

Eindeutige Duplizierung und Replizierung mit speziellen Supplementsystemen

Rudolf Pleier

D-92694 Etzenricht, Mai 2015

Inhaltsverzeichnis¹

1	Existenz und Einzigkeit der Duplizierung und der Replizierung mit Termingeschäften ..	3
1.1	Ein Supplementsystem mit speziellen Termingeschäften	3
1.2	Duplizierung mit den Termingeschäften	6
1.3	Replizierung mit den Termingeschäften.....	10
2	Existenz und Einzigkeit der Duplizierung und der Replizierung mit Kassageschäften ..	12
2.1	Ein Supplementsystem mit speziellen Kassageschäften	12
2.2	Duplizierung mit den Kassageschäften.....	15
2.3	Replizierung mit den Kassageschäften	16
3	Monotonie der Präferenzordnungen zu den speziellen Supplementsystemen	18
3.1	Monotonie der R-Präferenzordnung beim Supplementsystem der Termingeschäfte	18
3.2	Monotonie der D-Präferenzordnung beim Supplementsystem der Termingeschäfte	21
3.3	Monotonie der R-Präferenzordnung beim Supplementsystem der Kassageschäfte	22
3.4	Monotonie der D-Präferenzordnung beim Supplementsystem der Kassageschäfte.....	23
4	Stetigkeit der Präferenzordnungen zu den speziellen Supplementsystemen.....	23
	Literatur	25

¹ Der vorliegende Artikel liefert die Beweise zum Abschnitt 8.4 im Buch ‚Finanzmathematik‘ des Autors, die dort weggelassen wurden. Die hier im Text gegebenen Hinweise auf verschiedene Abschnitte beziehen sich ebenfalls auf dieses Buch.

1 Existenz und Einzigkeit der Duplizierung und der Replizierung mit Termingeschäften

1.1 Ein Supplementsystem mit speziellen Termingeschäften

Für die Duplizierung (Nachbildung, additive Zerlegung) und die Replizierung (Glattstellung, additive Ergänzung) der Zahlungsströme $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ wird jetzt ein Supplementsystem L von $(n-j+1)$ -periodischen Termingeschäften auf dem unvollkommenen Kapitalmarkt K vorausgesetzt, das eine Verallgemeinerung des von Kruschwitz (1998), S. 48f., verwendeten Systems von einperiodischen Termingeschäften ist. Für dieses Supplementsystem L und für jede beliebige Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu)$ soll nun bewiesen werden, dass für jeden Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ die Duplizierung bzw. die Replizierung auf genau eine Weise möglich ist.

Nach der Festlegung einer dem Entscheider passenden Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu)$, eines geeigneten Supplementsystems $L \subseteq K$ und eines beliebig fixierten Basiszahlungsstroms \mathbf{B} (bei der Replizierung) kann mit den Konzepten der Duplizierung bzw. Replizierung jedem Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit Hilfe des Supplements $\mathbf{S}(\mathbf{X}) \in C_{M^n}$ aus der zulässigen Supplementmenge C_{M^n} eindeutig ein realer Margenzahlungsstrom $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X}))$ zugeordnet werden, der zum Vergleich und zur Beurteilung der $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ verwendet werden kann. Basierend auf die Existenz und Einzigkeit der Duplizierung bzw. der Replizierung kann im Raum \mathbb{R}^{n+1} eine Präferenzordnung definiert werden.

Die Definition eines Supplementsystems L findet man in Abschnitt 5.1.3, S. 123, des unten angegebenen Buchs des Autors, die Definition der zulässigen Supplementmenge C_{M^n} unter Beachtung der von Kruschwitz (1998), S. 57, formulierten Supplementbedingung als Verbot der gleichzeitigen Ausführung von Ergänzungsgeschäften findet man in Abschnitt 5.1.5. Eine möglichst allgemeine Definition der Duplizierung bzw. Replizierung wird in den Abschnitten 5.1.4 bis 5.1.9 hinsichtlich deren Existenz und Einzigkeit untersucht. Plausibilitätsbetrachtungen zum Ansatz der Duplizierung und Replizierung erfolgen in den Abschnitten 2.2.1 und 2.2.2.

In der Menge K der Kapitalmarktgeschäfte des unvollkommenen Kapitalmarkts soll jetzt also ein System L von n Investitionen

$$\mathbf{I}^j = \mathbf{S}_H^j = \mathbf{T}_H^j$$

und n Finanzierungen

$$\mathbf{F}^j = \mathbf{S}_S^j = -\mathbf{T}_S^j$$

mit der durch die elementaren Zahlungsströme $\mathbf{T}_{E_j}^j$ festgelegten Zahlungsstromstruktur vorhanden sein:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{E_1}^1 &= (-1, T_{E_1,1}^1, \dots, T_{E_1,n}^1)^\top, \\ \mathbf{T}_{E_2}^2 &= (0, -1, T_{E_2,2}^2, \dots, T_{E_2,n}^2)^\top, \\ &\dots \\ \mathbf{T}_{E_j}^j &= (0, \dots, 0, -1, T_{E_j,j}^j, \dots, T_{E_j,n}^j)^\top, \\ &\dots \\ \mathbf{T}_{E_n}^n &= (0, \dots, \dots, 0, -1, T_{E_n,n}^n)^\top, \end{aligned}$$

mit den Komponenten

$$T_{E_j,k}^j = 0 \text{ für } k = 0, \dots, j-2,$$

$$T_{E_j, j-1}^j = -1$$

und den Vorzeichenbedingungen

$$T_{E_j, j}^j > 0,$$

$$T_{E_j, k}^j \geq 0 \text{ für } k = j+1, \dots, n,$$

$j = 1, \dots, n$, $E_j \in M = \{H, S\}$. Die Zahlungsströme $\mathbf{T}_{E_j}^j$ sind Termingeschäfte im Zeitintervall $[j-1, n]$ mit der Laufzeit $n-j+1$. Dabei ist neben $\mathbf{F} = \mathbf{T}_H^j \in K$ im Allgemeinen $\mathbf{T}_S^j \notin K$ und nur $\mathbf{F}^j = -\mathbf{T}_S^j$ ein Kapitalmarktgeschäft. Diese elementaren Zahlungsströme $\mathbf{T}_{E_j}^j$ werden für die elegantere Formulierung des Beweises der eindeutigen Duplizierung bzw. Replizierung verwendet. Mit diesen kann nämlich auch bei negativem λ_j mit $\lambda_j \mathbf{T}_S^j = (-\lambda_j) \cdot \mathbf{F}^j$ auf die formal gleiche Weise wie bei nichtnegativem λ_j mit $\lambda_j \mathbf{T}_H^j = \lambda_j \cdot \mathbf{F}$ ein Supplement des Kapitalmarkts gebildet werden. Bei den Investitionen $\mathbf{T}_{E_j}^j$ erfolgt die erste Zahlung zum Zeitpunkt $t = j-1$ und zwar als Auszahlung von einer Geldeinheit: $T_{E_j, j-1}^j = -1$. Zum darauffolgenden Zeitpunkt $t = j$ erfolgt eine Einzahlung ($T_{E_j, j}^j > 0$) und zu den anschließenden Zeitpunkten erfolgen höchstens Einzahlungen, aber keine Auszahlungen mehr ($T_{E_j, k}^j \geq 0$, $k = j+1, \dots, n$). Diese Zahlungsstromstruktur gleicht einer einmaligen Anlage zum Zeitpunkt $t = j-1$ auf einem Anlagekonto, bei der zum unmittelbar nachfolgenden Zeitpunkt $t = j$ eine Abhebung vom Anlagekonto erfolgt und zu den weiteren Zeitpunkten höchstens Abhebungen und keine weiteren Anlagen erfolgen.

Die hier vom Zinssatztyp $E_j = H, S$ abhängigen $(n-j+1)$ -periodischen Termingeschäfte $\mathbf{T}_{E_j}^j$ sind eine Verallgemeinerung der in Abschnitt 4.1.4 behandelten $(n-j+1)$ -periodischen Termingeschäfte \mathbf{T}^j des vollkommenen Kapitalmarkts. Als Spezialfall erhält man mit

$$T_{E_j, j}^j = q_{jE_j} = 1 + i_{jE_j} > 0 \text{ und}$$

$$T_{E_j, k}^j = 0 \text{ für } k = j+1, \dots, n$$

die von Kruschwitz (1998), S. 48f, verwendeten einperiodischen Termingeschäfte

$$\mathbf{T}_{E_j}^j = (0, \dots, 0, -1, +q_{jE_j}, 0, \dots, 0)^\top,$$

die eine Verallgemeinerung der in Abschnitt 4.1.4 behandelten einperiodischen Termingeschäfte des vollkommenen Kapitalmarkts sind.

Eine Modifikation $\mathbf{R}_{E_j}^j$ der Termingeschäfte $\mathbf{T}_{E_j}^j$ im Zusammenhang mit der Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \hat{\mathbf{V}}(\mu)$ der Endentnahme wird in Abschnitt 6.1 bei der Darstellung der klassischen Endwertmethode als Spezialfall einer R-Präferenzordnung verwendet. Diese Termingeschäfte $\mathbf{R}_{E_j}^j$ haben die Komponenten

$$R_{E_j, k}^j = 0 \text{ für } k = 0, \dots, j-2 \text{ und } k = j, \dots, n-1,$$

$$R_{E_j, j-1}^j = -1,$$

$$R_{E_j, n}^j > 0$$

und somit die Zahlungsstromstruktur von Nullkuponanleihen:

$$\mathbf{R}_{E_j}^j = (0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0, R_{E_j, n}^j)^\top.$$

Da diese Termingeschäfte $\mathbf{R}_{E_j}^j$ keinen Spezialfall der Termingeschäfte $\mathbf{T}_{E_j}^j$ darstellen, muss in Abschnitt 6.1 die Existenz und Einzigkeit der Replizierung mittels dieser Supplemente $\mathbf{R}_{E_j}^j$ noch extra bewiesen werden.

Es wird nun die besondere Wirkung beschrieben, wenn ein geeignetes Vielfaches des Zahlungsstroms $\mathbf{T}_{E_j}^j$ mit einem anderen Zahlungsstrom kombiniert wird. Dazu wird der einfache

Fall betrachtet, dass zum Zeitpunkt $t=j-1$ ($j \in \{1, \dots, n\}$) ein Finanzmittelbestand oder eine Zahlung λ_j vorliegt. Dieser bzw. diese kann auch als ein spezieller Zahlungsstrom

$$\mathbf{Z}^j = (0, \dots, 0, \lambda_j, 0, \dots, 0)^\top = \lambda_j \mathbf{e}_j$$

angesehen werden. Dabei ist \mathbf{e}_j der j -te Standardbasisvektor des \mathbb{R}^{n+1} . Zur Zahlung $Z_{j-1}^j = \lambda_j$ von \mathbf{Z}^j kann nun mit dem elementaren Zahlungsstrom $\mathbf{T}_{E_j}^j$ auf dem Kapitalmarkt das Supplement (Ergänzungsgeschäft)

$$\mathbf{T} = \lambda_j \cdot \mathbf{T}_{E_j}^j = \lambda_j \cdot (0, \dots, 0, -1, T_{E_j, j}^j, \dots, T_{E_j, n}^j)^\top \in K \text{ mit}$$

$$E_j = H \text{ bei } \lambda_j \geq 0 \text{ und}$$

$$E_j = S \text{ bei } \lambda_j < 0$$

gebildet werden, das für die zeitliche Verschiebung (Transposition) der Zahlung λ_j verwendet werden kann. Nimmt man nämlich zum Zahlungsstrom \mathbf{Z}^j das Kapitalmarktgeschäft \mathbf{T} hinzu, so erhält man den Kombinationszahlungsstrom

$$\mathbf{Y}^j = \mathbf{Z}^j + \mathbf{T} = (0, \dots, 0, 0, \lambda_j T_{E_j, j}^j, \dots, \lambda_j T_{E_j, n}^j)^\top$$

mit

$$Y_k^j = 0 \quad \text{für } k = 0, \dots, j-1,$$

$$Y_k^j = \lambda_j T_{E_j, k}^j \quad \text{für } k = j, \dots, n.$$

Die Zahlung λ_j des Zeitpunkts $t=j-1$ kann also mit dem Supplement \mathbf{T} zum Zeitpunkt $t=j-1$ auf den Wert Null glattgestellt (repliziert) und als „aufgezinst“ (mit $T_{E_j, k}^j$ multiplizierte) Zahlungen auf die nachfolgenden Zeitpunkte $t=k=j, \dots, n$ verschoben (transferiert, transponiert) werden. Hinsichtlich dieser Wirkung kann das Supplement (Ergänzungsgeschäft) \mathbf{T} auch genauer als ein zur Zahlung λ_j gehöriges Transponement (Verschiebungsgeschäft) bezeichnet werden. Da hier auf nachfolgende Zeitpunkte transponiert wird, kann \mathbf{T} auch als ein zu λ_j gehöriges Postponement bezeichnet werden.

Die zu einem Indexvektor $\mathbf{E} = (E_1, \dots, E_n) \in M^n$ aus den $\mathbf{T}_{E_j}^j$ gebildete $(n+1) \times n$ -Matrix

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{E}} &= (\mathbf{T}_{E_1}^1, \dots, \mathbf{T}_{E_n}^n) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ T_{E_1, 1}^1 & -1 & 0 & & & \cdot \\ \cdot & T_{E_2, 2}^2 & -1 & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ T_{E_1, j}^1 & & \cdot & T_{E_j, j}^j & -1 & 0 \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & -1 \\ T_{E_1, n}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & T_{E_n, n}^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n} \end{aligned}$$

hat eine „untere Dreiecksgestalt“. Die Bezeichnung ist nicht ganz exakt, da $T_{\mathbf{E}}$ keine quadratische Matrix, sondern eine $(n+1) \times n$ -Matrix ist. Die Matrix $T_{\mathbf{E}}$ besteht aus n linear unabhängigen Spalten und hat somit $\text{Rang } T_{\mathbf{E}} = n$. Ebenso hat dann auch die zu \mathbf{E} gehörige Matrix

$$L_{\mathbf{E}} = (\mathbf{S}_{E_1}^1, \dots, \mathbf{S}_{E_n}^n)$$

vollen Spaltenrang. Der Normalenvektor $\mathbf{P}_{\mathbf{E}} = (P_{\mathbf{E}, 0}, \dots, P_{\mathbf{E}, n})^\top$ ($P_{\mathbf{E}, n} := 1$) der Hyperebene

$$H_{\mathbf{E}} = \text{lin } L_{\mathbf{E}} = \text{lin } T_{\mathbf{E}}$$

ist Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems $\mathbf{P}_{\mathbf{E}}^\top T_{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ und berechnet sich nach der Festlegung $P_{\mathbf{E}, n} = 1$ sukzessive für $j = n-1, \dots, 0$ zu

$$P_{\mathbf{E}, n-1} = T_{E_n, n}^n P_{\mathbf{E}, n},$$

...

$$P_{\mathbf{E}, j-1} = T_{E_j, j}^j P_{\mathbf{E}, j} + \dots + T_{E_j, n}^j P_{\mathbf{E}, n} \quad (j = n, \dots, 1),$$

$$\dots$$

$$P_{\mathbf{E},0} = T_{E_1,1}^1 P_{\mathbf{E},1} + \dots + T_{E_1,n}^1 P_{\mathbf{E},n}.$$

Ausgehend von $P_{\mathbf{E},n} = 1 > 0$ folgt bei Verwendung der Vorzeichenbedingungen $T_{E_j,j}^j > 0$ und $T_{E_j,k}^j \geq 0$ für $k = j+1, \dots, n$ mittels vollständiger Induktion für alle Indizes $j = n, \dots, 0$ die Positivität der Komponenten $P_{\mathbf{E},j}$ des Normalenvektors $\mathbf{P}_{\mathbf{E}}$:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{E}} > \mathbf{0}.$$

Nach dem Satz über die Disjunktheit einer Hyperebene und des schwach positiven Orthanten haben die Hyperebene $H_{\mathbf{E}}$ mit dem positiven Normalenvektor $\mathbf{P}_{\mathbf{E}}$ und der nichtnegative Orthant nur den trivialen Durchschnitt ($H_{\mathbf{E}} \cap \mathbb{R}_{+0}^{n+1} = O$). Insbesondere ist dann der konvexe lineare Kegel $C_{\mathbf{E}} (\subseteq H_{\mathbf{E}})$, $\mathbf{E} \in M^n$, und insgesamt die zulässige Supplementmenge C_{M^n} arbitragefrei.

