Nullstellenverteilung der Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung dritter Ordnung

Rudolf Pleier
1979/2020

Liste mit Ergebnissen

Nachfolgend wird eine Auswahl von Ergebnissen der oben genannten Arbeit aufgelistet. Die Beweise dazu und die Bezüge zur entsprechenden Literatur findet man im Buch.

1 Nullstellenverteilung bei komplexwertigen Lösungen und deren Ableitungen

Satz 1.1 Ausschluss bestimmter Nullstellenkonfigurationen

a) Für die komplexwertigen Koeffizienten $p \in C^2(J)$, $q \in C^1(J)$, $r \in C(J)$ von (L) seien mit einer reellwertigen Funktion $s \in C^3(J)$ in J die Gleichung

(1.1) $$s' \cdot \mathrm{Im}\, p + s \cdot \mathrm{Im}(p' - q) \equiv 0$$

und mit den Funktionen

$$f_0 = \mathrm{Re}\left[2sr - (sq)' + (sp)'' - s'''\right],$$

$$f_1 = \mathrm{Re}\left[3s' - 2sp\right]$$

die unten noch jeweils angegebenen Bedingungen erfüllt. Dann gibt es für jede nichttriviale Lösung w von (L) keine Stellen $c, d \in J$ mit $c < d$ und einer der folgenden Eigenschaften:

(1) $w(c) = w'(c) = 0 = w(d) = w'(d)$, $\quad f_0 \underset{\cdot}{>} 0$[1], $f_1 \geq 0$;

(2) $w(c) = w'(c) = 0 = w'(d) = w''(d)$, $\quad f_0 \underset{\cdot}{>} 0\ (\geq)$, $f_1 \geq 0$, $-s''+(sp)'-sq \leq 0\ (<)$;

(3) $w'(c) = w''(c) = 0 = w'(d) = w''(d)$, $\quad -s''+(sp)'-sq \equiv 0$, $f_0 = 2s\,\mathrm{Re}\, r \underset{\cdot}{>} 0$, $f_1 \geq 0$;

(4) $w(c) = w'(c) = 0 = w(d)$, $\quad f_0 \underset{\cdot}{<} 0$, $f_1 \leq 0$, $s \geq 0$;

(5) $w'(c) = w''(c) = 0 = w(d)$, $\quad f_0 \underset{\cdot}{<} 0\ (\leq)$, $f_1 \leq 0$, $s \geq 0$, $-s''+(sp)'-sq \leq 0\ (<)$.

b) Sind für reellwertige $p \in C(J)$, $q \in C^1(J)$, komplexwertiges $r \in C(J)$, $s = \sigma := \exp\int p(x)dx$ und damit $f_0 = \sigma \cdot [2\,\mathrm{Re}\, r - pq - q']$, $f_1 = \sigma \cdot p$, $F_s[w] = \sigma \cdot [\,|w'|^2 - q\,|w|^2 - 2\mathrm{Re}(\bar{w}w'')]$ die jeweils angegebenen Bedingungen erfüllt, dann gibt es für keine nichttriviale Lösung w von (L) Stellen $c, d \in J$ mit $c < d$ und einer der folgenden Eigenschaften:

(6) $w(c) = w'(c) = 0 = w''(d)$, $\quad 2\,\mathrm{Re}\, r - q' - pq \underset{\cdot}{<} 0\ (\leq)$, $p \leq 0$, $q \leq 0\ (<)$;

(7) $w'(c) = w''(c) = 0 = w''(d)$, $\quad \mathrm{Re}\, r \underset{\cdot}{<} 0$, $p \leq 0$, $q \equiv 0$.

[1] Die Schreibweise $f_0 \underset{\cdot}{>} 0$ (bzw. $f_0 \underset{\cdot}{<} 0$) mit dem Symbol $\underset{\cdot}{>}$ bzw. $\underset{\cdot}{<}$ soll bedeuten, dass $f_0 \geq 0$ (bzw. $f_0 \leq 0$) und $f_0 \not\equiv 0$ in jedem Teilintervall von J ist.

Satz 1.2 Ausschluss bestimmter Nullstellenkonfigurationen
a) Für die komplexwertigen Koeffizienten $p \in C^2(J)$, $q \in C^1(J)$, $r \in C(J)$ von (L), eine reellwertige Funktion $s \in C^3(J)$, die Funktionen

$$f_0 = \mathrm{Re}\left[2sr - (sq)' + (sp)'' - s'''\right] \text{ und}$$

$$f_1 = \mathrm{Re}\left[3s' - 2sp\right]$$

und die Differentialgleichung

(1.10) $\quad (f_1 v')' - f_0 v = 0$

seien in J die Bedingung (1.1)

$$s' \cdot \mathrm{Im}\, p + s \cdot \mathrm{Im}(p' - q) \equiv 0$$

und die nachfolgend jeweils noch angegebenen Voraussetzungen erfüllt. Dann gibt es für jede nichttriviale Lösung w von (L) keine Stellen $c, d \in J$ mit $c < d$ und einer der folgenden Eigenschaften:

(1) $w(c) = w'(c) = 0 = w(d) = w'(d)$, $\quad f_1 > 0$, D(1.10);

(2) $w(c) = w'(c) = 0 = w'(d) = w''(d)$, $\quad f_1 > 0$, D^+(1.10), $-s'' + (sp)' - sq \leq 0$;

(3) $w(c) = w'(c) = 0 = w(d)$, $\quad f_1 < 0$, D(1.10), $s \geq 0$;

(4) $w'(c) = w''(c) = 0 = w(d)$, $\quad f_1 < 0$, D^-(1.10), $s \geq 0$, $-s'' + (sp)' - sq \leq 0$.

b) Sind für reellwertige $p \in C(J)$, $q \in C^1(J)$, komplexwertiges $r \in C(J)$ und das spezielle

$$s = \sigma = \exp\int p(x)dx \quad (f_0 = \sigma \cdot [2\,\mathrm{Re}\, r - pq - q'],\ f_1 = \sigma \cdot p)$$

die unten noch angegebenen Bedingungen erfüllt, dann gibt es für keine nichttriviale Lösung w von (L) Stellen $c, d \in J$ mit $c < d$ und der folgenden Eigenschaft:

(5) $w(c) = w'(c) = 0 = w''(d)$, $\quad s = \sigma$, $p < 0$, D^+(1.10), $q \leq 0$.

Bei der Formulierung des Satzes 1.2 wird die Voraussetzung, dass die Differentialgleichung (1.10) in J die Eigenschaft D (= Diskonjugiertheit), D^+ bzw. D^- hat, abgekürzt angegeben durch D(1.10), D^+(1.10) bzw. D^-(1.10). Die homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung (1.10) hat in J die Eigenschaft D^+, wenn es zu jedem Teilintervall $[c,d] \subseteq J$ eine Lösung v gibt mit $v > 0$ in $[c,d]$ und $v'(d) \geq 0$; sie hat in J die Eigenschaft D^- , wenn es zu jedem Teilintervall $[c,d] \subseteq J$ eine Lösung v gibt mit $v > 0$ in $[c,d]$ und $v'(c) \leq 0$.

Satz 1.3 Nullstellenfreiheit der Produktfunktion $ww'w''$
Es seien die Koeffizienten $p \in C(J)$, $q \in C^1(J)$ reellwertig und $r \in C(J)$ komplexwertig. Für die nichttriviale Lösung w von (L) gilt

$$(ww'w'')(x) \neq 0$$

für alle $x > x_0$ $(x < x_0)$, $x, x_0 \in J$, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(1) $w(x_0) = w'(x_0) = 0$, $\quad s = \sigma$, $2\,\mathrm{Re}\, r - pq - q' \underset{\cdot}{<} 0\ (\underset{\cdot}{>})$, $p \leq 0\ (\geq)$, $q \leq 0$;

(2) $w(x_0) = w'(x_0) = 0$, $\quad s = \sigma$, $p < 0\ (>)$, D^+(1.10) (D^-(1.10)), $q \leq 0$;

(3) $w'(x_0) = w''(x_0) = 0$, $\quad s = \sigma$, $\mathrm{Re}\, r \underset{\cdot}{<} 0\ (\underset{\cdot}{>})$, $p \leq 0\ (\geq)$, $q \equiv 0$.

2 Beziehungen zwischen der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung (L) und ihrer Adjungierten (L^+)

Die Koeffizienten p, q, r der Differentialgleichung (L) seien jetzt reellwertig und stetig im Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$. Speziell für $s \equiv 1$ liefert der Ausdruck

$$\begin{aligned} B[y,z] &:= B_1[y,z] = \sum_{k=0}^{2} (-1)^k y^{(2-k)} D^k[z] \\ &= y''z - y'\, D^1[z] + y D^2[z]\,. \end{aligned}$$

eine **Bilinearform** $B : S \times S^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ des Raumpaars (S,S^+). Die Bilinearform B besitzt noch zwei Eigenschaften, die eine Abschwächung der positiven Definitheit ($B[y,y] \geq 0$ und $[B[y,y] = 0 \Rightarrow y = 0]$) des skalaren Produkts eines euklidischen Vektorraums darstellen:

1) Aus $B[y,z] = 0$ für alle $y \in S$ folgt $z = 0$;

2) Aus $B[y,z] = 0$ für alle $z \in S^+$ folgt $y = 0$.

Da die Bilinearform B des Raumpaars (S,S^+) diese beiden Eigenschaften besitzt, ist $(S,S^+;B)$ ein **duales Raumpaar** mit dem die Dualität bestimmenden **skalaren Produkt** (Skalarprodukt) B.

Zwischen den speziellen Lösungen $u_j(.,t)$ und $u^+_{2-k}(.,x)$ gilt die Beziehung

(2.1) $$u_j^{(k)}(x,t) = (-1)^{k+j} D^{2-j}[u^+_{2-k}](t,x) \qquad (x, t \in J;\ k, j = 0, 1, 2).$$

Eine übersichtliche Aufstellung der verschiedenen Fälle der Formel (2.1) gibt die folgende Tabelle 2.1.

Tab. 2.1 Übereinstimmung bestimmter Ableitungen bzw. verallgemeinerter Ableitungen der speziellen Lösungen $u_j(x,t)$ und $u^+_m(t,x)$

$(-1)^i u^{(k)}_{2-i}(x,t) = (-1)^k D^i[u^+_{2-k}](t,x) \quad (i,k = 0,1,2)$			
k \ i	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$
$i = 0$	$u_2(x,t) = u^+_2(t,x)$	$u_2'(x,t) = - u^+_1(t,x)$	$u_2''(x,t) = u^+_0(t,x)$
$i = 1$	$- u_1(x,t) = D^1[u^+_2](t,x)$	$- u_1'(x,t) = - D^1[u^+_1](t,x)$	$- u_1''(x,t) = D^1[u^+_1](t,x)$
$i = 2$	$u_0(x,t) = D^2[u^+_2](t,x)$	$u_0'(x,t) = - D^2[u^+_1](t,x)$	$u_0''(x,t) = D^2[u^+_1](t,x)$

Definition von Klassen von Differentialgleichungen durch die Nullstellenfreiheit der Lösungen $u_2(.,t)$ bzw. $u^+_2(.,t)$

Die Differentialgleichung (L) gehört im Intervall J zur Klasse C^k_{I} ($L \in C^k_{\mathrm{I}}(J)$) genau dann, wenn

$$(-1)^k u_2^{(k)}(x,t) > 0 \quad \text{für alle } x, t \in J \text{ mit } x < t$$

gilt ($k \in \{0, 1, 2, 3\}$).

Die Differentialgleichung (L) gehört im Intervall J zur Klasse C^k_{II} ($L \in C^k_{\mathrm{II}}(J)$) genau dann, wenn

$$u_2^{(k)}(x,t) > 0 \qquad \text{für alle } x, t \in J \text{ mit } x > t$$

gilt ($k \in \{0, 1, 2, 3\}$).

Für die Differentialgleichung (L^+) soll analog $L^+ \in C_{\mathrm{I}}^{k+}(J)$ bzw. $L^+ \in C_{\mathrm{II}}^{k+}(J)$ bedeuten, dass

$$(-1)^k D^k[u_2^+](x,t) > 0 \quad \text{für alle } x,\, t \in J \text{ mit } x < t \text{ bzw.}$$

$$D^k[u_2^+](x,t) > 0 \quad \text{für alle } x,\, t \in J \text{ mit } x > t$$

gilt ($k \in \{0, 1, 2\}$).

Ferner bedeute $L \in K_{\mathrm{I}}(J)$ (bzw. $L \in K_{\mathrm{II}}(J)$), dass für jedes $t \in J$ die Lösung

$$u_2(.,t) \text{ keine einfache Nullstelle } x \in J \text{ mit } x < t \text{ (bzw. } x > t)$$

besitzt. Und $L^+ \in K_{\mathrm{I}}^+(J)$ (bzw. $L^+ \in K_{\mathrm{II}}^+(J)$) bedeute, dass für jedes $t \in J$ die Lösung

$$u_2^+(.,t) \text{ keine einfache Nullstelle } x \in J \text{ mit } x < t \text{ (bzw. } x > t)$$

aufweist.

(2.2) **Charakterisierung der Klassen durch Lösungen der adjungierten Differentialgleichung**

$$L \in C_{\mathrm{I}}^k(J)\ (L \in C_{\mathrm{II}}^k(J)) \quad \Leftrightarrow \quad u_{2-k}^+(x,t) > 0 \text{ für } x > t \quad ((-1)^k u_{2-k}^+(x,t) > 0 \text{ für } x < t);$$

$$L^+ \in C_{\mathrm{I}}^{k+}(J)\ (L^+ \in C_{\mathrm{II}}^{k+}(J)) \quad \Leftrightarrow \quad u_{2-k}(x,t) > 0 \text{ für } x > t \quad ((-1)^k u_{2-k}(x,t) > 0 \text{ für } x < t).$$

(2.3) **Äquivalenzen für die Klassenzugehörigkeiten**

$$L \in C_{\mathrm{I}}(J) \text{ (bzw. } L \in C_{\mathrm{II}}(J)) \quad \Leftrightarrow L^+ \in C_{\mathrm{II}}^+(J) \text{ (bzw. } L^+ \in C_{\mathrm{I}}^+(J)).$$

$$L \in K_{\mathrm{I}}]a,b[\text{ (bzw. } L \in K_{\mathrm{II}}]a,b[) \quad \Leftrightarrow L^+ \in K_{\mathrm{II}}^+]a,b[\text{ (bzw. } L^+ \in K_{\mathrm{I}}^+]a,b[).$$

(2.4) **Zugehörigkeit zu den Klassen K_{I}, K_{II}, K_{I}^+, K_{II}^+ an den Intervallgrenzen**

Für c, $d \in J$ mit $c < d$ gilt:

a) 1) Aus $L \in K_{\mathrm{I}}]c,d[$ folgt $L \in K_{\mathrm{I}}]c,d]$.
   2) Aus $L \in K_{\mathrm{II}}]c,d[$ folgt $L \in K_{\mathrm{II}}[c,d[$.

b) 1) Aus $L^+ \in K_{\mathrm{I}}^+]c,d[$ folgt $L^+ \in K_{\mathrm{I}}^+]c,d]$.
   2) Aus $L^+ \in K_{\mathrm{II}}^+]c,d[$ folgt $L^+ \in K_{\mathrm{II}}^+[c,d[$.

Wechselbeziehungen zwischen den speziellen Lösungen $u_j(.,c)$ und $u_j^+(.,c)$

(2.5)
$$u_2^+ = \sigma W[u_1,u_2], \qquad u_1^+ = \sigma W[u_0,u_2], \qquad u_0^+ = \sigma W[u_0,u_1],$$
$$u_2 = \frac{1}{\sigma} W[u_1^+,u_2^+], \qquad u_1 = \frac{1}{\sigma} W[u_0^+,u_2^+], \qquad u_0 = \frac{1}{\sigma} W[u_0^+,u_1^+].$$

Ist $\mathbf{y} = (y_1,y_2,y_3)$ ein Fundamentalsystem von (L), dann ist das dazu mittels des Vektorprodukts gebildete Tripel

(2.6)
$$\mathbf{z} = \frac{1}{W[\mathbf{y}]}\mathbf{y} \times \mathbf{y}' = \left(\frac{W[y_2,y_3]}{W[\mathbf{y}]}, -\frac{W[y_1,y_3]}{W[\mathbf{y}]}, \frac{W[y_1,y_2]}{W[\mathbf{y}]} \right)$$

wegen $W^+[\mathbf{z}] \neq 0$ ein Fundamentalsystem von (L^+). Für die Komponenten y_j und $z_k = W[y_{k+1},y_{k+2}]/W[\mathbf{y}]$ der beiden Fundamentalsysteme $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ und die modulo 3 angegebenen Indizes j, k = 1, 2, 3 erhält man das Skalarprodukt:

(2.7)
$$B[y_j,z_k] = W[y_j,y_{k+1},y_{k+2}]/W[\mathbf{y}] = \delta_{j,k}.$$

Man bezeichnet daher $\mathbf{z}$ als das zu $\mathbf{y}$ **adjungierte Fundamentalsystem** oder $\mathbf{z}$ als die (eindeutig bestimmte) **duale Basis** zu $\mathbf{y}$. Beispielsweise gehört zum speziellen Fundamentalsystem von S bzw. zur speziellen S-Basis

$$u_0(.,x_0),\ u_1(.,x_0),\ u_2(.,x_0) \in S \qquad (x_0 \in J)$$

die duale S^+-Basis

$$u_2^+(.,x_0)\,,\ -\ u_1^+(.,x_0)\,,\ u_0^+(.,x_0)\ \in S^+.$$

Auch umgekehrt erhält man aus dem Fundamentalsystem $\mathbf{z}$ mittels des Vektorprodukts wieder das Fundamentalsystem $\mathbf{y}$:

(2.8) $$\mathbf{y} = \frac{1}{W^+[\mathbf{z}]}\mathbf{z}\times\mathbf{z}' = \left(\frac{W[z_2,z_3]}{W^+[\mathbf{z}]}, -\frac{W[z_1,z_3]}{W^+[\mathbf{z}]}, \frac{W[z_1,z_2]}{W^+[\mathbf{z}]}\right).$$

Für die beiden Fundamentalsysteme $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ ergibt sich die folgende **Multiplikationstabelle**.

Tab. 2.2 Die Multiplikationstabelle mit den Skalarprodukten der Vektoren $\mathbf{y}^{(k)}$ und $D^m[\mathbf{z}]$

(2.9)

	$\mathbf{z}$	$D^1[\mathbf{z}]$	$D^2[\mathbf{z}]$
$\mathbf{y}$	0	0	1
$\mathbf{y}'$	0	-1	0
$\mathbf{y}''$	1	0	0

Die Koordinaten der speziellen Lösungen $u_j(.,t)$ und $u_j^+(.,t)$

(2.10) $$(-1)^k u_{2-k}(x,t) = \mathbf{y}(x)D^k[\mathbf{z}](t),$$

(2.11) $$(-1)^k u_{2-k}^+(x,t) = \mathbf{y}^{(k)}(t)\mathbf{z}(x) \qquad (t \in J;\ k = 0, 1, 2).$$

Satz 2.1 Die schwache Oszillation von S als hinreichende Bedingung für die Oszillation des dualen Raums S^+

Falls S (bzw. S^+) schwach oszillatorisch in J ist, dann ist auch S^+ (bzw. S) oszillatorisch in J.

Folgerung: Ausschluss der schwachen Oszillation durch die Nichtoszillation des dualen Raums

Falls S^+ (bzw. S) nichtoszillatorisch in J ist, dann ist S (bzw. S^+) nicht schwach oszillatorisch in J, also entweder nichtoszillatorisch oder stark oszillatorisch.

(2.12) **Charakterisierung der Inzidenz der speziellen Lösungen $u_k(.,x_0)$ und $u_k^+(.,x_0)$ mit zweidimensionalen Unterräumen bzw. der Orthogonalität der speziellen Lösungen zu beliebigen Lösungen $z \in S^+$ und $y \in S$:**

Für $z \in S^+$ (bzw. $y \in S$) und $x_0 \in J$ gilt die Inzidenz

$$u_{2-j}(.,x_0) \in S_z = [z]^\perp \quad (\text{bzw. } u_{2-j}^+(.,x_0) \in S_y^+ = [y]^\perp)$$

genau dann, wenn

$$D^j[z](x_0) = 0 \quad (\text{bzw. } y^{(j)}(x_0) = 0)$$

ist ($j \in \{0, 1, 2\}$).

Speziell für $j = 0$ gilt:

$$u_2(.,x_0) \perp z \iff z(x_0) = 0;$$

$$u_2^+(.,x_0) \perp y \iff y(x_0) = 0.$$

Satz 2.2 Die schwache Oszillation als hinreichende Bedingung für die Existenz eines stark oszillatorischen zweidimensionalen Unterraums im dualen Lösungsraum

Ist S (bzw. S^+) schwach oszillatorisch in J und wählt man $y_1 \in S \setminus \{o\}$ (bzw. $z_1 \in S^+ \setminus \{o\}$) als nichttriviale nichtoszillatorische Lösung in J, dann ist der zweidimensionale Unterraum $S^+_{y_1}$ (bzw. S_{z_1}) stark oszillatorisch in J. Außerdem ist dann jeder zweidimensionale Unterraum von S^+ (bzw. S) oszillatorisch in J.

Folgerung: Ausschluss der schwachen Oszillation durch die Existenz eines nichtoszillatorischen zweidimensionalen Unterraums im dualen Raum

Besitzt S^+ (bzw. S) einen in J nichtoszillatorischen zweidimensionalen Unterraum, dann ist S (bzw. S^+) nicht schwach oszillatorisch in J.

Es sei

N (bzw. N^+) die Menge aller in J nichtoszillatorischen Lösungen und
O (bzw. O^+) die Menge aller in J oszillatorischen Lösungen von (L) (bzw. (L^+)).

