Die eindeutige Replizierung mit einperiodischen Termingeschäften beim Einkommensstreben nach Kruschwitz

Rudolf Pleier

D-92694 Etzenricht, Mai 2015

Die eindeutige Replizierung mit einperiodischen Termingeschäften und linearer Beurteilungskurve

Einen Beweis dafür, dass für jeden Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ beim sog. Einkommensstreben zur speziellen linearen Beurteilungskurve

$$\mathbf{W}(v) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(v) \qquad (\mathbf{V}(v) = v\cdot\mathbf{A},\ \mathbf{A} = (A_0,\ldots,A_n)^\mathsf{T} \geq \mathbf{O})$$

mit den einperiodischen Termingeschäften

$$\mathbf{S}_H^j = \mathbf{T}_H^j = -\mathbf{e}_j + q_{jH}\,\mathbf{e}_{j+1} = (0,\ldots,0,-1,+q_{jH},0,\ldots,0)^\mathsf{T},$$

$$\mathbf{S}_S^j = -\mathbf{T}_S^j = \mathbf{e}_j - q_{jS}\,\mathbf{e}_{j+1} = (0,\ldots,0,+1,-q_{jS},0,\ldots,0)^\mathsf{T} \qquad (q_{j\,H/S} > 0,\ j = 1,\ldots,n)$$

als Ergänzungsgeschäften eine eindeutige Replizierung (Glattstellung, additive Ergänzung)

$$\mathbf{B} + \mathbf{X} + \mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{W}(v(\mathbf{X})) \qquad \text{mit } \mathbf{S}(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{S}_H^j + \sum_{j=1}^{n} \kappa_j \mathbf{S}_S^j,$$

$\alpha_j \geq 0$, $\kappa_j \geq 0$, $[\alpha_j > 0 \Rightarrow \kappa_j = 0]$, $[\kappa_j > 0 \Rightarrow \alpha_j = 0]$ (Supplementbedingung (SB) als Verbot der gleichzeitigen Ausführung einer Ergänzungsinvestition und einer Ergänzungsfinanzierung), **B** Basiszahlungsstrom, möglich ist, findet man bei Kruschwitz (1976), S. 18–20.

Mit den elementaren Zahlungsströmen $\mathbf{T}_{H/S}^j = (0,\ldots,0,-1,+q_{jH/S},0,\ldots,0)^\mathsf{T}$ und der Nebenbedingung

$$\text{(SB)} \qquad q_j = \begin{cases} q_{jH} & \text{für } \lambda_j = \lambda_{jH} \geq 0, \\ q_{jS} & \text{für } \lambda_j = \lambda_{jS} < 0 \end{cases}$$

lautet die Replizierungsgleichung in der Vektorschreibweise

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{T}_{H/S}^j = \mathbf{S}(\mathbf{X}) = -\mathbf{X} - \mathbf{B} + \mathbf{U} + \mathbf{V}(v(\mathbf{X})) \qquad (\xi = -\mathbf{X} - \mathbf{B} + \mathbf{U})$$

$$= \xi + \mathbf{A}\cdot v(\mathbf{X}) =: -\mathbf{r}(v(\mathbf{X})) \qquad (\mathbf{r}(v) = -\xi - \mathbf{A}v)$$

und in der Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ q_{1H,S} & -1 & 0 & & & . \\ 0 & q_{2H,S} & -1 & 0 & & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & & . & . & . & 0 \\ . & & & . & q_{n-1\,H,S} & -1 \\ 0 & . & . & . & 0 & q_{nH,S} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \xi_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ A_n \end{pmatrix} \cdot v\,.$$

Zu einem fest vorgegebenen Entnahmeniveau v erhält man bei dem hier vorliegenden Supplementsystem $\mathbf{S}_{H/S}^j$ $(j = 1,\ldots,n)$ für die Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ in den ersten n Zeilen des linearen Gleichungssystems ein gestaffeltes Gleichungssystem, bei dem die Parameter $\lambda_j = \lambda_j(v)$ für $j = 1,\ldots,n$ sukzessive berechnet werden können und jeweils nach dem Vorzeichen von λ_j gemäß der Supplementbedingung (SB) der zugehörige Supplementtyp H, S und der zugehörige Zinsfaktor $q_j = q_j(v) = q_{jH,S}$ bestimmt werden kann:

$$\lambda_1 = -\xi_0 - A_0 v$$

$$\lambda_2 = -\xi_1 - A_1 v + q_1\lambda_1$$

$$\ldots$$

$$\lambda_j = -\xi_{j-1} - A_{j-1} v + q_{j-1}\lambda_{j-1} \qquad (j = 2,\ldots,n).$$