Die Duplizierung und die Replizierung erfolgt mit einem speziellen Supplementansatz $\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{S}$, der durch die Supplementbedingung

$$(SB) \quad \mathbf{S} = L_{\mathbf{E}} \boldsymbol{\lambda} \quad \text{mit } \mathbf{E} \in M^n, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}_{+0}^n,$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad \text{für } E_j = H,$$

$$\lambda_j > 0 \quad \text{für } E_j = S.$$

beschrieben wird. Bei Verwendung der Matrix $T_{\mathbf{E}}$ an Stelle von $L_{\mathbf{E}}$ lautet die Supplementbedingung

$$(SBT) \quad \mathbf{S} = T_{\mathbf{E}} \boldsymbol{\lambda} \quad \text{mit } \mathbf{E} \in M^n, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n,$$

$$E_j = H \quad \text{bei } \lambda_j \geq 0 \quad \text{und}$$

$$E_j = S \quad \text{bei } \lambda_j < 0.$$

Eine Linearkombination der elementaren Zahlungsströme $\mathbf{T}_{E_j}^j$, für welche die Supplementbedingung (SBT) erfüllt ist, wird hier auch als eine SB-Linearkombination der $\mathbf{T}_{E_j}^j$ bezeichnet.

Nachfolgend wird nun bewiesen, dass das Supplementensystem L sowohl eine eindeutige Duplizierung als auch eine eindeutige Replizierung der Zahlungsströme des \mathbb{R}^{n+1} ermöglicht.

1.2 Duplizierung mit den Termingeschäften

Die Duplizierungsgleichung

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{X} - \mathbf{U} =: \boldsymbol{\zeta}$$

ergibt mit dem Supplementansatz $\mathbf{S} = T_{\mathbf{E}} \boldsymbol{\lambda}$ die Vektorgleichung

$$T_{\mathbf{E}(\mathbf{X})} \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\zeta} - \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) =: -\mathbf{s}(\mu(\mathbf{X}))$$

mit einem $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^n$, $\mu = \mu(\mathbf{X}) \in J$ und einem Indexvektor $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{X}) \in M^n$, der die Supplementbedingung (SBT) erfüllt. In der Matrixschreibweise lautet die Duplizierungsgleichung

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ T_{E_1,1}^1 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & T_{E_2,2}^2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ T_{E_1,j}^1 & \cdot & T_{E_j,j}^j & -1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ T_{E_1,n}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & T_{E_n,n}^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_0 - V_0(\mu) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \zeta_n - V_n(\mu) \end{pmatrix}.$$

Gemäß der Beweisidee von Kruschwitz (1976), S. 18–20, für die Replizierung mit einperiodischen Supplementen wird jetzt zu einem fest vorgegebenen Beurteilungsparameter $\mu \in J$ das in $\boldsymbol{\lambda}$ lineare Gleichungssystem

$$T_E \boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{s}(\boldsymbol{\mu}) := \boldsymbol{\zeta} - \mathbf{V}(\boldsymbol{\mu})$$

betrachtet. Da die Matrix T_E eine untere Dreiecksgestalt hat mit den von den Supplementtypen E_j unabhängigen Elementen -1 in der Hauptdiagonalen, können aus den ersten n Zeilen des Gleichungssystems sukzessive für $j = 1, \dots, n$ sowohl die Transformationsparameter $\lambda_j = \lambda_j(\boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}$ als auch die Supplementtypen $E_j = E_j(\boldsymbol{\mu}) \in M$ gemäß der Supplementbedingung (SBT)

$$\begin{aligned} E_j(\boldsymbol{\mu}) &= H && \text{bei } \lambda_j(\boldsymbol{\mu}) \geq 0, \\ E_j(\boldsymbol{\mu}) &= S && \text{bei } \lambda_j(\boldsymbol{\mu}) < 0 \end{aligned}$$

bestimmt werden. Die Funktionen $\lambda_j(\boldsymbol{\mu})$ und $E_j(\boldsymbol{\mu})$, die im Allgemeinen zunächst noch nicht mit $\lambda_j(\mathbf{X})$ und $E_j(\mathbf{X})$ übereinstimmen, berechnen sich somit nach der folgenden Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\boldsymbol{\mu}) &= s_0(\boldsymbol{\mu}), && E_1(\boldsymbol{\mu}) = H && \text{bei } \lambda_1(\boldsymbol{\mu}) \geq 0, && E_1(\boldsymbol{\mu}) = S && \text{bei } \lambda_1(\boldsymbol{\mu}) < 0, \\ \lambda_2(\boldsymbol{\mu}) &= s_1(\boldsymbol{\mu}) + T_{E_1(\boldsymbol{\mu}),1}^1 \lambda_1(\boldsymbol{\mu}), && E_2(\boldsymbol{\mu}) = H && \text{bei } \lambda_2(\boldsymbol{\mu}) \geq 0, && E_2(\boldsymbol{\mu}) = S && \text{bei } \lambda_2(\boldsymbol{\mu}) < 0, \\ &\dots && && && && \\ \lambda_j(\boldsymbol{\mu}) &= s_{j-1}(\boldsymbol{\mu}) + \gamma_{j-1}(\boldsymbol{\mu}) && \text{mit } \gamma_{j-1}(\boldsymbol{\mu}) := \sum_{k=1}^{j-1} T_{E_k(\boldsymbol{\mu}),j-1}^k \cdot \lambda_k(\boldsymbol{\mu}), && && && \\ E_j(\boldsymbol{\mu}) &= H && \text{bei } \lambda_j(\boldsymbol{\mu}) \geq 0, && E_j(\boldsymbol{\mu}) = S && \text{bei } \lambda_j(\boldsymbol{\mu}) < 0 && (j = 2, \dots, n), \\ &\dots && && && && \\ \lambda_n(\boldsymbol{\mu}) &= s_{n-1}(\boldsymbol{\mu}) + \gamma_{n-1}(\boldsymbol{\mu}), && E_n(\boldsymbol{\mu}) = H && \text{bei } \lambda_n(\boldsymbol{\mu}) \geq 0, && E_n(\boldsymbol{\mu}) = S && \text{bei } \lambda_n(\boldsymbol{\mu}) < 0. \end{aligned}$$

Hier bei der Duplizierung ist

$$\begin{aligned} \varphi_j(\boldsymbol{\mu}) &:= -\lambda_j(\boldsymbol{\mu}) \\ &= X_{j-1} + \sum_{k=1}^{j-1} T_{E_k(\boldsymbol{\mu}),j-1}^k \cdot \varphi_k(\boldsymbol{\mu}) - U_{j-1} - V_{j-1}(\boldsymbol{v}) \quad (j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

der zum Zeitpunkt $t = j-1$ vorhandene Finanzmittelbestand, der sich als Summe der Zahlungsstromkomponente X_{j-1} und der auf den Zeitpunkt $j-1$ transponierten („aufgezinsten“) früheren Finanzmittelbestände $\varphi_k(\boldsymbol{\mu})$ ($k = 1, \dots, j-1$) und nach der Entnahme der Marge $W_{j-1}(\boldsymbol{\mu}) = U_{j-1} + V_{j-1}(\boldsymbol{\mu})$ ergibt.

Zu jedem $\boldsymbol{\mu} \in J$ ist also eindeutig der zugehörige Indexvektor $\mathbf{E}(\boldsymbol{\mu})$ und Transformationsvektor $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^n$ festgelegt. Diese Vektoren $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\mu})$ und $\mathbf{E}(\boldsymbol{\mu})$ liefern genau dann eine Lösung des gesamten Gleichungssystems

$$T_{\mathbf{E}(\boldsymbol{\mu})} \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\mu}) = -\mathbf{s}(\boldsymbol{\mu}),$$

wenn auch noch die Gleichung der letzten $(n+1)$ -ten Zeile erfüllt ist,

$$\lambda_{n+1}(\boldsymbol{\mu}) := s_n(\boldsymbol{\mu}) + \gamma_n(\boldsymbol{\mu}) = 0 \quad \text{mit } \gamma_n(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{k=1}^n T_{E_k(\boldsymbol{\mu}),n}^k \cdot \lambda_k(\boldsymbol{\mu}),$$

wenn also $\boldsymbol{\mu}$ eine Nullstelle der rekursiv definierten Hilfsfunktion $\lambda_{n+1}(\boldsymbol{\mu})$ ist. Somit existiert eine eindeutige Duplizierung von $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ genau dann, wenn es genau eine Nullstelle $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}) \in J$ der Funktion $\lambda_{n+1}(\boldsymbol{\mu})$ gibt. Nachfolgend wird nun ein Beweis für die eindeutige Duplizierung angegeben. Die wesentliche Grundlage der Beweisidee ist, dass die Matrix T_E eine Dreiecksgestalt hat, das Gleichungssystem daher sukzessive nach den Transformationsparametern λ_j aufgelöst werden kann und dazu gemäß der Supplementbedingung (SBT) passend der Supplementtyp E_j bestimmt werden kann, noch bevor das zugehörige Supplement $\mathbf{S}_{E_j}^j = \lambda_j \mathbf{T}_{E_j}^j$ für die Auflösung nach den weiteren Transformationsparametern λ_k benötigt wird. Des Weiteren wird mit Hilfe der Vorzeichenbedingungen für die Matrixelemente $T_{E_j,k}^j$ die strenge Monotonie, Unbeschränktheit und Stetigkeit der Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\boldsymbol{\mu})$ auf die Funktion $\lambda_{n+1}(\boldsymbol{\mu})$ übertragen. Aus dem Beweis ergibt sich auch eine Berechnungsmöglichkeit

für die Duplizierung eines beliebigen Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ bei Verwendung eines derartigen Supplementsystems über die iterative Nullstellenbestimmung der Hilfsfunktion $\lambda_{n+1}(\mu)$.

Beweis der eindeutigen Duplizierung mit den Termingeschäften: Für den Nachweis der Existenz von genau einer Nullstelle der Funktion $\lambda_{n+1}(\mu)$ wird gezeigt, dass $\lambda_{n+1} : J \rightarrow \mathbb{R}$ eine bijektive Funktion ist. Für die Injektivität wird bewiesen, dass $\lambda_{n+1}(\mu)$ streng monoton steigend ist. Für die Surjektivität wird bewiesen, dass $\lambda_{n+1}(\mu)$ stetig und an den Intervallgrenzen unbeschränkt ist.

1) Als Erstes wird die *Monotonie* der Funktionen $\lambda_j(\mu)$, $j = 1, \dots, n+1$, bewiesen. Die Funktion

$$s(\mu) = -\zeta + \mathbf{V}(\mu)$$

ist bezüglich der strengen Halbordnung \succ des \mathbb{R}^{n+1} streng monoton steigend. Zur Erinnerung: Für einen Vektor $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ gilt $\mathbf{X} \succ \mathbf{0}$ genau dann, wenn $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$ und $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ ist. Daher sind die Komponentenfunktionen

$$s_j(\mu) = -\zeta_j + V_j(\mu)$$

zumindest (schwach) monoton steigend ($j = 0, \dots, n$). Insbesondere ist dann auch $\lambda_1(\mu) = s_0(\mu)$ monoton steigend. Auf Grund der Nichtnegativität der Matricelemente $T_{E_k(\mu), j-1}^k$ ($k = 1, \dots, j-1$) kann mit dem Prinzip der vollständigen Induktion nach j geschlossen werden, dass für $j = 1, \dots, n+1$ die Funktionen

$$\gamma_{j-1}(\mu) := \sum_{k=1}^{j-1} T_{E_k(\mu), j-1}^k \cdot \lambda_k(\mu) \quad \text{und}$$

$$\lambda_j(\mu) = s_{j-1}(\mu) + \gamma_{j-1}(\mu)$$

monoton steigend sind.

2) Als Nächstes wird die *strenge Monotonie* von $\lambda_{n+1}(\mu)$ bewiesen. Dazu wird in J ein fest fixiertes Teilintervall $J' = [c, d] \subseteq J$ betrachtet. Da $\mathbf{V}(\mu)$ in J bezüglich \succ streng monoton steigend ist, ist $\mathbf{V}(c) \prec \mathbf{V}(d)$ bzw. $\mathbf{V}(\mu)$ nicht konstant in J' . Demnach existiert ein kleinster Index $i = i(J') \in \{0, \dots, n\}$, so dass die Komponentenfunktionen

$$V_i(\mu) \quad \text{und} \quad s_i(\mu) = -\zeta_i + V_i(\mu)$$

jeweils in J' nicht konstant sind. Da $s_i(\mu)$ und $\gamma_i(\mu)$ monoton steigend sind und $s_i(\mu)$ nicht konstant in J' ist, ist dann auch

$$\lambda_{i+1}(\mu) = s_i(\mu) + \gamma_i(\mu)$$

nicht konstant in J' . Wegen der Monotonie von $\lambda_{i+1}(\mu)$ ist die Nichtkonstanz von $\lambda_{i+1}(\mu)$ in J' gleichbedeutend zur strengen Ungleichung $\lambda_{i+1}(c) < \lambda_{i+1}(d)$. Daraus kann nun auch die Nichtkonstanz der nächsten Funktion $\lambda_{i+2}(\mu)$ in J' geschlossen werden: Wegen $T_{E_i(\mu), i+1}^{i+1} > 0$ sind nämlich auch die monoton steigenden Funktionen

$$T_{E_{i+1}(\mu), i+1}^{i+1} \lambda_{i+1}(\mu),$$

$$\gamma_{i+1}(\mu) = \sum_{k=1}^i T_{E_k(\mu), i+1}^k \cdot \lambda_k(\mu) + T_{E_{i+1}(\mu), i+1}^{i+1} \lambda_{i+1}(\mu) \quad \text{und}$$

$$\lambda_{i+2}(\mu) = s_{i+1}(\mu) + \gamma_{i+1}(\mu)$$

nicht konstant in J' . Dieser Schluss von $i+1$ auf $i+2$ entspricht schon dem allgemeinen Induktionsschluss $j \rightarrow j+1$. Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass für alle Indizes $j = i+1, \dots, n+1$ die Funktionen $\lambda_j(\mu)$ in J' nicht konstant sind. Insbesondere ist $\lambda_{n+1}(\mu)$ nicht konstant in J' und wegen der Monotonie von $\lambda_{n+1}(\mu)$ dann $\lambda_{n+1}(c) < \lambda_{n+1}(d)$. Da die Stellen $c, d \in J$, $c < d$, beliebig gewählt waren, ist somit $\lambda_{n+1}(\mu)$ in J streng monoton steigend und damit auch *injektiv*.