Weiter sei

$$N_0 := N \cup \{o\}, \quad N_0^+ := N^+ \cup \{o\},$$

$$O_0 := O \cup \{o\}, \quad O_0^+ := O^+ \cup \{o\}.$$

Satz 2.3 Charakterisierung spezieller Doppelkegelstrukturen für N_0

1) Ist $S = V + [u_0]$ mit einem zweidimensionalen Unterraum $V \subseteq N_0$ und einem eindimensionalen Unterraum $[u_0] \subseteq O_0$, so gilt
$$N = S \setminus [u_0], \quad O_0 = [u_0]$$
genau dann, wenn
$$\lim_{x\to b} \frac{u_0(x)}{v(x)} = 0 \quad \forall\, v \in V \setminus \{o\}$$
ist.

2) Weiter gelten unter dieser Voraussetzung $S = V + [u_0]$ ($V \subseteq N_0$, $[u_0] \subseteq O_0$) die speziellen Strukturen
$$N_0 = V, \quad O = S \setminus V$$
genau dann, wenn
$$\liminf_{x\to b} \frac{u_0(x)}{v(x)} = -\infty \quad \text{und} \quad \limsup_{x\to b} \frac{u_0(x)}{v(x)} = +\infty \quad \forall\, v \in V \setminus \{o\}$$
erfüllt ist.

Satz 2.4 Hinreichende Bedingung für die Diskonjugiertheit an den Intervallgrenzen

Enthält $S \setminus \{o\}$ (bzw. $S^+ \setminus \{o\}$) eine in J nichtoszillatorische Lösung und der dazu duale Raum S^+ (bzw. S) einen nichtoszillatorischen zweidimensionalen Unterraum, dann gibt es $c, d \in\,]a,b[$, sodass (L) und (L^+) diskonjugiert sind in $J \cap [d,b]$ und in $J \cap [a,c]$.

Zusatz: Lokale Diskonjugiertheit

1) Für jedes $c \in J$ gibt es ein reelles $\delta = \delta(c) > 0$, sodass die Differentialgleichungen (L) und (L^+) diskonjugiert sind in $[c-\delta, c+\delta] \cap J$.

2) Insbesondere folgt damit auch im Falle $p \in C(J)$ (statt $p \in C^1(J)$), dass auch die Lösung $u_2^+(.,c)$ in einer punktierten J-Umgebung von c positiv ist:

$$u_2^+(t,c) = u_2(c,t) > 0 \quad \text{für } t \in [c-\delta,c[\ \cup\ ]c,c+\delta],\ t \in J.$$

3 Die Integralkurve in der projektiven Ebene

Geometrische Interpretation der Nullstellen der Lösungen

Die Integralkurve C in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$:

(3.1) $$C : x \in J \mapsto [\mathbf{y}(x)] \in \mathbb{P}^2 := \{[\mathbf{x}] \subseteq \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{o}\}\}$$

In $\mathbb{P}^2$ ist die zum Kurvenpunkt $P = [\mathbf{y}(x)]$ gehörige **Tangente** von C gegeben durch die Gerade

$$[\mathbf{y},\mathbf{y}'] = \langle \mathbf{z} \rangle \text{ mit } \mathbf{z} = \mathbf{y} \times \mathbf{y}'/W[\mathbf{y}] \ \ (\perp \mathbf{y}, \boldsymbol{y}').$$

Die **Krümmung** $\kappa(x)$ der Integralkurve C im Punkt $P = [\mathbf{y}(x)] \in E := \{[\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^2 : x_3 = \mathbf{e}_3\mathbf{x} \neq 0\}$ der euklidischen Ebene E berechnet sich aus der Parameterdarstellung in den kartesischen Koordinaten $v_j = y_j/y_3 \in \mathbb{R}$ $(j = 1, 2)$ zu

$$\kappa = \frac{W[\mathbf{y}]}{h^{3/2} \cdot \operatorname{sgn} y_3} \neq 0$$

mit $h := h_1^2 + h_2^2$, $h_j := y_3 v_j'$ $(j = 1, 2)$. Die Krümmung κ der Integralkurve C verschwindet in der euklidischen Ebene E nirgends. Wenn die Integralkurve C die Ferngerade

$$H := \langle \mathbf{e}_3 \rangle = \{\mathbf{u} = (u_1,u_2,0) \in X : u_1, u_2 \in \mathbb{R}, u_3 = \mathbf{e}_3\mathbf{u} = 0\}$$

im Kurvenpunkt $P(x_0) = [\mathbf{y}(x_0)]$ trifft, so hat κ in x_0 eine Nullstelle. Die Krümmung κ wechselt das Vorzeichen genau dann, wenn die zur Ferngeraden gehörige Lösung von (L), hier in der obigen Betrachtung y_3, das Vorzeichen wechselt.

Die Multiplikationstabelle (2.9) bedeutet geometrisch, dass in $\mathbb{P}^2$ die Punkte

$$[\mathbf{y}], [\mathbf{y}'], [\mathbf{y}'']$$

und Geraden

$$\langle \mathbf{z} \rangle, \langle D^2[\mathbf{z}] \rangle, \langle D^1[\mathbf{z}] \rangle$$

die Ecken und Seiten eines Dreiecks bilden. Zu jedem Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x)]$, $x \in J$, der Integralkurve C erhält man damit das sogenannte **begleitende Dreieck**. Eine grafische Darstellung dieser Situation gibt die Abbildung 3.1.

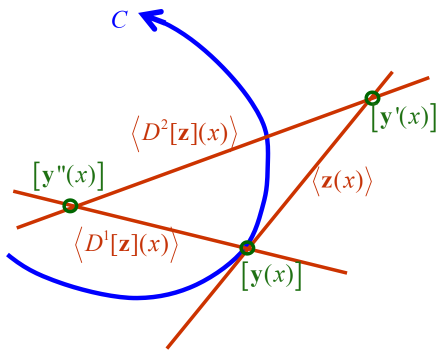


Abb. 3.1 Das begleitende Dreieck der Integralkurve C

Analytische Beschreibung von Inzidenzen in $\mathbb{P}^2$

Inzidenz des Punktes $[\mathbf{d}]$ mit einer Geraden $\langle \mathbf{c} \rangle$:

Der Punkt $[\mathbf{d}] \in \mathbb{P}^2$ liegt auf der Geraden $\langle \mathbf{c} \rangle \subseteq \mathbb{P}^2$, d. h. es gilt die Inzidenz

$$[\mathbf{d}] \in \langle \mathbf{c} \rangle,$$

genau dann, wenn für die Lösungen $z = \mathbf{dz} \in S^+$ und $y = \mathbf{cy} \in S$ deren Skalarprodukt Null ist,

(3.2) $$B[y,z] = \mathbf{cd} = 0,$$

also die Lösungen y und z orthogonal sind.

Inzidenz des Punktes $[\mathbf{y}^{(k)}(x_0)]$ mit einer Geraden $\langle \mathbf{c} \rangle$:

Es liegt die Inzidenz

$$[\mathbf{y}^{(k)}(x_0)] \in \langle \mathbf{c} \rangle$$

genau dann vor, wenn für $z = \mathbf{dz} = \mathbf{y}^{(k)}(x_0)\mathbf{z}$ und $y = \mathbf{cy}$ die Relation

$$B[y,z] = \mathbf{c}\,\mathbf{y}^{(k)}(x_0) = y^{(k)}(x_0) = 0$$

erfüllt ist. Der zur k-ten Ableitung des Fundamentalsystems $\mathbf{y}$ bei $x = x_0$ gehörige Punkt $[\mathbf{y}^{(k)}(x_0)] \in \mathbb{P}^2$ liegt auf der Geraden $\langle \mathbf{c} \rangle$ genau dann, wenn die k-te Ableitung $y^{(k)}$ der zu $\mathbf{c}$ gehörigen Lösung $y = \mathbf{cy}$ bei $x = x_0$ eine Nullstelle hat.

Spezialfall $k = 0$: **Treffpunkt einer Geraden mit der Integralkurve**: Die Gerade $\langle \mathbf{c} \rangle$ trifft die Integralkurve C im Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x_0)]$ genau dann, wenn $y(x_0) = 0$ für die Lösung $y = \mathbf{cy}$ ist:

$$[\mathbf{y}(x_0)] \in \langle \mathbf{c} \rangle \;\Leftrightarrow\; y(x_0) = 0 \text{ für die Lösung } y = \mathbf{cy} \in S.$$

Schnittpunkt einer Geraden mit der Integralkurve:

$$[\mathbf{y}(x_0)] \in \langle \mathbf{c} \rangle \wedge \langle \mathbf{c} \rangle \neq \langle \mathbf{z}(x_0) \rangle \Leftrightarrow y(x_0) = 0 \neq y'(x_0) \text{ für } y = \mathbf{cy} \in S.$$

Im noch spezielleren Fall, dass die Gerade $\langle \mathbf{c} \rangle$ durch die Tangente $\langle \mathbf{z}(t_0) \rangle$ im Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(t_0)]$ gegeben ist, erhält man die Charakterisierung für einen **Treffpunkt einer Tangente mit der Integralkurve** (siehe unten auch Berührpunkt einer Geraden mit der Integralkurve) mit der speziellen Lösung

$$y = \mathbf{cy} = \lambda \mathbf{z}(t_0)\mathbf{y} = \lambda u_2(.,t_0) \quad (\lambda \neq 0):$$

Die Tangente $\langle \mathbf{z}(t_0) \rangle$ trifft die Integralkurve C im Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x_0)]$ genau dann, wenn $u_2(x_0,t_0) = 0$ ist:

$$[\mathbf{y}(x_0)] \in \langle \mathbf{z}(t_0) \rangle \;\Leftrightarrow\; u_2(x_0,t_0) = 0.$$

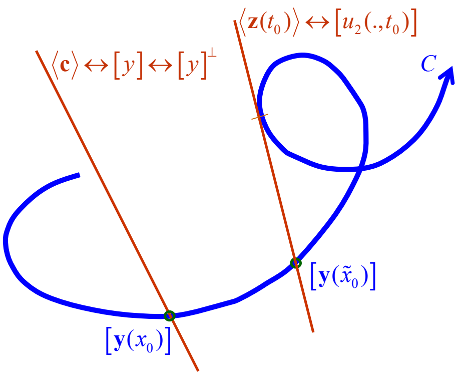


Abb. 3.2 a) Schnittpunkt $[\mathbf{y}(x_0)]$ einer Geraden $\langle \mathbf{c} \rangle$ mit der Integralkurve C: $y(x_0) = \mathbf{cy}(x_0) = 0$;
b) Schnittpunkt $[\mathbf{y}(\tilde{x}_0)]$ einer Tangente $\langle \mathbf{z}(t_0) \rangle$ mit der Integralkurve C: $u_2(x_0,t_0) = \mathbf{z}(t_0)\mathbf{y}(x_0) = 0$

Inzidenz eines Punktes [d] mit der Geraden $\left\langle D^k[\mathbf{z}](x_0)\right\rangle$:

Es gilt genau dann die Inzidenz

$$[\mathbf{d}] \in \left\langle D^k[\mathbf{z}](x_0)\right\rangle,$$

wenn für $z = \mathbf{dz}$ und $y = D^k[\mathbf{z}](x_0)\mathbf{y}$ die Relation

$$B[y,z] = D^k[\mathbf{z}](x_0)\mathbf{d} = D^k[z](x_0) = 0$$

gilt. Auf der zur k-ten verallgemeinerten Ableitung des Fundamentalsystems $\mathbf{z}$ bei $x = x_0$ gehörigen Geraden $\left\langle D^k[\mathbf{z}](x_0)\right\rangle \subseteq \mathbb{P}^2$ liegt genau dann der Punkt [**d**], wenn die k-te verallgemeinerte Ableitung $D^k[z]$ der zu **d** gehörigen Lösung $z = \mathbf{dz}$ bei $x = x_0$ eine Nullstelle hat.

Tangente von einem Punkt aus an die Integralkurve (Spezialfall $k = 0$): Der Punkt [**d**] liegt auf der Tangente $\langle \mathbf{z}(x_0)\rangle$ des Kurvenpunkts $[\mathbf{y}(x_0)]$ genau dann, wenn die Lösung $z = \mathbf{dz}$ in x_0 eine Nullstelle hat:

$$[\mathbf{d}] \in \langle \mathbf{z}(x_0)\rangle \;\Leftrightarrow\; z(x_0) = 0 \text{ für die Lösung } z = \mathbf{dz} \in S^+.$$

Im noch spezielleren Fall, dass der Punkt [**d**] durch einen Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(t_0)]$ gegeben ist, erhält man eine Charakterisierung einer **Tangente von einem Kurvenpunkt aus an die Integralkurve** mit der speziellen Lösung

$$z = \mathbf{dz} = \mu\mathbf{y}(t_0)\mathbf{z} = \mu u_2^+(.,t_0) \;\; (\mu \neq 0):$$

Vom Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(t_0)]$ aus gibt es eine an einem weiteren Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x_0)]$ anliegende Tangente $\langle \mathbf{z}(x_0)\rangle$ an die Integralkurve C genau dann, wenn $u_2^+(x_0,t_0) = 0$ bzw. nach (2.1) ($j = 2$, $k = 0$) $u_2(t_0,x_0) = 0$ ist:

$$[\mathbf{y}(t_0)] \in \langle \mathbf{z}(x_0)\rangle \;\Leftrightarrow\; u_2^+(x_0,t_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; u_2(t_0,x_0) = 0.$$

Der weitere speziellere Fall, dass die durch den Punkt $[\mathbf{y}(t_0)]$ gehende Tangente $\langle \mathbf{z}(x_0)\rangle$ des Kurvenpunkts $[\mathbf{y}(x_0)]$ auch noch mit der Tangente $\langle \mathbf{z}(t_0)\rangle$ des Kurvenpunkts $[\mathbf{y}(t_0)]$ übereinstimmt, also eine Doppeltangente

$$\langle \mathbf{z}(x_0)\rangle = \langle \mathbf{z}(t_0)\rangle$$

vorliegt, wird durch die Bedingung

$$[u_2(.,x_0)] = [u_2(.,t_0)]$$

charakterisiert. Der weitere speziellere Fall, dass der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(t_0)]$ mit dem Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x_0)]$ übereinstimmt, also ein Doppelpunkt

$$[\mathbf{y}(x_0)] = [\mathbf{y}(t_0)]$$

vorliegt, wird durch die Bedingung

$$[u_2^+(.,x_0)] = [u_2^+(.,t_0)]$$

charakterisiert.

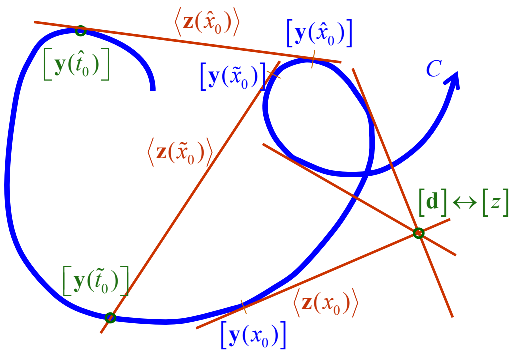


Abb. 3.3 a) Tangente von [**d**] aus an C zum Kurvenpunkt [$\mathbf{y}(x_0)$]: $z(x_0) = \mathbf{dz}(x_0) = 0$;
b) Tangente von [$\mathbf{y}(\tilde{t}_0)$] aus an C zum Kurvenpunkt [$\mathbf{y}(\tilde{x}_0)$]: $u_2^+(x_0,t_0) = \mathbf{y}(t_0)\mathbf{z}(x_0) = 0$;
c) Doppeltangente $\langle \mathbf{z}(\hat{x}_0)\rangle = \langle \mathbf{z}(\hat{t}_0)\rangle$ in den Kurvenpunkten [$\mathbf{y}(\hat{t}_0)$] und [$\mathbf{y}(\hat{x}_0)$]: $u_2(\hat{t}_0,\hat{x}_0) = u_2'(\hat{t}_0,\hat{x}_0) = 0$

Übereinstimmung mit den speziellen Geraden $\langle D^k[\mathbf{z}](x_0)\rangle$ bzw. Punkten [$\mathbf{y}^{(k)}(x_0)$]

Übereinstimmung von Geraden:

$$\langle \mathbf{c}\rangle = \langle D^k[\mathbf{z}](x_0)\rangle \Leftrightarrow [y] = [u_{2-k}(.,x_0)] \text{ für } y = \mathbf{cy} \in S\setminus\{o\} \qquad (k = 0, 1, 2).$$

Berührpunkt einer Geraden mit der Integralkurve (Spezialfall $k = 0$):

$$\langle \mathbf{c}\rangle = \langle \mathbf{z}(x_0)\rangle \Leftrightarrow [y] = [u_2(.,x_0)] \text{ für } y = \mathbf{cy} \in S\setminus\{o\}$$

$$\Leftrightarrow y(x_0) = y'(x_0) = 0,\ y''(x_0) \neq 0 \text{ für } y = \mathbf{cy} \in S.$$

Der noch speziellere Fall einer **Doppeltangente**:

$$\langle \mathbf{z}(x_0)\rangle = \langle \mathbf{z}(t_0)\rangle \Leftrightarrow [u_2(.,x_0)] = [u_2(.,t_0)] \qquad (x_0, t_0 \in J).$$

Übereinstimmung von Punkten:

$$[\mathbf{d}] = [\mathbf{y}^{(k)}(x_0)] \Leftrightarrow [z] = [u_{2-k}^+(.,x_0)] \text{ für } z = \mathbf{dz} \in S^+\setminus\{o\} \qquad (k = 0, 1, 2).$$

Spezialfall $k = 0$: Punkt auf der Integralkurve

$$[\mathbf{d}] = [\mathbf{y}(x_0)] \Leftrightarrow [z] = [u_2^+(.,x_0)] \text{ für } z = \mathbf{dz} \in S^+\setminus\{o\}.$$

Der noch speziellere Fall eines **Doppelpunktes**:

$$[\mathbf{y}(x_0)] = [\mathbf{y}(t_0)] \Leftrightarrow [u_2^+(.,x_0)] = [u_2^+(.,t_0)] \qquad (x_0, t_0 \in J).$$

Dem zum Kurvenparameter $x_0 \in J$ gehörigen speziellen Fundamentalsystem

$$u_2(.,x_0),\ u_1(.,x_0),\ u_0(.,x_0)$$

von S und dem dazu adjungierten Fundamentalsystem

$$u_0^+(.,x_0),\ -u_1^+(.,x_0),\ u_2^+(.,x_0)$$

von S^+ sind also in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ die Geraden

$$\langle \mathbf{z}(x_0)\rangle,\ \langle D^1[\mathbf{z}](x_0)\rangle,\ \langle D^2[\mathbf{z}](x_0)\rangle$$

und die Punkte

$$[\mathbf{y}''(x_0)],\ [\mathbf{y}'(x_0)],\ [\mathbf{y}(x_0)]$$

zugeordnet, also die Seiten und Ecken des **begleitenden Dreiecks**. Insbesondere ist (für $k = 0$) der Lösung $u_2(.,x_0) \in S$ die Tangente $\langle \mathbf{z}(x_0)\rangle$ zugeordnet und der Lösung $u_2^+(.,x_0) \in S^+$ der Kurvenpunkt [$\mathbf{y}(x_0)$].

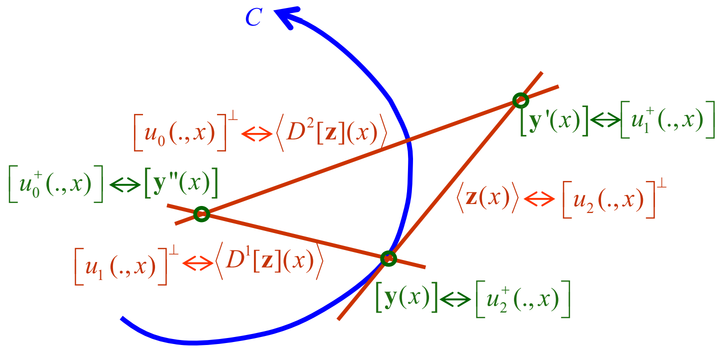


Abb. 3.4 Das begleitende Dreieck der Integralkurve C mit den zu den Ecken und Seiten gehörigen Lösungen

Analytische Charakterisierung geometrischer Eigenschaften von C

Tab. 3.1 Äquivalente analytische Charakterisierungen spezieller geometrischer Eigenschaften der Integralkurve

(3.3) Doppelpunkt (Selbsttreffen, DP) $[\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)]$	1) $[u_2^+(.,c)] = [u_2^+(.,d)]$; 2) $u_2^+(d,c) = D^1[u_2^+](d,c) = 0$; 3) $u_2(c,d) = u_1(c,d) = 0$.
(3.4) Doppeltangente (DT) $\langle \mathbf{z}(c)\rangle = \langle \mathbf{z}(d)\rangle$	1) $[u_2(.,c)] = [u_2(.,d)]$; 2) $u_2(d,c) = u_2'(d,c) = 0$; 3) $u_2^+(c,d) = u_1^+(c,d) = 0$.
(3.5) Doppelpunkt oder Doppeltangente $[\mathbf{y}(d)] \in \langle \mathbf{z}(c)\rangle \wedge [\mathbf{y}(c)] \in \langle \mathbf{z}(d)\rangle$ 3 verschiedene Fälle: a) $[\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)] = \langle \mathbf{z}(c)\rangle \cap \langle \mathbf{z}(d)\rangle$ b) $[\mathbf{y}(c),\mathbf{y}(d)] = \langle \mathbf{z}(c)\rangle = \langle \mathbf{z}(d)\rangle$ c) $[\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)] \subsetneq \langle \mathbf{z}(c)\rangle = \langle \mathbf{z}(d)\rangle$	1) $u_2(d,c) = u_2(c,d) = 0$; 2) $u_2^+(c,d) = u_2^+(d,c) = 0$; 3) $u_2^+(c,d) = u_2^{+\prime}(c,d) = 0$ oder $u_2(d,c) = u_2'(d,c) = 0$; 4) $[u_2^+(.,c)] = [u_2^+(.,d)]$ oder $[u_2(.,c)] = [u_2(.,d)]$.
(3.6) Doppelpunkt und Doppeltangente (Selbstberührung(spunkt), SBP) $[\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)] \subsetneq \langle \mathbf{z}(c)\rangle = \langle \mathbf{z}(d)\rangle$	1) $[u_2^+(.,c)] = [u_2^+(.,d)] \wedge [u_2(.,c)] = [u_2(.,d)]$; 2) $u_2^+(d,c) = D^1[u_2^+](d,c) = 0$ $= u_2(c,d) = u_2'(c,d)$; 3) $u_2(c,d) = u_2'(c,d) = u_1(c,d) = 0$; 4) $u_2^+(d,c) = D^1[u_2^+](d,c) = u_1^+(d,c) = 0$; 5) $u_2^+(d,c) = u_1(c,d) = 0 = u_2(d,c) = u_1^+(c,d)$.
(3.7) Doppelpunkt und keine Doppeltangente (echte Selbstschneidung, Selbstschneidung(spunkt), SSP) $[\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)] = \langle \mathbf{z}(c)\rangle \cap \langle \mathbf{z}(d)\rangle$	1) $[u_2^+(.,c)] = [u_2^+(.,d)] \wedge [u_2(.,c)] \neq [u_2(.,d)]$; 2) $u_2^+(d,c) = u_2^{+\prime}(d,c) = 0 \neq u_2'(d,c)$; 3) $u_2^+(d,c) = D^1[u_2^+](d,c) = 0 \neq u_1^+(c,d)$; 4) $u_2(c,d) = u_2(d,c) = 0 \neq u_2'(d,c)$; 5) $u_2^+(d,c) = u_1(c,d) = 0 \neq u_1^+(c,d)$.

