SE-Halbordnung

Rudolf Pleier

Juni 2015

Bei der Beschreibung eines Anwendungsbereichs der Methode des internen Zinssatzes für die Beurteilung eines einzelnen Zahlungsstroms $\mathbf{X} = (X_0,\ldots, X_n)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n+1}$ bzw. für den Vergleich alternativer Zahlungsströme $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ wird im Buch Finanzmathematik (Pleier 2021, S. 354) auch die Konsistenz dieses Vergleichs mit der sogenannten SE-Halbordnung betrachtet.

Diese SE-Halbordnung wird als Durchschnittsrelation $\succcurlyeq_\Lambda$ aller Endwert-Präferenzordnungen (E-Präferenzordnungen) $\succcurlyeq_{\mathrm{E},q}$ ($\subseteq \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$), $q > 0$, gebildet. Sie wird daher im Folgenden als die (für alle Kalkulationszinsfaktoren q) **simultane Endwert-Halbordnung** (SE-Halbordnung) bezeichnet. Da die zu verschiedenen Vergleichszeitpunkten m gehörigen und mit festem konstanten Kalkulationszinsfaktor q gebildeten Zeitwert-Präferenzordnungen $\succcurlyeq_{\mathrm{Z},q}$ alle gleich sind und insbesondere mit der Endwert-Präferenzordnung übereinstimmen, kann diese Durchschnittsrelation $\succcurlyeq_\Lambda$ ebenso auch simultane Zeitwert-Halbordnung (SZ-Halbordnung) oder simultane Barwert-Halbordnung (SB-Halbordnung) genannt werden:

$$\succcurlyeq_\Lambda := \Lambda := \bigcap_{q>0} \succcurlyeq_{E,q} .$$

Definition und Charakterisierung der Relation $\succcurlyeq_\Lambda$:

$$\begin{aligned}\mathbf{X} \succcurlyeq_\Lambda \mathbf{Y} \quad & (\mathbf{X} \text{ ist mindestens so SE-vorteilhaft wie } \mathbf{Y})\\ & :\Leftrightarrow \mathbf{X} \succcurlyeq_{\mathrm{E},q} \mathbf{Y} \text{ für alle } q > 0\\ & \Leftrightarrow E_n(\mathbf{X},q) \geq E_n(\mathbf{Y},q) \text{ für alle } q > 0\\ & \Leftrightarrow E_n(\mathbf{D},q) \geq 0 = E_n(\mathbf{O},q) \text{ für } \mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y} \text{ und alle } q > 0\\ & \Leftrightarrow \mathbf{D} \succcurlyeq_\Lambda \mathbf{O}.\end{aligned}$$

Damit lässt sich die Relation $\succcurlyeq_\Lambda$ durch die Menge der Λ-nichtnegativen Vektoren charakterisieren: Mit der in Abbildung 1 dargestellten zum Nullpunkt $\mathbf{O}$ gehörigen Bessermenge

$$\begin{aligned}W_{+\Lambda}(\mathbf{O}) &= \{\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{Z} \succcurlyeq_\Lambda \mathbf{O}\}\\ &= \{\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n+1} : E_n(\mathbf{Z},q) = \mathbf{A}(q)^\mathsf{T}\mathbf{Z} \geq 0 \text{ für alle } q > 0\}\\ &= \bigcap_{q>0} H^{\geq}_{\mathbf{A}(q),0} \qquad\qquad (\mathbf{A}(q) = (q^n, \ldots,1)^\mathsf{T}),\end{aligned}$$

der Λ-nichtnegativen Menge, gilt für die Relation $\succcurlyeq_\Lambda$ die Charakterisierung

$$\mathbf{X} \succcurlyeq_\Lambda \mathbf{Y} \quad \Leftrightarrow \mathbf{X} - \mathbf{Y} = \mathbf{D} \in W_{+\Lambda}(\mathbf{O})$$

bzw. für die Bessermenge von $\mathbf{Y}$ die Darstellung als Minkowski-Summe

$$W_{+\Lambda}(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y} + W_{+\Lambda}(\mathbf{O}).$$