3) Des Weiteren wird jetzt die *Unbeschränktheit* von $\lambda_{n+1}(\mu)$ an den Intervallgrenzen gezeigt. Da $\mathbf{V}(\mu)$ an den Intervallgrenzen von J als unbeschränkt vorausgesetzt ist, gibt es Indizes $m, p \in \{0, \dots, n\}$ mit

$$V_m(\mu) \rightarrow -\infty \quad \text{bei} \quad \mu \rightarrow a,$$

$$V_p(\mu) \rightarrow +\infty \quad \text{bei} \quad \mu \rightarrow b.$$

Da die Funktionen $\lambda_j(\mu)$ monoton steigend sind, sind sie auch in $]a, 0]$ nach oben beschränkt ($\lambda_j(\mu) \leq \lambda_j(0)$ für $\mu \leq 0$) und in $[0, b[$ nach unten beschränkt ($\lambda_j(\mu) \geq \lambda_j(0)$ für $\mu \geq 0$). Weiter sind die Funktionen $s_m(\mu) = -\zeta_m + V_m(\mu)$ und $s_p(\mu) = -\zeta_p + V_p(\mu)$ monoton steigend mit dem Grenzwertverhalten

$$s_m(\mu) \rightarrow -\infty \quad \text{bei} \quad \mu \rightarrow a,$$

$$s_p(\mu) \rightarrow +\infty \quad \text{bei} \quad \mu \rightarrow b.$$

Da für $k = 1, \dots, m$ die Matricelemente $T_{E_k(\mu), m}^k \geq 0$ sind und die Funktionen $\lambda_k(\mu)$ in $]a, 0]$ nach oben beschränkt sind, sind auch die Produkte $T_{E_k(\mu), m}^k \cdot \lambda_k(\mu)$ und deren Summe

$$\gamma_m(\mu) = \sum_{k=1}^m T_{E_k(\mu), m}^k \cdot \lambda_k(\mu)$$

in $]a, 0]$ nach oben beschränkt. Demnach ergibt sich für die Funktion $\lambda_{m+1}(\mu)$ das Grenzwertverhalten

$$\lambda_{m+1}(\mu) = s_m(\mu) + \gamma_m(\mu) \rightarrow -\infty \quad \text{bei} \quad \mu \rightarrow a.$$

Es wird jetzt mittels vollständiger Induktion gezeigt, dass dieses Grenzwertverhalten für alle Funktionen $\lambda_j(\mu)$, $j = m+1, \dots, n+1$, vorliegt. Der Induktionsbeginn ist mit $j = m+1$ gegeben. Aus der Induktionsannahme, dass $\lambda_j(\mu)$ für einen Index $j \geq m+1$ dieses Grenzwertverhalten aufweist, folgt auch für

$$\lambda_{j+1}(\mu) = s_j(\mu) + \sum_{k=1}^{j-1} T_{E_k(\mu),j}^k \cdot \lambda_k(\mu) + T_{E_j(\mu),j}^j \cdot \lambda_j(\mu)$$

dieses Verhalten: Es sind nämlich die beiden ersten Summanden in $]a,0]$ nach oben beschränkt und der dritte Summand konvergiert wegen $T_{E_j(\mu),j}^j > 0$ bei $\mu \rightarrow a$ gegen $-\infty$. Damit ist der Induktionsschluss $j \rightarrow j+1$ erbracht. Insbesondere erhält man für $j = n+1$ das Grenzwertverhalten

$$\lambda_{n+1}(\mu) \rightarrow -\infty \text{ bei } \mu \rightarrow a.$$

Analog kann $\lambda_{n+1}(\mu) \rightarrow +\infty$ bei $\mu \rightarrow b$ gezeigt werden.

4) Schließlich wird jetzt noch die *Stetigkeit* der Funktionen $\lambda_j(\mu)$, $j = 1, \dots, n+1$, bewiesen. Mit den Funktionen $V_j(\mu)$ sind auch die $s_j(\mu) = -\zeta_j + V_j(\mu)$ stetig. Damit ist schon $\lambda_1(\mu) = s_0(\mu)$ stetig und der Induktionsbeginn für $j = 1$ gegeben. Mittels vollständiger Induktion wird nun die Stetigkeit aller $\lambda_j(\mu)$ gezeigt. Bei der Induktionsannahme geht man für einen Index $j \in \{1, \dots, n\}$ von der Stetigkeit aller $\lambda_k(\mu)$ mit $1 \leq k \leq j$ aus. Es wird nun jede dieser Funktionen $\lambda_k(\mu)$ noch näher betrachtet. Falls $\lambda_k(\mu)$ in J keine Nullstelle hat, ist $T_{E_k(\mu),j}^k$ als Funktion von μ in J konstant und das Produkt $T_{E_k(\mu),j}^k \lambda_k(\mu)$ in J stetig.

Falls $\lambda_k(\mu)$ eine Nullstelle $\mu_0 \in J$ besitzt, so gilt wegen der Monotonie

$$\lambda_k(\mu) \leq \lambda_k(\mu_0) = 0 \text{ für } \mu \in]a, \mu_0] \text{ und}$$

$$\lambda_k(\mu) \geq \lambda_k(\mu_0) = 0 \text{ für } \mu \in [\mu_0, b[.$$

Zum fest gedachten Index k wird nun die Menge

$$M := \{\mu \in]a, \mu_0] : \lambda_k(\mu) < 0\}$$

gebildet. Falls $M = \emptyset$ ist, gilt $\lambda_k(\mu) = 0$ in $]a, \mu_0]$, $\lambda_k(\mu) \geq 0$ in $[\mu_0, b[$, so dass $T_{E_k(\mu),j}^k = T_{H,j}^k$ in J konstant und das Produkt

$$\tau_{k,j}(\mu) := T_{E_k(\mu),j}^k \lambda_k(\mu)$$

in J stetig ist. Falls $M \neq \emptyset$ ist, existiert für die nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge M von \mathbb{R} nach dem Vollständigkeitsaxiom (Axiom vom Dedekindschen Schnitt) der Menge der reellen Zahlen das Supremum (die kleinste obere Schranke) $\mu_1 := \sup M$ von M und es gilt

$$a < \mu_1 \leq \mu_0.$$

Wegen der Stetigkeit von $\lambda_k(\mu)$ kann $\lambda_k(\mu_1) = 0$ gefolgert werden: Bei $\lambda_k(\mu_1) < 0$ würde es nämlich wegen der Stetigkeit von $\lambda_k(\mu)$ auch ein μ^ϵ , $\mu_1 < \mu^\epsilon < \mu_0$, mit $\lambda_k(\mu^\epsilon) < 0$ geben, was aber im Widerspruch zur Definition von μ_1 steht. Auf Grund der μ_1 -Definition ist $\lambda_k(\mu) \geq 0$ in $[\mu_1, b[$. Auf Grund der Monotonie von $\lambda_k(\mu)$ ist $\lambda_k(\mu) < 0$ in $]a, \mu_1[$: Zu jedem $\mu \in]a, \mu_1[$ gibt es nämlich ein $\mu'' \in M$ mit $\mu < \mu'' < \mu_1$, so dass wegen der Monotonie die Ungleichung $\lambda_k(\mu) \leq \lambda_k(\mu'') < 0$ folgt. Daher ist $T_{E_k(\mu),j}^k = T_{S,j}^k$ für $\mu \in]a, \mu_1[$ und $T_{E_k(\mu),j}^k = T_{H,j}^k$ für $\mu \in [\mu_1, b[$. Das Produkt $\tau_{k,j}(\mu) = T_{E_k(\mu),j}^k \lambda_k(\mu)$ ist zunächst in den Teilintervallen $]a, \mu_1[$ und $[\mu_1, b[$ und wegen $\lambda_k(\mu_1) = 0$ auch an der Stelle $\mu = \mu_1$ stetig:

$$\lim_{\mu \nearrow \mu_1} T_{S,j}^k \cdot \lambda_k(\mu) = 0 = T_{E_k(\mu_1),j}^k \cdot \lambda_k(\mu_1) = \lim_{\mu \searrow \mu_1} T_{H,j}^k \cdot \lambda_k(\mu).$$

Aus der Stetigkeit dieser Produkte folgt dann auch die Stetigkeit für deren Summe

$$\gamma_j(\mu) = \sum_{k=1}^j T_{E_k(\mu),j}^k \cdot \lambda_k(\mu)$$

und für die Summe

$$\lambda_{j+1}(\mu) = s_j(\mu) + \gamma_j(\mu).$$

Damit ist der Induktionsschluss $j \rightarrow j+1$ erbracht und die Stetigkeit der Funktionen $\lambda_j(\mu)$, $j = 1, \dots, n+1$, in J bewiesen.

5) Aus der Stetigkeit der Funktion $\lambda_{n+1}(\mu)$ und deren Unbeschränktheit an den Intervallgrenzen folgt nach dem Zwischenwertsatz von Bolzano (1741–1848) auch die *Surjektivität* und insgesamt die *Bijektivität* der Funktion $\lambda_{n+1} : J \rightarrow \mathbb{R}$. Daher besitzt $\lambda_{n+1}(\mu)$ in J genau eine Nullstelle $\mu = \mu(\mathbf{X})$. Damit ist der Beweis der eindeutigen Duplizierung mit dem speziellen Supplementsystem L abgeschlossen. \square

Die Existenz und Einzigkeit der Duplizierung von $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit einem Supplement $\mathbf{S}(\mathbf{X}) \in C_{M^n}$ und einem Beurteilungskurvenpunkt $\mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) \in \mathbf{W}(J)$ ist hier für eine Parameterdarstellung $\mathbf{W}(\mu)$ der Beurteilungskurve W nachgewiesen. In Abschnitt 8.3.4 wird begründet, dass die (Existenz und) Einzigkeit der Duplizierung auch gegeben ist, wenn die Beurteilungskurve W als P -Äquivalenzklasse von Parameterdarstellungen gegeben ist.

1.3 Replizierung mit den Termingeschäften

Die Replizierungsgleichung

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) - \mathbf{V}(v(\mathbf{X})) = \mathbf{U} - \mathbf{B} - \mathbf{X} =: \xi$$

ergibt mit dem Supplementansatz $\mathbf{S}' = T_{\mathbf{E}}\lambda$ die Vektorgleichung

$$T_{\mathbf{E}(\mathbf{X})}\lambda(\mathbf{X}) = \xi + \mathbf{V}(v(\mathbf{X})) =: -\mathbf{r}(v(\mathbf{X}))$$

mit einem $\lambda = \lambda(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^n$, $v = v(\mathbf{X}) \in J$ und einem Indexvektor $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{X}) \in M^n$, der die Supplementbedingung (SBT) erfüllt. Nach der Beweisidee von Kruschwitz (1976), S. 18–20, für die Replizierung mit einperiodischen Supplementen wird jetzt zu einem fest vorgegebenen Beurteilungsparameter $v \in J$ das in λ lineare Gleichungssystem

$$T_{\mathbf{E}}\lambda = -\mathbf{r}(v) := \xi + \mathbf{V}(v)$$

betrachtet. Da die $(n+1) \times n$ -Matrix $T_{\mathbf{E}}$ eine untere Dreiecksgestalt und in der Hauptdiagonalen die von den Supplementtypen E_j unabhängigen Elemente -1 besitzt, können die ersten n Zeilen des Gleichungssystems sukzessive für $j = 1, \dots, n$ nach den Transformationsparametern $\lambda_j = \lambda_j(v) \in \mathbb{R}$ aufgelöst werden und die Supplementtypen $E_j = E_j(v) \in M$ nach der Supplementbedingung (SBT) bestimmt werden. Die Funktionen $\lambda_j(v)$ und $E_j(v)$ berechnen sich nach der folgenden Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} \lambda_1(v) &= r_0(v), \\ E_1(v) &= H \text{ bei } \lambda_1(v) \geq 0, & E_1(v) &= S \text{ bei } \lambda_1(v) < 0, \\ \lambda_j(v) &= r_{j-1}(v) + \gamma_{j-1}(v) & \text{mit } \gamma_{j-1}(v) &:= \sum_{k=1}^{j-1} T_{E_k(v), j-1}^k \cdot \lambda_k(v), \\ E_j(v) &= H \text{ bei } \lambda_j(v) \geq 0, & E_j(v) &= S \text{ bei } \lambda_j(v) < 0 \end{aligned} \quad (j = 2, \dots, n).$$

Hier bei der Replizierung ist der Transformationsparameter

$$\lambda_j(v) = B_{j-1} + X_{j-1} + \sum_{k=1}^{j-1} T_{E_k(v), j-1}^k \cdot \lambda_k(v) - U_{j-1} - V_{j-1}(v) \quad (j = 1, \dots, n)$$

der zum Zeitpunkt $t = j-1$ vorhandene Finanzmittelbestand, der sich als Summe der Basiszahlung B_{j-1} , der Zahlungsstromkomponente X_{j-1} und der auf den Zeitpunkt $j-1$ transponierten früheren Finanzmittelbestände $\lambda_k(v)$ ($k = 1, \dots, j-1$) und nach der Entnahme der Marge $W_{j-1}(v) = U_{j-1} + V_{j-1}(v)$ ergibt.

