
Methode des internen Zinssatzes und Methode der Vielfachheiten der internen Zinsfaktoren

Rudolf Pleier

Juni 2015

Zu den klassischen Bewertungsmethoden der dynamischen Investitionsrechnung gehört neben der Kapitalwert- (Barwert-), Endwert-, Zeitwert- und Annuitätenmethode auch die **Methode des internen Zinssatzes** (Interner Zinssatz-Methode, Interner Zinsfuß-Methode, englisch: method of internal rate of return; Abkürzung: MIZ). Diese Methode berechnet zu einem Zahlungsstrom

$$\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots, X_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$$

einen auf die Zinsperioden $[k-1, k]$ (im Allgemeinen Jahre; $k = 1, \dots, n$) der Laufzeit $n \in \mathbb{N}$ bezogenen konstanten und nicht (in Haben- und Sollzinssatz) gespaltenen Zinssatz

$$i_0 = i_{int}(\mathbf{X}),$$

einen sogenannten internen Zinssatz des Zahlungsstroms \mathbf{X} , und verwendet diesen Zinssatz als Maßstab, um den Zahlungsstrom \mathbf{X} als vorteilhaft, indifferent (neutral) oder unvorteilhaft zu beurteilen. Die Bewertung des Zahlungsstroms \mathbf{X} erfolgt durch den Vergleich des internen Zinssatzes $i_{int}(\mathbf{X})$ mit einem vorher festgelegten für alle Zinsperioden konstanten und nichtgespaltenen Kalkulationszinssatz $i_k = i_K > 0$ ($k = 1, \dots, n$): Es wird geprüft, ob $i_{int}(\mathbf{X})$ größer, gleich oder kleiner i_K ist:

$$i_{int}(\mathbf{X}) \begin{array}{l} \geq \\ \leq \end{array} i_K?$$

Die Bewertung soll dabei konsistent (widerspruchsfrei, im Ergebnis übereinstimmend) zur **Kapitalwertmethode** (Barwertmethode, Abk.: KWM, BWM) sein, die \mathbf{X} als vorteilhaft, indifferent oder unvorteilhaft beurteilt, wenn der mit dem Kalkulationszinsfaktor $q_K = 1 + i_K$ berechnete Kapitalwert (Barwert) $B_n(\mathbf{X}, q_K)$ von \mathbf{X} positiv, gleich Null oder negativ ist:

\mathbf{X} ist indifferent	$:\Leftrightarrow B_n(\mathbf{X}, q_K) = 0;$
\mathbf{X} ist vorteilhaft	$:\Leftrightarrow B_n(\mathbf{X}, q_K) > 0;$
\mathbf{X} ist unvorteilhaft	$:\Leftrightarrow B_n(\mathbf{X}, q_K) < 0.$

Die Berechnung des internen Zinssatzes i_{int} erfolgt, indem der zugehörige interne Zinsfaktor $q_{int} = 1 + i_{int}$ als eine reellwertige Nullstelle der Endwertfunktion

$$E_n(q) = E_n(\mathbf{X}, q) = X_0 q^n + X_1 q^{n-1} + \dots + X_{n-1} q + X_n$$

bzw. als eine von Null verschiedene reellwertige Nullstelle der Barwertfunktion

$$B_n(q) = B_n(\mathbf{X}, q) = E_n(\mathbf{X}, q)/q^n = X_0 + \frac{X_1}{q} + \dots + \frac{X_{n-1}}{q^{n-1}} + \frac{X_n}{q^n}$$

bestimmt wird. Die Berechnung aller (komplexen) Nullstellen des Polynoms $E_n(q)$ kann beispielsweise mittels der Funktion NSolve des Softwaresystems Mathematica von Wolfram Research erfolgen (Aufruf mit NSolve[EnX[q]=0,q]). Als Zahlungsströme werden nachfolgend ohne Einschränkung nur Investitionen \mathbf{X} ($X_0 < 0$) betrachtet. Für Finanzierungen \mathbf{X} ($X_0 > 0$) erhält man analoge Ergebnisse.

Nachfolgend werden die folgenden drei Fragen behandelt:

- Welche Zahlungsströme liegen im **Anwendungsbereich** von MIZ, d. h. in dem Bereich, in dem die MIZ einen Zahlungsstrom \mathbf{X} konsistent zur KWM beurteilt?
- Warum hat die MIZ mit der Verwendung eines einzelnen internen Zinsfaktors bei der Beurteilung eines Zahlungsstroms bzw. beim Vergleich von Zahlungsströmen nur einen **eingeschränkten Anwendungsbereich**?

- Gibt es eine **Verallgemeinerung** der MIZ für die Beurteilung und den Vergleich mit einem größeren Anwendungsbereich?

Wird bei der Methode *des* internen Zinssatzes nur ein einziger (positiver oder nichtpositiver) interner Zinsfaktor q_{int} zugelassen, so folgt aus der Konsistenz zur Kapitalwertmethode mit jedem beliebigen positiven Kalkulationszinsfaktor q_K die Einschränkung des Anwendungsbereichs der MIZ auf die NU-Zahlungsströme (Zahlungsströme mit jeweils nur einem positiven internen Zinsfaktor, der noch von ungerader Ordnung ist) und die NF-Zahlungsströme (Zahlungsströme mit keinem positiven internen Zinsfaktor) (Pleier, 2021, S. 293–306).