Diese Durchschnittsrelation $\succcurlyeq_\Lambda$ ist nun eine **Halbordnung des Vektorraums** $\mathbb{R}^{n+1}$, also eine Relation mit den fünf Eigenschaften der Reflexivität, Transitivität, Identitivität und Abgeschlossenheit bezüglich der nichtnegativen Skalarmultiplikation und bezüglich der Addition. Weiter ist die Relation $\succcurlyeq_\Lambda$ auch noch **konvex und monoton**. Dabei übernimmt die Durchschnittsrelation $\succcurlyeq_\Lambda$ die Eigenschaften der Reflexivität, Transitivität, Abgeschlossenheit, Konvexität und Monotonie schon von den einzelnen Endwert-Präferenzordnungen $\succcurlyeq_{\mathrm{E},q}$ ($q > 0$) bzw. von den damit übereinstimmenden Barwert-Präferenzordnungen $\succcurlyeq_{\mathrm{B},q}$, für welche diese Eigenschaften bei Pleier (2021), S. 113–116 gezeigt werden. Die Identitivität (Antisymmetrie) von $\succcurlyeq_\Lambda$ wird nachfolgend noch extra begründet.

Die spezielle Bessermenge $C := W_{+\Lambda}(\mathbf{O})$ von $\mathbf{O}$, also die Menge der Λ-nichtnegativen Vektoren von $\mathbb{R}^{n+1}$, ist als Durchschnitt der topologisch abgeschlossenen homogenen Halbräume $H^{\geq}_{\mathbf{A}(q),0}$, $q > 0$, die auch konvexe lineare Kegel sind, ebenfalls ein konvexer linearer Kegel. Es wird nun anschließend auch noch begründet, dass der konvexe lineare Kegel $C = W_{+\Lambda}(\mathbf{O})$ spitz ist, also keine Geraden durch den Nullpunkt enthält. Gleichbedeutend dazu ist (siehe Beweis von Zusatz 8.1.2, b bei Pleier 2021, S. 372), dass der zugehörige Linienraum, d. h. der größte im konvexen linearen Kegel enthaltene Vektorunterraum, trivial ist:

$$L := C \cap (-C) = O.$$

Dann ist auch jede Bessermenge $W_{+\Lambda}(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y} + W_{+\Lambda}(\mathbf{O})$ ($\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$) ein spitzer konvexer affiner Kegel mit **Y** als Scheitelpunkt (Spitze) und dem hier von **Y** unabhängigen spitzen konvexen linearen Kegel $W_{+\Lambda}(\mathbf{O})$.

Wenn nun noch die Trivialität des Linienraums $L = C \cap (-C)$ gezeigt ist (Beweis folgt unten), so erhält man die Identitivität (Antisymmetrie) von $\succcurlyeq_\Lambda$ folgendermaßen: Aus den Relationen $\mathbf{X} \succcurlyeq_\Lambda \mathbf{Y}$ und $\mathbf{Y} \succcurlyeq_\Lambda \mathbf{X}$ folgt wegen der Charakterisierung von $\succcurlyeq_\Lambda$ mittels C nämlich $\mathbf{D} := \mathbf{X} - \mathbf{Y} \in C$ und $-\mathbf{D} = \mathbf{Y} - \mathbf{X} \in C$, also

$$\mathbf{D} \in C \cap (-C) = L = O$$

und somit $\mathbf{D} = \mathbf{O}$ und $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$.

Demzufolge ist dann die Relation $\succcurlyeq_\Lambda$ eine Halbordnung (Teilweiseordnung) des Vektorraums $\mathbb{R}^{n+1}$ und die zugehörige Äquivalenzrelation (Indifferenzrelation) $\sim_\Lambda \; = \succcurlyeq_\Lambda \cap \preccurlyeq_\Lambda$ die Identität „=“ auf $\mathbb{R}^{n+1}$: Die Übereinstimmung der Λ-äquivalenten **X** und **Y** folgt nämlich nach dem Identitätssatz für Polynome (s. z. B. Hildebrandt 2006, S. 164, Korollar 2).