(3.8) Doppeltangente und kein Doppelpunkt $[\mathbf{y}(c),\mathbf{y}(d)] = \langle \mathbf{z}(c) \rangle = \langle \mathbf{z}(d) \rangle$	1) $[u_2(.,c)] = [u_2(.,d)] \wedge [u_2^+(.,c)] \neq [u_2^+(.,d)]$; 2) $u_2(d,c) = u_2'(d,c) = u_2(c,d) = u_2'(c,d) = 0 \neq u_2^+{}'(d,c)$; 3) $u_2(d,c) = u_2'(d,c) = 0 \neq u_1(c,d)$; 4) $u_2^+(c,d) = u_2^+(d,c) = 0 \neq D^1[u_2^+](d,c)$; 5) $u_2(d,c) = u_1^+(c,d) = 0 \neq u_1(c,d)$.

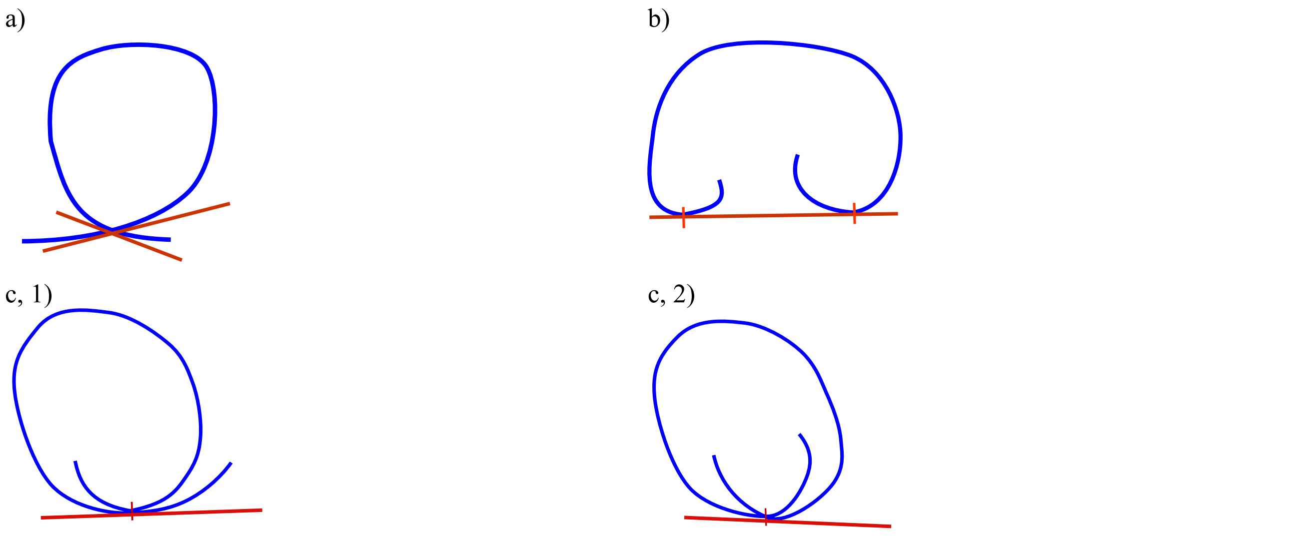


Abb. 3.5 Eine Integralkurve C mit a) einem Selbstschneidungspunkt (Doppelpunkt ohne Doppeltangente), b) einer Doppeltangente ohne Doppelpunkt, c, 1) einem Selbstberührungspunkt (Doppelpunkt und Doppeltangente) ohne Selbstdurchsetzung und c, 2) einem Selbstberührungspunkt mit Selbstdurchsetzung

Geometrische Beschreibung der Klassen $C_{\mathrm{I}}^k(J)$, $C_{\mathrm{II}}^k(J)$, $C_{\mathrm{I}}^{k+}(J)$, $C_{\mathrm{II}}^{k+}(J)$, $D(J)$

$L \in C_{\mathrm{I}}^k(J)$ bzw. $L \in C_{\mathrm{II}}^k(J)$ gilt genau dann, wenn die folgende Aussage gilt:

$[\mathbf{y}^{(k)}(x)] \notin \langle \mathbf{z}(t) \rangle$ für alle $x, t \in J$ mit $x < t$ bzw. $x > t$.

$L^+ \in C_{\mathrm{I}}^{k+}(J)$ bzw. $L^+ \in C_{\mathrm{II}}^{k+}(J)$ gilt genau dann, wenn die folgende Aussage gilt:

$[\mathbf{y}(x)] \notin \langle D^k[\mathbf{z}](t) \rangle$ für alle $x, t \in J$ mit $x < t$ bzw. $x > t$.

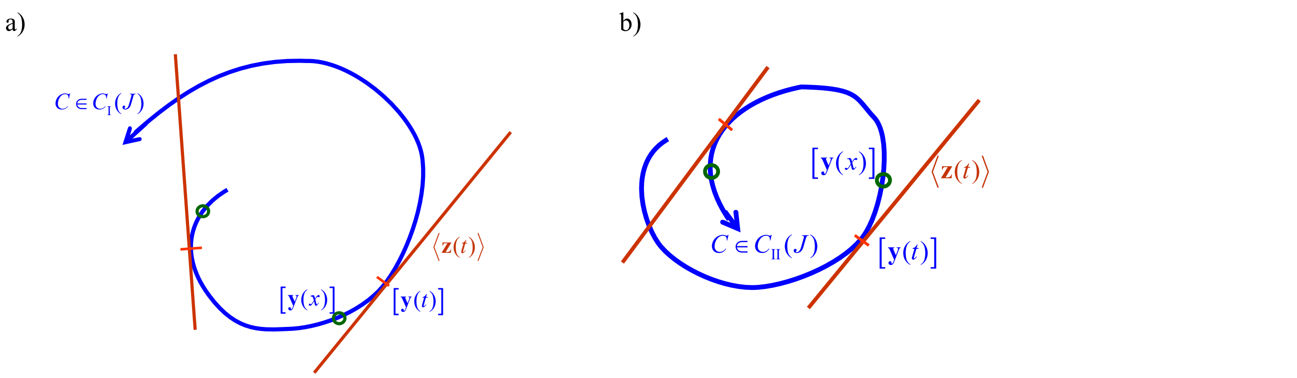


Abb. 3.6 Eine Integralkurve C mit Spiralform ohne Selbsttreffen für a) die Klasse $C_{\mathrm{I}}(J)$ mit nach außen verlaufender Spiralform und b) die Klasse $C_{\mathrm{II}}(J)$ mit nach innen verlaufender Spiralform

$L \in D(J) := C_{\mathrm{I}}(J) \cap C_{\mathrm{II}}(J)$ (Diskonjugiertheit der Differentialgleichung) gilt genau dann, wenn die folgende Aussage richtig ist:
$[\mathbf{y}(x)] \notin \langle \mathbf{z}(t) \rangle$ für $x \neq t$, $x, t \in J$.

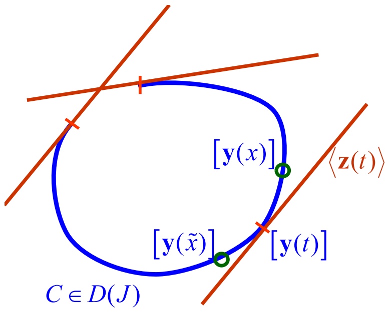


Abb. 3.7 Eine Integralkurve C mit der speziellen Spiralform der Klasse $D(J) = C_{\mathrm{I}}(J) \cap C_{\mathrm{II}}(J)$

Geometrische Beschreibung der Klassen $K_{\mathrm{I}}(J)$, $K_{\mathrm{II}}(J)$, $K_{\mathrm{I}}^{+}(J)$, $K_{\mathrm{II}}^{+}(J)$

Beliebiges Intervall J:

$L \in K_{\mathrm{I}}(J)$ (bzw. $L \in K_{\mathrm{II}}(J)$) gilt genau dann, wenn die folgende Aussage richtig ist:
$[\mathbf{y}(x)] \in \langle \mathbf{z}(t) \rangle$, $x < t$ (bzw. $x > t$) $\Rightarrow \langle \mathbf{z}(x) \rangle = \langle \mathbf{z}(t) \rangle$ (DT).

$L^{+} \in K_{\mathrm{I}}^{+}(J)$ (bzw. $L^{+} \in K_{\mathrm{II}}^{+}(J)$) gilt genau dann, wenn die folgende Aussage gilt:
$[\mathbf{y}(t)] \in \langle \mathbf{z}(x) \rangle$, $t > x$ (bzw. $t < x$) $\Rightarrow [\mathbf{y}(t)] = [\mathbf{y}(x)]$ (DP).

Offenes Intervall $]a,b[$:

$L \in K_{\mathrm{I}}(]a,b[)$ (bzw. $L \in K_{\mathrm{II}}(]a,b[)$) gilt genau dann, wenn die folgende Aussage gilt:
$[\mathbf{y}(x)] \in \langle \mathbf{z}(t) \rangle$, $x < t$ (bzw. $x > t$) $\Rightarrow \langle \mathbf{z}(x) \rangle = \langle \mathbf{z}(t) \rangle \wedge [\mathbf{y}(x)] = [\mathbf{y}(t)]$ (SBP).

$L^{+} \in K_{\mathrm{I}}^{+}(]a,b[)$ (bzw. $L^{+} \in K_{\mathrm{II}}^{+}(]a,b[)$) gilt genau dann, wenn die folgende Aussage richtig ist:
$[\mathbf{y}(t)] \in \langle \mathbf{z}(x) \rangle$, $t > x$ (bzw. $t < x$) $\Rightarrow [\mathbf{y}(t)] = [\mathbf{y}(x)] \wedge \langle \mathbf{z}(t) \rangle = \langle \mathbf{z}(x) \rangle$ (SBP).

Folgerungen für Spezialfälle bei einem **beliebigen Intervall** J:

Im Fall $L \in K_{\mathrm{I}}(J) \cup K_{\mathrm{II}}(J)$) gilt die Aussage:
$[\mathbf{y}(x)] = [\mathbf{y}(t)]$ (DP) für $x, t \in J$, $x \neq t \Rightarrow \langle \mathbf{z}(x) \rangle = \langle \mathbf{z}(t) \rangle$ (SBP).

Im Fall $L^{+} \in K_{\mathrm{I}}^{+}(J) \cup K_{\mathrm{II}}^{+}(J)$ gilt die Aussage:
$\langle \mathbf{z}(x) \rangle = \langle \mathbf{z}(t) \rangle$ (DT) für $x, t \in J$, $x \neq t \Rightarrow [\mathbf{y}(t)] = [\mathbf{y}(x)]$ (SBP).

Bei vorliegender Klassenzugehörigkeit

$L \in K_{\mathrm{I}}]a,b[\cup K_{\mathrm{II}}]a,b[$

besitzt also das zum offenen Intervall $]a,b[$ gehörige Kurvenstück notwendig eine der beiden Arten der Spiralform ohne Selbstschneidung, aber mit möglicher Selbstberührung. Dass die für ein beliebiges Intervall J geeignet definierte Spiralform von C auch hinreichend und damit charakteristisch ist für die Klassenzugehörigkeit

$L \in K_{\mathrm{I}}(J) \cup K_{\mathrm{II}}(J)$,

bei der im Parameterintervall J die Tangenten das vorhergehende bzw. das nachfolgende Kurvenstück nicht schneiden, wird mit dem nachfolgenden Satz 4.10 gezeigt. Dazu wird in dessen Beweisteil 2) mit einer Fallunterscheidung und einem etwas aufwendigeren Beweis gezeigt, dass bei Nichtvorliegen dieser Klassenzugehörigkeit die Kurve C keine Spiralform aufweist.

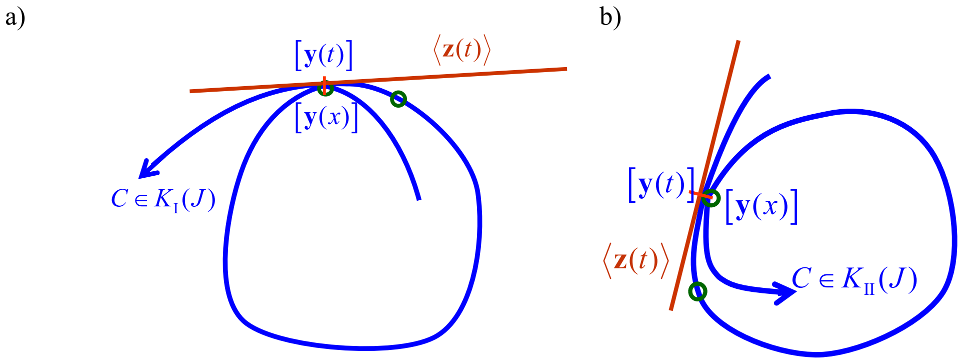


Abb. 3.8 Eine Integralkurve C mit Spiralform bei möglicher Selbstberührung, aber ohne Selbstschneidung für a) die Klasse $K_{\mathrm{I}}(J)$ mit nach außen verlaufender Spiralform und b) die Klasse $K_{\mathrm{II}}(J)$ mit nach innen verlaufender Spiralform

Weitere geometrische Eigenschaften der Klassen $C_{\mathrm{I}}(J)$, $C_{\mathrm{II}}(J)$, $K_{\mathrm{I}}(J)$, $K_{\mathrm{II}}(J)$

Eigenschaften der Integralkurve für die verschiedenen Klassen

a) Für ein **beliebiges Intervall** J gibt es bei der Klassenzugehörigkeit

$$L \in C_{\mathrm{I}}(J) \cup C_{\mathrm{II}}(J) \; (\Leftrightarrow L^+ \in C^+_{\mathrm{II}}(J) \cup C^+_{\mathrm{I}}(J))$$

insbesondere keine Stellen $c, d \in J$, $c \neq d$, mit der Eigenschaft

(3.5) Doppelpunkt oder Doppeltangente,

also keine Stellen mit einem der drei verschiedenen Unterfälle:

(3.6) Selbstberührungspunkt (Doppelpunkt und Doppeltangente),
(3.7) Selbstschneidungspunkt (Doppelpunkt ohne Doppeltangente) oder
(3.8) Doppeltangente ohne Doppelpunkt.

b) Für ein **beliebiges Intervall** J gibt es bei der Klassenzugehörigkeit

$$L \in K_{\mathrm{I}}(J) \cup K_{\mathrm{II}}(J)$$

keine Stellen $c, d \in J$, $c \neq d$, mit

(3.7) Doppelpunkt ohne Doppeltangente

und bei

$$L^+ \in K^+_{\mathrm{I}}(J) \cup K^+_{\mathrm{II}}(J)$$

keine Stellen $c, d \in J$, $c \neq d$, mit

(3.8) Doppeltangente ohne Doppelpunkt.

c) Speziell für ein **offenes Intervall** $J =]a,b[$ gibt es demnach bei

$$L \in K_{\mathrm{I}}]a,b[\cup K_{\mathrm{II}}]a,b[\; (\Leftrightarrow L^+ \in K^+_{\mathrm{II}}]a,b[\cup K^+_{\mathrm{I}}]a,b[)$$

keine $c, d \in]a,b[$, $c \neq d$, mit

(3.7) Doppelpunkt ohne Doppeltangente oder mit
(3.8) Doppeltangente ohne Doppelpunkt.

Doppeltangente oder Doppelpunkt an den Kurvenenden

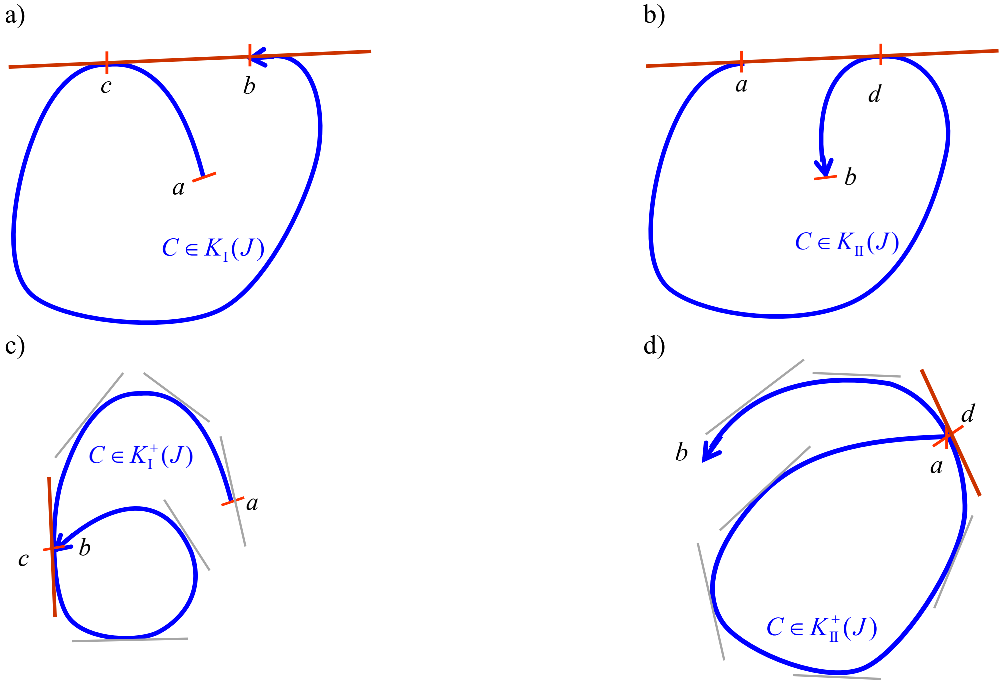


Abb. 3.9 Eine Integralkurve C der Klasse $K_{\mathrm{I}}(J) \cup K_{\mathrm{II}}(J)$ mit einer Doppeltangente ohne Doppelpunkt (siehe a und b) bzw. $K_{\mathrm{I}}^{+}(J) \cup K_{\mathrm{II}}^{+}(J)$ mit einem Doppelpunkt ohne Doppeltangente (siehe c und d) am Ende oder Anfang des Kurvenstücks

Beziehungen zwischen den Nullstellenverteilungen der Lösungen von (L) und (L⁺)

Satz 3.1 Nullstellenanzahl bei zwei nicht orthogonalen Lösungen

Es sei $k \in \{0,1,2\}$, $c, d \in J$, $c < d$.

a) **Anzahl der Nullstellen von $z \cdot y^{(k)}$ für nicht orthogonale Lösungen $z = u^{+}_{2-k}(.,c) \in S^{+}$ und $y \in S$ zwischen zwei doppelten Nullstellen von z**
Ist $[\,u^{+}_{2-k}(.,c)\,] = [\,u^{+}_{2-k}(.,d)\,]$, $y \in S$ mit $y^{(k)}(c)y^{(k)}(d) \neq 0$ (also y und $z = u^{+}_{2-k}(.,c)$) nicht orthogonal) und j bzw. m die Anzahl der (mit ihren Vielfachheiten gezählten) Nullstellen von $z = u^{+}_{2-k}(.,c)$ bzw. $y^{(k)}$ in $]c,d[$, dann ist $k + j + m$ eine gerade Zahl.

b) **Anzahl der Nullstellen von $y \cdot D^{k}[z]$ für nicht orthogonale Lösungen $y = u_2(.,c) \in S$ und $z \in S^{+}$ zwischen zwei doppelten Nullstellen von y**
Ist $[u_{2-k}(.,c)] = [u_{2-k}(.,d)]$, $z \in S^{+}$ mit $D^{k}[z](c)D^{k}[z](d) \neq 0$ (also $y = u_{2-k}(.,c)$ und z nicht orthogonal) und j bzw. m die Anzahl der (mit ihren Vielfachheiten gezählten) Nullstellen von $y = u_{2-k}(.,c)$ bzw. $D^{k}[z]$ in $]c,d[$, dann ist $k + j + m$ eine gerade Zahl.