Zu vorgegebenem v erhält man aus der ersten Gleichung den Wert für

$$\lambda_1 = -\xi_0 - A_0 v,$$

nach dem Vorzeichen von λ_1 gemäß der Supplementbedingung (SB) den Zinsfaktortyp H oder S von $q_{1H,S}$ und damit den ersten Zinsfaktor q_1:

$$q_1 = \begin{cases} q_{1H} & \text{für } \lambda_1 \geq 0, \\ q_{1S} & \text{für } \lambda_1 < 0. \end{cases}$$

Nach der Festlegung des ersten Zinsfaktors $q_1 = q_{1H,S}$ auf q_{1H} oder q_{1S} erhält man dann für λ_2 aus der zweiten Gleichung den Wert

$$\lambda_2 = - \xi_1 - A_1 v + q_1 \lambda_1.$$

Aus dem Vorzeichen von λ_2 ergibt sich gemäß (SB) der zweite Zinsfaktortyp H oder S von $q_{2H,S}$ und damit der zweite Zinsfaktor q_2 zu q_{2H} oder q_{2S}.

Sukzessive ergeben sich so für die Indizes $j = 2,\ldots,n$ die Parameterwerte

$$\lambda_j = - \xi_{j-1} - A_{j-1} v + q_{j-1} \lambda_{j-1},$$

die zugehörigen Zinsfaktortypen H oder S von $q_{j,H,S}$ und die Zinsfaktoren q_j zu q_{jH} oder q_{jS}.

Die derart bestimmten Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ liefern nun zusammen mit v eine Lösung des *gesamten* Gleichungssystems, wenn auch noch die letzte $(n+1)$-te Gleichung

$$\lambda_{n+1} := - \xi_n - A_n v + q_n \lambda_n = 0$$

erfüllt ist, also v eine Nullstelle der rekursiv definierten Funktion

$$\lambda_{n+1}(v) := - \xi_n - A_n v + q_n(v) \lambda_n(v)$$

ist. Die Funktion $\lambda_{n+1}(v)$ wird dabei mit der gleichen Rekursionsformel gebildet wie die vorherigen Parameterfunktionen $\lambda_j(v)$ $(j = 2,\ldots,n)$.

Der Beweis von Kruschwitz für die Existenz von genau einer Nullstelle $v^* \in \mathbb{R}$ der Hilfsfunktion $\lambda_{n+1}(v)$ liefert nicht nur die theoretische Begründung für die Existenz und Einzigkeit einer Replizierung, sondern auch ein praktisches Rechenverfahren zur Bestimmung dieser Replizierung, nämlich mittels der Nullstellenbestimmung der Hilfsfunktion $\lambda_{n+1}(v)$. Zum Beweis wird mit dem Prinzip der vollständigen Induktion nach dem Index j der Parameter $\lambda_j(v)$ $(j = 1,\ldots,n+1)$ gezeigt, dass die $\lambda_j(v)$ auf ganz $\mathbb{R}$ definierte, schwach monoton fallende, surjektive und stetige Funktionen sind und die letzte Funktion $\lambda_{n+1}(v)$ sogar streng monoton fallend ist.

Nachfolgend wird ein etwas modifizierter Beweis angegeben, bei dem explizit auch verwendet wird, dass die Parameter $\lambda_j(v)$ stückweise affin-lineare (inhomogen lineare) und stetige Funktionen sind und zumindest die Hilfsfunktion $\lambda_{n+1}(v)$ eine auf $\mathbb{R}$ stückweise affin-lineare, stetige und streng monoton fallende Funktion ist, die daher genau eine Nullstelle $v^* \in \mathbb{R}$ besitzt. Unter stückweise affin-linearer Funktion wird hier eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion verstanden, für die $\mathbb{R}$ in endlich viele Teilintervalle zerlegt werden kann, so dass auf jedem Teilintervall die Funktion mit einer affin-linearen Funktion übereinstimmt.