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \sim_\Lambda \mathbf{Y} \quad & (\mathbf{X} \text{ ist genau so SE-vorteilhaft wie } \mathbf{Y}) \\ & \Leftrightarrow E_n(\mathbf{X},q) = E_n(\mathbf{Y},q) \text{ für alle } q > 0 \\ & \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

Die zugehörige strenge Halbordnung $\succ_\Lambda \; = \succcurlyeq_\Lambda \setminus \sim_\Lambda$ wird beschrieben durch die Bedingung

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \succ_\Lambda \mathbf{Y} \quad & (\mathbf{X} \text{ ist SE-vorteilhafter als } \mathbf{Y}) \\ & \Leftrightarrow \quad \mathbf{X} \succcurlyeq_\Lambda \mathbf{Y} \wedge \mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y} \neq \mathbf{O} \\ & \Leftrightarrow \quad \mathbf{D} \succ_\Lambda \mathbf{O} \\ & \Leftrightarrow \quad \mathbf{X} \in \mathbf{Y} + (W_{+\Lambda}(\mathbf{O}) \setminus \{\mathbf{O}\}) \\ & \Leftrightarrow \quad \mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y} \neq \mathbf{O} \wedge E_n(\mathbf{D},q) \geq 0 \text{ für alle } q > 0 \\ & \Leftrightarrow \quad E_n(\mathbf{D},q) > 0 \text{ für } \mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y} \text{ und für alle } q > 0 \text{ bis auf maximal } n \text{ Nullstellen des Polynoms } E_n(\mathbf{D},q): \end{aligned}$$

Hätte nämlich $E_n(\mathbf{D},q)$ als Polynom n-ten Grades mindestens $n + 1$ verschiedene Nullstellen, so wäre $E_n(\mathbf{D},q)$ gleich dem Nullpolynom und sein Koeffizientenvektor **D** gleich **O** (Hildebrandt 2006, S. 162f).

Weiter wird unten noch bewiesen, dass die Halbordnung $\succcurlyeq_\Lambda$ im Gegensatz zu den einzelnen Präferenzordnungen $\succcurlyeq_{\mathrm{E},q}$ nicht die Eigenschaft der Totalität (der allgemeinen Vergleichbarkeit) besitzt und daher keine (Total-)Ordnung des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. Da aus der Relation $\mathbf{D} \geq \mathbf{O}$ auch die Relation $\mathbf{D} \succcurlyeq_\Lambda \mathbf{O}$ bzw. aus $\mathbf{X} \geq \mathbf{Y}$ auch $\mathbf{X} \succcurlyeq_\Lambda \mathbf{Y}$ folgt, ist die SE-Halbordnung $\succcurlyeq_\Lambda$ eine **Erweiterung der natürlichen Halbordnung** $\geq$ (größer-gleich). Der nichtnegative Orthant $\mathbb{R}^{n+1}_{\geq\mathbf{O}}$ ist also im Λ-nichtnegativen Kegel $W_{+\Lambda}(\mathbf{O})$ der SE-Halbordnung $\succcurlyeq_\Lambda = \Lambda$ enthalten. Der Λ-nichtnegative Kegel $W_{+\Lambda}(\mathbf{O})$ wiederum ist enthalten im polyedrischen (konvexen) linearen Kegel

$$T := \{\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n+1} : Z_0 \geq 0, Z_n \geq 0\}.$$

Es gilt also die Inklusionskette:

$$\mathbb{R}^{n+1}_{\geq\mathbf{O}} \subseteq W_{+\Lambda}(\mathbf{O}) \subseteq T.$$

Für $n = 1$ ist $\mathbb{R}^{2}_{\geq\mathbf{O}} = T$, sodass die beiden Kegel $\mathbb{R}^{2}_{\geq\mathbf{O}}$ und $W_{+\Lambda}(\mathbf{O})$ übereinstimmen:

$$\mathbb{R}^{2}_{\geq\mathbf{O}} = W_{+\Lambda}(\mathbf{O}).$$

Demzufolge stimmt für $n = 1$ wegen der Charakterisierung der Relation $\succcurlyeq_\Lambda$ durch die Menge der Λ-nichtnegativen Vektoren die SE–Halbordnung $\succcurlyeq_\Lambda$ mit der natürlichen Halbordnung $\geq$ des Raums $\mathbb{R}^2$ überein. Die strenge SE-Halbordnung $\succ_\Lambda$ ($\succcurlyeq_\Lambda \cap \neq$) stimmt mit der strengen natürlichen Halbordnung $\gneq$ ($\geq \cap \neq$) von $\mathbb{R}^2$ überein.

