k)}(q)$ ($k \geq 2$; $m = 0,\ldots,n$) nichtnegativ. Bei einem positiven Darlehenszinsfaktor q_0 sind im Intervall $q > q_0$ darüberhinaus auch die k-ten Ableitungen $E_m^{(k)}(q)$ ($2 \leq k \leq m \leq n$) positiv. □

Literatur

Altrogge G. (1996), Investition, Oldenbourg Verlag, München Wien, 4. Auflage.

Arens T., Hettlich F., Karpfinger Ch., Kockelkorn U., Lichtenegger K., Stachel H. (2010), Mathematik, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2. Auflage.

Blohm H., Lüder K. (1995), Investition, Vahlen Verlag, München, 8. Auflage.

Bronstein I.N., Semendjajew K.A., Musiol G., Mühlig H. (1997), Taschenbuch der Mathematik; Harri Deutsch Verlag, Thun Frankfurt am Main, 3. Auflage.

dtv-Atlas zur Mathematik (1994), 2 Bände, Deutscher Taschenbuch Verlag, München, 10. bzw. 9. Auflage.

Duden (1985), Rechnen und Mathematik, Das Lexikon für Schule und Praxis, Bibliographisches Institut, Mannheim, 4. Auflage.

Götze U. (2008), Investitionsrechnung, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 6. Auflage.

Herzberger J. (1999), Einführung in die Finanzmathemartik, Oldenbourg Verlag, München Wien.

Hildebrandt S. (2006), Analysis 1, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2. Auflage.

Kilger W. (1965), Zur Kritik am internen Zinsfuß, Zeitschrift für Betriebswirtschaft (ZfB) Band 35, S.765–798.

Köhler G. (2006), Analysis, Heldermann Verlag, Lemgo, 3. Auflage.

Moore R.E. (1979), Methods and applications of interval analysis, SIAM, Philadelphia.

Pleier R. (2021), Finanzmathematik, Tredition, Hamburg, 2. Auflage.

Teubner-Taschenbuch der Mathematik (1996 u. 1995), Teil 1 und 2, Teubner Verlag, Stuttgart Leipzig.