Beweis: An Voraussetzungen wird die Positivität der $2n$ Zinsfaktoren $q_{jH,S}$ $(j = 1,\ldots,n)$ und $\mathbf{A} \gtrdot \mathbf{O}$, also $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$ und $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$, verwendet. Es gibt also einen Index m, $0 \leq m \leq n$, mit

$$A_0 = \ldots A_{m-1} = 0, \qquad A_m > 0, \qquad A_j \geq 0 \text{ für } j = m+1,\ldots,n.$$

Als erste Hilfsgröße verwendet man die Vektorfunktion

$$\mathbf{r}(v) := \mathbf{X} + \mathbf{B} - \mathbf{U} - \mathbf{V}(v) = - \boldsymbol{\xi} - \mathbf{A}v,$$

die zu jedem beliebig gewählten Einkommensniveau v den Zahlungsstrom $\mathbf{r}(v)$ berechnet, den man durch Kombination des Basiszahlungsstroms $\mathbf{B}$ und des zu vergleichenden Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ und nach Abzug des Margenzahlungsstroms $\mathbf{W}(v) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(v)$ erhält. Mit dem speziellen Einkommensniveau $v = v(\mathbf{X})$, das für die Replizierung des Zahlungsstroms $\mathbf{X}$ gesucht wird, gilt $\mathbf{S}(\mathbf{X}) = - \mathbf{r}(v(\mathbf{X}))$.

Die Komponentenfunktionen

$$r_j(v) = - \xi_j - A_j v$$

sind affin-lineare Funktionen, die für $j = 0,\ldots,m-1$ konstant, für $j = m$ streng monoton fallend und für $j = m+1,\ldots,n$ zumindest (schwach) monoton fallend sind. Zu den oben rekursiv definierten Parameterfunktionen $\lambda_j(v)$ werden noch weitere Hilfsfunktionen definiert, nämlich die Zinsfaktorfunktionen

$$q_j(v) = \begin{cases} q_{jH} & \text{für } \lambda_j(v) \geq 0, \\ q_{jS} & \text{für } \lambda_j(v) < 0 \end{cases}$$

und die aufgezinsten Parameterfunktionen

$$\gamma_j(v) = q_j(v) \cdot \lambda_j(v) \qquad (j = 1,\ldots,n).$$

Bei einer konstanten Funktion $\lambda_j(v)$ sind auch die zugehörige Zinsfaktorfunktion $q_j(v)$ und die aufgezinste Parameterfunktion $\gamma_j(v)$ konstant. Bei Verwendung dieser Hilfsfunktionen gilt für die Parameterfunktionen die Rekursionsformel

$$\lambda_1(v) = r_0(v),$$
$$\lambda_j(v) = r_{j-1}(v) + \gamma_{j-1}(v) \qquad (j = 2,\ldots,n,n+1).$$

Falls $m = 0$ ist, ist der Parameter $\lambda_1(v) = r_0(v) = - \xi_0 - A_0 v$ eine streng monoton fallende affin-lineare Funktion von v mit der einzigen Nullstelle $v_1 = - \xi_0/A_0$.

Falls $m \geq 1$ ist, kann durch vollständige Induktion gezeigt werden, dass für die Indizes $j = 1,\ldots,m$ die $\lambda_j(v)$ konstante Funktionen sind: Der Induktionsbeginn für $j = 1$ ist gegeben, da wegen $A_0 = 0$ der Parameter $\lambda_1(v) = r_0(v) = - \xi_0$ konstant ist. Der Induktionsschluss von j-1 auf j für $2 \leq j \leq m$ verwendet als Induktionsannahme, dass $\lambda_{j-1}(v)$ konstant ist. Demzufolge sind auch $q_{j-1}(v)$ und $\gamma_{j-1}(v) = q_{j-1}(v)\lambda_{j-1}(v)$ konstant. Da wegen $A_{j-1} = 0$ auch die Funktion $r_{j-1}(v) = - \xi_{j-1}$ konstant ist, folgt nach der Rekursionsformel, dass $\lambda_j(v) = r_{j-1}(v) + \gamma_{j-1}(v)$ konstant ist. Also sind die $\lambda_j(v)$ für $j = 1,\ldots,m$ konstante Funktionen.