Hinsichtlich der Verallgemeinerung der MIZ sei vorneweg schon verraten, dass das **Rätsel der Methode des internen Zinssatzes** bezüglich des eingeschränkten Anwendungsbereichs allein mit der Produktdarstellung der reellwertigen Polynomfunktion $E_n(\mathbf{X}, q)$ mittels ihrer reellen Nullstellen und der Kurvendiskussion gelöst werden kann. Es ist dazu der sture Blick von einem einzigen internen Zinsfaktor zu lösen und der Blick auf die Gesamtheit der internen Zinsfaktoren zu richten. Außerdem ist auf die ökonomische Interpretierbarkeit des internen Zinsfaktors q_{int} als Kontozinsfaktor q_{Kto} eines Verrechnungskontos für den Zahlungsstrom \mathbf{X} zu verzichten. Genau genommen genügt es zur Beurteilung eines Zahlungsstroms die Vielfachheiten der internen Zinsfaktoren zu bestimmen, die größer als der Kalkulationszinsfaktor sind. Man erhält dann eine Verallgemeinerung der MIZ, die universell auf alle Zahlungsströme anwendbar ist (Pleier, 2021, S. 312–323).

Will man jedoch noch an der finanzmathematischen (ökonomischen) Interpretierbarkeit des internen Zinsfaktors q_{int} als Kontozinsfaktor q_{Kto} eines Verrechnungskontos für den Zahlungsstrom \mathbf{X} festhalten, so bewirkt dies notwendig die Einschränkung des Anwendungsbereichs auf die Verrechnungskonto-Zahlungsströme (VK-Zahlungsströme, die sog. isoliert durchführbaren Zahlungsströme; Pleier, 2021, S. 286–289).

1 Beurteilung eines einzelnen Zahlungsstroms

1.1 Zahlungsströme mit einem einzigen positiven internen Zinsfaktor ungerader Nullstellenordnung

In der Praxis und der Literatur war es bisher üblich, zur Beurteilung des Zahlungsstroms \mathbf{X} mittels MIZ nur einen einzelnen internen Zinsfaktor $q_{int} = q_X$ zu verwenden. Als interner Zinsfaktor q_{int} wird dabei die einzige positive Nullstelle der Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X}, q)$ gewählt. Als Anwendungsbereich der MIZ, auf dem die MIZ konsistent zur KWM ist, werden die Normalinvestitionen, die regulären Investitionen und die sogenannten „isoliert durchführbaren Investitionen“ (siehe Kilger 1965, S. 776, Blohm und Lüder 1995, S. 89ff, Götze 2008, S. 97ff) angegeben. Diese Investitionen \mathbf{X} besitzen jeweils genau einen positiven internen Zinsfaktor $q_{int} = q_{int}(\mathbf{X})$ der noch eine einfache Nullstelle und somit eine Vorzeichenwechselstelle der Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X}, q)$ ist. Eine derartige **Investition** \mathbf{X} ($X_0 < 0$) kann dann mittels dem internen Zinsfaktor q_{int} und dem Kalkulationszinsfaktor q_K folgendermaßen beurteilt werden:

\mathbf{X} ist indifferent	$\Leftrightarrow B_n(\mathbf{X}, q_K) = 0 \Leftrightarrow q_{int} = q_K;$
\mathbf{X} ist vorteilhaft	$\Leftrightarrow B_n(\mathbf{X}, q_K) > 0 \Leftrightarrow q_{int} > q_K;$
\mathbf{X} ist unvorteilhaft	$\Leftrightarrow B_n(\mathbf{X}, q_K) < 0 \Leftrightarrow q_{int} < q_K.$

Der **Beweis** dieser Charakterisierung der KWM-Beurteilung durch die Lagebeziehung von q_{int} und q_K und auch der nachfolgenden Verallgemeinerung für mehrere interne Zinsfaktoren $q_{int} > q_K$ erfolgt mittels der Nullstellendarstellung der Polynomfunktion $q \mapsto E_n(\mathbf{X}, q)$ (siehe z. B. Köhler (2006), S. 169, Korollar 12.14) und einfacher Kurvendiskussion für die Barwertfunktion $B_n(\mathbf{X}, q)$ bzw. für die Endwertfunktion $E_n(\mathbf{X}, q)$: Für große q ist die Polynomfunktion $E_n(\mathbf{X}, q)$ wegen $X_0 < 0$ negativ. Demzufolge ist im Falle $E_n(\mathbf{X}, q_K) \neq 0$ bei ungerader Gesamtordnung $m_{>q_K}$ der Nullstellen von $E_n(\mathbf{X}, q)$ im Intervall $]q_K, \infty[$ und demnach bei ungerader Anzahl von Nullstel-