Zu jedem $v \in J$ ist also eindeutig der zugehörige Indexvektor $\mathbf{E}(v)$ und Transformationsvektor $\lambda(v) \in \mathbb{R}^n$ festgelegt. Diese Vektoren $\lambda(v)$ und $\mathbf{E}(v)$ liefern genau dann eine Lösung des Gleichungssystems

$$T_{\mathbf{E}(v)}\lambda(v) = -\mathbf{r}(v),$$

wenn auch noch die Gleichung der letzten Zeile erfüllt ist,

$$\lambda_{n+1}(v) := r_n(v) + \gamma_n(v) = 0 \quad \text{mit } \gamma_n(v) = \sum_{k=1}^n T_{E_k(v), n}^k \cdot \lambda_k(v),$$

wenn also v eine Nullstelle der rekursiv definierten Funktion $\lambda_{n+1}(v)$ ist. Somit existiert eine eindeutige Replizierung von $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ genau dann, wenn es genau eine Nullstelle $v = v(\mathbf{X}) \in J$ der Funktion $\lambda_{n+1}(v)$ gibt. Wie oben bei der Duplizierung kann ein Beweis für die eindeutige Replizierung bzw. für die Existenz von genau einer Nullstelle der Funktion $\lambda_{n+1}(v)$ angegeben werden. Dazu wird bewiesen, dass $\lambda_{n+1} : J \rightarrow \mathbb{R}$ eine bijektive und stetige Funktion ist. Für die Injektivität wird die strenge Monotonie von $\lambda_{n+1}(v)$ bewiesen. Für die Surjektivität wird bewiesen, dass $\lambda_{n+1}(v)$ stetig und an den Intervallgrenzen unbeschränkt ist. Während bei der Duplizierung die Vektorfunktion $\mathbf{s}(\mu) = -\zeta + \mathbf{V}(\mu)$ streng monoton steigend ist, ist hier die bei der Replizierung verwendete Vektorfunktion $\mathbf{r}(v) = -\xi - \mathbf{V}(v)$ streng monoton fallend. Demzufolge ergeben sich hier die $\lambda_j(v)$ als monoton fallend und $\lambda_{n+1}(v)$ als streng monoton fallend mit dem Grenzwertverhalten $\lambda_{n+1}(v) \rightarrow +\infty$ bei $v \rightarrow a$ und $\lambda_{n+1}(v) \rightarrow -\infty$ bei $v \rightarrow b$. Der ausführliche Beweis wird hier weggelassen, da er analog zu dem entsprechenden

Beweis bei der Duplizierung verläuft. Auch hier liefert der Beweis eine Berechnungsmöglichkeit der Replizierung über die iterative Nullstellenbestimmung der Hilfsfunktion $\lambda_{n+1}(v)$. Es stellt sich hier die Frage, ob es neben dem hier verwendeten Supplementsystem L von speziellen Termingeschäften noch weitere Supplementsysteme gibt, für welche die Existenz und Einzigkeit der Duplizierung bzw. Replizierung gezeigt werden kann. Tatsächlich kann im nächsten Abschnitt auch noch ein Supplementsystem von speziellen Kassageschäften angegeben werden, für welches mit der gleichen Beweisidee die Existenz und Einzigkeit der Duplizierung und der Replizierung nachgewiesen wird.

2 Existenz und Einzigkeit der Duplizierung und der Replizierung mit Kassageschäften

An die Beurteilungskurve $\mathbf{V}(\mu)$ werden jetzt die gleichen Anforderungen wie in den Abschnitten 4.1.5 und 5.1.8 des unten genannten Buchs des Autors gestellt. Als Supplementsystem L wird jetzt in der Menge K der Kapitalmarktgeschäfte ein System von j -periodischen Kassageschäften vorausgesetzt. Für dieses System L und jede beliebige Beurteilungskurve $\mathbf{W}(\mu) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu)$ kann wieder die Existenz und Eindeutigkeit der Duplizierung bzw. der Replizierung bewiesen werden.

2.1 Ein Supplementsystem mit speziellen Kassageschäften

Für die Konzepte der Duplizierung und der Replizierung soll jetzt auf dem unvollkommenen Kapitalmarkt ein Supplementsystem von n Investitionen

$$\mathbf{I}^j = \mathbf{S}_H^j = \mathbf{K}_H^j$$

und n Finanzierungen

$$\mathbf{F}^j = \mathbf{S}_S^j = -\mathbf{K}_S^j$$

mit der durch die elementaren Zahlungsströme $\mathbf{K}_{E_j}^j$ festgelegten Zahlungsstromstruktur vorhanden sein:

$$\mathbf{K}_{E_1}^1 = (K_{E_1,0}^1, 1, 0, \dots, 0)^\top,$$

$$\mathbf{K}_{E_2}^2 = (K_{E_2,0}^2, K_{E_2,1}^2, 1, 0, \dots, 0)^\top,$$

...

$$\mathbf{K}_{E_j}^j = (K_{E_j,0}^j, K_{E_j,1}^j, \dots, K_{E_j,j-1}^j, 1, 0, \dots, 0)^\top,$$

...

$$\mathbf{K}_{E_n}^n = (K_{E_n,0}^n, K_{E_n,1}^n, \dots, K_{E_n,n-1}^n, 1)^\top,$$

mit den Vorzeichenbedingungen

$$K_{E_j,0}^j < 0,$$

$$K_{E_j,k}^j \leq 0 \text{ für } k = 1, \dots, j-1,$$

und den Komponenten

$$K_{E_j,j}^j = 1,$$

$$K_{E_j,k}^j = 0 \text{ für } k = j+1, \dots, n,$$

$j = 1, \dots, n$, $E_j \in M = \{H, S\}$. Die Zahlungsstromstruktur wird wie bei den Termingeschäften $\mathbf{T}_{E_j}^j$ auch hier bei den Kassageschäften $\mathbf{K}_{E_j}^j$ als Investition (lexikonegativer Zahlungsstrom) angegeben. Während aber in der Matrix T_E unterhalb der negativen Hauptdiagonalen und der positiven Subdiagonalen (der unter der Hauptdiagonalen gelegenen Diagonalen) nichtnegative Elemente auftreten, hat man hier in der Matrix K_E zwischen der negativen ersten Zeile und der positiven Subdiagonalen nichtpositive Elemente. Die Zahlungsströme $\mathbf{K}_{E_j}^j$ sind Kassageschäfte im Zeitintervall $[0, j]$ mit der Laufzeit j . Dabei ist im Allgemeinen $\mathbf{K}_S^j \notin K$ und nur $\mathbf{F}^j = -\mathbf{K}_S^j$ ein Kapitalmarktgeschäft. Diese elementaren Zahlungsströme $\mathbf{K}_{E_j}^j$ werden für die elegantere Formulierung des Beweises der eindeutigen Duplizierung bzw. Replizierung verwendet. Bei den Investitionen $\mathbf{K}_{E_j}^j$ erfolgt zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Auszahlung: $K_{E_j,0}^j < 0$. Zu den darauf folgenden Zeitpunkten $t = 1, \dots, j-1$ erfolgen höchstens Auszahlungen und keine

Einzahlungen. Erst zum Zeitpunkt $t=j$ erfolgt die einzige Einzahlung in Höhe von einer Geldeinheit. Diese Zahlungsstromstruktur gleicht einem Sparvorgang, bei dem über Jahre hinweg Spareinlagen auf ein Anlagekonto eingezahlt werden und zum Zeitpunkt $t=j$ das gesamte angesparte Kapital abgehoben wird.

Die hier vom Zinssatztyp $E_j = H, S$ abhängigen j -periodischen Kassageschäfte $\mathbf{K}_{E_j}^j$ sind eine Verallgemeinerung der in Abschnitt 4.1.4 behandelten j -periodischen Kassageschäfte \mathbf{K}^j des vollkommenen Kapitalmarkts. Als Spezialfall erhält man mit

$$K_{E_j,0}^j = -d_{j,E_j} < 0 \text{ und}$$

$$K_{E_j,k}^j = 0 \text{ für } k = 1, \dots, j-1$$

als Verallgemeinerung der in Abschnitt 4.1.4 behandelten reinen Wertpapiere \mathbf{D}^j des vollkommenen Kapitalmarkts hier die reinen Wertpapiere

$$\mathbf{K}_{E_j}^j = \mathbf{D}_{E_j}^j = (-d_{j,E_j}, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top,$$

des unvollkommenen Kapitalmarkts. Diese besitzen die Zahlungsstromstruktur von Nullkuponanleihen. Diese speziellen Kassageschäfte $\mathbf{K}_{E_j}^j$ werden in Abschnitt 6.2 bei der Darstellung der klassischen Kapitalwertmethode als Spezialfall einer R-Präferenzordnung verwendet.

Es wird nun die besondere Wirkung beschrieben, wenn ein passendes Vielfaches des Zahlungsstroms $\mathbf{K}_{E_j}^j$ mit einem anderen Zahlungsstrom kombiniert wird. Dabei wird der einfache Fall betrachtet, dass zum Zeitpunkt $t=j$ ($j \in \{1, \dots, n\}$) ein Finanzmittelbestand φ_j vorliegt. Dieser kann als ein spezieller Zahlungsstrom

$$\mathbf{Z}^j = (0, \dots, 0, \varphi_j, 0, \dots, 0)^\top = \varphi_j \mathbf{e}_{j+1}$$

angesehen werden. Dabei ist \mathbf{e}_{j+1} der $(j+1)$ -te Standardbasisvektor des \mathbb{R}^{n+1} . Zur Zahlung $Z_j^j = \varphi_j$ kann nun mit dem elementaren Zahlungsstrom $\mathbf{K}_{E_j}^j$ auf dem Kapitalmarkt das Supplement (Ergänzungsgeschäft)

$$\mathbf{K} = \lambda_j \cdot \mathbf{K}_{E_j}^j = \lambda_j \cdot (K_{E_j,0}^j, K_{E_j,1}^j, \dots, K_{E_j,j-1}^j, 1, 0, \dots, 0)^\top \in K$$

mit $\lambda_j = -\varphi_j$, $E_j = H$ bei $\lambda_j \geq 0$ und $E_j = S$ bei $\lambda_j < 0$, gebildet werden, das für die zeitliche Verschiebung (Transposition) der Zahlung φ_j verwendet werden kann. Nimmt man nämlich zum Zahlungsstrom \mathbf{Z}^j das Kapitalmarktgeschäft \mathbf{K} hinzu, so erhält man den Kombinationszahlungsstrom

$$\mathbf{Y}^j = \mathbf{Z}^j + \mathbf{K} = (\lambda_j K_{E_j,0}^j, \lambda_j K_{E_j,1}^j, \dots, \lambda_j K_{E_j,j-1}^j, 0, \dots, 0)^\top$$

mit

$$Y_k^j = \lambda_j K_{E_j,k}^j = \varphi_j \cdot (-K_{E_j,k}^j) \text{ für } k = 0, \dots, j-1$$

und

$$Y_k^j = 0 \text{ für } k = j, j+1, \dots, n.$$

Die Zahlung φ_j des Zeitpunkts $t=j$ kann also mit dem Supplement \mathbf{K} zum Zeitpunkt $t=j$ auf den Wert Null glattgestellt (repliziert) und als „abgezinst“ Zahlungen $\varphi_j \cdot (-K_{E_j,k}^j)$ auf die vorherigen Zeitpunkte $t=k=0, \dots, j-1$ verschoben (transponiert) werden. Hinsichtlich dieser Wirkung kann das Supplement (Ergänzungsgeschäft) \mathbf{K} auch genauer als ein zur Zahlung φ_j gehöriges Transponement (Verschiebungsgeschäft) bezeichnet werden. Da hier auf vorherige Zeitpunkte transponiert wird, kann \mathbf{K} auch als ein zu φ_j gehöriges Anteponement bezeichnet werden.

Die zu einem Indexvektor $\mathbf{E} = (E_1, \dots, E_n) \in M^n$ aus den $\mathbf{K}_{E_j}^j$ gebildete $(n+1) \times n$ -Matrix

$$K_{\mathbf{E}} = (\mathbf{K}_{E_1}^1, \dots, \mathbf{K}_{E_n}^n) \\ = \begin{pmatrix} K_{E_1,0}^1 & K_{E_2,0}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & K_{E_n,0}^n \\ 1 & K_{E_2,1}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & K_{E_n,1}^n \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & K_{E_{j+1},j}^{j+1} & \cdot & K_{E_n,j}^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & K_{E_n,n-1}^n \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n}$$

hat eine „obere Dreiecksgestalt“. Die Bezeichnung ist nicht ganz exakt, da $K_{\mathbf{E}}$ keine quadratische Matrix, sondern eine $(n+1) \times n$ -Matrix ist. Die Matrix $K_{\mathbf{E}}$ besteht aus n linear unabhängigen Spalten und hat somit $\text{Rang } K_{\mathbf{E}} = n$. Ebenso hat dann auch die Matrix

$$L_{\mathbf{E}} = (\mathbf{S}_{E_1}^1, \dots, \mathbf{S}_{E_n}^n)$$

vollen Spaltenrang. Der Normalenvektor $\mathbf{P}_{\mathbf{E}} = (P_{\mathbf{E},0}, \dots, P_{\mathbf{E},n})^T$ ($P_{\mathbf{E},0} := 1$) der Hyperebene

$$H_{\mathbf{E}} = \text{lin } L_{\mathbf{E}} = \text{lin } K_{\mathbf{E}}$$

ist Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems $\mathbf{P}_{\mathbf{E}}^T K_{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ und berechnet sich nach der Festlegung $P_{\mathbf{E},0} := 1$ sukzessive für $j = 1, \dots, n$ zu

$$P_{\mathbf{E},1} = -K_{E_1,0}^1 P_{\mathbf{E},0} > 0,$$

$$P_{\mathbf{E},j} = -K_{E_j,0}^j P_{\mathbf{E},0} - K_{E_j,1}^j P_{\mathbf{E},1} \dots - K_{E_j,j-1}^j P_{\mathbf{E},j-1} > 0 \quad (j = 2, \dots, n).$$

Ausgehend von $P_{\mathbf{E},0} = 1 > 0$ folgt bei Verwendung der Vorzeichenbedingungen mittels vollständiger Induktion für alle Indizes $j = 0, 1, \dots, n$ die Positivität der Komponenten $P_{\mathbf{E},j}$ des Normalenvektors $\mathbf{P}_{\mathbf{E}}$:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{E}} > \mathbf{0}.$$

Nach dem Satz über die Disjunktheit einer Hyperebene und des schwach positiven Orthanten haben die Hyperebene $H_{\mathbf{E}}$ mit dem positiven Normalenvektor $\mathbf{P}_{\mathbf{E}}$ und der nichtnegative Orthant nur den trivialen Durchschnitt ($H_{\mathbf{E}} \cap \mathbb{R}_{+0}^{n+1} = O$). Insbesondere ist dann der konvexe lineare Kegel $C_{\mathbf{E}} (\subseteq H_{\mathbf{E}})$, $\mathbf{E} \in M^n$, und insgesamt die zulässige Supplementmenge C_{M^n} arbitragefrei.