Als Nächstes wird nun durch vollständige Induktion gezeigt, dass für die weiteren Indizes $j = m+1,\ldots,n+1$ die $\lambda_j(v)$ stetige, stückweise affin-lineare und streng monoton fallende Funktionen sind:

Der Induktionsbeginn für $j = m+1$ ist gegeben: Für den Fall $m = 0$ wurde oben bereits begründet, dass $\lambda_{m+1}(v) = \lambda_1(v)$ eine streng monoton fallende affin-lineare Funktion ist. Im Fall $m \geq 1$ sind die Funktion $r_m(v)$ affin-linear und streng monoton fallend, die Funktionen $\lambda_m(v)$, $q_m(v)$ und $\gamma_m(v) = q_m(v) \cdot \lambda_m(v)$ konstant und somit $\lambda_{m+1}(v) = r_m(v) + \gamma_m(v)$ als Summe von $r_m(v)$ und $\gamma_m(v)$ affin-linear und streng monoton fallend.

Die Induktionsannahme für den Index j-1 bedeutet, dass $\lambda_{j-1}(v)$ stetig, stückweise affin-linear, streng monoton fallend und damit auch injektiv ist. Demzufolge zeigt die stetige Funktion $\lambda_{j-1}(v)$ das Grenzwertverhalten $\lambda_{j-1}(v) \longrightarrow + \infty$ bei $v \longrightarrow - \infty$ und $\lambda_{j-1}(v) \longrightarrow - \infty$ bei $v \longrightarrow + \infty$, sodass sie nach dem Zwischenwertsatz von Bolzano (1741 – 1848) auch surjektiv und insgesamt bijektiv ist und genau eine Nullstelle $v_{j-1} \in \mathbb{R}$ besitzt. Es gilt also

$$\lambda_{j-1}(v) \begin{cases} > 0 & \text{für } v < v_{j-1}, \\ = 0 & \text{für } v = v_{j-1}, \\ < 0 & \text{für } v > v_{j-1}. \end{cases}$$

Da die Zinsfaktorfunktion

$$q_{j-1}(v) = \begin{cases} q_{j-1,H} & \text{für } \lambda_{j-1}(v) \geq 0 \quad \text{bzw. } v \leq v_{j-1}, \\ q_{j-1,S} & \text{für } \lambda_{j-1}(v) < 0 \quad \text{bzw. } v > v_{j-1} \end{cases}$$

eine Treppenfunktion mit Sprung bei der λ_{j-1}-Nullstelle $v = v_{j-1}$ ist und da die Zinsfaktoren $q_{j-1,H}$ und $q_{j-1,S}$ positiv sind, kann nun für die Produktfunktion

$$\gamma_{j-1}(v) = q_{j-1}(v) \cdot \lambda_{j-1}(v)$$

gezeigt werden, dass diese stückweise affin-linear, stetig und streng monoton fallend ist: Diese drei Eigenschaften für die Funktion $\gamma_{j-1}(v)$ ergeben sich zunächst in den Intervallen $v \leq v_{j-1}$ und $v > v_{j-1}$, da diese Eigenschaften schon für $\lambda_{j-1}(v)$ vorliegen und bei der Multiplikation mit einer positiven Konstante erhalten bleiben.

Unmittelbar folgt, dass $\gamma_{j-1}(v)$ in $\mathbb{R}$ stückweise affin-linear ist.