len q_j ungerader Ordnung in $]q_K, \infty[$ der Endwert $E_n(\mathbf{X}, q_K)$ positiv und bei gerader entsprechender Gesamtordnung $m_{>q_K}$ der Endwert $E_n(\mathbf{X}, q_K)$ negativ. Damit wird die Endwertmethode bzw. die Kapitalwertmethode charakterisiert durch die Ungerad- bzw. Geradzahligkeit der Gesamtordnung der internen Zinsfaktoren von \mathbf{X} rechts des Kalkulationszinnsfaktors q_K . Beispielsweise ist eine Investition $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ genau dann vorteilhaft mit positivem Kapitalwert $B_n(\mathbf{X}, q_K)$, wenn diese Gesamtordnung ungerade ist. Die Investition ist genau dann unvorteilhaft mit negativem Kapitalwert $B_n(\mathbf{X}, q_K)$, wenn diese Gesamtordnung gerade ist. Ein ausführlicherer Beweis wird beim Thema ‚Charakterisierung der Endwertmethode mittels interner Zinsfaktoren‘ dargestellt.

Speziell für die sog. **„isoliert durchführbaren Investitionen“** \mathbf{X} besitzt der einzige positive interne Zinsfaktor q_{int} noch eine besondere Eigenschaft. Zu ihm gehört ein nichtpositiver Horner-Schema-Vektor

$$\mathbf{E}(q_{int}) = (E_0(q_{int}), E_1(q_{int}), \dots, E_n(q_{int}))^T$$

(mit den Horner-Schema-Polynomen $E_j(q) = X_0q^j + X_1q^{j-1} + \dots + X_{j-1}q + X_j$ für $j = 0, \dots, n$). Demzufolge ist q_{int} eine einfache Nullstelle und die einzige positive Vorzeichenwechselstelle (Beweis für das Vorliegen einer einfachen Nullstelle und die Plausibilisierung der Bezeichnung „isoliert durchführbar“ siehe Pleier 2021, Abschnitt 7.1.3, S. 286–290). Wegen der finanzmathematischen Interpretierbarkeit von $\mathbf{E}(q_{int}) \leq \mathbf{0}$ als nichtpositiven Kontostandsvektor können außerdem die isoliert durchführbaren Investitionen auch als **Verrechnungskonto-Investitionen** (VK-Investitionen) bezeichnet werden, da bei der fiktiven Einzahlung der Investition \mathbf{X} auf ein neu angelegtes fiktives Verrechnungskonto (Abk.: VK) mit dem Kreditkontozinnsfaktor q_{int} alle Kontostände $C_j = E_j(q_{int})$ nichtpositiv sind und daher keinen Vorzeichenwechsel aufweisen. Bei den VK-Investitionen kann der positive interne Zinsfaktor q_{int} also auch ökonomisch als Verrechnungskontozinnsfaktor interpretiert werden.

Der Anwendungsbereich der MIZ als Konsistenzbereich von MIZ und KWM kann bei Verwendung eines einzigen positiven internen Zinsfaktors q_{int} noch auf die **NU-Investitionen** erweitert werden, für welche q_{int} die einzige positive Nullstelle der Endwertfunktion $E_n(q)$, von ungerader Ordnung und somit die einzige positive Vorzeichenwechselstelle ist. Eine weitere Erweiterung des Anwendungsbereichs der MIZ kann noch auf die **NF-Investitionen** erfolgen, die jeweils keinen positiven internen Zinsfaktor besitzen (Pleier 2021, S. 293–299, 300–306, 306–312).

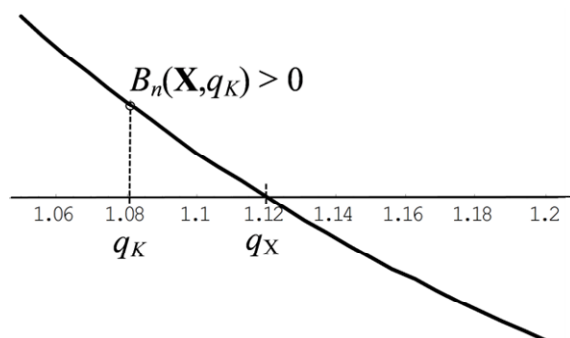


Abb. 1 Der Graph der Barwertfunktion $B_n(\mathbf{X}, q)$ einer vorteilhaften Investition \mathbf{X} mit einem einzigen positiven internen Zinsfaktor $q_{int} = q_X$ ungerader Nullstellenordnung

1.2 Zahlungsströme mit einem einzigen positiven internen Zinsfaktor gerader Nullstellenordnung, mit mehreren verschiedenen positiven internen Zinsfaktoren oder mit keinem positiven internen Zinsfaktor