Für $n \geq 2$ ist der nichtnegative Orthant $\mathbb{R}^{n+1}_{\geq\mathbf{O}}$ aber eine echte Teilmenge des Λ-nichtnegativen Kegels $W_{+\Lambda}(\mathbf{O})$ und damit auch die natürliche Halbordnung eine echte Teilmenge der SE–Halbordnung (Beweis folgt unten):

$$\mathbb{R}^{n+1}_{\geq\mathbf{O}} \subsetneq W_{+\Lambda}(\mathbf{O}) \text{ für } n \geq 2.$$

Für $n = 2$ wird gezeigt, dass der Λ-nichtnegative Kegel $W_{+\Lambda}(\mathbf{O})$ ein von Ebenen und Parabeln begrenzter Teilraum des $\mathbb{R}^3$ ist. Eine grafische Darstellung wird in Abbildung 1 gegeben.

$$W_{+\Lambda}(\mathbf{O}) = \{\mathbf{D} \in \mathbb{R}^3 : D_0 \geq 0, D_2 \geq 0, D_1 \geq -2\sqrt{D_0 D_2}\}.$$

Beweis: 1) **Die Trivialität des Linienraums** $L := C \cap (-C)$: Es ist $\mathbf{Z} \in L := C \cap (-C)$ gleichbedeutend zu $\mathbf{Z}, -\mathbf{Z} \in C = W_{+\Lambda}(\mathbf{O})$ bzw. zu

$$E_n(\mathbf{Z},q) = \mathbf{A}(q)^\mathsf{T}\mathbf{Z} = Z_0 q^n + \ldots + Z_n = 0 \text{ für alle } q > 0.$$

Für festen Koeffizientenvektor $\mathbf{Z} \in L$ ist die Polynomfunktion $E_n(q) := E_n(\mathbf{Z},q)$ auf der positiven Halbachse identisch Null. Sie hat also unendlich viele Nullstellen und ist somit nach dem Nullstellensatz der komplexen Funktionentheorie oder nach dem Gauß-d'Alembertschen Fundamentalsatz der Algebra (nach Jean d'Alembert 1746 und Carl Friedrich Gauß 1799) gleich dem Nullpolynom mit $\mathbf{Z} = \mathbf{O}$ (siehe z. B. Hildebrandt 2006, S. 163, Satz 2). Zum Nachweis von $\mathbf{Z} = \mathbf{O}$ lässt sich jedoch hier auch ein elementarer Beweis nach dem Prinzip der vollständigen Induktion angeben: Aus $E_n(q) \equiv 0$ in $]0,\infty[$ folgt zunächst der Induktionsbeginn für $k = 0$:

$$Z_n = \lim_{q \searrow 0} E_n(q) = 0.$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt unter Verwendung der Induktionsannahme $Z_n = \ldots = Z_{n-k+1} = 0$ für k-1 ($k \in \{1,\ldots,n\}$) dann auch noch

$$Z_{n-k} = \lim_{q \searrow 0}\left(Z_0 q^{n-k} + \ldots + Z_{n-k-1} q + Z_{n-k}\right) = \lim_{q \searrow 0} \frac{1}{q^k} E_n(\mathbf{Z},q) = 0.$$

Damit ist der Induktionsschluss k-1 $\longrightarrow k$ bewiesen und es gilt $Z_n = \ldots = Z_0 = 0$, also $\mathbf{Z} = \mathbf{O}$ und $L = O$.

2) **Die Halbordnung $\succcurlyeq_\Lambda$ ist nicht total**: Dazu wird nachfolgend ein spezielles $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus (C \cup (-C))$ angegeben, für welches also $\mathbf{Z} \notin C = W_{+\Lambda}(\mathbf{O})$ und $-\mathbf{Z} \notin C$ bzw. $\mathbf{Z} \not\succcurlyeq_\Lambda \mathbf{O}$ und $-\mathbf{Z} \not\succcurlyeq_\Lambda \mathbf{O}$ gilt. Auf Grund der zweiten Bedingung gibt es dann ein $q' > 0$ mit