Die Duplizierung und die Replizierung erfolgt mit einem speziellen Supplementansatz $\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{S}$, der durch die Supplementbedingung

$$(SB) \quad \mathbf{S} = L_{\mathbf{E}} \boldsymbol{\lambda} \quad \text{mit } \mathbf{E} \in M^n, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}_{+0}^n,$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad \text{für } E_j = H,$$

$$\lambda_j > 0 \quad \text{für } E_j = S.$$

beschrieben wird. Bei Verwendung der Matrix $K_{\mathbf{E}}$ an Stelle von $L_{\mathbf{E}}$ lautet die Supplementbedingung

$$(SBK) \quad \mathbf{S} = K_{\mathbf{E}} \boldsymbol{\lambda} \quad \text{mit } \mathbf{E} \in M^n, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n,$$

$$E_j = H \quad \text{bei } \lambda_j \geq 0 \quad \text{und}$$

$$E_j = S \quad \text{bei } \lambda_j < 0.$$

Eine Linearkombination der elementaren Zahlungsströme $\mathbf{K}_{E_j}^j$, bei der die Supplementbedingung (SBK) erfüllt ist, wird hier auch als eine SB-Linearkombination der $\mathbf{K}_{E_j}^j$ bezeichnet.

Nachfolgend wird nun bewiesen, dass das Supplementensystem L sowohl eine eindeutige Duplizierung als auch eine eindeutige Replizierung der Zahlungsströme des \mathbb{R}^{n+1} ermöglicht.

2.2 Duplizierung mit den Kassageschäften

Die Duplizierungsgleichung

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{W}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{U} + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X}))$$

bzw.

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) + \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) = \mathbf{X} - \mathbf{U} =: \zeta$$

ergibt mit dem Supplementansatz $\mathbf{S} = K_{\mathbf{E}}\lambda$ die Vektorgleichung

$$K_{\mathbf{E}(\mathbf{X})}\lambda(\mathbf{X}) = \zeta - \mathbf{V}(\mu(\mathbf{X})) =: +\sigma(\mu(\mathbf{X})) (= -\mathbf{s}(\mu(\mathbf{X})))$$

mit einem $\lambda = \lambda(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^n$, $\mu = \mu(\mathbf{X}) \in J$ und einem Indexvektor $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{X}) \in M^n$, der die Supplementbedingung (SBK) erfüllt. Gemäß der Beweisidee von Kruschwitz (1976), S. 18–20, für die Replizierung mit einperiodischen Termingeschäften wird jetzt zu einem fest vorgegebenen Beurteilungsparameter $\mu \in J$ das in λ lineare Gleichungssystem

$$K_{\mathbf{E}}\lambda = \sigma(\mu) := \zeta - \mathbf{V}(\mu)$$

betrachtet. Da die Matrix $K_{\mathbf{E}}$ eine obere Dreiecksgestalt hat und in der Subdiagonalen (der unter der Hauptdiagonalen gelegenen Diagonalen) die von den Supplementtypen E_j unabhängigen Elemente -1 auftreten, können aus den letzten n Zeilen des Gleichungssystems sukzessive für $j = n, \dots, 1$ sowohl die Transformationsparameter $\lambda_j = \lambda_j(\mu) \in \mathbb{R}$ als auch die Supplementtypen $E_j = E_j(\mu) \in M$ gemäß der Supplementbedingung (SBK) bestimmt werden. Die Funktionen $\lambda_j(\mu)$ und $E_j(\mu)$ berechnen sich nach der folgenden Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} \lambda_n(\mu) &= \sigma_n(\mu), & E_n(\mu) &= H \text{ bei } \lambda_n(\mu) \geq 0, & E_n(\mu) &= S \text{ bei } \lambda_n(\mu) < 0, \\ \lambda_j(\mu) &= \sigma_j(\mu) + \kappa_j(\mu) & \text{mit } \kappa_j(\mu) &:= - \sum_{k=j+1}^n K_{E_k(\mu),j}^k \cdot \lambda_k(\mu), \\ E_j(\mu) &= H \text{ bei } \lambda_j(\mu) \geq 0, & E_j(\mu) &= S \text{ bei } \lambda_j(\mu) < 0 \quad (j = n-1, \dots, 1). \end{aligned}$$

Hier bei der Duplizierung ist

$$\lambda_j(\mu) = X_j + \sum_{k=j+1}^n (-K_{E_k(\mu),j}^k) \cdot \lambda_k(\mu) - U_j - V_j(\mu) \quad (j = 1, \dots, n)$$

der zum Zeitpunkt $t = j$ vorhandene Finanzmittelbestand, der sich als Summe der Zahlungsstromkomponente X_j und der auf den Zeitpunkt j transponierten („abgezinsten“) späteren Finanzmittelbestände $\lambda_k(\mu)$ ($k = j+1, \dots, n$) und nach der Entnahme der Marge $W_j(\mu) = U_j + V_j(\mu)$ ergibt.

Zu jedem $\mu \in J$ ist eindeutig der zugehörige Indexvektor $\mathbf{E}(\mu)$ und Transformationsvektor $\lambda(\mu) \in \mathbb{R}^n$ festgelegt. Diese Vektoren $\lambda(\mu)$ und $\mathbf{E}(\mu)$ liefern genau dann eine Lösung des Gleichungssystems

$$K_{\mathbf{E}(\mu)}\lambda(\mu) = \sigma(\mu),$$

wenn auch noch die Gleichung

$$\lambda_0(\mu) := \sigma_0(\mu) + \kappa_0(\mu) = 0$$

der ersten Zeile erfüllt ist, wenn also μ eine Nullstelle der rekursiv definierten Funktion $\lambda_0(\mu)$ ist. Es existiert somit eine eindeutige Duplizierung von $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ genau dann, wenn es genau eine Nullstelle $\mu = \mu(\mathbf{X}) \in J$ der Funktion $\lambda_0(\mu)$ gibt. Nachfolgend wird nun ein Beweis für die eindeutige Duplizierung skizziert. Durch den Beweis erhält man auch eine Berechnungsmöglichkeit für die Duplizierung eines beliebigen Zahlungsstroms $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ bei Verwendung eines derartigen Supplementsystems über die iterative Nullstellenbestimmung der Hilfsfunktion $\lambda_0(\mu)$.

Beweis der eindeutigen Duplizierung mit den Kassageschäften: Zum Nachweis der Existenz von genau einer Nullstelle der Funktion $\lambda_0(\mu)$ wird die Bijektivität und Stetigkeit der Funktion $\lambda_0 : J \rightarrow \mathbb{R}$ gezeigt. Für die Injektivität von $\lambda_0(\mu)$ wird bewiesen, dass die $\lambda_j(\mu)$ ($j = n, \dots, 1$) monoton fallend sind und $\lambda_0(\mu)$ streng monoton fallend ist. Für die Surjektivität von $\lambda_0(\mu)$ wird bewiesen, dass $\lambda_0(\mu)$ stetig und an den Intervallgrenzen unbeschränkt ist. An die Stelle der streng monoton steigenden Funktion

$$\mathbf{s}(\mu) = -\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{V}(\mu)$$

und der monoton steigenden Funktionen $\lambda_j(\mu)$ und

$$\gamma_j(\mu) = \sum_{k=1}^j T_{E_k(\mu),j}^k \cdot \lambda_k(\mu)$$

im entsprechenden Beweis für die Termingeschäfte treten hier die streng monoton fallende Funktion

$$\boldsymbol{\sigma}(\mu) = \boldsymbol{\zeta} - \mathbf{V}(\mu)$$

und die monoton fallenden Funktionen $\lambda_j(\mu)$ und

$$\kappa_j(\mu) = - \sum_{k=j+1}^n K_{E_k(\mu),j}^k \cdot \lambda_k(\mu),$$

An Stelle der Vorzeichenbedingungen $T_{E_j,j}^j > 0$, $T_{E_k,j}^k \geq 0$ ($k = 1, \dots, j-1$; $j = 1, \dots, n$) des vorherigen Abschnitts

hat man hier die Bedingungen $-K_{E_j,0}^j > 0$, $-K_{E_k,j}^k \geq 0$ ($k = j+1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$). Die strenge Monotonie von

$\lambda_0(\mu)$ folgt hier schon aus der schwachen Monotonie von $\sigma_0(\mu)$ und der $\lambda_j(\mu)$ ($j = 1, \dots, n$) und der Tatsache, dass

es zu beliebig fixierten Stellen $c, d \in J$, $c < d$, bzw. zu beliebigem Teilintervall $J' = [c, d] \subseteq J$ einen Index $i = i(J') \in \{0, \dots, n\}$ gibt, so dass $\sigma_i(\mu)$ in J' nicht konstant ist. Demzufolge ist nämlich $\lambda_i(\mu) = \sigma_i(\mu) + \kappa_i(\mu)$ nicht konstant

in J' und dann wegen $K_{E_i(\mu),0}^i < 0$ auch

$$\kappa_0(\mu) = -K_{E_i(\mu),0}^i \cdot \lambda_i(\mu) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (-K_{E_k(\mu),0}^k) \cdot \lambda_k(\mu)$$

und

$$\lambda_0(\mu) = \sigma_0(\mu) + \kappa_0(\mu)$$

nicht konstant in J' . Da $J' \subseteq J$ beliebig war, ist $\lambda_0(\mu)$ streng monoton fallend in J . Aus der Bijektivität und Stetigkeit der Funktion $\lambda_0 : J \rightarrow \mathbb{R}$ folgt die Existenz von genau einer Nullstelle $\mu = \mu(\mathbf{X})$ von $\lambda_0(\mu)$. Der ausführliche Beweis der eindeutigen Duplizierung wird hier weggelassen, da er analog zu dem entsprechenden Beweis für die Duplizierung mit den speziellen Termingeschäften verläuft. \square

2.3 Replizierung mit den Kassageschäften

Die Replizierungsgleichung

$$\mathbf{B} + \mathbf{X} + \mathbf{S}'(\mathbf{X}) = \mathbf{W}(v(\mathbf{X})) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(v(\mathbf{X}))$$

bzw.

$$\mathbf{S}'(\mathbf{X}) - \mathbf{V}(v(\mathbf{X})) = \mathbf{U} - \mathbf{B} - \mathbf{X} =: \boldsymbol{\xi}$$

ergibt mit dem Supplementansatz $\mathbf{S}' = K_{\mathbf{E}} \boldsymbol{\lambda}$ die Vektorgleichung

$$K_{\mathbf{E}(\mathbf{X})} \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{V}(v(\mathbf{X})) =: \boldsymbol{\rho}(v(\mathbf{X})) \quad (= -\mathbf{r}(v(\mathbf{X})))$$

mit einem $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^n$, $v = v(\mathbf{X}) \in J$ und einem Indexvektor $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{X}) \in M^n$, der die Supplementbedingung (SBK) erfüllt. Nach der Beweisidee von Kruschwitz (1976), S. 18–20, für die Replizierung mit einperiodischen Termingeschäften wird jetzt zu einem fest vorgegebenen Beurteilungsparameter $v \in J$ das in $\boldsymbol{\lambda}$ lineare Gleichungssystem

$$K_{\mathbf{E}} \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\rho}(v) := \boldsymbol{\xi} + \mathbf{V}(v)$$

betrachtet. Da die $(n+1) \times n$ -Matrix $K_{\mathbf{E}}$ eine obere Dreiecksgestalt und in der Subdiagonalen (der unter der Hauptdiagonalen gelegenen Diagonalen) die von den Supplementtypen E_j unabhängigen Elemente +1 besitzt, können die letzten n Zeilen des Gleichungssystems sukzessive für $j = n, \dots, 1$ nach den Transformationsparametern $\lambda_j = \lambda_j(v) \in \mathbb{R}$ aufgelöst werden und die Supplementtypen $E_j = E_j(v) \in M$ nach der Supplementbedingung (SBK) bestimmt werden. Die Funktionen $\lambda_j(v)$ und $E_j(v)$ berechnen sich nach der folgenden Rekursionsformel:

$$\lambda_n(v) = \rho_n(v),$$

$$E_n(v) = H \text{ bei } \lambda_n(v) \geq 0, \quad E_n(v) = S \text{ bei } \lambda_n(v) < 0,$$

$$\lambda_j(v) = \rho_j(v) + \kappa_j(v) \quad \text{mit } \kappa_j(v) := - \sum_{k=j+1}^n K_{E_k(v),j}^k \cdot \lambda_k(v),$$

$$E_j(v) = H \text{ bei } \lambda_j(v) \geq 0, \quad E_j(v) = S \text{ bei } \lambda_j(v) < 0 (j = n-1, \dots, 1).$$

Hier bei der Replizierung ist

$$\varphi_j(v) := -\lambda_j(v)$$

$$= B_j + X_j + \sum_{k=j+1}^n (-K_{E_k(v),j}^k) \cdot \varphi_k(v) - U_j - V_j(v) \quad (j = 1, \dots, n)$$

der zum Zeitpunkt $t = j$ vorhandene Finanzmittelbestand, der sich als Summe der Zahlungsstromkomponente X_j , der Basiszahlung B_j und der auf den Zeitpunkt j transponierten („abgezinsten“) späteren Finanzmittelbestände $\varphi_k(v) = \lambda_k(v)$ ($k = 1, \dots, j-1$) und nach der Entnahme der Marge $W_j(v) = U_j + V_j(v)$ ergibt.

Zu jedem $v \in J$ ist also eindeutig der zugehörige Indexvektor $\mathbf{E}(v)$ und Transformationsvektor $\boldsymbol{\lambda}(v) \in \mathbb{R}^n$ festgelegt. Diese Vektoren $\boldsymbol{\lambda}(v)$ und $\mathbf{E}(v)$ liefern genau dann eine Lösung des Gleichungssystems

$$K_{\mathbf{E}(v)} \boldsymbol{\lambda}(v) = \boldsymbol{\rho}(v),$$

wenn auch noch die Gleichung der ersten Zeile erfüllt ist,

$$\lambda_0(v) := \rho_0(v) + \kappa_0(v) = 0,$$

wenn also v eine Nullstelle der rekursiv definierten Funktion $\lambda_0(v)$ ist. Somit existiert eine eindeutige Replizierung von $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ genau dann, wenn es genau eine Nullstelle $v = v(\mathbf{X}) \in J$ der Funktion $\lambda_0(v)$ gibt. Wie oben bei der Duplizierung kann ein Beweis für die eindeutige Replizierung bzw. für die Existenz von genau einer Nullstelle der Funktion $\lambda_0(v)$ angegeben werden. Das Beweisschema ist das gleiche wie bei der Duplizierung, nur dass die streng monoton fallende Funktion $\boldsymbol{\sigma}(\mu) = \boldsymbol{\zeta} - \mathbf{V}(\mu)$ hier durch die streng monoton steigende Funktion $\boldsymbol{\rho}(v) = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{V}(v)$ ersetzt wird. Demzufolge ergeben sich hier die $\lambda_j(v)$ und $\kappa_j(v)$ als monoton steigend und $\lambda_0(v)$ als streng monoton steigend mit dem Grenzwertverhalten $\lambda_0(v) \rightarrow -\infty$ bei $v \rightarrow a$ und $\lambda_0(v) \rightarrow +\infty$ bei $v \rightarrow b$. Der ausführliche Beweis wird hier weggelassen, da er analog zu dem entsprechenden Beweis für die Duplizierung mit den speziellen Kassageschäften verläuft. Durch den Beweis erhält man auch hier eine Berechnungsmöglichkeit für die Replizierung bei Verwendung eines derartigen Supplementsystems über die iterative Nullstellenbestimmung der Hilfsfunktion $\lambda_0(\mu)$.