Um auch für Zahlungsströme mit einem einzigen positiven internen Zinsfaktor, der noch eine gerade Nullstellenordnung aufweist, für Zahlungsströme mit mehreren verschiedenen positiven internen Zinsfaktoren oder mit keinem positiven internen Zinsfaktor eine Beurteilung mittels inter-

ner Zinsfaktoren zu erhalten, ist der Blick von einem einzelnen internen Zinsfaktor weg auf die Gesamtheit der internen Zinsfaktoren zu richten, die größer als der Kalkulationszinsfaktor q_K sind. Dazu verwendet man die als Summe der Vielfachheiten definierte **Gesamtviefachheit** (Gesamtordnung)

$$m_{>q_K} = m_{>q_K}(\mathbf{X}) (\geq 0)$$

der reellen Nullstellen q_j des Polynoms $E_n(\mathbf{X}, r)$ im Intervall $]q_K, \infty[$. Diese Gesamtviefachheit derjenigen internen Zinsfaktoren von \mathbf{X} , die auf der Zahlengeraden rechts von q_K liegen, wird hier auch kurz als die zu q_K gehörige rechtsseitige Gesamtviefachheit bezeichnet.

Eine zur KWM äquivalente **Methode der Vielfachheiten der internen Zinsfaktoren** (Abk.: MVIZ; Methode der internen Zinsfaktoren, Methode der internen Zinssätze), die auf ganz \mathbb{R}^{n+1} einsetzbar ist, beurteilt dann eine **Investition \mathbf{X}** ($X_0 < 0$) folgendermaßen:

\mathbf{X} ist indifferent	$:\Leftrightarrow q = q_K$ ist ein interner Zinsfaktor von \mathbf{X} ;
\mathbf{X} ist vorteilhaft	$:\Leftrightarrow q_K$ ist kein interner Zinsfaktor von $\mathbf{X} \wedge m_{>q_K}$ ungerade;
\mathbf{X} ist unvorteilhaft	$:\Leftrightarrow q_K$ ist kein interner Zinsfaktor von $\mathbf{X} \wedge m_{>q_K}$ gerade.

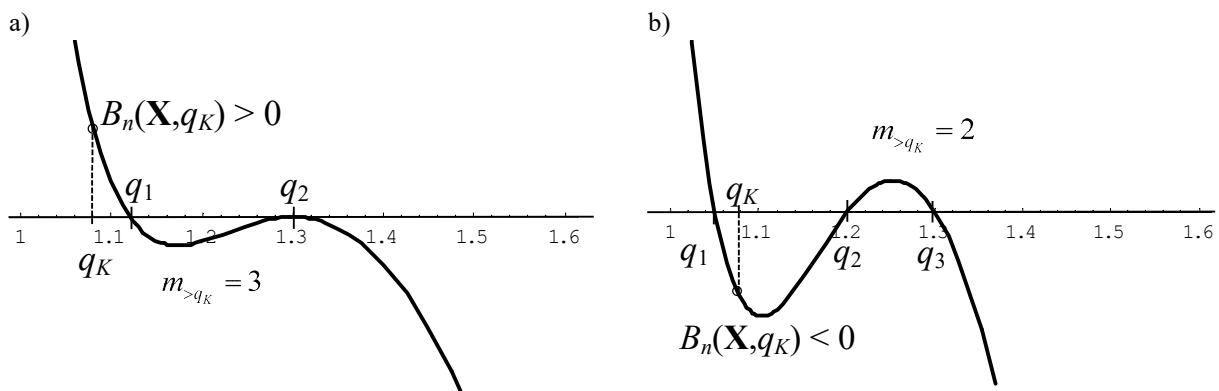


Abb. 2 Der Graph der Barwertfunktion $q \mapsto B_n(\mathbf{X}, q)$ einer a) vorteilhaften Investition \mathbf{X} mit ungerader rechtsseitiger Gesamtviefachheit $m_{>q_K}$ und b) unvorteilhaften Investition \mathbf{X} mit gerader rechtsseitiger Gesamtviefachheit $m_{>q_K}$

Als Spezialfälle sind hier die VK-Investitionen ($\mathbf{E}(q_{int}) \leq \mathbf{0}$) mit einem nichtpositiven internen Zinsfaktor q_{int} und allgemeiner die Investitionen mit keinem positiven internen Zinsfaktor (NF-Investitionen) zu nennen, die bei jedem positiven Kalkulationszinsfaktor q_K als unvorteilhaft beurteilt werden (wegen $E_n(\mathbf{X}, q) < 0$ in $]0, \infty[$ ist $m_{>q_K} = 0$ gerade und $B_n(\mathbf{X}, q_K) < 0 \forall q_K > 0$). Bei den VK-Investitionen mit einem nichtpositiven internen Zinsfaktor q_{int} kann (wie bei den VK-Investitionen mit positivem internen Zinsfaktor) dieser interne Zinsfaktor q_{int} auch als Verrechnungskontozinsfaktor interpretiert werden.