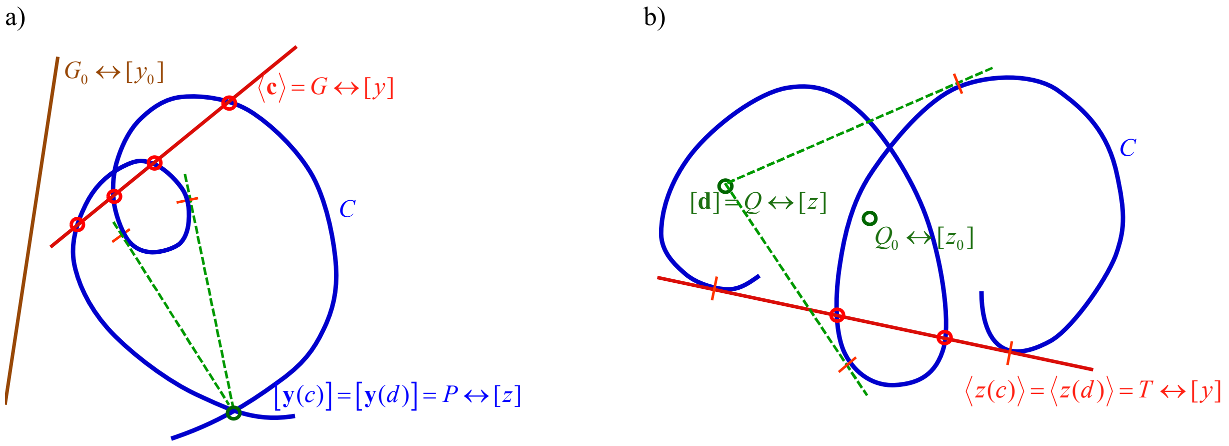


Abb. 3.10 a) Ein Doppelpunkt P der Integralkurve C, eine nicht durch P verlaufende Gerade G, die Anzahl der Tangenten von P aus an das Kurvenstück $C_{]c,d[}$ und die Anzahl der Treffpunkte der Geraden G mit dem Kurvenstück

b) Eine Doppeltangente T der Integralkurve C, ein nicht auf T liegender Punkt Q, die Anzahl der Treffpunkte der Geraden T mit dem Kurvenstück $C_{]c,d[}$ und die Anzahl der Tangenten von Q aus an das Kurvenstück

Folgerungen zur Nullstellenanzahl bei nicht orthogonalen Lösungen

1) a) **Anzahl der Nullstellen von $y^{(k)}$ bei nicht orthogonalen Lösungen $z = u^{+}_{2-k}(.,c) \in S^{+}$ und $y \in S$**
Ist zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 3.1, a) noch die Lösung $z = u^{+}_{2-k}(.,c)$ nullstellenfrei in $]c,d[$, also $j = 0$, und m die Nullstellenanzahl von $y^{(k)}$ in $]c,d[$, dann ist $k + m$ eine gerade Zahl.

b) **Anzahl der Nullstellen von $D^k[z]$ bei nicht orthogonalen Lösungen $y = u_{2-k}(.,c) \in S$ und $z \in S^{+}$**
Ist zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 3.1, b) noch die Lösung $y = u_{2-k}(.,c)$ nullstellenfrei in $]c,d[$, also $j = 0$, und m die Nullstellenanzahl von $D^k[z]$ in $]c,d[$, dann ist $k + m$ eine gerade Zahl.

2) a) **Anzahl der Nullstellen von nicht orthogonalen Lösungen $z = u^{+}_{2}(.,c) \in S^{+}$ und $y \in S$**
Ist $[u^{+}_{2}(.,c)] = [u^{+}_{2}(.,d)]$ $(k = 0)$ und existiert eine in $[c,d]$ nullstellenfreie Lösung $y_0 \in S$, dann ist die Anzahl j der (mit ihren Vielfachheiten gezählten) Nullstellen von $z = u^{+}_{2}(.,c)$ gerade.
Ebenso ist die Anzahl m der (mit ihren Vielfachheiten gezählten) Nullstellen von jeder beliebigen Lösung $y \in S$ mit $y(c) \neq 0$ (und damit $y(d) \neq 0$) in $]c,d[$ eine gerade Zahl.

b) **Anzahl der Nullstellen von nicht orthogonalen Lösungen $y = u_2(.,c) \in S$ und $z \in S^{+}$**
Ist $[u_2(.,c)] = [u_2(.,d)]$ $(k = 0)$ und existiert eine in $[c,d]$ nullstellenfreie Lösung $z_0 \in S^{+}$, dann ist die Anzahl j der (mit ihren Vielfachheiten gezählten) Nullstellen von $y = u_2(.,c)$ gerade.
Ebenso ist die Anzahl m der (mit ihren Vielfachheiten gezählten) Nullstellen von jeder beliebigen Lösung $z \in S^{+}$ mit $z(c) \neq 0$ (und damit $z(d) \neq 0$) in $]c,d[$ eine gerade Zahl.

Bemerkung zur Existenz einer nullstellenfreien Lösung
Eine hinreichende Bedingung für die Existenz von nullstellenfreien Lösungen von (L) und (L^{+}) im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ wird im unten folgenden Satz 4.9 durch $L \in K_{\mathrm{I}} \cup K_{\mathrm{II}}]c,d[$ gegeben, da (L) stets nichtoszillatorisch ist in $[c,d]$ für $c, d \in J$.

Satz 3.2 Allgemeiner Trennungssatz für die Nullstellen von zwei Lösungen und der dazu orthogonalen Lösung

Es sei $c, d \in J$, $c < d$.

a) Sei $y_1, y_2 \in S \setminus \{o\}$, $z \in S^+$ mit

$[z] = [y_1,y_2]^\perp$, also $z = \sigma W[y_1,y_2]$ $(\sigma = \exp\int p(x)dx)$,

$y_1(x) \neq 0$ für alle $x \in\ ]c,d[$

und an den Intervallgrenzen $t = c, d$ je eine der vier folgenden Bedingungen erfüllt:

α) 1) $y_1(t) = 0 \neq y_2(t)$ (Birkhoff 1911) oder

2) $y_1(t) = y_1'(t) = y_2(t) = 0 \neq y_2'(t)$;

β) 1) $y_1(t) \neq 0 = y_2(t)$ oder

2) $y_1'(t) \neq 0 = y_1(t) = y_2(t) = y_2'(t)$.

Die Anzahl i der mit ihren Vielfachheiten gezählten Nullstellen der Produktfunktion $y_2 \cdot z$ (also der Nullstellen der orthogonalen Lösungen y_2 und z) in $]c,d[$ ist ungerade und insbesondere ≥ 1, falls für die Intervallgrenzen $t = c$ und $t = d$ je eine der beiden Bedingungen von α) erfüllt ist oder für $t = c$ und $t = d$ je eine der beiden Bedingungen von β) erfüllt ist (Existenz einer Nullstelle von $y_2 \cdot z$);

die Anzahl i ist gerade, falls bei $t = c$ und $t = d$ die Bedingungen α) und β) gemischt auftreten.

b) Eine analoge Aussage erhält man durch Vertauschen der Rollen von S und S^+:

Sei $z_1, z_2 \in S^+ \setminus \{o\}$, $y \in S$ mit

$[y] = [z_1,z_2]^\perp$, also $y = W^+[z_1,z_2]/\sigma$,

$z_1(x) \neq 0$ für alle $x \in\ ]c,d[$

und an den Intervallgrenzen $t = c, d$ je eine der vier folgenden Bedingungen erfüllt:

α) 1) $z_1(t) = 0 \neq z_2(t)$ oder

2) $z_1(t) = z_1'(t) = z_2(t) = 0 \neq z_2'(t)$;

β) 1) $z_1(t) \neq 0 = z_2(t)$ oder

2) $z_1'(t) \neq 0 = z_1(t) = z_2(t) = z_2'(t)$.

Die Anzahl i der mit ihren Vielfachheiten gezählten Nullstellen der Produktfunktion $z_2 \cdot y$ (also der Nullstellen der orthogonalen Lösungen z_2 und y) in $]c,d[$ ist ungerade und insbesondere ≥ 1, falls für die Intervallgrenzen $t = c$ und $t = d$ je eine der beiden Bedingungen von α) erfüllt ist oder für $t = c$ und $t = d$ je eine der beiden Bedingungen von β) erfüllt ist (Existenz einer Nullstelle von $z_2 \cdot y$);

die Anzahl i ist gerade, falls bei $t = c$ und $t = d$ die Bedingungen α) und β) gemischt auftreten.

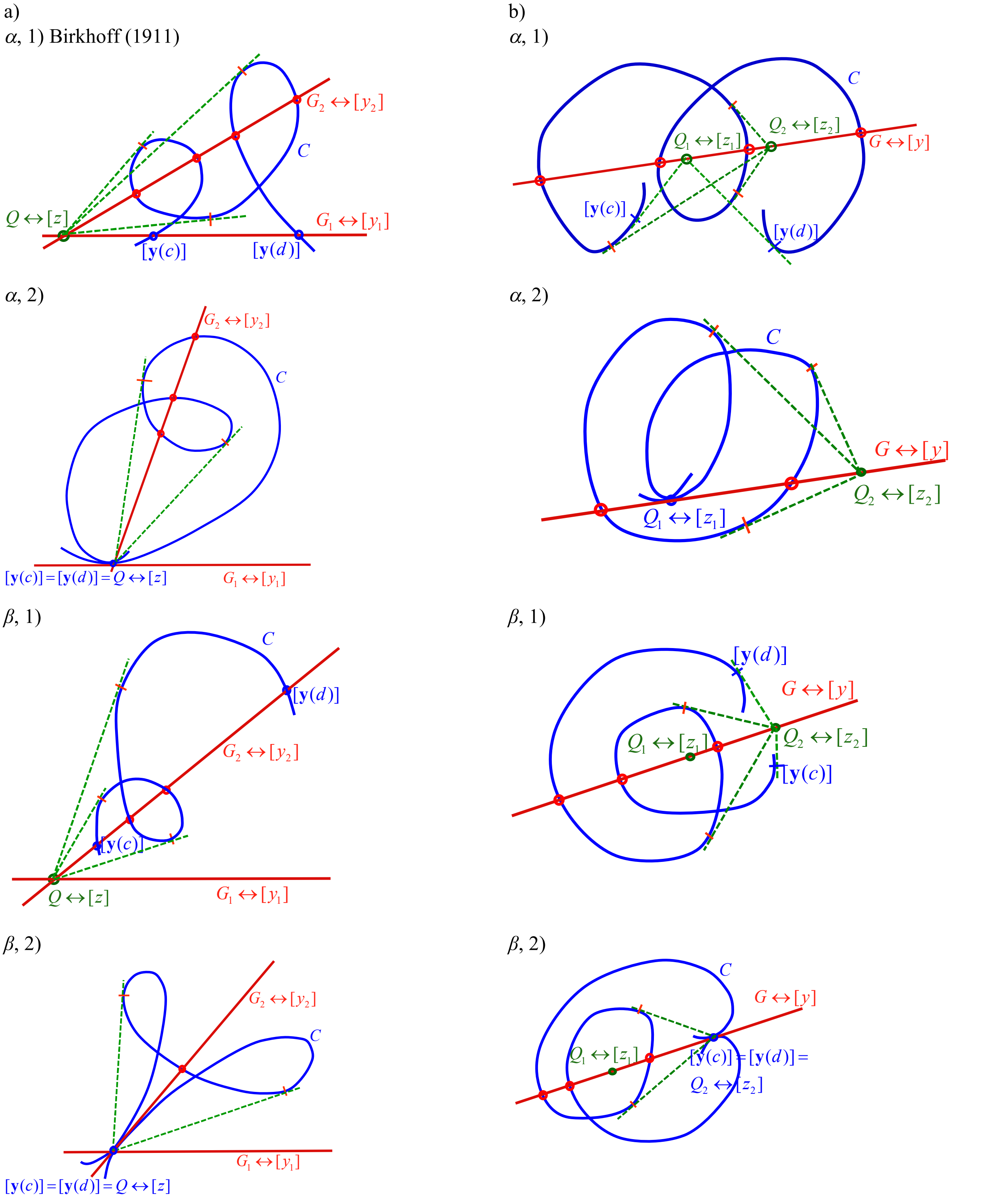


Abb. 3.11 a) Darstellung der zu den Lösungen y_1, $y_2 \in S \setminus \{o\}$ gehörigen Geraden G_1 und G_2, des zur Lösung $z \in S^+ \setminus \{o\}$, die zu y_1, y_2 orthogonal ist, gehörigen Schnittpunktes Q der Geraden G_1 und G_2, der Anzahl der Treffpunkte der Geraden G_2 mit dem Kurvenstück $C_{]c,d[}$ und der Anzahl der Tangenten von Q aus an das Kurvenstück für verschiedene Randbedingungen von y_1, y_2.

b) Darstellung der zu den Lösungen z_1, $z_2 \in S^+ \setminus \{o\}$ gehörigen Punkte Q_1 und Q_2, der zur Lösung $y \in S \setminus \{o\}$, die zu z_1, z_2 orthogonal ist, gehörigen Verbindungsgerade G der Punkte Q_1 und Q_2, der Anzahl der Tangenten von Q_2 aus an das Kurvenstück $C_{]c,d[}$ und der Anzahl der Treffpunkte der Geraden G mit dem Kurvenstück für verschiedene Randbedingungen von z_1, z_2.

Folgerungen zur Nullstellenanzahl einer speziellen Lösung bzw. zur Existenz einer Nullstelle einer speziellen Lösung

a) Ist $[u_2^+(.,c)] = [u_2^+(.,d)]$ und existieren im Intervall $[c,d]$ nullstellenfreie Lösungen $y_0 \in S$ und $z_0 \in S^+$, dann ist für die bis auf einen konstanten Faktor $\rho \neq 0$ eindeutig bestimmte Lösung $y \in S$ mit

$$[y] = [z_0, u_2^+(.,c)]^\perp$$

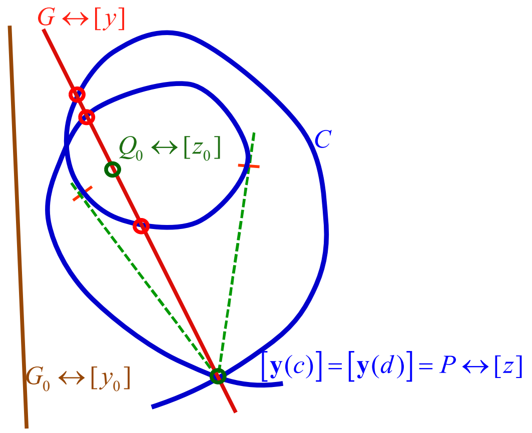
die Anzahl der mit ihren Vielfachheiten gezählten Nullstellen in $]c,d[$ ungerade und somit insbesondere ≥ 1.

b) Eine analoge Aussage erhält man durch Vertauschung der Rollen von S und S^+:
Ist $[u_2(.,c)] = [u_2(.,d)]$ und existieren im Intervall $[c,d]$ nullstellenfreie Lösungen $y_0 \in S$ und $z_0 \in S^+$, dann ist für die bis auf einen konstanten Faktor $\lambda \neq 0$ eindeutig bestimmte Lösung $z \in S^+$ mit

$$[z] = [y_0, u_2(.,c)]^\perp$$

die Anzahl der mit ihren Vielfachheiten gezählten Nullstellen in $]c,d[$ ungerade und insbesondere ≥ 1.

a)



b)

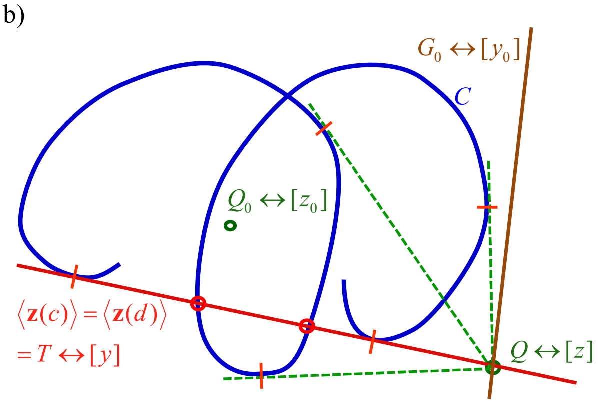


Abb. 3.12 a) Darstellung der zu den Lösungen $z_1 = z_0$, $z_2 = u_2^+(.,c) \in S^+ \setminus \{o\}$ gehörigen Punkte Q_0 und P, der zu den Lösungen $y_0, y \in S \setminus \{o\}$ gehörigen Geraden G_0 und G und der Anzahl der Treffpunkte der Geraden G mit dem Kurvenstück $C_{]c,d[}$

b) Darstellung der zu den Lösungen $y_1 = y_0$, $y_2 = u_2(.,c) \in S \setminus \{o\}$ gehörigen Geraden G_0 und T, der zu den Lösungen $z_0, z \in S^+ \setminus \{o\}$ gehörigen Punkte Q_0 und Q und der Anzahl der Tangenten von Q aus an das Kurvenstück $C_{]c,d[}$

Satz 3.3 Existenz einer Nullstelle der Produktfunktion von zwei orthogonalen Lösungen
Es sei $c, d \in J$, $c \neq d$.

a) Ist $y \in S \setminus \{o\}$, $z \in S^{+} \setminus \{o\}$,

$$B[y,z] = 0$$

und noch eine der folgenden Randbedingungen erfüllt, dann hat $y \cdot z$ mindestens eine Nullstelle in $]c,d[$ (bzw. $]d,c[$):

1) $y(c) = 0$ $(= y(d))$, $\quad [z] \neq [u_2^{+}(.,c)] = [u_2^{+}(.,d)]$;
2) $y(c) = 0 \neq y(d)$, $\quad u_2^{+}(d,c) = 0$, $[z] \neq [u_2^{+}(.,c)]$ $(\neq [u_2^{+}(.,d)])$.

Setzt man noch die Nullstellenfreiheit von y in $]c,d[$ voraus, so kann die Existenz einer (einfachen) Nullstelle von z in $]c,d[$ gefolgert werden; setzt man die Nullstellenfreiheit von z in $]c,d[$ voraus, so kann die Existenz einer (einfachen) Nullstelle von y in $]c,d[$ gefolgert werden.

b) Eine analoge Aussage erhält man durch Vertauschen der Rollen von S und S^{+}:
Ist $y \in S \setminus \{o\}$, $z \in S^{+} \setminus \{o\}$,

$$B[y,z] = 0$$

und noch eine der folgenden Randbedingungen erfüllt, dann hat $y \cdot z$ mindestens eine Nullstelle in $]c,d[$ (bzw. $]d,c[$):

1) $z(c) = 0$ $(= z(d))$, $\quad [y] \neq [u_2(.,c)] = [u_2(.,d)]$;
2) $z(c) = 0 \neq z(d)$, $\quad u_2(d,c) = 0$, $[y] \neq [u_2(.,c)]$ $(\neq [u_2(.,d)])$.

Setzt man noch die Nullstellenfreiheit von z in $]c,d[$ voraus, so kann die Existenz einer (einfachen) Nullstelle von y in $]c,d[$ gefolgert werden; setzt man die Nullstellenfreiheit von y in $]c,d[$ voraus, so kann die Existenz einer (einfachen) Nullstelle von z in $]c,d[$ gefolgert werden.