3 Monotonie der Präferenzordnungen zu den speziellen Supplementsystemen

Der Beweis der Monotonie der betrachteten Präferenzordnungen im \mathbb{R}^{n+1} , die mit den speziellen Supplementsystemen konstruiert wurden, verwendet wieder die gleichen Hilfsfunktionen wie der Beweis der eindeutigen Replizierung bzw. Duplizierung. Zum Nachweis der Monotonie beispielsweise der R-Präferenzordnung \succeq_{RW} ist für beliebige Zahlungsströme $\mathbf{X}, \mathbf{X}' \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit der Ungleichung

$$\mathbf{X}' \succ \mathbf{X}$$

die Relation

$$\mathbf{X}' \triangleright_{RW} \mathbf{X}$$

mit der strengen Halbordnung \triangleright_{RW} zu zeigen. Gleichbedeutend dazu ist es, die „strenge Monotonie“ der Präferenzfunktion

$$\mathbf{w}_{RW}(\mathbf{X}) = \mathbf{W}(v(\mathbf{X}))$$

bzw. die „strenge Monotonie“ der Nutzenfunktion

$$v_{RW}(\mathbf{X}) = v(\mathbf{X})$$

nachzuweisen. Dazu ist zu vorgegebenen $\mathbf{X}, \mathbf{X}' \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\mathbf{X}' \succ \mathbf{X}$ für die Beurteilungskurvenpunkte $\mathbf{W}(v(\mathbf{X}')), \mathbf{W}(v(\mathbf{X})) \in \mathbf{W}(J)$ die strenge Ungleichung

$$\mathbf{W}(v(\mathbf{X}')) \succ \mathbf{W}(v(\mathbf{X}))$$

bzw. für die Beurteilungsparameter $v(\mathbf{X}), v(\mathbf{X}') \in J$ die strenge Ungleichung

$$v(\mathbf{X}') > v(\mathbf{X})$$

zu beweisen. Eine analoge Aussage gilt für die Monotonie der D-Präferenzordnung \succeq_{DW} .

Zu beachten ist, dass bei dem hier verwendeten Begriff der „strengen Monotonie“ für die auf \mathbb{R}^{n+1} definierten Funktionen $\mathbf{w}_{RW} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{W}(J)$ und $v_{RW} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow J$ nur Argumente (unabhängige Variable) $\mathbf{X}, \mathbf{X}' \in \mathbb{R}^{n+1}$ betrachtet werden, die mittels der strengen Halbordnung \succ verglichen werden können.

3.1 Monotonie der R-Präferenzordnung beim Supplementensystem der Termingeschäfte

Beim Beweis der Monotonie der R-Präferenzordnung \succeq_{RW} werden nun die beim Beweis der eindeutigen Replizierung mit den Termingeschäften verwendeten Hilfsfunktionen

$$r_j(v) = -\zeta_j - V_j(v), \lambda_j(v), E_j(v) \text{ und } \gamma_j(v)$$

auch noch in Abhängigkeit vom Parameter $\xi = \mathbf{U} - \mathbf{B} - \mathbf{X}$ bzw. $\xi' = \mathbf{U} - \mathbf{B} - \mathbf{X}'$ betrachtet. Falls für die bezüglich v streng monoton fallenden Funktionen $\lambda_{n+1}(v, \xi)$ und $\lambda_{n+1}(v, \xi')$ im gesamten Intervall J die strenge Ungleichung

$$\lambda_{n+1}(v, \xi) < \lambda_{n+1}(v, \xi') \text{ bei } \xi \succ \xi'$$

nachgewiesen wird, so gilt für deren eindeutig bestimmte Nullstellen $v_{n+1}(\xi) = v(\mathbf{X})$ und $v_{n+1}(\xi') = v(\mathbf{X}')$ die gewünschte Ungleichung $v(\mathbf{X}) < v(\mathbf{X}')$.

Als wichtiges Hilfsmittel für den nachfolgend geführten Nachweis der Stetigkeit der im Abschnitt 5.2.1 definierten Nutzenfunktionen und Präferenzfunktionen wird auch noch die Stetigkeit der Hilfsfunktion $\lambda_{n+1}(v, \xi)$ bewiesen.

Beweis der Monotonie der R-Präferenzordnung \succeq_{RW} für das Supplementensystem L der Termingeschäfte und der strengen Monotonie der Hilfsfunktion $\lambda_{n+1}(v, \xi)$: Für die Funktion

$$\mathbf{r}(v, \xi) = -\xi - \mathbf{V}(v)$$

gilt wegen der Voraussetzung $\mathbf{X} \prec \mathbf{X}'$ bzw. $-\xi \prec -\xi'$ die Ungleichung

$$\mathbf{r}(v, \xi) - \mathbf{r}(v, \xi') = -\xi + \xi' = \mathbf{X} - \mathbf{X}' =: \Delta \prec \mathbf{O}.$$

Es gibt also einen Index $k = k(\Delta) \in \{0, \dots, n\}$ mit

$$\begin{aligned} \Delta_j &= 0 && \text{für } j = 0, \dots, k-1, \\ \Delta_k &< 0 && \text{für } j = k, \\ \Delta_j &\leq 0 && \text{für } j = k+1, \dots, n. \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} r_j(v, \xi) &= r_j(v, \xi') && \text{für } j = 0, \dots, k-1, \\ r_k(v, \xi) &< r_k(v, \xi') && \text{für } j = k, \\ r_j(v, \xi) &\leq r_j(v, \xi') && \text{für } j = k+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Mittels vollständiger Induktion soll daraus für die Finanzmittelbestände die strenge Ungleichung

$$(*) \quad \lambda_j(v, \xi) < \lambda_j(v, \xi') \quad \text{für } j = k+1, \dots, n+1, \quad \xi \succ \xi'$$

nachgewiesen werden.

Dazu wird als Erstes der *Induktionsbeginn* für die Fälle $k = 0$ und $k \geq 1$ gesichert.

Falls $k = 0$ ist, ergibt sich unmittelbar die Ungleichung

$$\lambda_1(v, \xi) = r_0(v, \xi) < r_0(v, \xi') = \lambda_1(v, \xi')$$

und damit der Induktionsbeginn für den Index $j = k+1 = 1$.

Falls $k \geq 1$ ist, wird erst die Identität

$$\lambda_j(v, \xi) = \lambda_j(v, \xi') \quad \text{für } j = 1, \dots, k$$

gezeigt und zwar wiederum mittels vollständiger Induktion: Für $j = 1$ erhält man den Induktionsbeginn

$$\lambda_1(v, \xi) = r_0(v, \xi) = r_0(v, \xi') = \lambda_1(v, \xi').$$

Für den Induktionsschluss von $j-1$ auf j ($j = 2, \dots, k$) erhält man aus der Induktionsannahme

$$\begin{aligned} \lambda_h(v, \xi) &= \lambda_h(v, \xi'), \\ E_h(v, \xi) &= E_h(v, \xi') \quad \text{für } h = 1, \dots, j-1 \end{aligned}$$

für die ersten $j-1$ Finanzmittelbestände und Supplementtypen zunächst für die zu $\boldsymbol{\eta} = \xi, \xi'$ gehörigen Summen der transponierten („aufgezinsten“) Finanzmittelbestände

$$\gamma_{j-1}(v, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{h=1}^{j-1} T_{E_h(v, \boldsymbol{\eta}), j-1}^h \cdot \lambda_h(v, \boldsymbol{\eta})$$

die zugehörigen Identitäten

$$\gamma_{j-1}(v, \xi) = \gamma_{j-1}(v, \xi')$$

und dann mittels der Rekursionsformel wegen $j-1 \leq k-1$ für den Index j die gewünschten Identitäten

$$\begin{aligned} \lambda_j(v, \xi) &= r_{j-1}(v, \xi) + \gamma_{j-1}(v, \xi) \\ &= r_{j-1}(v, \xi') + \gamma_{j-1}(v, \xi') \\ &= \lambda_j(v, \xi'), \\ E_j(v, \xi) &= E_j(v, \xi'). \end{aligned}$$

Aus den damit per vollständiger Induktion bewiesenen Identitäten

$$\begin{aligned} \lambda_h(v, \xi) &= \lambda_h(v, \xi'), \\ E_h(v, \xi) &= E_h(v, \xi') \quad \text{für } h = 1, \dots, k \end{aligned}$$

folgt noch für den Index $j = k$ nach der Rekursionsformel die Gleichung

$$\lambda_k(v, \xi) = \lambda_k(v, \xi')$$

und daraus für den Index $j = k+1$ nach der Rekursionsformel die Ungleichung

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1}(v, \xi) &= r_k(v, \xi) + \lambda_k(v, \xi) \\ &< r_k(v, \xi') + \lambda_k(v, \xi') \\ &= \lambda_{k+1}(v, \xi'), \end{aligned}$$

welche nun auch für $k \geq 1$ den Induktionsbeginn $j = k+1$ für die obige Behauptung der strengen Ungleichung (*) darstellt.

Als Nächstes wird der *Induktionsschluss* von $j-1$ auf j ($k+2 \leq j \leq n+1$) der obigen Behauptung (*) erbracht. Dazu geht man von der Induktionsannahme

$$\lambda_h(v, \xi) < \lambda_h(v, \xi'), \quad \text{für } h = k+1, \dots, j-1,$$

also der strengen Ungleichung für die Finanzmittelbestände der Indizes $h = k+1, \dots, j-1$ aus. Zu beachten ist, dass außerdem für die Indizes $h = 1, \dots, k$ die Gleichheit gilt,

$$\lambda_h(v, \xi) = \lambda_h(v, \xi') \quad \text{für } h = 1, \dots, k,$$

also insgesamt die Ungleichung

$$\lambda_h(v, \xi) \leq \lambda_h(v, \xi') \quad \text{für } h = 1, \dots, j-1.$$

In der Rekursionsformel für $\lambda_j(v, \xi)$,

$$\lambda_j(v, \xi) = r_{j-1}(v, \xi) + \gamma_{j-1}(v, \xi) \quad \text{mit } \gamma_{j-1}(v, \xi) = \sum_{h=1}^{j-1} T_{E_h(v, \xi), j-1}^h \cdot \lambda_h(v, \xi),$$

sollen nun bei fest gedachtem j die einzelnen Summanden in der Summe $\gamma_{j-1}(v, \xi)$, also die transponierten Finanzmittelbestände

$$\tau_h(v, \xi) := \tau_{j-1, h}(v, \xi) := T_{E_h(v, \xi), j-1}^h \cdot \lambda_h(v, \xi) \quad (j \text{ fest fixiert}),$$

für die Parameter ξ und ξ' verglichen werden. Für die Indizes $h = 1, \dots, k$ sind jeweils die Finanzmittelbestände $\lambda_h(v, \xi)$, $\lambda_h(v, \xi')$, die Supplementtypen $E_h(v, \xi)$, $E_h(v, \xi')$ und damit auch die transponierten Finanzmittelbestände gleich:

$$\tau_h(v, \xi) = \tau_h(v, \xi').$$

Für die Indizes $h = k+1, \dots, j-1$ sind drei Fälle zu unterscheiden:

$$\begin{aligned} \alpha) & \quad 0 \leq \lambda_h(v, \xi) < \lambda_h(v, \xi'), \quad E_h(v, \xi) = E_h(v, \xi') = H, \\ \beta) & \quad \lambda_h(v, \xi) < \lambda_h(v, \xi') < 0, \quad E_h(v, \xi) = E_h(v, \xi') = S, \\ \gamma) & \quad \lambda_h(v, \xi) < 0 \leq \lambda_h(v, \xi'), \quad E_h(v, \xi) = S, E_h(v, \xi') = H. \end{aligned}$$

In den Fällen α) und β) sind für $\eta = \xi, \xi'$ die Matrixelemente $T_{E_h(v, \eta), j-1}^h$ gleich, nichtnegativ für $h \leq j-2$ und positiv für $h = j-1$. Somit folgt

$$\begin{aligned} \tau_h(v, \xi) &\leq \tau_h(v, \xi') && \text{für } h \leq j-2, \\ \tau_h(v, \xi) &< \tau_h(v, \xi') && \text{für } h = j-1. \end{aligned}$$

Im Fall γ) sind für $\eta = \xi, \xi'$ zwar die Matrixelemente $T_{E_h(v, \eta), j-1}^h$ im Allgemeinen verschieden, aber dennoch beide nichtnegativ für $h \leq j-2$ und positiv für $h = j-1$. Somit folgen ebenfalls die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \tau_h(v, \xi) &\leq 0 \leq \tau_h(v, \xi') && \text{für } h \leq j-2, \\ \tau_h(v, \xi) &< 0 \leq \tau_h(v, \xi') && \text{für } h = j-1. \end{aligned}$$

Da in den Summen $\gamma_{j-1}(v, \eta)$, $\eta = \xi, \xi'$, der transponierten Finanzmittelbestände der höchste Index $h = j-1$ ($\geq k+1$) ist und für diesen Index $h = j-1$ in allen drei Fällen α) - γ) die strenge Ungleichung $\tau_h(v, \xi) < \tau_h(v, \xi')$ gilt, ist auch für die Summen

$$\gamma_{j-1}(v, \eta) = \sum_{h=1}^{j-1} \tau_h(v, \eta), \quad \eta = \xi, \xi',$$

die strenge Ungleichung gültig:

$$\gamma_{j-1}(v, \xi) < \gamma_{j-1}(v, \xi').$$

Da außerdem wegen $j-1 \geq k+1$ die schwache Ungleichung

$$r_{j-1}(v, \xi) \leq r_{j-1}(v, \xi')$$

erfüllt ist, erhält man mit Hilfe der Rekursionsformel dann die Ungleichung

$$\begin{aligned} \lambda_j(v, \xi) &= r_{j-1}(v, \xi) + \gamma_{j-1}(v, \xi) \\ &< r_{j-1}(v, \xi') + \gamma_{j-1}(v, \xi') \\ &= \lambda_j(v, \xi'). \end{aligned}$$

Damit gilt auch für den Index j ($k+2 \leq j \leq n+1$) die strenge Ungleichung (*) für die Finanzmittelbestände und der Induktionsbeweis ist erbracht.