Die Methode MVIZ ist auch auf Investitionen anwendbar, die allgemeiner als **lexikonegative Zahlungsströme** definiert sind, bei denen also der erste von Null verschiedene Koeffizient X_k negativ ist. Analog können auch die allgemeiner als **lexikopositive Zahlungsströme** definierten Finanzierungen bewertet werden. Für den übrig bleibenden Zahlungsstrom $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ ist q_K ein interner Zinsfaktor der Endwertfunktion $E_n(\mathbf{0}, q) \equiv 0$, somit $\mathbf{0}$ indifferent und daher auch für diesen Zahlungsstrom die MVIZ-Beurteilung konsistent zur KWM-Beurteilung. Insgesamt sind somit alle Zahlungsströme des \mathbb{R}^{n+1} mit der Methode MVIZ konsistent zur KWM beurteilbar.

Warum dieser umfassendere universelle Konsistenzbereich bisher in der Literatur nicht zu finden ist, liegt wohl daran, dass der Blick traditionell starr auf die Verwendung eines *einzelnen* internen Zinsfaktors gerichtet ist und dieser interne Zinsfaktor evtl. auch noch gerne ökonomisch als

Kontozinsfaktor eines fiktiven Verrechnungskontos interpretiert werden soll, auf dem der Zahlungsstrom verrechnet wird. Die Forderung dieser ökonomischen (finanzmathematischen) Interpretierbarkeit des internen Zinsfaktors führt dann aber notwendig zur Einschränkung auf die VK-Zahlungsströme.

Richtet man jedoch den Blick auf die Gesamtheit aller internen Zinsfaktoren, so kann mit der Nullstellendarstellung und einfacher Kurvendiskussion für das Polynom $E_n(\mathbf{X}, q)$ die KWM mittels der Gesamtvielfachheit $m_{>q_K}(\mathbf{X})$ der internen Zinsfaktoren von \mathbf{X} im Intervall $]q_K, \infty[$ charakterisiert werden.¹ Für eine Investition $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($X_0 < 0$) mit $E_n(\mathbf{X}, q_K) \neq 0$ und ungerader Gesamtvielfachheit $m_{>q_K}(\mathbf{X})$ der Nullstellen q_j des Polynoms $E_n(\mathbf{X}, q)$ im Intervall $]q_K, \infty[$ und demnach mit ungerader Anzahl von Nullstellen q_j ungerader Ordnung in $]q_K, \infty[$ folgt nämlich aus dem Grenzwertverhalten $E_n(\mathbf{X}, q) \rightarrow -\infty$ bei $q \rightarrow \infty$ die Positivität des Funktionswerts $E_n(\mathbf{X}, q_K)$ bzw. $B_n(\mathbf{X}, q_K) = E_n(\mathbf{X}, q_K)/q_K^n$ und somit die Vorteilhaftigkeit bezüglich der KWM. Analog folgt für eine Investition $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $E_n(\mathbf{X}, q_K) \neq 0$ und gerader Gesamtvielfachheit $m_{>q_K}(\mathbf{X})$ die Negativität des Funktionswerts $B_n(\mathbf{X}, q_K)$ und somit die Unvorteilhaftigkeit bezüglich der KWM.

Die Auswahl eines konsistenten internen Zinsfaktors q_{int} , für welchen der Zinsfaktorvergleich $q_{int} >, =, < q_K$ mit dem Ergebnis der KWM übereinstimmt, ist von untergeordneter Bedeutung.

Die damit gegebene I-Beurteilung (mittels interner Zinsfaktoren) ist auf dem gesamten \mathbb{R}^{n+1} einsetzbar und steht nun gleichberechtigt neben den anderen klassischen Methoden.

Die Einschränkung des Anwendungsbereichs von MIZ: Im Gegensatz zur MVIZ liefert jede beliebig definierte Methode *des* internen Zinssatzes (MIZ), die nur einen *einzelnen* irgendwie festgelegten internen Zinsfaktor q_{int} verwendet, nur einen eingeschränkten Anwendungsbereich, d. h. eingeschränkten Konsistenzbereich von MIZ und KWM: In deren Anwendungsbereich gilt dann nämlich beispielsweise auf der Teilmenge der vorteilhaften Investitionen \mathbf{X} neben der zur KWM-Bedingung $B_n(\mathbf{X}, q_K) > 0$ äquivalenten MVIZ-Bedingung [$B_n(\mathbf{X}, q_K) \neq 0 \wedge m_{>q_K}$ ungerade] noch zusätzlich die MIZ-Zinsfaktorbedingung an q_{int} und q_K , wodurch diese Teilmenge eingeschränkt wird.

Zur weiteren Verdeutlichung betrachtet man den Fall, dass die NU-Investitionen (mit einzigem positiven internen Zinsfaktor, der noch von ungerader Ordnung ist) zum Anwendungsbereich gehören und somit die vorteilhaften Investitionen durch die Zinsfaktor-Ungleichung $q_{int} > q_K$ charakterisiert werden. Demzufolge gehört dann eine Investition, die genau einen positiven internen Zinsfaktor q_{int} besitzt, der noch eine zweifache Nullstelle ist und rechts von q_K liegt, nicht zum Anwendungsbereich: Sie wäre nämlich wegen der Zinsfaktorungleichung $q_{int} > q_K$ gemäß MIZ vorteilhaft, aber wegen der MVIZ-Bedingung [$B_n(\mathbf{X}, q_K) \neq 0 \wedge m_{>q_K}$ gerade] bzw. der Barwertungleichung $B_n(\mathbf{X}, q_K) < 0$ gemäß KWM unvorteilhaft. Die MIZ ist also im Gegensatz zur MVIZ nicht auf ganz \mathbb{R}^{n+1} konsistent zur KWM einsetzbar.