$$-E_n(\mathbf{Z},q') = E_n(-\mathbf{Z},q') < 0,$$

und folglich

$$E_n(\mathbf{O},q') = 0 < E_n(\mathbf{Z},q').$$

Daher gilt neben $\mathbf{Z} \not\succcurlyeq_\Lambda \mathbf{O}$ auch noch $\mathbf{O} \not\succcurlyeq_\Lambda \mathbf{Z}$ und das spezielle Paar $(\mathbf{Z},\mathbf{O})$ ist mittels der Halbordnung $\succcurlyeq_\Lambda$ nicht vergleichbar. Somit ist die Halbordnung $\succcurlyeq_\Lambda$ nicht total.
Für $\mathbf{Z}$ kann man beispielsweise $\mathbf{Z} = (-1,0,\ldots,0,1)^\mathsf{T}$ wählen. Für dieses $\mathbf{Z}$ erhält man die Endwertfunktion

$$E_n(\mathbf{Z},q) = -q^n + 1,$$

dann mit $q'' := 2$ aus $E_n(\mathbf{Z},q'') = 1 - 2^n < 0$ die Bedingung $\mathbf{Z} \not\succcurlyeq_\Lambda \mathbf{O}$ und mit $q' := ½$ aus $E_n(-\mathbf{Z},q') = 1/2^n - 1 < 0$ die Bedingung $-\mathbf{Z} \not\succcurlyeq_\Lambda \mathbf{O}$.

3) **Die Inklusion** $W_{+\Lambda}(\mathbf{O}) \subseteq T = \{\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n+1} : Z_0 \geq 0, Z_n \geq 0\}$: Aus $\mathbf{Z} \in W_{+\Lambda}(\mathbf{O})$ bzw. $E_n(\mathbf{Z},q) \geq 0$ für alle $q > 0$ folgt mittels der Grenzwertbildung

$$Z_n = \lim_{q \searrow 0}\left(Z_0 q^n + \ldots + Z_{n-1} q + Z_n\right) = \lim_{q \searrow 0} E_n(\mathbf{Z},q) \geq 0.$$

Außerdem folgt aus $B_n(\mathbf{Z},q) = E_n(\mathbf{Z},q)/q^n \geq 0$ für alle $q > 0$ durch Übergang zum Grenzwert

$$Z_0 = \lim_{q \to \infty}\left(Z_0 + \frac{Z_1}{q} + \ldots + \frac{Z_n}{q^n}\right) = \lim_{q \to \infty} B_n(\mathbf{Z},q) \geq 0,$$

also insgesamt $\mathbf{Z} \in T$.

4) **Die Inklusion** $\mathbb{R}^{n+1}_{\geq \mathbf{O}} \subseteq W_{+\Lambda}(\mathbf{O})$: Aus $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n+1}_{\geq \mathbf{O}}$ bzw. $\mathbf{Z} \geq \mathbf{O}$ folgt für jedes $q > 0$ wegen $\mathbf{A}(q) > \mathbf{O}$ auch die Ungleichung $E_n(\mathbf{Z},q) = \mathbf{A}(q)^\mathsf{T}\mathbf{Z} \geq 0$, also $\mathbf{Z} \in W_{+\Lambda}(\mathbf{O})$.
Für $n = 1$ ist $T = \mathbb{R}^2_{\geq \mathbf{O}}$, sodass nach Teil 3) auch die umgekehrte Inklusion gilt: $W_{+\Lambda}(\mathbf{O}) \subseteq T = \mathbb{R}^2_{\geq \mathbf{O}}$. Insgesamt ist für $n = 1$ also

$$\mathbb{R}^2_{\geq \mathbf{O}} = W_{+\Lambda}(\mathbf{O}).$$

Die echte Inklusion $\mathbb{R}^{n+1}_{\geq \mathbf{O}} \subsetneq W_{+\Lambda}(\mathbf{O})$ für $n \geq 2$: Für $n \geq 2$ ist der nichtnegative Orthant $\mathbb{R}^{n+1}_{\geq \mathbf{O}}$ eine echte Teilmenge von $W_{+\Lambda}(\mathbf{O})$, da es ein $\mathbf{X} \in W_{+\Lambda}(\mathbf{O}) \setminus \mathbb{R}^{n+1}_{\geq \mathbf{O}}$ gibt. Zum Beweis wird zwischen geradem und ungeradem Grad des Polynoms $E_n(\mathbf{Z},q)$ unterschieden. Beispielsweise gelten für geraden Grad $n \geq 2$ und das spezielle $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit den Komponenten