Speziell für den Index $j = n+1$ sind also die letzten Finanzmittelbestände $\lambda_{n+1}(v, \xi)$ und $\lambda_{n+1}(v, \xi')$ streng monoton fallende Funktionen von v , welche in J die Ungleichung

$$\lambda_{n+1}(v, \xi) < \lambda_{n+1}(v, \xi')$$

erfüllen. Für ihre eindeutig bestimmten Nullstellen $v_{n+1}(\xi) = v(\mathbf{X})$ und $v_{n+1}(\xi') = v(\mathbf{X}')$ gilt daher $v(\mathbf{X}) < v(\mathbf{X}')$ und der Beweis für die Monotonie der Präferenzordnung bzw. für die strenge Monotonie der Nutzenfunktion und der Präferenzfunktion ist abgeschlossen. □

Beweis der Stetigkeit der rekursiv definierten Hilfsfunktion $\lambda_{n+1}(v, \xi)$ bei der Replizierung mit den Termingeschäften: Die durch den Term

$$\mathbf{r}(v, \xi) = -\xi - \mathbf{V}(v)$$

gegebene Funktion

$$\mathbf{r} : (v, \xi) \in J \times \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbf{r}(v, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

mit den Argumenten (unabhängigen Variablen) v, ξ_0, \dots, ξ_n ist als Summe der Terme $-\xi$ und $-\mathbf{V}(v)$ stetig, wenn dies für die Funktion $\mathbf{V}(v)$ gilt. Für die Parameterdarstellung $\mathbf{W}(v) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(v)$ einer Beurteilungskurve ist die Stetigkeit von $\mathbf{V}(v) = \mathbf{W}(v) - \mathbf{U}$ gegeben. Demzufolge sind die Komponentenfunktionen

$$r_j(v, \xi) = -\xi_j - V_j(v)$$

in (v, ξ) stetig für die Indizes $j = 0, \dots, n$. Damit ist schon die erste Hilfsfunktion

$$\lambda_1(v, \xi) = r_0(v, \xi)$$

stetig und der Induktionsbeginn für $j = 1$ gesichert. Mittels vollständiger Induktion soll jetzt die Stetigkeit der Funktionen $\lambda_j(v, \xi)$, $j = 1, \dots, n+1$, bewiesen werden. Für den Induktionsschluss von $j-1$ auf j ($j = 2, \dots, n+1$) wird als Induktionsannahme die Stetigkeit der Funktionen $\lambda_h(v, \xi)$, $h = 1, \dots, j-1$, vorausgesetzt. Nachzuweisen ist die Stetigkeit der Funktion

$$\lambda_j(v, \xi) = r_{j-1}(v, \xi) + \gamma_{j-1}(v, \xi)$$

mit

$$\gamma_{j-1}(v, \xi) = \sum_{h=1}^{j-1} \tau_{j-1, h}(v, \xi),$$

$$\tau_{j-1,h}(v,\xi) := T_{E_h(v,\xi),j-1}^h \cdot \lambda_h(v,\xi).$$

Dazu genügt es, für die fest gedachten Indizes $j-1$ und h die Stetigkeit der Funktion $\tau_{j-1,h}(v,\xi)$ an einer beliebigen Stelle $(v_0, \xi^0) \in J \times \mathbb{R}^{n+1}$ zu begründen.

Im Fall $\lambda_h(v_0, \xi^0) \neq 0$ ist wegen der Stetigkeit der Funktion $\lambda_h(v,\xi)$ auch in einer hinreichend kleinen Umgebung $U = U(v_0, \xi^0)$ von (v_0, ξ^0) diese Funktion von Null verschieden und o. E. positiv. Der Fall mit negativen Funktionswerten verläuft analog. Demzufolge ist $E_h(v,\xi) = H$ konstant in U und $\tau_{j-1,h}(v,\xi) = T_{H,j-1}^h \cdot \lambda_h(v,\xi)$ stetig in U und insbesondere in (v_0, ξ^0) .

Im Fall $\lambda_h(v_0, \xi^0) = 0$ ist zwar $E_h(v,\xi) \in \{H, S\}$ nicht konstant in einer Umgebung von (v_0, ξ^0) , aber

$$T_{E_h(v,\xi),j-1}^h \in \{T_{H,j-1}^h, T_{S,j-1}^h\}$$

beschränkt für alle $(v,\xi) \in J \times \mathbb{R}^{n+1}$. Wegen der Stetigkeit von $\lambda_h(v,\xi)$ gilt

$$\lambda_h(v,\xi) \rightarrow \lambda_h(v_0, \xi^0) = 0 \text{ bei } (v,\xi) \rightarrow (v_0, \xi^0)$$

und damit

$$\lim_{(v,\xi) \rightarrow (v_0, \xi^0)} \tau_{j-1,h}(v,\xi) = 0 = T_{E_h(v_0, \xi^0),j-1}^h \cdot \lambda_h(v_0, \xi^0) = \tau_{j-1,h}(v_0, \xi^0),$$

was die Stetigkeit von $\tau_{j-1,h}(v,\xi)$ in (v_0, ξ^0) bedeutet.

Damit ist die Stetigkeit aller $\tau_{j-1,h}(v,\xi)$ für $h = 1, \dots, j-1$, die Stetigkeit von $\gamma_{j-1}(v,\xi)$ und von $\lambda_j(v,\xi)$ bewiesen und der Induktionsschluss erbracht. \square

3.2 Monotonie der D-Präferenzordnung beim Supplementsystem der Termingeschäfte

Zum Nachweis der Monotonie der D-Präferenzordnung \succeq_{DW} ist für beliebige Zahlungsströme $\mathbf{X}, \mathbf{X}' \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$\mathbf{X}' \succ \mathbf{X}$$

die Relation

$$\mathbf{X}' \succ_{DW} \mathbf{X}$$

bzw. für die Beurteilungsparameter $\mu(\mathbf{X})$ und $\mu(\mathbf{X}')$ die strenge Ungleichung

$$\mu(\mathbf{X}') > \mu(\mathbf{X})$$

zu zeigen. Dazu werden die beim Beweis der eindeutigen Duplizierung mit Termingeschäften verwendeten Hilfsfunktionen

$$s_j(\mu) = -\zeta_j + V_j(\mu), \lambda_j(\mu), E_j(\mu) \text{ und } \gamma_j(\mu)$$

auch noch in Abhängigkeit vom Parameter $\zeta = \mathbf{X} - \mathbf{U}$ bzw. $\zeta' = \mathbf{X}' - \mathbf{U}$ betrachtet. Der Beweis der Monotonie der D-Präferenzordnung verläuft analog zum entsprechenden Beweis für die R-Präferenzordnung. Dabei tritt aber an die Stelle der in J streng monoton fallenden Funktion $\mathbf{r}(v,\xi) = -\xi - \mathbf{V}(v)$ hier die streng monoton steigende Funktion

$$\mathbf{s}(\mu,\zeta) = -\zeta + \mathbf{V}(\mu)$$

mit der Ungleichung

$$\mathbf{s}(\mu,\zeta) \succ \mathbf{s}(\mu,\zeta').$$

Daraus folgt für die streng monoton steigenden Funktionen $\lambda_{n+1}(\mu,\xi)$ und $\lambda_{n+1}(\mu,\xi')$ von μ im gesamten Intervall J die strenge Ungleichung

$$\lambda_{n+1}(\mu,\xi) > \lambda_{n+1}(\mu,\xi')$$

und für deren eindeutig bestimmte Nullstellen $\mu_{n+1}(\xi) = \mu(\mathbf{X})$ und $\mu_{n+1}(\xi') = \mu(\mathbf{X}')$ die gewünschte Ungleichung $\mu(\mathbf{X}) < \mu(\mathbf{X}')$.

Ebenfalls analog zum entsprechenden Ergebnis bei der Replizierung mit den Termingeschäften ergibt sich auch hier bei der Duplizierung die Stetigkeit der rekursiv definierten Hilfsfunktion $\lambda_{n+1}(v,\xi)$.

3.3 Monotonie der R-Präferenzordnung beim Supplementsystem der Kassageschäfte

Beim Beweis der Monotonie der R-Präferenzordnung \succeq_{RW} ist für beliebige Zahlungsströme \mathbf{X} , $\mathbf{X}' \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\mathbf{X}' \succ \mathbf{X}$ für die Beurteilungsparameter $v(\mathbf{X})$ und $v(\mathbf{X}')$ die strenge Ungleichung

$$v(\mathbf{X}) < v(\mathbf{X}')$$

zu zeigen. Dazu werden die beim Beweis der eindeutigen Replizierung mit Kassageschäften verwendeten Hilfsfunktionen

$$\rho_j(v) = \xi_j + V_j(v), \lambda_j(v), E_j(v) \text{ und } \kappa_j(v)$$

auch noch in Abhängigkeit vom Parameter $\xi = \mathbf{U} - \mathbf{B} - \mathbf{X}$ bzw. $\xi' = \mathbf{U} - \mathbf{B} - \mathbf{X}'$ betrachtet. Der Beweis verläuft nach dem gleichen Schema wie die obigen Monotoniebeweise. Ausgehend von der in J streng monoton steigenden Funktion

$$\rho(v, \xi) = \xi + \mathbf{V}(v)$$

und der Ungleichung

$$\rho(v, \xi) \succ \rho(v, \xi')$$

folgt für die streng monoton steigenden Funktionen $\lambda_0(v, \xi)$ und $\lambda_0(v, \xi')$ im gesamten Intervall J die strenge Ungleichung

$$\lambda_0(v, \xi) > \lambda_0(v, \xi')$$

und daher für deren eindeutig bestimmte Nullstellen $v_0(\xi) = v(\mathbf{X})$ und $v_0(\xi') = v(\mathbf{X}')$ die gewünschte Ungleichung $v(\mathbf{X}) < v(\mathbf{X}')$.

Des Weiteren wird jetzt noch der Beweis für die Stetigkeit der rekursiv definierten Hilfsfunktion $\lambda_0(v, \xi)$ angegeben. Er verläuft nach dem gleichen Schema wie der Beweis der Stetigkeit der Hilfsfunktion $\lambda_{n+1}(v, \xi)$ beim Supplementsystem der Termingeschäfte. Die Stetigkeit der Hilfsfunktion $\lambda_0(v, \xi)$ wird noch für den Nachweis der Stetigkeit der im Abschnitt 5.2.1 definierten Nutzenfunktionen und Präferenzfunktionen verwendet.

Beweis der Stetigkeit der Hilfsfunktion $\lambda_0(v, \xi)$ bei der Replizierung mit den Kassageschäften: Die durch den Term

$$\rho(v, \xi) = \xi + \mathbf{V}(v) = -\mathbf{r}(v, \xi)$$

gegebene Funktion

$$\rho : (v, \xi) \in J \times \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \rho(v, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

ist stetig, da die Funktion $\mathbf{V}(v) = \mathbf{W}(v) - \mathbf{U}$ stetig ist. Demzufolge sind die Komponentenfunktionen

$$\rho_j(v, \xi) = \xi_j + V_j(v)$$

in (v, ξ) stetig für die Indizes $j = 0, \dots, n$. Damit ist schon die in der Rekursion zuerst berechnete Hilfsfunktion

$$\lambda_n(v, \xi) = \rho_n(v, \xi)$$

stetig und der Induktionsbeginn für $j = n$ gesichert. Mittels vollständiger Induktion soll jetzt die Stetigkeit der Funktionen $\lambda_j(v, \xi)$, $j = n, \dots, 0$, bewiesen werden. Für den Induktionsschluss von $j+1$ auf j ($j = 0, \dots, n-1$) wird als Induktionsannahme die Stetigkeit der Funktionen $\lambda_h(v, \xi)$, $h = j+1, \dots, n$, vorausgesetzt. Nachzuweisen ist die Stetigkeit der Funktion

$$\lambda_j(v, \xi) = \rho_j(v, \xi) + \kappa_j(v, \xi)$$

mit

$$\kappa_j(v, \xi) = \sum_{h=j+1}^n \partial_{j,h}(v, \xi),$$

$$\partial_{j,h}(v, \xi) := -K_{E_h(v, \xi), j}^h \cdot \lambda_h(v, \xi).$$

Dazu genügt es, für die fest gedachten Indizes j und h die Stetigkeit der Funktion $\partial_{j,h}(v, \xi)$ an einer beliebigen Stelle $(v_0, \xi^0) \in J \times \mathbb{R}^{n+1}$ zu begründen.

Im Fall $\lambda_h(v_0, \xi^0) \neq 0$ ist wegen der Stetigkeit der Funktion $\lambda_h(v, \xi)$ auch in einer hinreichend kleinen Umgebung $U = U(v_0, \xi^0)$ von (v_0, ξ^0) diese Funktion von Null verschieden und o. E. positiv. Der Fall mit negativen Funktionswerten verläuft analog. Demzufolge ist $E_h(v, \xi) = H$ konstant in U und $\partial_{j,h}(v, \xi) = -K_{H,j}^h \cdot \lambda_h(v, \xi)$ stetig in U und insbesondere in (v_0, ξ^0) .

Im Fall $\lambda_h(v_0, \xi^0) = 0$ ist zwar $E_h(v, \xi) \in \{H, S\}$ nicht konstant in einer Umgebung von (v_0, ξ^0) , aber

$$K_{E_h(v, \xi), j}^h \in \{K_{H,j}^h, K_{S,j}^h\}$$

beschränkt für alle (v, ξ) . Wegen der Stetigkeit von $\lambda_h(v, \xi)$ gilt

$$\lambda_h(v, \xi) \rightarrow \lambda_h(v_0, \xi^0) = 0 \text{ bei } (v, \xi) \rightarrow (v_0, \xi^0)$$

und damit

$$\lim_{(v, \xi) \rightarrow (v_0, \xi^0)} \partial_{j,h}(v, \xi) = 0 = -K_{E_h(v_0, \xi^0), j}^h \cdot \lambda_h(v_0, \xi^0) = \partial_{j,h}(v_0, \xi^0),$$

was die Stetigkeit von $\partial_{j,h}(v, \xi)$ in (v_0, ξ^0) bedeutet.