Das Mysterium des eingeschränkten Anwendungsbereichs von MIZ kann also durch den Übergang zur Methode MVIZ gelöst werden, indem statt eines einzelnen internen Zinsfaktors q_{int} die Gesamtvielfachheit der internen Zinsfaktoren rechts des Kalkulationszinnsfaktors q_K verwendet wird.

Die Menge der Zahlungsströme außerhalb des Anwendungsbereichs von MIZ: Bei einer irgendwie definierten MIZ (mit einem *einzelnen* internen Zinsfaktor q_{int}) können auch die Investitionen ohne (reellen) internen Zinsfaktor mit dem formal hinzugenommenen nichtreellen internen Zinsfaktor $q_{int} := -\infty$ für jeden positiven Kalkulationszinnsfaktor q_K als unvorteilhafte Investitionen mit im Anwendungsbereich erfasst werden ($q_{int} = -\infty < q_K$ und $m_{>q_K} = 0, B_n(\mathbf{X}, q_K) < 0 \forall$

¹ Einen etwas ausführlicheren Beweis für die Bestimmung des Vorzeichens des Funktionswerts $E_n(\mathbf{X}, q_K)$ aus der Gerad- bzw. Ungeradzahligkeit der rechtsseitiger Gesamtvielfachheit $m_{>q_K}$ findet man auf der Autoren-Website www.pleier-r.de im Thema ‚Charakterisierung der Endwertmethode mittels der internen Zinsfaktoren‘.

$q_K > 0$). Die verbleibenden *nicht* im Anwendungsbereich der MIZ liegenden Investitionen \mathbf{X} werden dann genau durch die folgenden drei Fälle beschrieben:

- 1) \mathbf{X} besitzt q_K als internen Zinsfaktor ($B_n(\mathbf{X}, q_K) = 0$) und noch den für die MIZ-Beurteilung (Vergleich von q_{int} mit q_K) ausgewählten internen Zinsfaktor $q_{int} \in \mathbb{R}$ mit $q_{int} \neq q_K$;
- 2) \mathbf{X} mit $B_n(\mathbf{X}, q_K) \neq 0$ und ungeradem $m_{>q_K}$ ($B_n(\mathbf{X}, q_K) > 0$) besitzt den für die MIZ-Beurteilung ausgewählten internen Zinsfaktor $q_{int} \leq q_K$;
- 3) \mathbf{X} mit $B_n(\mathbf{X}, q_K) \neq 0$ und geradem $m_{>q_K} \geq 2$ ($B_n(\mathbf{X}, q_K) < 0$) besitzt den für die MIZ-Beurteilung ausgewählten internen Zinsfaktor $q_{int} \geq q_K$.

2 Vergleich alternativer Zahlungsströme

Der Vergleich zweier Zahlungsströme $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{X} \neq \mathbf{Y}$, nach der KWM ist wegen der Linearität der Barwertfunktion $B_n(\mathbf{X}, q)$ bezüglich \mathbf{X} gleichbedeutend zur Beurteilung des Differenzzahlungsstroms $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y} \neq \mathbf{0}$:

$$B_n(\mathbf{X}, q_K) - B_n(\mathbf{Y}, q_K) = B_n(\mathbf{D}, q_K) \stackrel{?}{\geq} 0?$$

Wählt man ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Reihenfolge von \mathbf{X} und \mathbf{Y} so, dass \mathbf{D} eine **Investition** (ein lexikonegativer Zahlungsstrom) ist, so ist der KWM-Vergleich von \mathbf{X} und \mathbf{Y} gleichbedeutend zur Beurteilung von \mathbf{D} nach der oben für Investitionen angegebenen Methode MVIZ mit den Vielfachheiten der internen Zinsfaktoren von \mathbf{D} . Die Zahlungsströme $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit lexikonegativem Differenzzahlungsstrom $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$ und der zum Kalkulationszinssfaktor $q_K > 0$ gehörigen rechtsseitigen Gesamtvielfachheit $m_{>q_K} = m_{>q_K}(\mathbf{D})$ von \mathbf{D} werden nach der MVIZ folgendermaßen verglichen:

\mathbf{X} ist ebenso vorteilhaft wie \mathbf{Y}	$:\Leftrightarrow q_K$ ist ein interner Zinsfaktor von \mathbf{D} ;
\mathbf{X} ist vorteilhafter als \mathbf{Y}	$:\Leftrightarrow q_K$ ist kein interner Zinsfaktor von $\mathbf{D} \wedge$ $m_{>q_K}$ ungerade;
\mathbf{X} ist unvorteilhafter als \mathbf{Y}	$:\Leftrightarrow q_K$ ist kein interner Zinsfaktor von $\mathbf{D} \wedge$ $m_{>q_K}$ gerade.