$$X_j = (-1)^j \binom{n}{j} = (-1)^j \frac{n!}{(n-j)!\,j!}$$

die Ungleichungen

$$E_n(\mathbf{X},q) = \sum_{j=0}^{n} X_j q^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^{n-j} (-1)^j = (q-1)^n \geq 0 \text{ für alle } q > 0$$

und somit $\mathbf{X} \in W_{+\Lambda}(\mathbf{O})$. Es gilt aber nicht $\mathbf{X} \geq \mathbf{O}$ bzw. $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}_{\geq \mathbf{O}}$. Beispielsweise gelten bei $n = 2$ für den Zahlungsstrom $\mathbf{X} = (1,-2,1)^\mathsf{T}$ die Relationen $\mathbf{X} \succcurlyeq_\Lambda \mathbf{O}$ und $\mathbf{X} \not\geq \mathbf{O}$.
Für ungeraden Grad $m \geq 3$ ist $m = n + 1$ mit geradem $n \geq 2$. Setzt man $Z_j = X_j$ für $j = 0,\ldots,n$ mit den oben an-

gegebenen X_j und $Z_m = 0$, so gelten für dieses $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{m+1}$ die Ungleichungen

$$E_m(\mathbf{Z},q) = \sum_{j=0}^{m} Z_j q^{m-j} = q\sum_{j=0}^{n} X_j q^{n-j} = q(q - 1)^n \geq 0 \text{ für alle } q > 0$$

und somit $\mathbf{Z} \in W_{+\Lambda}(\mathbf{O})$. Wegen $\mathbf{X} \ngeq \mathbf{O}$ ist auch $\mathbf{Z} \ngeq \mathbf{O}$ bzw. $\mathbf{Z} \notin \mathbb{R}^{m+1}_{\geq\mathbf{O}}$.

5) **Die Beschreibung des Λ-nichtnegativen Kegels** $W_{+\Lambda}(\mathbf{O})$ der SE-Halbordnung für $n = 2$: Da nach Teil 3) des Beweises der Kegel $W_{+\Lambda}(\mathbf{O})$ im polyedrischen Kegel T liegt, wird $W_{+\Lambda}(\mathbf{O})$ beschrieben durch die unendlich vielen Ungleichungen

$$D_2 \geq 0,\ D_0 \geq 0,\ D_1 \geq - D_2/q - D_0 q \text{ für alle } q > 0$$

bzw. durch die drei Ungleichungen

$$D_2 \geq 0,\ D_0 \geq 0,\ D_1 \geq \sup_{q>0} h(D_2, D_0, q) =: H(D_2,D_0)$$

mit der Hilfsfunktion

$$h(D_2,D_0,q) := - D_2/q - D_0 q.$$

Betrachtet man zu dem fest gedachten Paar $(D_2,D_0) \geq (0,0)$ noch die Hilfsfunktion

$$f(q) := h(D_2,D_0,q),$$

so gilt

$$f(q) \equiv 0 \quad \text{im Fall } D_2 = D_0 = 0,$$
$$f(q) = - D_0 q \quad \text{im Fall } D_2 = 0,\ D_0 > 0,$$
$$f(q) = - D_2/q \quad \text{im Fall } D_0 = 0,\ D_2 > 0,$$

also in allen diesen drei Fällen

$$H(D_2,D_0) = 0.$$

Es ist jetzt also nur noch für den Fall $D_0 D_2 > 0$ der Wert $H(D_2,D_0)$ zu bestimmen. Die Ableitung

$$f'(q) = D_2/q^2 - D_0$$

der Funktion $f(q)$ hat die positive Nullstelle $q_0 = \sqrt{D_2}\big/\sqrt{D_0}$ und es ist $f'(q) > 0$ in $]0,q_0[$ und $f'(q) < 0$ in $]q_0,\infty[$. Daher ist q_0 die Stelle eines Maximums der Funktion $f(q)$ in $]0,\infty[$ mit dem Funktionswert