Zum Nachweis der Stetigkeit der Funktion $\gamma_{j-1}(v)$ in $v = v_{j-1}$ verwendet man, dass $\lambda_{j-1}(v)$ an der Stelle $v = v_{j-1}$ stetig ist und dort eine Nullstelle besitzt. Bei der getrennten Betrachtung der Produktfunktion $\gamma_{j-1}(v)$ in den beiden Intervallen ergibt sich zunächst die linksseitige und die rechtsseitige Stetigkeit von $\gamma_{j-1}(v)$ bei $v = v_{j-1}$ und damit insgesamt die Stetigkeit von $\gamma_{j-1}(v)$ an dieser Stelle:

$$\lim_{v \nearrow v_{j-1}} \gamma_{j-1}(v) = \gamma_{j-1}(v_{j-1}) = 0 = \lim_{v \searrow v_{j-1}} \gamma_{j-1}(v).$$

Zum Nachweis der strengen Monotonie der Funktion $\gamma_{j-1}(v)$ in ganz $\mathbb{R}$ hat man noch deren Funktionswerte für zwei beliebige Stellen $v‘$ und $v“$ mit $v‘ \leq v_{j-1} < v“$ zu vergleichen. Aus der Monotonie von $\gamma_{j-1}(v)$ in $v \leq v_{j-1}$ und der Negativität von $\gamma_{j-1}(v) = q_{j-1}(v)\cdot\lambda_{j-1}(v)$ in $v > v_{j-1}$ folgt die Ungleichung

$$\gamma_{j-1}(v‘) \geq \gamma_{j-1}(v_{j-1}) = 0 > \gamma_{j-1}(v“)$$

und damit auch die strenge Monotonie von $\gamma_{j-1}(v)$ auf ganz $\mathbb{R}$.

Da außerden $r_{j-1}(v)$ affin-linear und (schwach) monoton fallend ist, folgt nach der Rekursionsformel, dass $\lambda_j(v) = r_{j-1}(v) + \gamma_{j-1}(v)$ stückweise affin-linear, stetig und streng monoton fallend ist. Damit ist der Induktionsschluss von j-1 auf j nachgewiesen ($j = m$+1,…,n+1).

Insbesondere ist $\lambda_{n+1}(v)$ eine auf $\mathbb{R}$ stückweise affin-lineare, stetige und streng monoton fallende Funktion $\lambda_{n+1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auch bijektiv ist und daher genau eine Nullstelle $v^* = v_{n+1}$ besitzt. Dies bedeutet wiederum, dass für jeden Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ die Replizierung mit den oben angegebenen speziellen einperiodischen Ergänzungsgeschäften $\mathbf{S}_H^j$ und $\mathbf{S}_S^j$ bei positiven Zinsfaktoren $q_{jH,S}$ (j = 1,…,n), der zum Einkommensstreben gehörigen Glattstellungskurve

$$\mathbf{W}(v) = \mathbf{U} + \mathbf{V}(v)$$

bei vorgegebenem Bezugspunkt $\mathbf{U} = (0,\ldots,0,U_n)^\mathsf{T}$ und vorgegebener homogener Beurteilungskurve $\mathbf{V}(v) = v\cdot\mathbf{A}$ zur Einkommenszeitstruktur $\mathbf{A} \mathrel{\dot{>}} \mathbf{O}$ stets existiert und eindeutig ist:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(v^*)\mathbf{T}^j(q_j(v^*)) - v^*\cdot\mathbf{A} = \boldsymbol{\xi} = \mathbf{U} - \mathbf{B} - \mathbf{X}.$$

In einem konkreten Zahlenbeispiel kann die Nullstelle v^* von $\lambda_{n+1}(v)$ beispielsweise im Programm Excel von Microsoft Office bestimmt werden, indem im Menü ‚Daten‘ mit dem Menüpunkt ‚Was-wäre-wenn-Analyse/Zielwertsuche‘ als Zielzelle die Zelle mit der Berechnung des Funktionswerts $\lambda_{n+1}(v)$, als Zielwert 0 und als veränderbare Zelle die Zelle mit dem Wert für v gewählt wird. □

Literatur

Kruschwitz L. (1976), Vermögensstreben und Einkommensstreben bei sich gegenseitig ausschließenden Investitionsalternativen, Diskussionspapier 19, hrsg. vom Institut für Wirtschaftswissenschaften der Technischen Universität Berlin.

Pleier R. (2021), Finanzmathematik, Tredition, Hamburg, 2. Auflage.