Damit ist die Stetigkeit aller $\partial_{j,h}(v, \xi)$ für $h = j+1, \dots, n$, die Stetigkeit von $\kappa_j(v, \xi)$ und von $\lambda_j(v, \xi)$ bewiesen und der Induktionsschluss erbracht. \square

3.4 Monotonie der D-Präferenzordnung beim Supplementsystem der Kassageschäfte

Zum Beweis der Monotonie der D-Präferenzordnung \succeq_{DW} ist für beliebige Zahlungsströme \mathbf{X} , $\mathbf{X}' \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\mathbf{X}' \succ \mathbf{X}$ für die Beurteilungsparameter $\mu(\mathbf{X})$ und $\mu(\mathbf{X}')$ die strenge Ungleichung

$$\mu(\mathbf{X}) < \mu(\mathbf{X}')$$

zu zeigen. Dazu werden die beim Beweis der eindeutigen Duplizierung mit Kassageschäften verwendeten Hilfsfunktionen

$$\sigma_j(\mu) = \zeta_j - V_j(\mu), \lambda_j(\mu), E_j(\mu) \text{ und } \kappa_j(v)$$

auch noch in Abhängigkeit vom Parameter $\zeta = \mathbf{X} - \mathbf{U}$ bzw. $\zeta' = \mathbf{X}' - \mathbf{U}$ betrachtet. Der Beweis der Monotonie verläuft analog zu den obigen Monotoniebeweisen. Dabei tritt aber an die Stelle der oben der Reihe nach verwendeten Funktionen $\mathbf{r}(v, \xi) = -\xi - \mathbf{V}(v)$, $\mathbf{s}(\mu, \zeta) = -\zeta + \mathbf{V}(\mu)$ und $\mathbf{p}(v, \xi) = \xi + \mathbf{V}(v)$ hier die streng monoton fallende Funktion

$$\sigma(\mu, \zeta) = \zeta - \mathbf{V}(\mu) = -\mathbf{s}(\mu, \zeta)$$

mit der Ungleichung

$$\sigma(\mu, \zeta) < \sigma(\mu, \zeta').$$

Daraus folgt für die streng monoton fallenden Funktionen $\lambda_0(\mu, \xi)$ und $\lambda_0(\mu, \xi')$ im gesamten Intervall J die strenge Ungleichung

$$\lambda_0(\mu, \xi) < \lambda_0(\mu, \xi')$$

und für deren eindeutig bestimmte Nullstellen $\mu_0(\xi) = \mu(\mathbf{X})$ und $\mu_0(\xi') = \mu(\mathbf{X}')$ die gewünschte Ungleichung $\mu(\mathbf{X}) < \mu(\mathbf{X}')$.

Ebenfalls analog zum entsprechenden Ergebnis bei der Replizierung mit den Kassageschäften ergibt sich auch hier bei der Duplizierung mit den Kassageschäften die Stetigkeit der rekursiv definierten Hilfsfunktion $\lambda_0(\mu, \xi)$. Die Stetigkeit der Hilfsfunktion $\lambda_0(v, \xi)$ wird noch für den Beweis der Stetigkeit der Nutzenfunktionen und Präferenzfunktionen verwendet.

Insgesamt liefern also die hier verwendeten Supplementsysteme von Termingeschäften und Kassageschäften mit beliebigen Beurteilungskurven stets monotone Präferenzordnungen.

4 Stetigkeit der Präferenzordnungen zu den speziellen Supplementsystemen

Für die in den Abschnitt 8.4 des Buchs ‚Finanzmathematik‘ angegebenen speziellen Supplementsysteme L von Termingeschäften bzw. Kassageschäften wird nun die Stetigkeit der Nutzenfunktionen μ_{DW} und ν_{RW} , die Stetigkeit der Präferenzfunktionen \mathbf{w}_{DW} und \mathbf{w}_{RW} und die Stetigkeit der Präferenzordnungen \succeq_{DW} und \succeq_{RW} bewiesen. Als wichtiges Hilfsmittel wird dazu die in den vorherigen Abschnitten bewiesene Stetigkeit der Hilfsfunktionen $\lambda_{n+1}(v, \xi)$ und $\lambda_0(v, \xi)$ und deren strenge Monotonie bezüglich der Variablen v verwendet. So ist die Funktion $\lambda_{n+1}(v, \xi)$ bezüglich v streng monoton fallend bei der Replizierung mit den speziellen Termingeschäften und streng monoton steigend bei der Duplizierung mit den speziellen Termingeschäften. Die Funktion $\lambda_0(v, \xi)$ ist bezüglich v streng monoton steigend bei der Replizierung mit den speziellen Kassageschäften und streng monoton fallend bei der Duplizierung mit den speziellen Kassageschäften. Zum Beweis der Stetigkeit der Nutzenfunk-

tionen wird nun der Satz über implizite Funktionen aus der Differenzialrechnung verwendet. Diesen Satz samt Beweis findet man beispielsweise in den Analysis-Lehrbüchern von Erwe, Bd. I (1962), S. 322–333, Grauert und Fischer, Bd. II (1968), S. 92–96, und Mangoldt und Knopp, Bd. II (1974), S. 358–378.

Beweis für die Stetigkeit der Nutzenfunktionen und Präferenzfunktionen: Zu einem Zahlungsstrom $\mathbf{X}^0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist der Funktionswert $v_{RW}(\mathbf{X}^0)$ der R-Nutzenfunktion $v_{RW} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow J$ die einzige Nullstelle $v_0 = v(\mathbf{X}^0)$ der zur Replizierung mit den Termingeschäften rekursiv definierten Funktion $\lambda(v) = \lambda_{n+1}(v, \xi^0)$, $\xi^0 = \mathbf{U} - \mathbf{B} - \mathbf{X}^0$, als Funktion von v . Der Punkt $(v_0, \xi^0) \in J \times \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine Nullstelle der Funktion $\lambda_{n+1}(v, \xi)$:

$$\lambda_{n+1}(v_0, \xi^0) = 0.$$

Da (v_0, ξ^0) ein innerer Punkt des Definitionsgebiets $J \times \mathbb{R}^{n+1}$ der Funktion $\lambda_{n+1}(v, \xi)$ ist, ist auch in einer Umgebung dieses Punktes die Funktion $\lambda_{n+1}(v, \xi)$ stetig und bezüglich der Variablen v streng monoton steigend. Demzufolge lässt sich der Satz über implizite Funktionen anwenden und es folgt, dass es zu v_0 und ξ^0 Umgebungen $V(v_0)$ und $U(\xi^0)$ derart gibt, dass genau eine Funktion

$$\tilde{v} : U(\xi^0) \rightarrow V(v_0)$$

existiert mit

$$\tilde{v}(\xi^0) = v_0,$$

$$\lambda_{n+1}(\tilde{v}(\xi), \xi) = 0 \text{ für alle } \xi \in U(\xi^0).$$

Die Gleichung $\lambda_{n+1}(v, \xi) = 0$ ist also in einer Umgebung $U(\xi^0)$ von ξ^0 eindeutig nach ξ auflösbar, wenn die Funktionswerte auf eine beliebig klein vorgegebene Umgebung von v_0 begrenzt werden. Die Gleichung definiert auf $U(\xi^0)$ eine so genannte implizite oder unentwickelte Funktion $\tilde{v}(\xi)$. Die Einzigkeit der Funktion $\tilde{v}(\xi)$ auf $U(\xi^0)$ ergibt sich aus der konstruktiven Forderung im Beweis des Satzes, dass man die Variable ξ auf eine beliebig klein vorgebbare Umgebung von ξ^0 einschränkt. Weiter ergibt sich aus dem Satz auch die Stetigkeit der Funktion $\tilde{v}(\xi)$ an der Stelle ξ^0 mit dem vorgegebenen Funktionswert v_0 . Man sagt, dass die nachgewiesene lokale implizite Funktion sich durch stetige Fortsetzung aus dem Anfangswert $\tilde{v}(\xi^0) = v_0$ ergibt.

Zu jedem ξ in der Umgebung $U(\xi^0)$ ist das zugehörige $v = \tilde{v}(\xi)$ eine Nullstelle von $\lambda_{n+1}(v, \xi)$ als Funktion von v und stimmt daher mit der einzigen Nullstelle $v = v(\mathbf{X})$ von $\lambda_{n+1}(v, \xi)$, $\xi = \mathbf{U} - \mathbf{B} - \mathbf{X}$, überein. Daher stimmt in einer entsprechenden Umgebung $U(\mathbf{X}^0)$ von $\mathbf{X}^0 = \mathbf{U} - \mathbf{B} - \xi^0$ die Funktion $v(\mathbf{X})$ mit der in $\mathbf{X} \in U(\mathbf{X}^0)$ stetigen Funktion $\tilde{v}(\mathbf{U} - \mathbf{B} - \mathbf{X})$ überein:

$$v_{RW}(\mathbf{X}) = v(\mathbf{X}) = \tilde{v}(\mathbf{U} - \mathbf{B} - \mathbf{X}) \text{ für } \mathbf{X} \in U(\mathbf{X}^0).$$

Damit ist die Stetigkeit der R-Nutzenfunktion $v_{RW}(\mathbf{X})$ in \mathbf{X}^0 bewiesen.

Analog lässt sich die Stetigkeit der D-Nutzenfunktion $\mu_{DW} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow J$ beweisen. Bei der Duplizierung mit den Termingeschäften werden in der Rekursionsformel zur Definition der Funktion $\lambda_{n+1}(\mu, \zeta)$ jetzt aber die Terme $\zeta = \mathbf{X} - \mathbf{U}$ und $\mathbf{s}(\mu) = \zeta - \mathbf{V}(\mu)$ an Stelle von $\xi = \mathbf{U} - \mathbf{B} - \mathbf{X}$ und $\mathbf{r}(v, \xi) = -\xi - \mathbf{V}(v)$ verwendet. Auf die gleiche Weise lässt sich bei der Duplizierung und der Replizierung mit den speziellen Kassageschäften die Stetigkeit der Nutzenfunktionen μ_{DW} und v_{RW} beweisen. Zur rekursiven Definition der Funktion $\lambda_0(v, \xi)$ werden die Terme $\xi = \mathbf{U} - \mathbf{B} - \mathbf{X}$ und $\mathbf{r}(v) = \xi + \mathbf{V}(v) = -\mathbf{r}(v)$ verwendet und zur Definition von $\lambda_0(\mu, \zeta)$ die Terme $\zeta = \mathbf{X} - \mathbf{U}$ und $\mathbf{\sigma}(\mu) = \zeta - \mathbf{V}(\mu) = -\mathbf{s}(\mu)$.

Mit der Stetigkeit der Nutzenfunktionen μ_{DW} und v_{RW} ist dann auch die Stetigkeit der Präferenzfunktionen

$$\mathbf{w}_{DW}(\mathbf{X}) = \mathbf{W}(\mu_{DW}(\mathbf{X})),$$

$$\mathbf{w}_{RW}(\mathbf{X}) = \mathbf{W}(v_{RW}(\mathbf{X}))$$

als Zusammensetzungen von stetigen Funktionen nachgewiesen. \square

Als Folgerung aus der Stetigkeit der Nutzenfunktion erhält man hier auch die Stetigkeit der zugehörigen Präferenzordnung. Beispielsweise wird die D-Präferenzordnung \succeq_{DW} genau dann als stetig bezeichnet, wenn es zu drei Zahlungsströmen $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit der Relation $\mathbf{X} \succ_{DW} \mathbf{Y} \succ_{DW} \mathbf{Z}$ auch einen Zahlungsstrom $\mathbf{X}(\alpha) := \mathbf{Z} + \alpha(\mathbf{X} - \mathbf{Z})$, $\alpha \in]0, 1[$, auf der (bezüglich der Relativtopologie offenen) Verbindungsstrecke $] \mathbf{Z}, \mathbf{X} [$ der Zahlungsströme \mathbf{Z} und \mathbf{X} gibt, der zu \mathbf{Y} DW-indifferent ist:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \succ_{DW} \mathbf{Y} \succ_{DW} \mathbf{Z} &\Rightarrow \exists \alpha \in]0, 1[\text{ mit} \\ &\mathbf{X}(\alpha) = \mathbf{Z} + \alpha(\mathbf{X} - \mathbf{Z}) \simeq_{DW} \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

Analog zum nachfolgenden Beweis der Stetigkeit der D-Präferenzordnung erfolgt auch der Beweis der Stetigkeit der R-Präferenzordnung \succeq_{RW} . Die Definition der Stetigkeit einer Präferenzordnung für allgemeinere Alternativen $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ findet man beispielsweise bei Kruschwitz (1999), S. 30, und Jarrow (1988), S. 10.

Beweis für die Stetigkeit der D-Präferenzordnung \succeq_{DW} : Für die drei Zahlungsströme \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{Z} gelte die Relation $\mathbf{X} \succ_{DW} \mathbf{Y} \succ_{DW} \mathbf{Z}$ bzw. die Ungleichung $\mu_{DW}(\mathbf{X}) > \mu_{DW}(\mathbf{Y}) > \mu_{DW}(\mathbf{Z})$. Da die affine (affin-lineare, inhomogen lineare) Funktion

$$\mathbf{X}(\alpha) = \mathbf{Z} + \alpha(\mathbf{X} - \mathbf{Z})$$

insbesondere auf dem Einheitsintervall $[0,1]$ stetig ist und die Nutzenfunktion $\mu_{DW}(\mathbf{X})$ auf \mathbb{R}^{n+1} stetig ist, ist auch die durch die Zuordnungsvorschrift

$$\omega(\alpha) := \mu_{DW}(\mathbf{X}(\alpha))$$

definierte zusammengesetzte Funktion $\omega : [0,1] \rightarrow J$ stetig. Es ist $\omega(0) = \mu_{DW}(\mathbf{Z})$, $\omega(1) = \mu_{DW}(\mathbf{X})$ und

$$\mu^* := \mu_{DW}(\mathbf{Y}) \in]\omega(0), \omega(1)[,$$

so dass nach dem Zwischenwertsatz von Bolzano (1741–1848) ein Argument $\alpha^* \in]0,1[$ existiert mit

$$\omega(\alpha^*) = \mu^*.$$

Somit gibt es einen Zahlungsstrom $\mathbf{X}(\alpha^*) \in]\mathbf{Z}, \mathbf{X}[$ mit $\mu_{DW}(\mathbf{X}(\alpha^*)) = \omega(\alpha^*) = \mu^* = \mu_{DW}(\mathbf{Y})$ bzw. mit $\mathbf{X}(\alpha^*) \simeq_{DW} \mathbf{Y}$.

Damit ist die Stetigkeit der D-Präferenzordnung \succeq_{DW} bewiesen. \square

Literatur

- Erwe F. (1967), Differential- und Integralrechnung I, Bibliographisches Institut, Mannheim.
- Grauert H., Fischer W. (1968), Differential- und Integralrechnung II, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- Jarrow R.A. (1988), Finance Theory, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Kruschwitz L. (1976), Vermögensstreben und Einkommensstreben bei sich gegenseitig ausschließenden Investitionsalternativen, Diskussionspapier 19, hrsg. vom Institut für Wirtschaftswissenschaften der Technischen Universität Berlin.
- Kruschwitz L. (1998), Investitionsrechnung, Oldenbourg Verlag, München Wien, 7. Auflage; 14. Auflage 2014.
- Kruschwitz L. (1999), Finanzierung und Investition, Oldenbourg Verlag, München Wien, 2. Auflage.
- Mangoldt H.v., Knopp K. (1974), Einführung in die Höhere Mathematik, Band 2, Hirzel Verlag, Stuttgart, 14. Auflage.
- Pleier R. (2021), Finanzmathematik, 2. Auflage, Tredition, Hamburg.