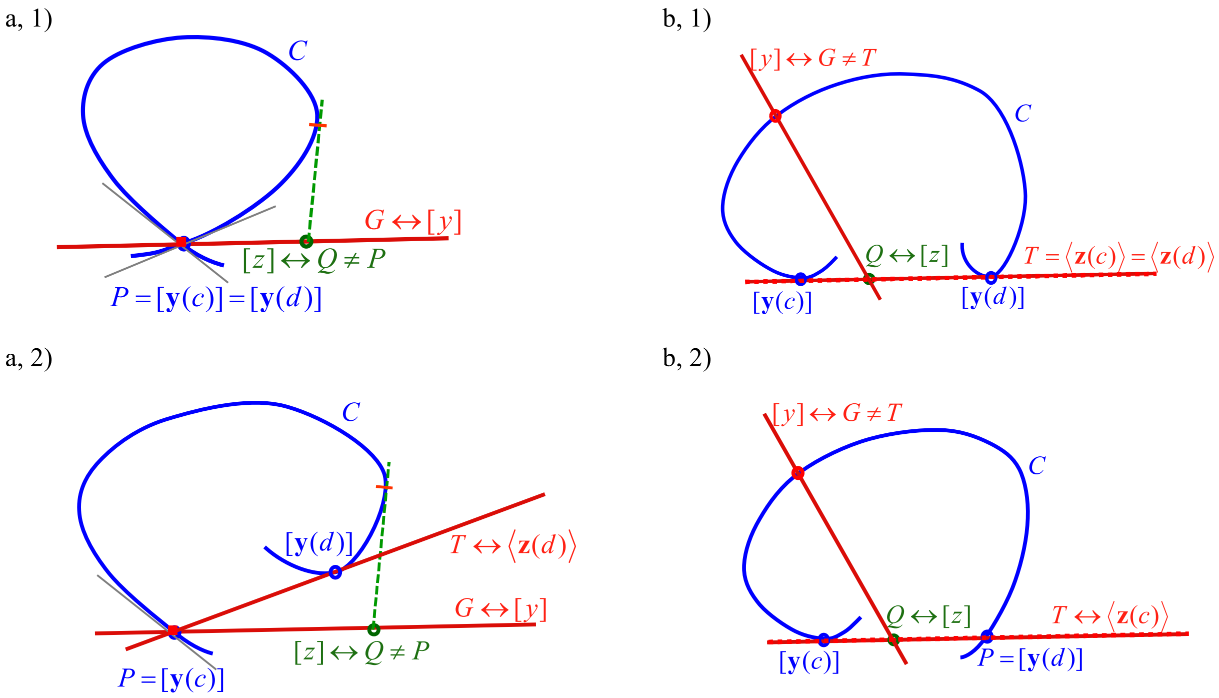


Abb. 3.13 a, 1) Darstellung des Kurvenstücks $C_{]c,d[}$ mit Kurvendoppelpunkt P bei c und d, des Punktes $Q \neq P$, der Geraden G durch P und Q hier ohne Treffpunkt mit dem Kurvenstück und einer Tangente von Q aus an das Kurvenstück

a, 2) Darstellung des Kurvenstücks $C_{]c,d[}$ mit Treffpunkt $P = [\mathbf{y}(c)]$ der Tangente $T = \langle \mathbf{z}(d) \rangle$, aber ohne Kurvendoppelpunkt bei c und d, des Punktes $Q \neq P$, der Geraden G durch P und Q, aber nicht durch $[\mathbf{y}(d)]$ und damit verschieden von der Tangente T, wobei hier G ohne Treffpunkt mit dem Kurvenstück ist, und Darstellung einer Tangente von Q aus an das Kurvenstück

b, 1) Darstellung des Kurvenstücks $C_{]c,d[}$ mit Doppeltangente T bei c und d, der Geraden $G \neq T$, des Schnittpunktes Q der Geraden T und G, von dem aus hier keine Tangente an das Kurvenstück geht, und eines Treffpunktes der Geraden G mit dem Kurvenstück

b, 2) Darstellung des Kurvenstücks $C_{]c,d[}$ mit Treffpunkt $P = [\mathbf{y}(d)]$ der Tangente $T = \langle \mathbf{z}(c) \rangle$, aber ohne Doppeltangente bei c und d, der Geraden $G \neq T$, des Schnittpunktes Q der Geraden T und G, von dem aus hier keine Tangente an das Kurvenstück geht, und eines Treffpunktes der Geraden G mit dem Kurvenstück

Satz 3.4 Existenz einer einfachen Nullstelle einer Lösung bei Nichtdiskonjugiertheit in $[c,d]$ und Nullstellenfreiheit einer orthogonalen Lösung in $]c,d[$

Es sei $c, d \in J$, $c < d$, $y \in S \setminus \{o\}$, $z \in S^+ \setminus \{o\}$,

$$B[y,z] = 0,$$

die Differentialgleichung (L) nichtdiskonjugiert in $[c,d]$ und

$$d = \eta(c)$$

der erste rechte konjugierte Punkt von c.

a) Falls y ($\in S_z$) im offenen Intervall $]c,d[$ nullstellenfrei ist und

(3.9) $$[z] \neq [\lambda u_2^+(.,c) + (1\text{-}\lambda) u_2^+(.,d)] \quad \text{für alle } \lambda \in [0,1]$$

gilt, dann hat z mindestens eine (einfache) Nullstelle in $]c,d[$.
Umgekehrt kann aus der Nullstellenfreiheit von z in $]c,d[$ auch die Existenz einer (einfachen) Nullstelle von y gefolgert werden.
Eine andere Formulierung der Aussage a) ist, dass bei gültiger Bedingung (3.9) die Produktfunktion $y{\cdot}z$ eine Nullstelle in $]c,d[$ besitzt.

b) Falls z ($\in S_y^+$) im offenen Intervall $]c,d[$ nullstellenfrei ist und

(3.10) $\qquad [y] \neq [\lambda u_2(.,c) + (1-\lambda)u_2(.,d)]$ für alle $\lambda \in [0,1]$

gilt, dann hat y mindestens eine (einfache) Nullstelle in $]c,d[$.
Umgekehrt kann aus der Nullstellenfreiheit von y in $]c,d[$ auch die Existenz einer (einfachen) Nullstelle von z gefolgert werden.
Eine andere Formulierung der Aussage b) ist, dass bei gültiger Bedingung (3.10) die Produktfunktion $y{\cdot}z$ eine Nullstelle in $]c,d[$ besitzt.

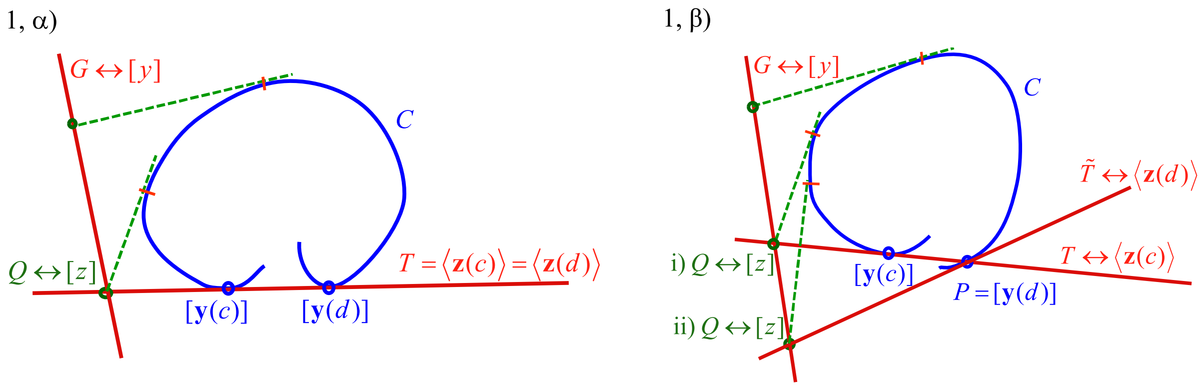


Abb. 3.14 1, α) Darstellung des Kurvenstücks $C_{]c,d[}$ mit der Doppeltangente $T = \langle \mathbf{z}(c)\rangle = \langle \mathbf{z}(d)\rangle$, der zu y gehörigen Geraden G ohne Treffpunkt mit dem Kurvenstück, des zu z gehörigen Schnittpunktes Q von G und T und einer Tangente von Q aus an das Kurvenstück.

1, β) Darstellung des Kurvenstücks $C_{]c,d[}$, wobei die Tangente $T = \langle \mathbf{z}(c)\rangle$ den Kurvenpunkt $P = [\mathbf{y}(d)]$ trifft, aber keine Doppeltangente vorliegt, der zu y und $\tilde{y} = u_2(.,d)$ gehörigen Geraden G und $\tilde{T}$ jeweils ohne Treffpunkt mit dem Kurvenstück, des zu z gehörigen Punktes Q auf G für die beiden Fälle i) $Q = T \cap G$ und ii) $Q = \tilde{T} \cap G$ und einer Tangente von Q aus an das Kurvenstück.

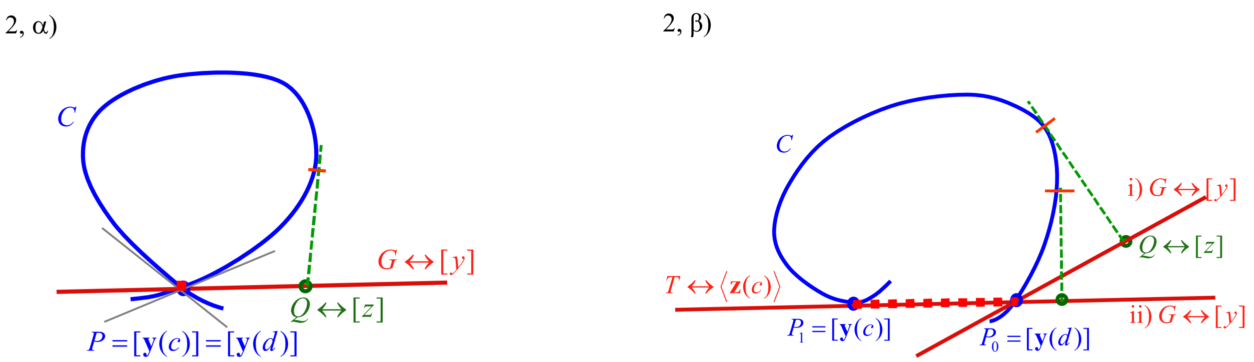


Abb. 3.15 2, α) Darstellung des Kurvenstücks $C_{]c,d[}$ mit dem Kurvendoppelpunkt $P = [\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)]$, der Geraden G durch P und ohne Treffpunkt mit dem Kurvenstück, des Punktes Q auf G mit $Q \neq P$ und einer Tangente von Q aus an das Kurvenstück

2, β) Darstellung des Kurvenstücks $C_{]c,d[}$, wobei die zum Kurvenpunkt $P_1 = [\mathbf{y}(c)]$ gehörige Tangente $T = \langle \mathbf{z}(c)\rangle$ den Kurvenpunkt $P_0 = [\mathbf{y}(d)]$ trifft, aber kein Doppelpunkt vorliegt, der Geraden G durch P_0 und ohne Treffpunkt mit dem Kurvenstück, des Punktes Q, der auf G, aber nicht auf der (rot gestrichelt gezeichneten) Verbindungsstrecke von P_1 und P_0 liegt, und einer Tangente von Q aus an das Kurvenstück

Satz 3.5 Existenz einer einfachen Nullstelle einer Lösung im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ **bei Nichtdiskonjugiertheit in** $[c,d]$ **und einer speziellen orthogonalen Lösung**

Es seien y und z nichttriviale orthogonale Lösungen von S bzw. S^+, also

$$B[y,z] = 0,$$

die Differentialgleichung (L) nichtdiskonjugiert im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ und

$$d = \eta(c)$$

der erste konjugierte Punkt von c.

a) Falls z zu den speziellen Lösungen mit

$$[z] = [z_\lambda],\ \lambda \in [0,1], \qquad (z_\lambda := \lambda u_2^+(.,c) + (1-\lambda)u_2^+(.,d))$$

gehört, dann besitzt z keine Nullstelle im offenen Intervall $]c,d[$, aber eine Nullstelle an mindestens einer Intervallgrenze c oder d und y $(\in S_z)$ eine Nullstelle x_0 im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$. Falls diese Nullstelle x_0 von y im offenen Intervall $]c,d[$ liegt, ist sie eine einfache Nullstelle von y.

b) Falls y zu den speziellen Lösungen mit

$$[y] = [y_\lambda],\ \lambda \in [0,1], \qquad (y_\lambda := \lambda u_2(.,c) + (1-\lambda)u_2(.,d))$$

gehört, dann besitzt y keine Nullstelle im offenen Intervall $]c,d[$, aber eine Nullstelle an mindestens einer Intervallgrenze c oder d und z $(\in S_y^+)$ eine Nullstelle t_0 im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$. Falls diese Nullstelle t_0 von z im offenen Intervall $]c,d[$ liegt, ist sie eine einfache Nullstelle von z.

a, α) a, β)

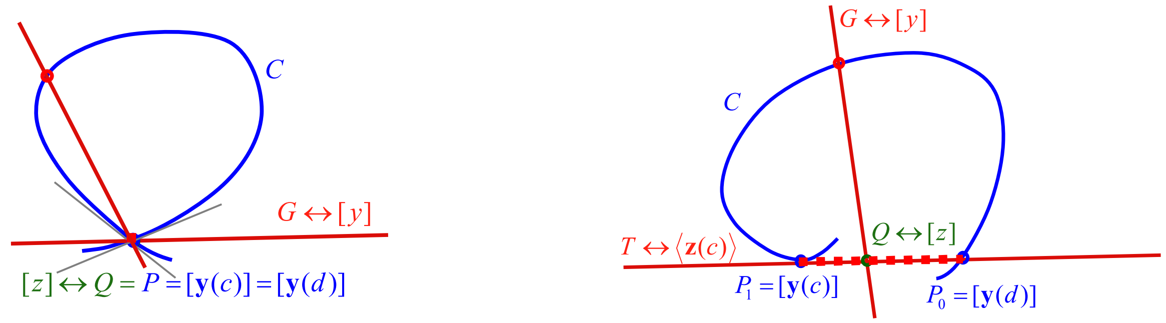


Abb. 3.16 a, α) Darstellung des Kurvenstücks $C_{[c,d]}$ mit dem Kurvendoppelpunkt $P = [\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)]$, des Punktes $Q = P$, der Geraden G durch $Q = P$ und ein Treffpunkt von G mit dem Kurvenstück

a, β) Darstellung des Kurvenstücks $C_{[c,d]}$, wobei die zum Kurvenpunkt $P_1 = [\mathbf{y}(c)]$ gehörige Tangente $T = \langle \mathbf{z}(c) \rangle$ den Kurvenpunkt $P_0 = [\mathbf{y}(d)]$ trifft, aber kein Doppelpunkt vorliegt, des Punktes Q auf der Verbindungsstrecke von P_1 und P_0, der Geraden G durch Q und ein Treffpunkt von G mit dem Kurvenstück

Zusatz zur Existenz einer einfachen Nullstelle einer Lösung im offenen Intervall $]c,d[$ **bei Nichtdiskonjugiertheit und Nullstellenfreiheit einer orthogonalen Lösung im abgeschlossenen Intervall** $[c,d]$

Es sei die Differentialgleichung (L) nichtdiskonjugiert im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$, es sei

$$d = \eta(c)$$

der erste konjugierte Punkt von c und es seien y und z nichttriviale orthogonale Lösungen von S bzw. S^+:

$$B[y,z] = 0.$$

a) Falls y nullstellenfrei im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ ist, so ist für z $(\in S_y^+)$ die Bedingung (3.9) von Satz 3.4 erfüllt und damit die Existenz einer (einfachen) Nullstelle von z im offenen Intervall $]c,d[$ gesichert.

b) Falls z nullstellenfrei im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ ist, so ist für y ($\in S_z$) die Bedingung (3.10) von Satz 3.4 erfüllt und damit die Existenz einer (einfachen) Nullstelle von y im offenen Intervall $]c,d[$ gesichert.

4 Eigenschaften der Klassen K_{I} und K_{II}

Diskonjugiertheit

Satz 4.1 Hinreichende Bedingung für die Diskonjugiertheit der Differentialgleichung im halboffenen bzw. abgeschlossenen Intervall

Es sei $c, d \in J$, $c < d$.

a) 1) Falls

$$u_2^+(.,c) > 0 \text{ in }]c,d], \text{ z. B. bei } L \in C_{\mathrm{I}}[c,d],$$

und v eine Lösung von (L) ist mit

$$v(c) = 0 \text{ und } v > 0 \text{ in }]c,d[,$$

dann hat jede von v linear unabhängige Lösung u von (L) höchstens zwei (mit ihren Vielfachheiten gezählte) Nullstellen in $[c,d]$. Insbesondere folgt, dass (L) diskonjugiert ist im halboffenen Intervall $[c,d[$.

Falls noch

$$v > 0 \text{ in }]c,d]$$

ist, folgt die Diskonjugiertheit von (L) im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$.

2) Falls

$$u_2^+(.,d) > 0 \text{ in } [c,d[, \text{ z. B. bei } L \in C_{\mathrm{II}}[c,d],$$

und v eine Lösung von (L) ist mit

$$v(d) = 0 \text{ und } v > 0 \text{ in }]c,d[,$$

dann hat jede von v linear unabhängige Lösung u von (L) höchstens zwei (mit ihren Vielfachheiten gezählte) Nullstellen in $[c,d]$. Insbesondere folgt, dass (L) diskonjugiert ist im halboffenen Intervall $]c,d]$.

Falls noch

$$v > 0 \text{ in } [c,d[$$

ist, folgt die Diskonjugiertheit von (L) im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$.

b) 1) Falls

$$u_2(.,c) > 0 \text{ in }]c,d], \text{ z. B. bei } L \in C_{\mathrm{II}}[c,d] \text{ bzw. } L^+ \in C_{\mathrm{I}}^+[c,d],$$

und z eine Lösung von (L^+) ist mit

$$z(c) = 0 \text{ und } z > 0 \text{ in }]c,d[,$$

dann hat jede von z linear unabhängige Lösung w von (L^+) höchstens zwei (mit ihren Vielfachheiten gezählte) Nullstellen in $[c,d]$. Insbesondere folgt, dass (L^+) diskonjugiert ist im halboffenen Intervall $[c,d[$.

Falls noch

$$z > 0 \text{ in }]c,d]$$

ist, folgt die Diskonjugiertheit von (L^+) im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$.

2) Falls

$$u_2(.,d) > 0 \text{ in } [c,d[, \text{ z. B. bei } L \in C_{\mathrm{I}}[c,d] \text{ bzw. } L^+ \in C_{\mathrm{II}}^+[c,d],$$

und z eine Lösung von (L^+) ist mit

$$z(d) = 0 \text{ und } z > 0 \text{ in }]c,d[,$$

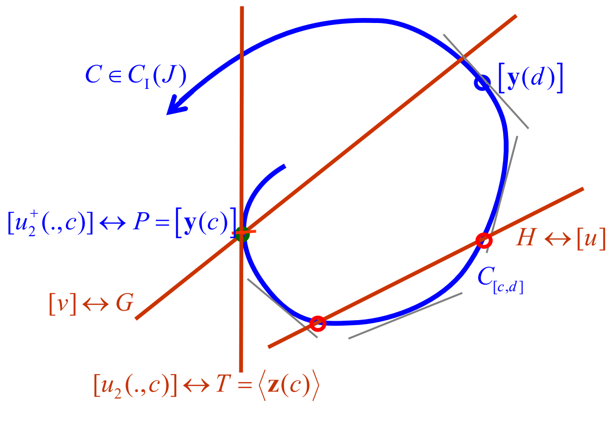
dann hat jede von z linear unabhängige Lösung w von (L^+) höchstens zwei (mit ihren Vielfachheiten gezählte) Nullstellen in $[c,d]$. Insbesondere folgt, dass (L) diskonjugiert ist im halboffenen Intervall $]c,d]$.

Falls noch

$$z > 0 \text{ in } [c,d[$$

ist, folgt die Diskonjugiertheit von (L) im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$.

a, 1)



b, 1)

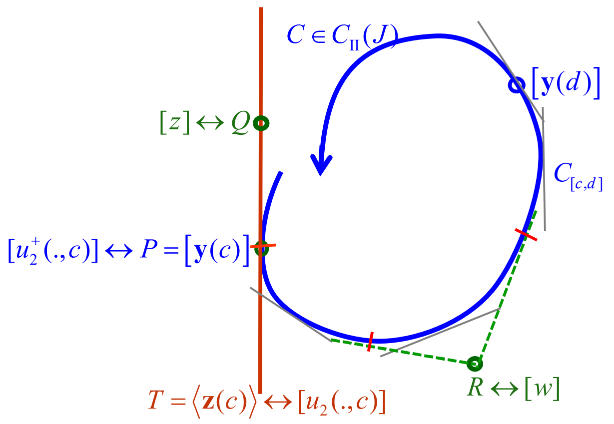


Abb. 4.1 a, 1) Das abgeschlossene Kurvenstücks $C_{[c,d]}$, der zur Lösung $u_2^+(.,c) \in S^+$ gehörige Kurvenpunkt $P = [\mathbf{y}(c)]$ ohne weitere Tangente an das Kurvenstück (außer $\langle \mathbf{z}(c) \rangle$), die zur Lösung $v \in S$ gehörige Gerade G durch den Kurvenpunkt $P = [\mathbf{y}(c)]$ und ohne weiteren Treffpunkt mit dem Kurvenstück, eine beliebige Gerade H mit höchstens zwei Treffpunkten mit dem Kurvenstück

b, 1) Das abgeschlossene Kurvenstücks $C_{[c,d]}$, die zur Lösung $u_2(.,c) \in S$ gehörige Tangente $T = \langle \mathbf{z}(c) \rangle$ des Kurvenpunkts $P = [\mathbf{y}(c)]$ ohne weiteren Treffpunkt mit dem Kurvenstück, der zur Lösung $z \in S^+$ gehörige Punkt Q auf der Tangente $T = \langle \mathbf{z}(c) \rangle$ und ohne weitere Tangente an das Kurvenstück, ein beliebiger Punkt R mit höchstens zwei Tangenten an das Kurvenstück

Folgerung: Hinreichende Bedingung für die Diskonjugiertheit der Differentialgleichung im abgeschlossenen Intervall

(4.1) $u_2^+(.,c) > 0 \wedge u_2(.,c) > 0$ in $]c,d]$ $\Rightarrow$ (L) diskonjugiert in $[c,d]$.

Satz 4.2 Charakterisierungen der Diskonjugiertheit der Differentialgleichung mittels der Klassen C_{I}, C_{II}, C_{I}^+ C_{II}^+ und der Positivität spezieller Lösungen

1) Für ein beliebiges Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ (mit den Randpunkten a, $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$) sind die folgenden Aussagen alle zueinander äquivalent:

α) $L \in D(J)$
β) $L \in C_{\mathrm{I}}(J) \cap C_{\mathrm{II}}(J)$
γ) $L^+ \in C_{\mathrm{I}}^+(J) \cap C_{\mathrm{II}}^+(J)$
δ) $L^+ \in D^+(J)$

2) Im Fall $a \in J$ ist $L \in D(J)$ äquivalent zur Bedingung

ε) $u_2^+(.,a) > 0 \wedge u_2(.,a) > 0$ in $J \setminus \{a\}$.

Im Fall $b \in J$ ist $L \in D(J)$ äquivalent zur Bedingung

φ) $u_2^+(.,b) > 0 \wedge u_2(.,b) > 0$ in $J \setminus \{b\}$.

Satz 4.3 Äquivalenz der Diskonjugiertheit im offenen Intervall mit der Diskonjugiertheit in den halboffenen Intervallen

Ist c, $d \in J$ und die Differentialgleichung

(L) diskonjugiert im offenen Intervall $]c,d[$, dann ist auch

(L) diskonjugiert jeweils in den halboffenen Intervallen $[c,d[$ und $]c,d]$.

Satz 4.4 Äquivalenz der Klassenzugehörigkeit $L \in C_{\mathrm{I}}$, $L \in C_{\mathrm{II}}$, $L \in D$ im abgeschlossenen Intervall zur entsprechenden Klassenzugehörigkeit in einem umfassenderen Intervall

Es sei c, $d \in J$ und $c < d$.

1) Ist $L \in C_{\mathrm{I}}[c,d]$, dann gilt mit einem $\varepsilon > 0$ auch $L \in C_{\mathrm{I}}$ in $[c-\varepsilon,d+\varepsilon] \cap J$.

2) Ist $L \in C_{\mathrm{II}}[c,d]$, dann gilt mit einem $\varepsilon > 0$ auch $L \in C_{\mathrm{II}}$ in $[c-\varepsilon,d+\varepsilon] \cap J$.