Jede andere Vergleichsmethode, die an Stelle der MVIZ-Bedingungen für die internen Zinsfaktoren von \mathbf{D} interne Zinsfaktoren von \mathbf{X} und \mathbf{Y} verwendet, liefert nur einen eingeschränkten Anwendungsbereich: Wählt man nämlich einen Zahlungsstrom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $B_n(\mathbf{X}, q_K) \neq 0$, $\mathbf{X}(\lambda) := \lambda \cdot \mathbf{X}$ für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und einen beliebigen weiteren Zahlungsstrom $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$, so kann für das Paar $(\mathbf{X}(\lambda), \mathbf{Y})$ die Barwertdifferenz

$$B_n(\mathbf{X}(\lambda), q_K) - B_n(\mathbf{Y}, q_K) = B_n(\mathbf{X}, q_K)[\lambda - B_n(\mathbf{Y}, q_K)/B_n(\mathbf{X}, q_K)]$$

durch passende Wahl von λ verschiedene Vorzeichen annehmen. Somit kann für $(\mathbf{X}(\lambda), \mathbf{Y})$ der KWM-Vergleich verschiedene Ergebnisse aufweisen, obwohl die internen Zinsfaktoren von $\mathbf{X}(\lambda)$ und \mathbf{Y} und ein Vergleich mittels dieser internen Zinsfaktoren von \mathbf{X} und \mathbf{Y} unverändert bleiben. Es gibt also stets Zahlungsstrompaare, für die ein mittels interner Zinsfaktoren von \mathbf{X} und \mathbf{Y} definierter Vergleich nicht konsistent zum KWM-Vergleich ist.

Ebenso erhält man nur einen eingeschränkten Anwendungsbereich, wenn zum Vergleich von \mathbf{X} und \mathbf{Y} der Differenzzahlungsstrom \mathbf{D} durch den MIZ-Vergleich (Vergleich eines einzelnen internen Zinsfaktors $q_{int}(\mathbf{D})$ von \mathbf{D} mit dem Kalkulationszinssfaktor q_K) beurteilt wird.

3 Beispiele

Beispiel 1 Die Beurteilung eines einzelnen Zahlungsstroms

Für den Zahlungsstrom

$$\mathbf{Z} = (-100000; +322000; -345600; +123638)^T \in \mathbb{R}^4$$

ergeben sich die internen Zinsfaktoren als Nullstellen der Endwertfunktion $E_n(\mathbf{Z}, q)$ mittels der Funktion `NSolve` des Softwaresystems Mathematica von Wolfram Research (Aufruf mit `NSolve[EnZ[q]=0,q]`) zu

$$q_1 = 1,06 \text{ und } q_{2,3} = 1,08.$$

Bei Verwendung des Kalkulationszinsfaktors $q_K = 1,05$ ist für \mathbf{Z} die rechtsseitige Gesamtvielfachheit

$$m_{>q_K} = 3,$$

also ungerade und somit die Investition \mathbf{Z} nach der MVIZ vorteilhaft.

Beispiel 2 Der Vergleich zweier Zahlungsströme

Die Zahlungsströme

$$\mathbf{X} = (-110000; -58400; +86740; +121660)^T,$$

$$\mathbf{Y} = (-100000; -90000; +120000; +110000)^T \in \mathbb{R}^4$$

besitzen den Differenzzahlungsstrom

$$\mathbf{D} = (-10000; +31600; -33260; +11660)^T \in \mathbb{R}^4$$

mit den internen Zinsfaktoren

$$q_1 = 1,00, q_2 = 1,06 \text{ und } q_3 = 1,10.$$

Bei dem Kalkulationszinsfaktor $q_K = 1,05$ ist für $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$ die rechtsseitige Gesamtvielfachheit

$$m_{>q_K}(\mathbf{D}) = 2$$

gerade, somit nach der MVIZ die Investition $\mathbf{D} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$ unvorteilhaft und \mathbf{X} unvorteilhafter als \mathbf{Y} .

4 Rechenaufwand und Kondition der Berechnung der internen Zinsfaktoren

Vergleicht man den Rechenaufwand der Endwertmethode (EWM) oder Barwertmethode (BWM) mit dem der Methode der Vielfachheiten der internen Zinsfaktoren (MVIZ), so ist es viel einfacher nur den Endwert $E_n(\mathbf{X}, q)$ oder den Barwert (Kapitalwert) $B_n(\mathbf{X}, q) = E_n(\mathbf{X}, q)/q^n$ an der Stelle des Kalkulationszinsfaktors $q = q_K$ zu berechnen als die Gesamtheit der internen Zinsfaktoren zu bestimmen. Bei der im Allgemeinen nötigen iterativen Bestimmung der Nullstellen des Polynoms $E_n(\mathbf{X}, r)$ wird von einem Softwaresystem wie z. B. Mathematica von Wolfram Research nämlich intern eine Vielzahl von Funktionswerten des Polynoms $E_n(\mathbf{X}, r)$ berechnet. Schon hinsichtlich des Rechenaufwands bei der praktischen Anwendung wäre also die EWM oder die BWM der MVIZ vorzuziehen.