$$f(q_0) = - 2\sqrt{D_0 D_2} =: - w(D_2,D_0).$$

Somit ergibt sich im Fall $D_0 D_2 > 0$ der Wert

$$H(D_2,D_0) = - 2\sqrt{D_0 D_2}\,.$$

Auch insgesamt erhält man für alle D_2, $D_0 \geq 0$ den Wert

$$H(D_2,D_0) = - 2\sqrt{D_0 D_2} = - w(D_2,D_0).$$

Für die eben bewiesene Ungleichung

$$h \leq H = - w \text{ bzw. } g := - h \geq w \text{ für } q > 0,\ D_0,\ D_2 \geq 0$$

gibt es auch einen elementaren Beweis: Bei fest vorgegebenen Zahlen D_0, D_2, $q \in \mathbb{R}$ mit $D_0 \cdot D_2 \geq 0$ und $q > 0$ ergibt sich aus

$$g^2 - 4D_0 D_2 = D_2^2/q^2 + 2D_2 D_0 + D_0^2 q^2 - 4D_0 D_2 = (D_2/q - D_0 q)^2 \geq 0$$

die Ungleichung

$$g^2 \geq 4D_0 D_2$$

und mit anschließendem Wurzelziehen die Ungleichung

$$|g| \geq w.$$

In der Ungleichung gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $D_2 = D_0 q^2$ gilt. Aus dieser Ungleichung erhält man im Fall $q > 0$, D_0, $D_2 \geq 0$ wegen $g = D_2/q + D_0 q \geq 0$, $|g| = g$ die Ungleichung

$$g \geq w \text{ bzw. } h \leq - w$$

und im Fall $q > 0$, D_0, $D_2 \leq 0$ die Ungleichung

$$- g \geq w \text{ bzw. } h \geq w.$$

Daher ergibt sich für den Λ-nichtnegativen Kegel $W_{+\Lambda}(\mathbf{O})$ der von der D_1,D_2-Ebene ($D_0 = 0$), der D_0,D_1-Ebene ($D_2 = 0$) und den Parabeln $D_2 = D_1^2/(4D_0)$ ($D_0 > 0$ fest) und $D_0 = D_1^2/(4D_2)$ ($D_2 > 0$ fest) begrenzte Bereich

$$W_{+\Lambda}(\mathbf{O}) = \{\mathbf{D} \in \mathbb{R}^3 : D_0 \geq 0,\ D_2 \geq 0,\ D_1 \geq - 2\sqrt{D_0 D_2}\,\}. \qquad \square$$

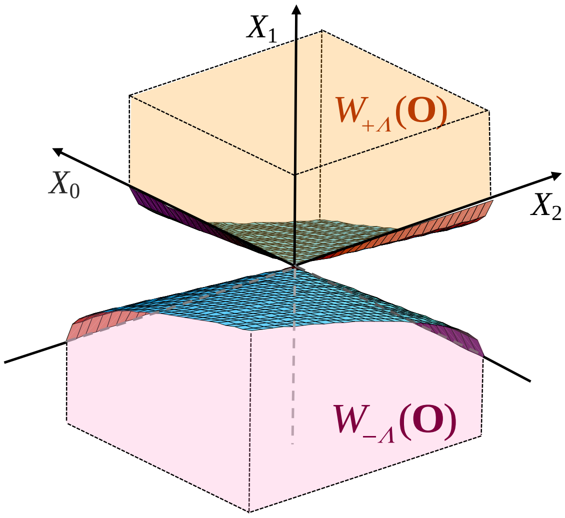

Abb. 1 Der Λ-nichtnegative Kegel $W_{+\Lambda}(\mathbf{O})$ und der Λ-nichtpositive Kegel $W_{-\Lambda}(\mathbf{O}) = - W_{+\Lambda}(\mathbf{O})$ der SE-Halbordnung $\succcurlyeq_\Lambda = \Lambda$ für die Laufzeit $n = 2$

Literatur

Hildebrandt S. (2006), Analysis 1, Springer, Berlin Heidelberg New York, ISBN 978-3-540-25368-6

Pleier R. (2021), Finanzmathematik, 2. Auflage, Tredition, Hamburg, ISBN 978-3-347-35460-9