3) Ist (L) in $[c,d]$ diskonjugiert, dann ist mit einem $\varepsilon > 0$ (L) auch diskonjugiert in $[c-\varepsilon,d+\varepsilon] \cap J$.

Satz 4.5 Charakterisierungen der Diskonjugiertheit im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ mittels der Klassen K_{I}, K_{II}, K_{I}^{+}, K_{II}^{+} und der Positivität spezieller Lösungen

Es sei c, $d \in J$ und $c < d$.

a) Die Differentialgleichungen (L) und (L^+) sind genau dann in $[c,d]$ diskonjugiert, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
   1) $L \in K_{\mathrm{I}}[c,d]$ und $u_2(.,c) > 0$ in $]c,d]$;
   2) $L \in K_{\mathrm{II}}[c,d]$ und $u_2(.,d) > 0$ in $[c,d[$.

b) Die Differentialgleichungen (L) und (L^+) sind genau dann in $[c,d]$ diskonjugiert, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
   1) $L^+ \in K_{\mathrm{I}}^{+}[c,d]$ und $u_2^{+}(.,c) > 0$ in $]c,d]$;
   2) $L^+ \in K_{\mathrm{II}}^{+}[c,d]$ und $u_2^{+}(.,d) > 0$ in $[c,d[$.

Charakterisierung der nichtoszillatorischen Lösungen als die nullstellenfreien Lösungen

Satz 4.6 Hinreichende Bedingung für die Übereinstimmung der nichtoszillatorischen Lösungen mit den nullstellenfreien Lösungen

a) Falls $L \in K_{\mathrm{I}}]a,b[$ (bzw. $L \in K_{\mathrm{II}}]a,b[$) und (L) oszillatorisch in $J = [a,b[$ (bzw. $J =]a,b]$) ist, stimmt die Menge N der in J nichtoszillatorischen Lösungen von (L) überein mit der Menge M^{0} der in J nullstellenfreien Lösungen von (L):
   $$N = M^{0}.$$

b) Falls $L^+ \in K_{\mathrm{I}}^{+}]a,b[$ (bzw. $L^+ \in K_{\mathrm{II}}^{+}]a,b[$) und ($\mathrm{L}^+$) oszillatorisch in $J = [a,b[$ (bzw. $J =]a,b]$) ist, stimmt die Menge N^+ der in J nichtoszillatorischen Lösungen von (L^+) überein mit der Menge M^{0+} der in J nullstellenfreien Lösungen von (L^+):
   $$N^+ = M^{0+}.$$

Oszillation von (L) und (L^+)

Satz 4.7 Hinreichende Bedingung für die Existenz von vorzeichenwechselfreien Lösungen, stark oszillatorischen zweidimensionalen Unterräumen und die Äquivalenz der Oszillation von (L) und (L^+)

1) Gilt $L \in K_{\mathrm{I}}]a,b[\cup K_{\mathrm{II}}]a,b[$, dann gibt es Lösungen $y_0 \in S \setminus \{o\}$ und $z_0 \in S^+ \setminus \{o\}$ mit $y_0 \geq 0$, $z_0 \geq 0$ in J.

2) Gilt $L \in K_{\mathrm{I}}]a,b[\cup K_{\mathrm{II}}]a,b[$ und ist (L) oder (L^+) oszillatorisch in J, dann sind die beiden zweidimensionalen Unterräume $S^+_{y_0}$ ($\subseteq S^+$) und S_{z_0} ($\subseteq S$) ($y_0 \geq 0$, $z_0 \geq 0$ in J) in J stark oszillatorisch.

3) Gilt $L \in K_{\mathrm{I}}]a,b[\cup K_{\mathrm{II}}]a,b[$, dann ist die Differentialgleichung (L) genau dann in J oszillatorisch, wenn die Differentialgleichung (L^+) in J oszillatorisch ist.

Diskonjugiertheit an den Intervallgrenzen

Satz 4.8 Hinreichende Bedingung für die Äquivalenz der Nichtoszillation mit der Diskonjugiertheit an den Intervallgrenzen

Es sei $L \in K_{\mathrm{I}}]a,b[\cup K_{\mathrm{II}}]a,b[$. Falls (L) oder ($L^+$) nichtoszillatorisch in J ist, dann gibt es Stellen c, $d \in\ ]a,b[$, sodass (L) und (L^+) diskonjugiert sind in $[a,c] \cap J$ und in $[d,b] \cap J$.

Folgerung: Hinreichende Bedingung für die Oszillation

Ist $L \in K_{\mathrm{I}}]a,b[\cup K_{\mathrm{II}}]a,b[$ und (L) in jedem Intervall $[d,b] \cap J$ nichtdiskonjugiert, dann sind (L) und (L^+) in $[a,b[$ oszillatorisch.

Existenz von nullstellenfreien Lösungen

Satz 4.9 Hinreichende Bedingung für die Existenz eines nullstellenfreien Fundamentalsystems

Ist $L \in K_{\mathrm{I}}]a,b[\cup K_{\mathrm{II}}]a,b[$ und (L) oder (L^+) nichtoszillatorisch in J, dann besitzen (L) und (L^+) jeweils ein Fundamentalsystem aus drei in J nullstellenfreien Lösungen.

Anmerkung: Da im abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ (L) stets nichtoszillatorisch ist, folgt die Existenz eines in $[a,b]$ nullstellenfreien Fundamentalsystems allein schon aus der Voraussetzung $L \in K_{\mathrm{I}}]a,b[\cup K_{\mathrm{II}}]a,b[$.

Analytischer Beweis der geometrischen Charakterisierung der Klasse $K_{\mathrm{I}} \cup K_{\mathrm{II}}$ durch die Spiralform der Integralkurve

Der nachfolgende Hilfssatz 4.4 gibt eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer Nullstelle bestimmter Lösungen im Innern eines Nichtdiskonjugiertheitsintervalls und kommt bei den Beweisen von Satz 3.4, Hilfssatz 4.6 und Satz 4.10 (hier siebenmal) zum Einsatz.

Hilfssatz 4.4 Hinreichende Bedingung für die Existenz einer Nullstelle bestimmter Lösungen im offenen Intervall $]c,d[$

Es sei $c, d, t_0 \in J$, $c < d$.

a) 1) Ist $t_0 < c$, $L \in K_{\mathrm{I}}]t_0,d[$, $u_2(d,c) = 0$, $y \in S \setminus \{o\}$ mit

$$y(t_0) = 0$$

und im Fall eines Doppelpunkts (3.3) an den Stellen t_0, c noch

$$[y] \neq [u_2(.,c)],$$

dann hat y eine Nullstelle in $]c,d[$.

Die Behauptung gilt auch für $t_0 = c$ mit $y(c) = 0$ und $[y] \neq [u_2(.,c)]$, wenn für die Stellen c und d kein Doppelpunkt ohne Doppeltangente (3.7) vorliegt.

2) Ist $t_0 > d$, $L \in K_{\mathrm{II}}]c,t_0[$, $u_2(c,d) = 0$, $y \in S \setminus \{o\}$ mit

$$y(t_0) = 0$$

und im Fall eines Doppelpunkts (3.3) an den Stellen d, t_0 noch

$$[y] \neq [u_2(.,d)],$$

dann hat y eine Nullstelle in $]c,d[$.

Die Behauptung gilt auch für $t_0 = d$ mit $y(d) = 0$ und $[y] \neq [u_2(.,d)]$, wenn für die Stellen c und d kein Doppelpunkt ohne Doppeltangente (3.7) vorliegt.

b) 1) Ist $t_0 > d$, $L \in K_{\mathrm{I}}]c,t_0[$ ($\Leftrightarrow L^+ \in K_{\mathrm{II}}^+]c,t_0[$), $u_2^+(c,d) = 0$, $z \in S^+ \setminus \{o\}$ mit

$$z(t_0) = 0$$

und im Fall einer Doppeltangente (3.4) an den Stellen d, t_0 noch

$$[z] \neq [u_2^+(.,d)],$$

dann hat z eine Nullstelle in $]c,d[$.

Die Behauptung gilt auch für $t_0 = d$ mit $z(d) = 0$ und $[z] \neq [u_2^+(.,d)]$, wenn für die Stellen c und d keine Doppeltangente ohne Doppelpunkt (3.8) vorliegt.

2) Ist $t_0 < c$, $L \in K_{\mathrm{II}}]t_0,d[$ ($\Leftrightarrow L^+ \in K_{\mathrm{I}}^+]t_0,d[$), $u_2^+(d,c) = 0$, $z \in S \setminus \{o\}$ mit

$$z(t_0) = 0$$

und im Fall einer Doppeltangente (3.4) an den Stellen t_0, c noch

$$[z] \neq [u_2^+(.,c)],$$

dann hat z eine Nullstelle in $]c,d[$.

Die Behauptung gilt auch für $t_0 = c$ mit $z(c) = 0$ und $[z] \neq [u_2^+(.,c)]$, wenn für die Stellen c und d keine Doppeltangente ohne Doppelpunkt (3.8) vorliegt.

I) $L \in K_{\mathrm{I}}$ II) $L \in K_{\mathrm{II}}$

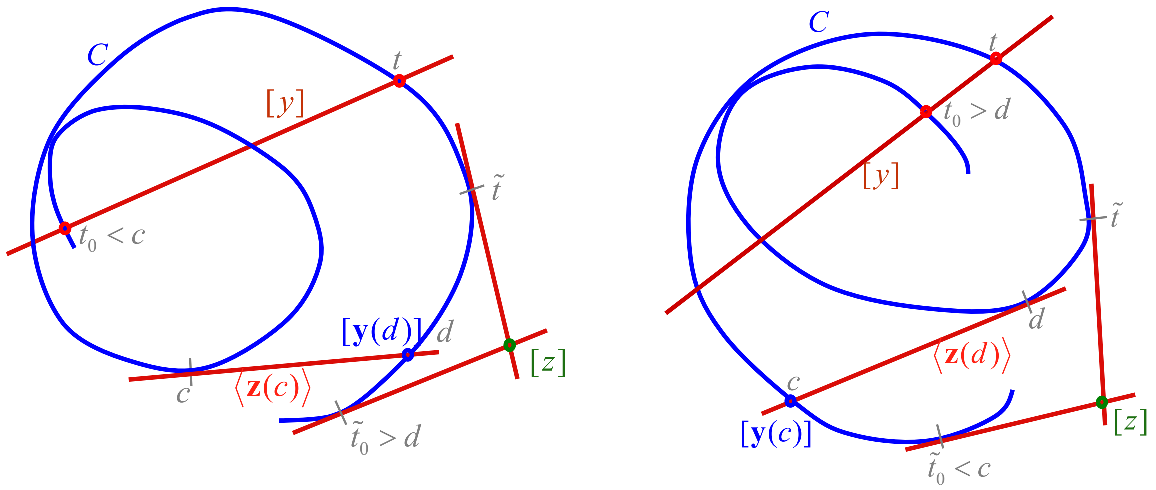


Abb. 4.2 Ein Kurvenstück der Integralkurve C mit Spiralform bei möglicher Selbstberührung, im Fall I $L \in K_{\mathrm{I}}$ nach außen verlaufend und im Fall II $L \in K_{\mathrm{II}}$ nach innen verlaufend. Im Fall I liege ein Treffpunkt $[\mathbf{y}(d)]$ der Tangente $\langle \mathbf{z}(c) \rangle$ vor, im Fall II liege der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(c)]$ auf der Tangente $\langle \mathbf{z}(d) \rangle$. Jede Gerade durch den Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(t_0)]$ trifft dann auch das Kurvenstück $C_{]c,d[}$ und jeder Punkt auf der Tangente $\langle \mathbf{z}(\tilde{t}_0) \rangle$ des Kurvenpunkts $\left[\mathbf{y}(\tilde{t}_0)\right]$ liegt dann auch auf einer Tangente an das Kurvenstück $C_{]c,d[}$

Definition von Hilfspunkten als Endpunkte von maximalen Intervallen bestimmter Klassenzugehörigkeiten der Differentialgleichungen (L) **und** (L^+) **in** J

1) Für $c \in J$ sei
$$r_{12}(c) = \inf R_{12}(c) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$
das (eigentliche oder uneigentliche) Infimum der Menge R_{12}(c) aller $t \in J$, $t > c$, für welche die Lösung $u_2(.,t)$ eine Nullstelle $x \in [c,t[$ besitzt bzw. $L \notin C_{\mathrm{I}}$ in $[c,t]$ ist (siehe Azbelev, Caljuk (1964), S. 233, 237):
$$\begin{aligned} r_{12}(c) &= \inf \{t \in J : t > c,\ u_2(x,t) = 0 \text{ für ein } x = x(t) \in [c,t[\} \\ &= \inf \{t \in J : t > c,\ L \notin C_{\mathrm{I}}[c,t]\}. \end{aligned}$$
Der Fall des uneigentlichen Infimums $r_{12}(c) = -\infty$ kann nicht auftreten, da bei nichtleerer Menge R_{12}(c) diese stets durch die untere Schranke c nach unten beschränkt ist und somit $r_{12}(c)$ in $[c,+\infty[\subseteq \mathbb{R}$ liegt.
Der Fall des uneigentlichen Infimums $r_{12}(c) = +\infty$ für die leere Menge $R_{12}(c) = \emptyset$ bedeutet, dass die Differentialgleichung (L) in $[c,b] \cap J$ zur Klasse C_{I} gehört.
Der Fall eines eigentlichen Infimums $r_{12}(c) \in \mathbb{R}$ bzw. $-\infty < r_{12}(c) < +\infty$ bedeutet $R_{12}(c) \neq \emptyset$ und nach dem Zusatz zu Satz 2.4 (Diskonjugiertheit in $[c-\delta,c+\delta]$ für ein $\delta > 0$)
$$r_{12}(c) \in [c+\delta,b] \cap J \text{ für ein } \delta > 0.$$
In diesem Fall ist die Stelle $r_{12}(c)$ auch das Supremum aller $d \in J$, $d > c$, mit $L \in C_{\mathrm{I}}[c,d]$ und das halboffene Intervall $[c,r_{12}(c)[$ das maximale C_{I}-Intervall der Form $[c,d[$, $d \in]c,b]$ (siehe Azbelev, Caljuk (1964), S. 233).

2) Für $c \in J$ sei
$$r_{21}(c) = \inf R_{21}(c) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$
das Infimum der Menge $R_{21}(c)$ aller $t \in J$, $t > c$, welche jeweils eine Nullstelle einer Lösung $u_2(.,x)$ mit $x \in [c,t[$ sind bzw. für welche $L \notin C_{\mathrm{II}}$ in $[c,t]$ ist (siehe Azbelev, Caljuk (1964), S. 233, 237):
$$\begin{aligned} r_{21}(c) &= \inf \{t \in J : t > c,\ u_2(t,x) = 0 \text{ für ein } x \in [c,t[\} \\ &= \inf \{t \in J : t > c,\ L \notin C_{\mathrm{II}}[c,t]\}. \end{aligned}$$

Der Fall $r_{21}(c) = +\infty$ bei leerer Menge $R_{21}(c) = \emptyset$ bedeutet, dass die Differentialgleichung (L) in $[c,b] \cap J$ zur Klasse C_{II} gehört.
Der Fall $r_{12}(c) \in \mathbb{R}$ bedeutet $R_{21}(c) \neq \emptyset$ und nach dem Zusatz zu Satz 2.4

$$r_{21}(c) \in [c+\delta,b] \cap J \text{ für ein } \delta > 0.$$

In diesem Fall ist die Stelle $r_{21}(c)$ auch das Supremum aller $d \in J$, $d > c$, mit $L \in C_{\mathrm{II}}[c,d]$ und das halboffene Intervall $[c,r_{21}(c)[$ das maximale C_{II}-Intervall der Form $[c,d[$, $d \in]c,b]$ (siehe Azbelev, Caljuk (1964), S. 233).

3) Für $c \in J$ sei

$$r_{22}(c) = \inf R_{22}(c) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

das Infimum der Menge R_{22}(c) aller $t \in J$, $t > c$, für welche die Lösung $u_2(.,t)$ eine zweifache Nullstelle $x \in [c,t[$ besitzt (siehe Azbelev, Caljuk (1964), S. 233, 237):

$$r_{22}(c) = \inf \{t \in J : t > c,\ u_2(x,t) = u_2'(x,t) = 0 \text{ für ein } x \in [c,t[\}.$$

Der Fall $r_{22}(c) = +\infty$ für die leere Menge $R_{22}(c) = \emptyset$ bedeutet, dass die Differentialgleichung (L) in $[c,b] \cap J$ keine nichttriviale Lösung mit zwei doppelten Nullstellen besitzt.
Der Fall $r_{22}(c) \in \mathbb{R}$ bedeutet $R_{22}(c) \neq \emptyset$ und nach dem Zusatz zu Satz 2.4 (Diskonjugiertheit in $[c-\delta,c+\delta]$ für ein $\delta > 0$)

$$r_{22}(c) \in [c+\delta,b] \cap J \text{ für ein } \delta > 0.$$

In diesem Fall ist die Stelle $r_{22}(c)$ auch das Supremum aller $d \in J$, $d > c$, für die im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ keine zwei doppelten Nullstellen einer nichttrivialen Lösung von (L) auftreten. Weiter ist das halboffene Intervall $[c,r_{22}(c)[$ das maximale Intervall der Form $[c,d[$, $d \in]c,b]$, in dem keine zwei doppelten Nullstellen einer nichttrivialen Lösung von (L) auftreten (siehe Azbelev, Caljuk (1964), S. 233).

4) Für $c \in J$ sei

$$k_{12}(c) = \inf K_{12}(c) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

das Infimum der Menge $K_{12}(c)$ aller $t \in J$, $t > c$, für welche die Lösung $u_2(.,t)$ eine (genau) einfache Nullstelle $x \in [c,t[$ besitzt bzw. $L \notin K_{\mathrm{I}}$ in $[c,t]$ ist:

$$\begin{aligned} k_{12}(c) &= \inf \{t \in J : t > c,\ u_2(x,t) = 0 \neq u_2'(x,t) \text{ für ein } x \in [c,t[\} \\ &= \inf \{t \in J : t > c,\ L \notin K_{\mathrm{I}}[c,t]\}. \end{aligned}$$

Der Fall $k_{12}(c) = +\infty$ für die leere Menge $K_{12}(c) = \emptyset$ bedeutet, dass die Differentialgleichung (L) in $[c,b] \cap J$ zur Klasse K_{I} gehört.
Der Fall $k_{12}(c) \in \mathbb{R}$ bedeutet $K_{12}(c) \neq \emptyset$ und nach dem Zusatz zu Satz 2.4

$$k_{12}(c) \in [c+\delta,b] \cap J \text{ für ein } \delta > 0.$$

In diesem Fall ist $k_{12}(c)$ auch das Supremum aller $d \in J$, $d > c$, mit $L \in K_{\mathrm{I}}[c,d]$ und $[c,k_{12}(c)[$ das maximale K_{I}-Intervall der Form $[c,d[$, $d \in]c,b]$.

5) Für $c \in J$ sei

$$k_{21}(c) = \inf K_{21}(c) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

das Infimum der Menge $K_{21}(c)$ aller $t \in J$, $t > c$, welche jeweils eine (genau) einfache Nullstelle einer Lösung $u_2(.,x)$ mit $x \in [c,t[$ sind bzw. für welche $L \notin K_{\mathrm{II}}$ in $[c,t]$ ist:

$$\begin{aligned} k_{21}(c) &= \inf \{t \in J : t > c,\ u_2(t,x) = 0 \neq u_2'(t,x) \text{ für ein } x \in [c,t[\} \\ &= \inf \{t \in J : t > c,\ L \notin K_{\mathrm{II}}[c,t]\}. \end{aligned}$$

Der Fall $k_{21}(c) = +\infty$ für die leere Menge K_{21}(c) $= \emptyset$ bedeutet, dass die Differentialgleichung (L) in $[c,b] \cap J$ zur Klasse K_{II} gehört.
Der Fall $k_{21}(c) \in \mathbb{R}$ bedeutet K_{21}(c) $\neq \emptyset$ und nach dem Zusatz zu Satz 2.4

$$k_{21}(c) \in [c+\delta,b] \cap J \text{ für ein } \delta > 0.$$

In diesem Fall ist $k_{21}(c)$ auch das Supremum aller $d \in J$, $d > c$, mit $L \in K_{\mathrm{II}}[c,d]$ und $[c,k_{21}(c)[$ das maximale K_{II}-Intervall der Form $[c,d[$, $d \in]c,b]$.

6) Für $c \in J$ sei

$$\eta(c) = \eta_+(c) = \inf N_+(c) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

das Infimum der Menge $N_+(c)$ aller $t \in J$, $t > c$, für welche (L) nichtdiskonjugiert in $[c,t]$ ist (siehe Barrett (1969), S. 441, für die Dgl. (E_3)):

$$\eta(c) = \inf \{t \in J : t > c, \exists\, y \in S \setminus \{o\} \text{ mit mindestens 3 Nullstellen in } [c,t]\}$$
$$= \inf \{t \in J : t > c, \text{(L) nichtdiskonjugiert in } [c,t]\}.$$

Der Fall $\eta(c) = +\infty$ für die leere Menge $N_+(c) = \emptyset$ bedeutet, dass die Differentialgleichung (L) in $[c,b] \cap J$ diskonjugiert ist.

Der Fall $\eta(c) \in \mathbb{R}$, d. h. $\eta(c) \in J$, bedeutet $N_+(c) \neq \emptyset$ und nach dem Zusatz zu Satz 2.4

$$\eta(c) \in [c+\delta,b] \cap J \text{ für ein } \delta > 0.$$

In diesem Fall ist $\eta(c)$ auch das Supremum aller $d \in J$, $d > c$, für die (L) in $[c,d]$ diskonjugiert ist und $[c,\eta(c)[$ das maximale Diskonjugiertheitsintervall der Form $[c,d[$, $d \in\,]c,b]$. Es heißt $\eta(c)$ der **erste rechte konjugierte Punkt** von c.