Weiter kommt dazu, dass die Nullstellenbestimmung für ein Polynom

$$E_n(\mathbf{X}, r) = X_0 r^n + \dots + X_n$$

in der Standarddarstellung mit den Koeffizienten X_j ($j = 0, \dots, n$) schlecht konditioniert ist. Dabei können schon einfache Nullstellen schlecht konditioniert sein, während mehrfache Nullstellen stets schlecht konditioniert sind. Dies heißt, dass ein kleiner relativer Fehler in den als Ausgangsdaten vorgegebenen Koeffizienten X_j große relative Fehler in den Rechenresultaten für die Polynomnullstellen bewirkt. Dies kann dann zu einer falschen Bestimmung der Gesamtvielfachheit der reellen Nullstellen im Intervall $]q_K, \infty[$ und zu einer falschen Beurteilung von \mathbf{X} führen. Eine ausführlichere Betrachtung zur Empfindlichkeit der Polynomnullstellen in Abhängigkeit von den Polynomkoeffizienten findet man bei Stoer (1994), S. 333–335. Ein Zahlenbeispiel zur schlechten Kondition der Berechnung der internen Zinsfaktoren findet man beim Thema ‚Charakterisierung der Endwertmethode mittels interner Zinsfaktoren‘ in der pdf-Datei in Abschnitt 3 mit Beispiel 3.

5 Äquivalenz der Methode der Vielfachheiten der internen Zinsfaktoren zu den anderen klassischen Methoden

Mit der Bereitstellung von MVIZ ist das Mysterium des eingeschränkten Anwendungsbereichs von MIZ, der Methode „des“ internen Zinssatzes, sowohl für die Beurteilung eines einzelnen Zahlungsstroms als auch für den Vergleich von Zahlungsströmen geklärt und eine Verallgemeinerung von MIZ für alle Zahlungsströme $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$ bzw. Zahlungsstrompaare $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ gleichberechtigt neben die anderen klassischen Methoden (Barwert-, Endwert-, Zeitwert- und Annuitätenmethode) gestellt.

Aufgrund der Äquivalenz von MVIZ und KWM ist die MVIZ auch zu den anderen klassischen Methoden äquivalent. Die **implizite Prämisse** für die ökonomische Interpretation dieser Methoden auf *ganz* \mathbb{R}^{n+1} besteht in der realen Verfügbarkeit der Kapitalmarktgeschäfte der Hyperebene

$$H_{\mathbf{P}(q),0} = \{\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{P}(q)^T \mathbf{S} = 0\}$$

(mit dem Preisvektor $\mathbf{P}(q) = (1, 1/q, \dots, 1/q^n)^T$, $q = q_K$). Unter dieser Voraussetzung kann für den Zahlungsstrom \mathbf{X} der Kapitalwert $B_n(\mathbf{X}, q_K)$ als eine zum Zeitpunkt $t = 0$ erfolgende Margenentnahme einer Glattstellung (Replizierung, additiven Ergänzung) mit einem Ergänzungsgeschäft (Supplement) $\mathbf{S}(\mathbf{X}) \in H_{\mathbf{P}(q),0}$ realisiert werden:

$$\mathbf{X} + \mathbf{S}(\mathbf{X}) = B_n(\mathbf{X}, q_K) \cdot \mathbf{e}_1 = (B_n(\mathbf{X}, q_K), 0, \dots, 0)^T.$$

Je nach der Beurteilung (vorteilhaft, indifferent oder unvorteilhaft) von \mathbf{X} ist der Kapitalwert positiv, Null oder negativ.

In der Praxis kann für einen Entscheider durchaus eine spezielle finanzielle Situation vorliegen, in der zumindest die Zahlungsströme \mathbf{X} einer Teilmenge des \mathbb{R}^{n+1} tatsächlich mit dem jeweils verfügbaren zugehörigen Supplement $\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} - B_n(\mathbf{X}, q_K) \cdot \mathbf{e}_1$ auf ihren Kapitalwert $B_n(\mathbf{X}, q_K)$ glattgestellt werden können. Ein Beispiel hierfür wird im Buch des Autors auf S. 260–266 mit Hilfe eines Verrechnungskontos dargestellt.

Literatur

- Blohm H. u. Lüder K. (1995), Investition, Vahlen, München, 8. Auflage, S. 90ff
- Götze U. (2008), Investitionsrechnung, Springer, Berlin Heidelberg, 6. Auflage, S. 96–107
- Kilger W. (1965), Zur Kritik am internen Zinsfuß, Zeitschrift für Betriebswirtschaft (ZfB) Band 35, S. 765–798.
- Köhler G. (2006), Analysis, Heldermann Verlag, Lemgo, 3. Auflage, S. 169
- Pleier R. (2021), Finanzmathematik, Tredition, Hamburg, 2. Auflage
- Stoer J. (1994), Numerische Mathematik 1, Springer, Berlin Heidelberg New York, 7. Auflage, S. 333–335