7) In analoger Weise wird für $c \in J$ der **erste linke konjugierte Punkt** $\eta_-(c)$ definiert: Es sei

$$\eta_-(c) = \sup N_-(c) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

das Supremum der Menge $N_-(c)$ aller $t \in J$, $t < c$, für welche (L) nichtdiskonjugiert in $[t,c]$ ist.

Der Fall $\eta_-(c) = -\infty$ für die leere Menge $N_-(c) = \emptyset$ bedeutet, dass die Differentialgleichung (L) in $[a,c] \cap J$ diskonjugiert ist.

Der Fall $\eta_-(c) \in \mathbb{R}$, d. h. $\eta_-(c) \in J$, bedeutet $N_-(c) \neq \emptyset$ und nach dem Zusatz zu Satz 2.4

$$\eta_-(c) \in [a,c-\delta] \cap J \text{ für ein } \delta > 0.$$

In diesem Fall ist $\eta_-(c)$ auch das Infimum aller $d \in J$, $d < c$, für die (L) in $[d,c]$ diskonjugiert ist und $]\eta_-(c),c]$ das maximale Diskonjugiertheitsintervall der Form $]d,c]$, $d \in [a,c[$.

8) Sei $c \in J$ und das Indexpaar $(i,j) \in \{(1,2), (2,1), (2,2)\}$. Falls es ein $d \in J$, $d > c$, gibt, sodass für eine nichttriviale Lösung y von (L) c eine mindestens i-fache und d eine mindestens j-fache Nullstelle ist, dann sei $z_{ij}(c)$ das kleinste derartige d (siehe Barrett (1969), S. 441, für die Dgl. (E_3)): Ist also $Z_{ij}(c)$ die Menge aller $d \in J$, $d > c$, für welche jeweils ein $y \in S \setminus \{o\}$ existiert mit c als zumindest i-facher und d als zumindest j-facher Nullstelle und ist $Z_{ij}(c) \neq \emptyset$, dann ist

$$z_{ij}(c) := \inf Z_{ij}(c)$$
$$= \inf \{d \in J : d > c,\ c\ i\text{-fache und } d\ j\text{-fache Nullstelle eines } y \in S \setminus \{o\}\}$$
$$= \min Z_{ij}(c) \in\,]c,b] \cap J.$$

Im Fall $Z_{ij}(c) = \emptyset$ wird $z_{ij}(c) = +\infty$ gesetzt.

9) Analog sind für die Differentialgleichung (L^+) die Größen $r^+_{ij}(c)$, $k^+_{ij}(c)$ und $z^+_{ij}(c)$ definiert.

Wechselbeziehungen für die Hilfspunkte

(4.2) $$r^+_{ij}(c) = r_{ji}(c) \text{ für } \{i,j\} = \{1,2\} \text{ (und nicht für } (i,j) = (2,2)),\ c \in J.$$

(4.3) $$z^+_{ij}(c) = z_{ji}(c) \text{ für } \{i,j\} = \{1,2\} \text{ (und nicht für } (i,j) = (2,2)),\ c \in J.$$

(4.4) $$\eta(c) \leq r_{ij}(c) \leq r_{22}(c),$$
$$r_{ij}(c) \leq k_{ij}(c),$$
$$r_{ij}(c) \leq z_{ij}(c) \leq z_{22}(c) \quad \text{für } \{i,j\} = \{1,2\},\ c \in J.$$

(4.5) $$k^+_{12}(c) \leq k_{21}(c),$$
$$k_{12}(c) \leq k^+_{21}(c) \quad \text{für } c \in J.$$

(4.6) $\eta_-(c) < c < \eta(c)$.

(4.7) $\eta(c) = z_+(c) = \min\,\{z_{21}(c),z_{12}(c)\} = \min N_+(c)$;
$\eta_-(c) = z_-(c) = \max N_-(c)$.

(4.8) $\eta(c) = \min\,\{r_{21}(c),r_{12}(c)\}$.

(4.9) $\eta(c) = \min\,\{z_{ij}(c),r_{ji}(c)\}$ für $\{i,j\} = \{1,2\}$, $c \in J$.

(4.10) $z_{21}(c),\ z_{21}^{+}(c) \le \min\,\{z_{22}(c), z_{22}^{+}(c)\}$ für $c \in J$.

(4.11) $r_{ij}(c) = \min R_{ij}(c)$
$= \inf\,\{z_{ij}(x) : x \ge c, x \in J\}$
$= \min\,\{z_{ij}(x) : x \ge c, x \in J\}$
$= z_{ij}(\xi_{ij})$ mit einem $\xi_{ij} = \xi_{ij}(c) \in [c,r_{ij}(c)[$ $(i + j \ge 3,\ c \in J)$.

(4.12) $k_{ij}(c) \in R_{ij}(c)$ für $(i,j) = (1,2), (2,1)$, $c \in J$, d. h.
für $(i,j) = (1,2)$: $u_2(\zeta_{12},k_{12}(c)) = 0$ für ein $\zeta_{12} = \zeta_{12}(c) \in [c,k_{12}(c)[$,
für $(i,j) = (2,1)$: $u_2(k_{21}(c),\zeta_{21}) = 0$ für ein $\zeta_{21} = \zeta_{21}(c) \in [c,k_{21}(c)[$.

Es werden nachfolgend die **drei möglichen Fälle** für die gegenseitige Lage der minimalen Nullstellen $z_{21}(c)$, $z_{12}(c) = z_{21}^{+}(c) \in J$ von $u_2(.,c)$ bzw. $u_2^{+}(.,c)$ unter der Voraussetzung $Z_{ij}(c) \neq \emptyset$ für $i + j = 3$ näher untersucht und dabei die Lage der C_{I}- und C_{II}-Stellen $r_{ij}(c)$ näher bestimmt:

1) $z_{21}(c) = z_{21}^{+}(c)$;

2) $z_{21}(c) < z_{21}^{+}(c)$;

3) $z_{21}(c) > z_{21}^{+}(c)$.

(4.13) $z_{21}(c) = z_{21}^{+}(c) \Rightarrow \eta(c) = r_{21}(c) = z_{21}(c) = r_{12}(c) = z_{12}(c)$,
$\eta(c) = \min\,\{z_{22}(c), z_{22}^{+}(c)\}$ für $c \in J$.

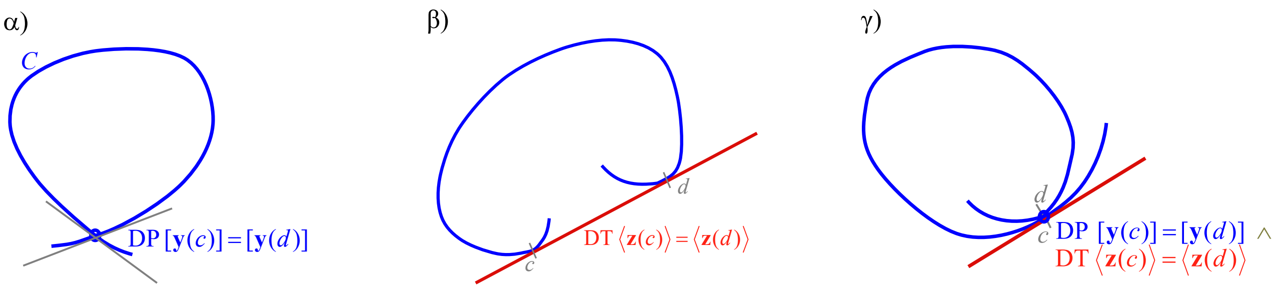


Abb. 4.3 Darstellung der im Fall 1) auftretenden Unterfälle: α) $[\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)]$ Doppelpunkt (DP), β) $\langle \mathbf{z}(c)\rangle = \langle \mathbf{z}(d)\rangle$ Doppeltangente (DT) und γ) Doppelpunkt mit Doppeltangente der Integralkurve C

$$(4.14)\qquad z_{21}(c) < z_{21}^{+}(c) \;\Rightarrow\; \begin{aligned}&\eta(c) = r_{21}(c) = z_{21}(c),\\ &r_{12}(c) \in \,]z_{21}(c), z_{21}^{+}(c)\,[,\\ &r_{12}(c) = z_{22}(\xi)\ \text{ mit einem } \xi \in \,]c, r_{12}(c)[\qquad (c \in J).\end{aligned}$$

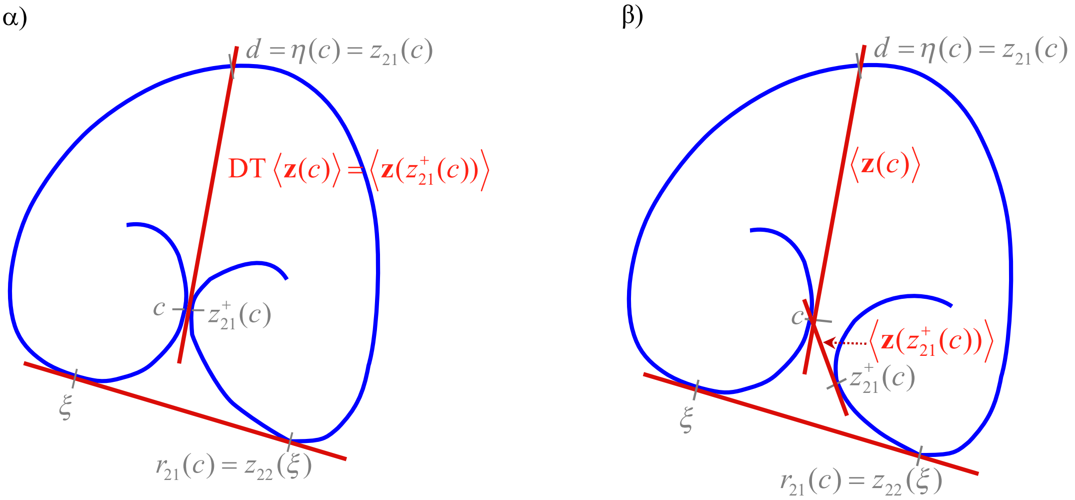


Abb. 4.4 Darstellung der im Fall 2) auftretenden Unterfälle: α) $\langle \mathbf{z}(c)\rangle = \langle \mathbf{z}(z_{21}^{+}(c))\rangle$ Doppeltangente (DT), β) $\langle \mathbf{z}(c)\rangle \neq \langle \mathbf{z}(z_{21}^{+}(c))\rangle$ keine Doppeltangente der Integralkurve C

$$(4.15)\qquad z_{21}(c) > z_{21}^{+}(c) \;\Rightarrow\; \begin{aligned}&\eta(c) = r_{12}(c) = z_{12}(c),\\ &r_{21}(c) = r_{12}^{+}(c) \in \,]z_{21}^{+}(c), z_{21}(c)[,\\ &r_{21}(c) = z_{22}^{+}(\xi)\ \text{ mit einem } \xi \in \,]c, r_{12}^{+}(c)\,[\qquad (c \in J).\end{aligned}$$

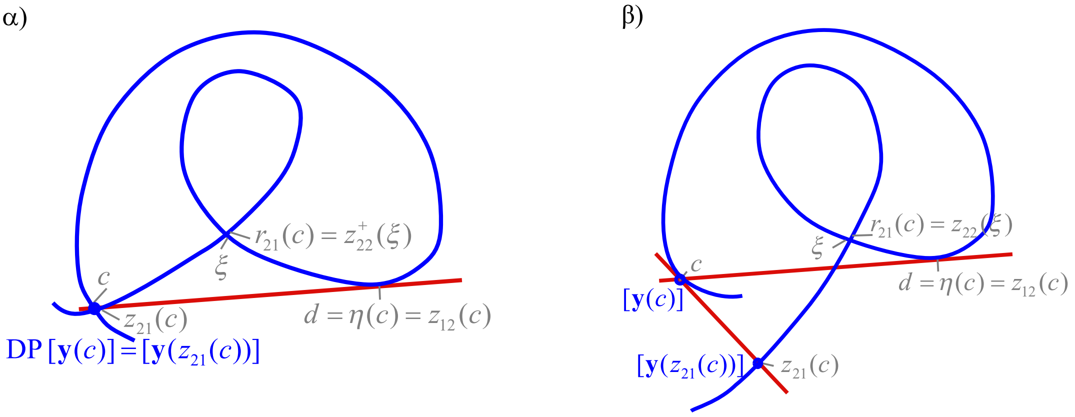


Abb. 4.5 Darstellung der im Fall 3) auftretenden Unterfälle: α) $[\mathbf{y}(c)] = \left[\mathbf{y}(z_{21}(c))\right]$ Doppelpunkt (DP), β) $[\mathbf{y}(c)] \neq \left[\mathbf{y}(z_{21}(c))\right]$ kein Doppelpunkt der Integralkurve C

$$(4.16)\qquad r_{21}(c) = r_{12}(c) \;\Leftrightarrow\; z_{21}(c) = z_{12}(c) \qquad (c \in J).$$

Mit dem **Endlichkeitsbereich** (**eigentlichen Definitionsbereich**, englisch: domain)

$$E := \mathrm{dom}\,\eta := \{x \in J : \eta(x) < \infty\}$$

der numerischen **Funktion** $\eta(.) : J \longrightarrow J \cup \{+\infty\}$ **der ersten rechten konjugierten Punkte** wird die auf E eingeschränkte reellwertige Funktion

$$\eta : x \in E \mapsto \eta(x) \in J$$

betrachtet. Weiter sei

$$W := \mathrm{im}\,\eta := \eta(E) = \{\eta(x) : x \in E\}$$

das Bild (der Wertebereich, englisch: image) von η. Analog sei der Endlichkeitsbereich

$$E_- := \{x \in J : \eta_-(x) > -\infty\}$$

der **Funktion** $\eta_-(.) : J \longrightarrow J \cup \{-\infty\}$ **der ersten linken konjugierten Punkte** und der Wertebereich

$$W_- := \eta_-(E_-) = \{\eta_-(x) : x \in E_-\}$$

der zugehörigen auf E_- eingeschränkten reellwertigen Funktion

$$\eta_- : x \in E_- \mapsto \eta_-(x) \in J$$

definiert.

(4.17) **Eigenschaften der Funktion** η

Es sei die Differentialgleichung (L) nichtdiskonjugiert in J. Die Funktion

$$\eta : x \in E \mapsto \eta(x) \in J$$

ist dann

streng monoton steigend,
stetig und besitzt
η_- als Umkehrfunktion.

Im Fall $b \notin J$ ist der Definitionsbereich

$$E = J \cap [a,\beta[$$

ein rechtsoffenes Intervall mit rechtem Randpunkt $\beta = \sup E$, linkem Randpunkt a und

$$a < \beta \leq b.$$

Im Fall $b \in J$ ist

$$E = J \cap [a,\beta]$$

ein rechtsabgeschlossenes Intervall mit rechtem Randpunkt $\beta = \eta_-(b) \in J$, linkem Randpunkt a und

$$a \leq \beta < b.$$

(4.18) **Eigenschaften der Funktion** η_-

Es sei die Differentialgleichung (L) nichtdiskonjugiert in J. Die Funktion

$$\eta_- : x \in E_- \mapsto \eta_-(x) \in J$$

ist dann

streng monoton steigend,
stetig und besitzt
η als Umkehrfunktion.

Im Fall $a \notin J$ ist der Definitionsbereich

$$E_- = J \cap \,]\alpha,b[$$

ein linksoffenes Intervall mit linkem Randpunkt $\alpha = \inf E_-$, rechtem Randpunkt b und

$$a \leq \alpha < b.$$

Im Fall $a \in J$ ist

$$E_- = J \cap [\alpha,b[$$

ein linksabgeschlossenes Intervall mit linkem Randpunkt $\alpha = \eta(a) \in J$, rechtem Randpunkt b und

$$a < \alpha \leq b.$$

(4.19) **Eigenschaften der Definitionsbereiche E und E_-**

$$E = \eta_-(E_-),$$
$$E_- = \eta(E).$$

Zur Untersuchung der **Differenzierbarkeit** der Funktion η wird ihr eigentlicher Definitionsbereich E in Teilmengen zerlegt. Für die durch

$$H(x) := u_2(\eta(x),x),$$
$$H^+(x) := u_2^+(\eta(x),x)$$

in E definierten und (als Zusammensetzung von stetigen Funktionen wieder) stetigen Funktionen H und H^+ gilt

$$H \geq 0, \quad H^+ \geq 0, \quad H \cdot H^+ \equiv 0 \quad \text{in } E.$$

Der Definitionsbereich E von η lässt sich damit disjunkt zerlegen in

$$E = A \cup D$$

mit

$$A = \{x \in E : (H(x) \cdot H^+(x) = 0)\ H(x) + H^+(x) > 0\}$$

und

$$D = \{x \in E : H(x) = 0 = H^+(x)\}.$$

Die Menge A der $x \in E$, für die $\eta(x)$ entweder nur Nullstelle von $u_2(.,x)$ oder nur Nullstelle von $u_2^+(.,x)$ ist, lässt sich weiter disjunkt zerlegen in

$$A = A_1 \cup A_2$$

mit

$$A_1 = \{x \in E : H^+(x) > 0 = H(x)\} = \{x \in E : H^+(x) > 0\},$$
$$A_2 = \{x \in E : H(x) > 0 = H^+(x)\} = \{x \in E : H(x) > 0\}.$$

Die Menge D der $x \in E$, für die $\eta(x)$ sowohl Nullstelle von $u_2(.,x)$ als auch Nullstelle von $u_2^+(.,x)$ ist, lässt sich weiter disjunkt zerlegen in

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$$

mit

$$D_1 = \{x \in E\text{: Für } \{x,\eta(x)\} \text{ gilt (3.7) } [u_2^+(.,x)] = [u_2^+(.,\eta(x))],\ [u_2(.,x)] \neq [u_2(.,\eta(x))]\},$$
$$D_2 = \{x \in E\text{: Für } \{x,\eta(x)\} \text{ gilt (3.8) } [u_2(.,x)] = [u_2(.,\eta(x))],\ [u_2^+(.,x)] \neq [u_2^+(.,\eta(x))]\},$$
$$D_3 = \{x \in E\text{: Für } \{x,\eta(x)\} \text{ gilt (3.6) } [u_2^+(.,x)] = [u_2^+(.,\eta(x))],\ [u_2(.,x)] = [u_2(.,\eta(x))]\}.$$

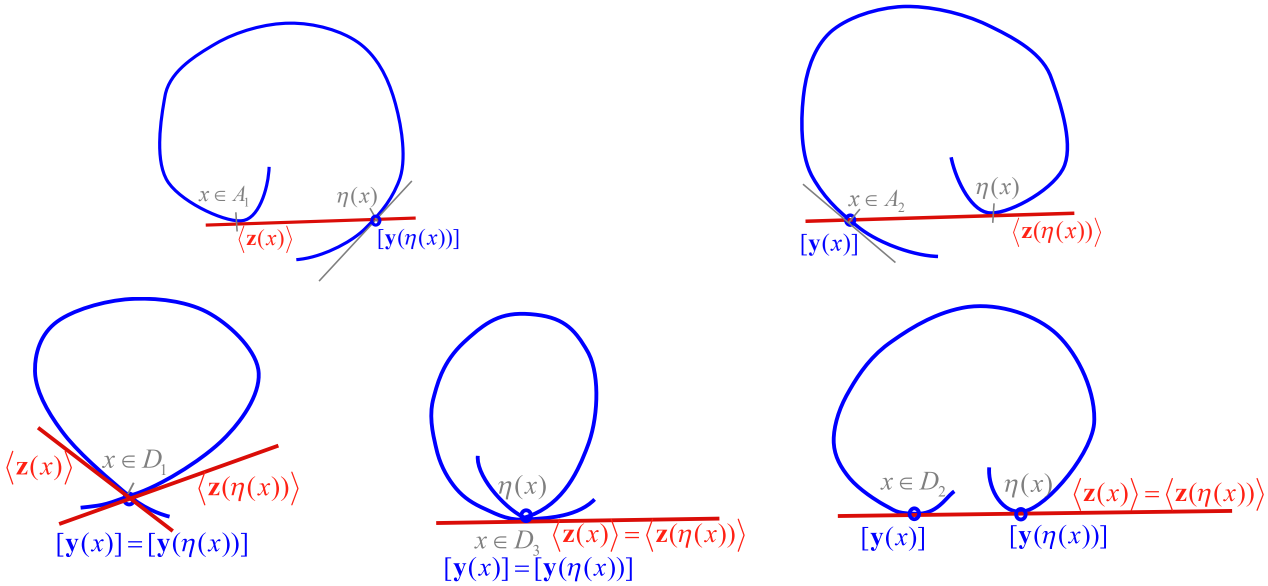


Abb. 4.6 Veranschaulichung der verschiedenen Punkte x der Menge $E = A_1 \cup A_2 \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3$ als Kurvenparameter der Integralkurve C

(4.20) **Zweimal stetige Differenzierbarkeit von η in A**

Es gilt

$$\eta \in C^2(A) \text{ und } \eta' > 0 \text{ in } A$$

und im Fall $p \in C^1(J)$ sogar

$$\eta \in C^3(A).$$

Für $x \in A_1$ gilt

$$\eta'(x) = -\, u_1(\eta(x),x)/u_1^+(x,\eta(x)) > 0,$$

für $x \in A_2$ gilt

$$\eta'(x) = -\, u_1^+(\eta(x),x)/u_1(x,\eta(x)) > 0.$$

(4.21) **Linksseitige und rechtseitige Differenzierbarkeit von η in $D_1 \cup D_2$**

Jedes $x_0 \in D_1 \cup D_2$ ist ein isolierter Punkt von D und Häufungspunkt von A:

Zu jedem $x_0 \in D_1$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$]x_0 - \delta, x_0[\,\cap\, E \subseteq A_2 \text{ und}$$
$$]x_0, x_0 + \delta[\,\cap\, E \subseteq A_1.$$

Zu jedem $x_0 \in D_2$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$]x_0 - \delta, x_0[\,\cap\, E \subseteq A_1 \text{ und}$$
$$]x_0, x_0 + \delta[\,\cap\, E \subseteq A_2.$$

Falls $x_0 \in D_1 \cup D_2$ kein linker Randpunkt des Intervalls E und somit $]x_0-\delta,x_0[\subseteq E$ für ein $\delta > 0$ ist, erhält man die linksseitige Ableitung[2] $\eta_l'(x_0)$ mit

$$\eta_l'(x_0) := \lim_{x \nearrow x_0} \frac{\eta(x)-\eta(x_0)}{x-x_0} = +\infty,$$

Falls $x_0 \in D_1 \cup D_2$ kein rechter Randpunkt des Intervalls E und somit $]x_0,x_0+\delta[\subseteq E$ für ein $\delta > 0$ ist, erhält man die rechtsseitige Ableitung $\eta_r'(x_0)$ mit

$$\eta_r'(x_0) := \lim_{x \searrow x_0} \frac{\eta(x)-\eta(x_0)}{x-x_0} = 0.$$

Falls $x_0 \in D_1 \cup D_2$ innerer Punkt des Intervalls E und somit $]x_0-\delta,x_0+\delta[\subseteq E$ für ein $\delta > 0$ ist, so ist η linksseitig und rechtsseitig differenzierbar, aber nicht differenzierbar.

(4.22) **Dreimal stetige Differenzierbarkeit von η in einem nicht ausgearteten Intervall $[c_1,c_2] \subseteq D_3$**

Ist $[c_1,c_2] \subseteq D_3$ ($c_1 < c_2$), so gilt

$$\eta \in C^3(]c_1,c_2[),\ \eta' > 0 \text{ in }]c_1,c_2[.$$

Für $x \in]c_1,c_2[$ ist

$$\eta'(x) = D^2[u_2^+](x,\eta(x)) / u_1'(\eta(x),x) > 0,$$

$$\eta''(x) = \big(u_0'(\eta(x),x)\eta'(x)u_1'(\eta(x),x)$$
$$-D^2[u_2^+](x,\eta(x))\cdot\big(u_1''(\eta(x),x)\eta'(x) + D^2[u_1^+](x,\eta(x))\big)\big) / \big(u_1'(\eta(x),x)\big)^2.$$

[2] Die Bezeichnung der einseitigen Differenzierbarkeit wird hier auch für den Fall verwendet, dass der einseitige Grenzwert des Differenzenquotienten unendlich ist.

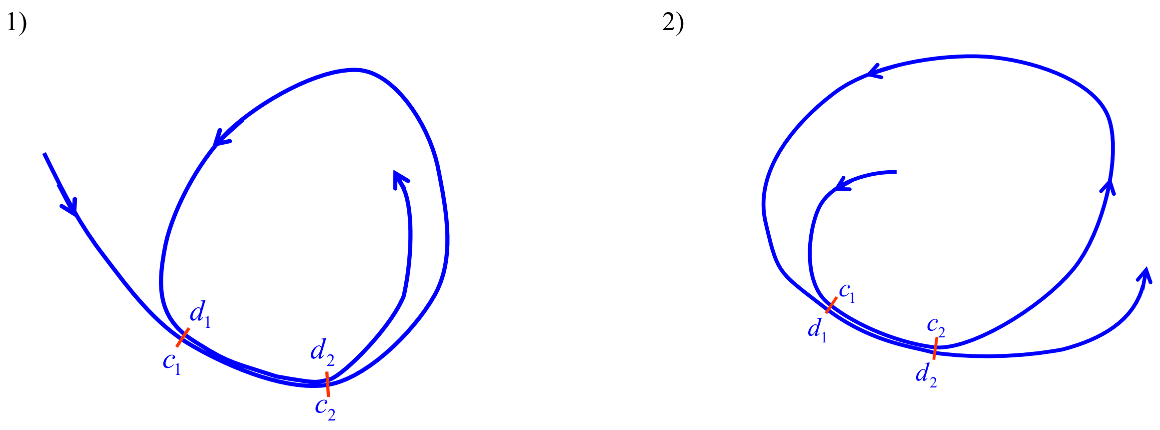


Abb. 4.7 Eine Integralkurve C mit Selbstberührung längs eines Kurvenstücks ohne Selbstdurchsetzung 1) nach innen fortlaufend und 2) nach außen fortlaufend

Definition der Klasse $K(J)$ für die Differentialgleichung (L) durch die Beschreibung der Spiralform mit möglicher Selbstberührung für die Integralkurve C

Die Differentialgleichung (L) gehört im Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ zur Klasse $K(J)$ ($L \in K(J)$) oder das Intervall J heißt ein für (L) reguläres Intervall genau dann, wenn es

keine Stellen $c, d \in J$ mit (3.7) Doppelpunkt ohne Doppeltangente,
keine Stellen $c, d \in]a,b[$ mit (3.8) Doppeltangente ohne Doppelpunkt und
keine Stellen $c_1, c_2 \in]a,b[$ ($c_1 \le c_2$) mit einem nachfolgend beschriebenen Selbstdurchsetzungsintervall $[c_1,c_2]$ gibt:

(4.23) Für jedes $x \in [c_1,c_2]$ liegt für $(x,\eta(x))$ die Eigenschaft (3.6) Doppelpunkt und Doppeltangente (**Selbstberührung**) vor und zu diesem Selbstberührungsintervall $[c_1,c_2]$ ist noch eine der beiden Arten einer Selbstdurchsetzung der Kurve C erfüllt:

1) **Selbstdurchsetzung von innen nach außen**: Zu jedem reellen $\varepsilon > 0$ gibt es Stellen

$$\xi_1 \in]c_1-\varepsilon,c_2[, \qquad \tau_1 \in]\eta(c_1)-\varepsilon,\eta(c_1)[\cap J,$$

sodass ξ_1 eine einfache Nullstelle von $u_2(.,\tau_1)$ ist, und Stellen

$$\xi_2 \in]c_2,c_2+\varepsilon[, \qquad \tau_2 \in]\eta(c_2),\eta(c_2)+\varepsilon[\cap J,$$

sodass τ_2 eine einfache Nullstelle von $u_2(.,\xi_2)$ ist;

2) **Selbstdurchsetzung von außen nach innen**: Zu jedem reellen $\varepsilon > 0$ gibt es Stellen

$$\xi_1 \in]c_1-\varepsilon,c_2[, \qquad \tau_1 \in]\eta(c_1)-\varepsilon,\eta(c_1)[,$$

sodass τ_1 eine einfache Nullstelle von $u_2(.,\xi_1)$ ist, und Stellen

$$\xi_2 \in]c_2,c_2+\varepsilon[, \qquad \tau_2 \in]\eta(c_2),\eta(c_2)+\varepsilon[,$$

sodass ξ_2 eine einfache Nullstelle von $u_2(.,\tau_2)$ ist.

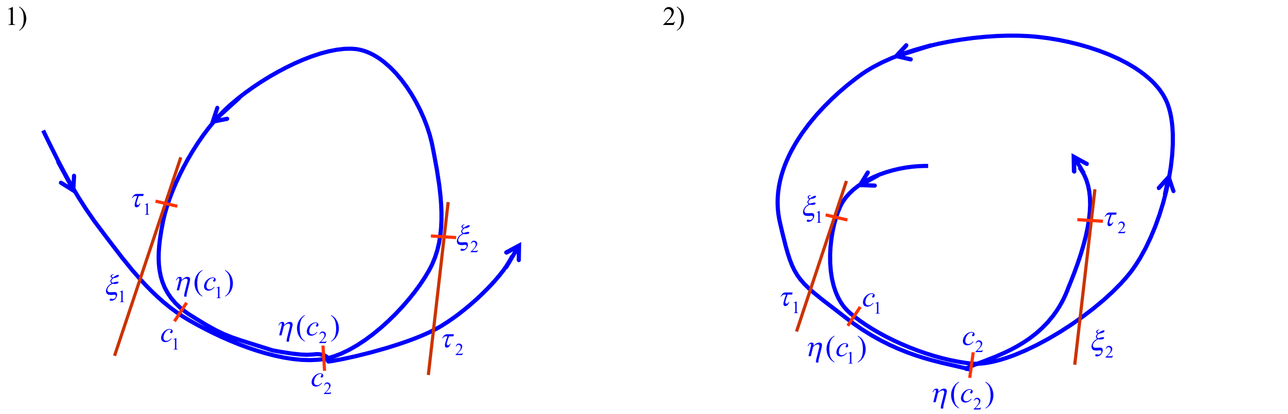


Abb. 4.8 Eine Integralkurve C mit Selbstberührung längs eines Kurvenstücks und mit einer Selbstdurchsetzung 1) von innen nach außen und 2) von außen nach innen

Dass die oben für ein beliebiges Intervall J definierte Spiralform von C mit möglicher Selbstberührung ($L \in K(J)$), bei der in gesamten Intervall J keine Selbstschneidung (Doppelpunkt ohne Doppeltangente), im offenen Intervall $]a,b[$ keine Doppeltangente ohne Doppelpunkt und keine Selbstberührung mit Selbstdurchsetzung auftreten, auch äquivalent ist zur Klassenzugehörigkeit

$$L \in K_{\mathrm{I}}(J) \cup K_{\mathrm{II}}(J),$$

bei der im Parameterintervall J die Tangenten das vorhergehende bzw. das nachfolgende Kurvenstück nicht schneiden, wird mit dem folgenden Satz 4.10 gezeigt. Dazu wird in dessen Beweisteil 1) mit Verweis auf die Abschnitte 3.1.9 und 3.1.10 begründet, dass die Spiralform notwendig für diese Klassenzugehörigkeit ist. In Beweisteil 2) wird begründet, dass die Spiralform hinreichend für diese Klassenzugehörigkeit ist: Mit einer Fallunterscheidung und einem etwas aufwendigeren Beweis wird dazu gezeigt, dass bei Nichtvorliegen dieser Klassenzugehörigkeit die Kurve C keine Spiralform aufweist.

Satz 4.10 Übereinstimmung der Klasse $K_{\mathrm{I}}(J) \cup K_{\mathrm{II}}(J)$ mit der Klasse $K(J)$

$$K_{\mathrm{I}}(J) \cup K_{\mathrm{II}}(J) = K(J)$$

HINWEIS: Das nachfolgende Literaturverzeichnis und das Sachverzeichnis mit den angegebenen Seitenzahlen beziehen sich auf das Buch „Nullstellenverteilung der Lösungen …“.

Literaturverzeichnis

Ahmad S. (1974), Oscillation properties of third order linear differential equations and their adjoints. J. Math. Phys. Sci. 8, 291–298, 248; MR # 13716.

Ahmad S., Benharbit A. (1975), Some oscillation properties of third order linear differential equations. Ann. Polon. Math. 31, 15–21; MR 52 # 6097.

Ahmad S., Lazer A.C. (1969), On the oscillatory behavior of a class of linear third order differential equations. J. Math. Anal. Appl. 28, 681–689; MR 40 # 1646.

Azbelev N.V., Caljuk Z.B. (1964), On the question of distribution of zeros of solutions of linear differential equations of the third order. Amer. Math. Soc. Transl. II Serie 42, 233–245; MR 22 # 12266.

Barrett J.H. (1964), Canonical forms for third-order linear differential equations. Ann. Mat. Pura Appl. 65, 253–274.

Barrett J.H. (1969), Oscillation theory of ordinary linear differential equations. Advances in Math. 3, 415–509; MR 41 # 2113.

Beesack P.R. (1956), Nonoscillation and disconjugacy in the complex domain. Trans. Amer. Soc. 81, 211–242.

Birkhoff G.D. (1911), On the solutions of ordinary linear homogeneous differential equations of the third order. Ann. of Math. 12, 103–127.

Bol G. (1950), Projektive Differentialgeometrie, 1. Teil, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

Bulgakov A.I., Maksimov V.P., Martynyuk A.A. and Tonkov E.L. (2009), Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 9 (4), 327–332, Personage in Science N.V. Azbelev; http://www.e-ndst.kiev.ua/v9n4/0(29).pdf. Zugegriffen am 08.11.2019.

Coppel W.A. (1971), Disconjugacy, Lecture Notes in Mathematics 220. Springer, Berlin Heidelberg New York.

Deiser O. (2013), Analysis 1, Mathematik für das Lehramt, 2. Auflage, Springer, Berlin Heidelberg. http://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=analysis1_3_2_Z3. Zugegriffen am 04.08.2020.

Deiser O. (2014), Analysis 2, Mathematik für das Lehramt, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg. http://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=analysis2. Zugegriffen am 23.08.2020.

Divakova A.Ya. (1970), Nonoscillatory solutions of third order differential equations. Diff. Equations 6, 1149–1152; MR 43 # 6513.

Dolan J.M. (1970), On the relationship between the oscillatory behavior of a linear third-order equation and its adjoint. J. Differential Equations 7, 367–388; MR 41 # 568.

Dolan J.M., Klaasen G.A. (1975a), Strongly oscillatory and nonoscillatory subspaces of linear equations. Canad. J. Math. 27, 106–110; MR 50 # 10433.

Dolan J.M., Klaasen G.A. (1975b), Dominance of n-th order equations. Rocky Mountain J. Math. 5, 263–270.

Etgen G.J., Shih C.D. (1973a), Disconjugacy and oscillation of third order differential equations with nonnegative coefficients. Proc. Amer. Math. Soc. 38, 577–582; MR 47 # 8971.

Etgen G.J., Shih C.D. (1973b), On the oscillation of certain third order linear equations. Proc. Amer. Math. Soc. 41, 151–155; MR 47 # 8972.

Etgen G.J., Shih C.D. (1975), Conditions for the nonoscillation of third order differential equations with nonnegative coefficients. Siam J. Math. Anal. Vol.6, No.1, 1–8; MR 50 # 10434.

Erwe F. (1967), Differential- und Integralrechnung I, Bibliographisches Institut, Mannheim.

Grauert H., Fischer W. (1968), Differential- und Integralrechnung II, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

Grauert H., Lieb I. (1967), Differential- und Integralrechnung I, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

Greguš M. (1963), Über die asymptotischen Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 63, 1–10; MR 29 # 4958.

Guggenheimer H. (1972), Geometric theory of differential equations. IV: Two-point boundary value problems of linear equations. Rendiconti di Matematica (Roma) (6) 5, 237–250.

Guggenheimer H. (1976), Distribution of zeros and limit behavior of solutions of differential equations. Proc. Amer. Math. Soc. 61, 275–279.

Hanan M. (1961), Oscillation criteria for third-order linear differential equations. Pac. J. Math. 11, 919–944; MR 26 # 2695.

Herold H. (1971), Über die Nullstellen der Ableitung der Lösungen linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung. Math. Z. 119, 290–312; MR 43 # 6515.

Herold H. (1972), Nullstellen bei Lösungen linearer Differentialgleichungen 3. Ordnung mit komplexwertigen Koeffizienten. Archiv der Math. 23, 192–197.

Herold H. (1975), Differentialgleichungen im Komplexen. Studia Mathematica. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht.

Hinton D.B. (1966), Disconjugate properties of a system of differential equations. J. Differential Equations 2, 420–437.

Jones G.D. (1973a), An asymptotic property of solutions of $y''' + py' + qy = 0$. Pac. J. Math. 47, 135–138; MR 48 # 4410.

Jones G.D. (1973b), Oscillation properties of third order differential equations. Rocky Mountain J. Math. 3, 507–513; MR 50 # 7669.

Jones G.D. (1974a), Oscillatory behavior of third order differential equations. Proc. Amer. Math. Soc. 43, 133–136; MR 48 # 11666.

Jones G.D. (1974b), Properties of solutions of a class of third-order differential equations. J. Math. Anal. Appl. 48, 165–169; MR 50 # 5095.

Jones G.D. (1976), Oscillation criteria for third order differential equations. Siam J. Math. Anal. 7, no.1, 13–15.

Kim W.J. (1970), Oscillatory properties of linear third-order differential equations. Proc. Amer. Math. Soc. 26, 286–293; MR 41 # 8758.

Kowalsky H.-J. (1967), Lineare Algebra, Walter de Gruyter Verlag, Berlin, 3. Auflage.

Lazer A.C. (1966), The behavior of solutions of the differential equation $y''' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Pac. J. Math. 17, 435–466; MR 33 # 1552.

Lexikon der Mathematik (2000–2003), Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin, Band 1–6.

Mangoldt H.v., Knopp K. (1974), Einführung in die Höhere Mathematik, Band 2, Hirzel Verlag, Stuttgart, 14. Auflage.

Mangoldt H.v., Knopp K. (1975), Einführung in die Höhere Mathematik, Band 3, Hirzel Verlag, Stuttgart, 14. Auflage.

Marini M., Mawhin J. (2014), Ricordo di Gaetano Villari, https://www.researchgate.net/publication/280553562_Ricordo_di_Gaetano_Villari. Zugegriffen am 07.11.2019.

Neuman F. (1972), Geometrical approach to linear differential equations of the n-th order. Rendiconti di Matematica (Roma) 5, 579–602.

Neuman F. (1974), On two problems on oscillations of linear differential equations of the third order. J. Differential Equations 15, 589–596; MR 49 # 7514.

Reynolds C.N. (1921), On the zeros of homogeneous linear differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. 22, 220–229.

Schlesinger L. (1895), Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, 1. Band, Teubner, Leipzig.

Švec M. (1957), Sur une propriété des intégrales de l' équation $y^{(n)} + Q(x)y = 0$, $n = 3, 4$. Czechoslovak Math. J. 7 (82), 450-462.

Švec M. (1965a), Some remarks on a third order linear differential equation (Russian). Czechoslovak Math. J. 15 (90), 42-49.

Švec M. (1965b), Einige asymptotische und oszillatorische Eigenschaften der Differentialgleichung $y''' + A(x)y' + B(x)y = 0$. Czechoslovak Math. J. 15 (90), 378-393; MR 32 # 2656.

Swanson C.A. (1968), Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations. Academic Press, New York and London.

Villari G. (1958), Sul carattera oscillatorio delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari omogenee del terzo ordine. Boll. Un. Mat. Ital. (3) 13, 73-78.

Wilczynski E.J. (1905), Projective differential geometry of curves and ruled surfaces, Teubner, Leipzig.

Wintner A. (1951), On the non-existence of conjugate points, Amer. J. Math 73, 368–380.

Sachverzeichnis

A

Ableitung
  linksseitige 149, 152
  rechtsseitige 151, 154
Ableitungen
  verallgemeinerte 5, 25
Adjungierte
  klassische 5
Ahmad S. 23, 29, 47, 50
Allgemeiner Trennungssatz 80
Anfangsbedingungen einer Lösung 26
Anfangswerte einer Lösung 39
Anfangswertproblem 143
Anzahl der Nullstellen 76, 77, 78, 79, 80, 86
Azbelev N.V. 39, 107, 120, 121, 125

B

Bachmann P. 11
Barrett J.H. 5, 6, 16, 25, 27, 51, 101, 107, 122, 124, 125, 129, 131
Basis, kanonische 35
Beesack P.R. 11, 22
begleitendes Dreieck 57, 62
  von Bol 58
Beispiel 37, 40, 46, 50, 114, 156
  für geometrischen Beweis 74
Benharbit A. 29
Bernoulli J. 56, 84, 89, 102, 103
Beweis, geometrischer 74
Bilinearform 5, 26
Birkhoff G.D. 6, 7, 28, 29, 37, 39, 53, 55, 56, 59, 63, 80, 82, 110, 114, 116, 159
Bol G. 53, 55, 58
Bolzano B. 48, 106, 126
Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft 108
Borel E. 108

C

Caljuk Z.B. 39, 107, 120, 121, 125
Charakterisierung der nichtoszillatorischen Lösungen 28
Coppel W.A. 12, 14, 15, 28, 51, 52, 80, 90, 101, 107, 109, 114, 132
Cramer G. 36
Cramersche Regel 36, 38

D

Deiser O. 137, 149
Determinantenmethode 38
Differentialgleichung
  adjungierte 5, 25
  diskonjugierte 14, 40
  homogene lineare 1. Ordnung 35
  homogene lineare 2. Ordnung 12, 14, 19, 22, 42
  homogene lineare 3. Ordnung 5, 11, 25
  inhomogene lineare 2. Ordnung 74
  nichtdiskonjugierte 90, 96, 99
  nichtoszillatorische 40
  oszillatorische 40
  schwach oszillatorische 40
  stark oszillatorische 40
Differentialoperator, klassischer adjungierter 25
Differenzierbarkeit 138
  linksseitige 148, 152
  rechtsseitige 151, 154
Dimensionssatz für Unterräume 45
direkte Summe 44
diskonjugierte Differentialgleichung 14, 40, 90, 103
Diskonjugiertheit 7, 14, 69, 80
  an den Intervallgrenzen 48, 51
  lokale 51
Divakova A.Ya. 5, 11, 20
Dolan J.M. 27, 28, 39, 40, 46, 47, 112, 113, 114
Doppelkegel der nichtoszillatorischen Lösungen 5, 47
Doppelpunkt 7, 61, 62, 64
Doppeltangente 7, 61, 62, 64
Dreieck, begleitendes 57, 62
duales Raumpaar 5
Dualraum 58

E

Ebene
  euklidische 54
  projektive 53
Eigenschaft
  asymptotische 47
  D 14
  D^- 14
  D^+ 14
Eigenschaften
  der Klassen 28, 72, 101
eigentlicher Definitionsbereich 131
Einheitspunkt 58
Einheitssphäre 53
Endlichkeitsbereich 131
Epsilon-Delta-Charakterisierung 137
Erwe F. 120, 143, 149
Etgen G.J. 23, 28, 114
euklidische Ebene 54
euklidische Norm 113
Existenz
  einer Nullstelle 80, 81, 86, 87, 89, 99, 116
  einer nullstellenfreien Lösung 79, 89
  von monotonen Lösungen 29
  von nullstellenfreien Lösungen 29
Existenz- und Einzigkeitssatz 32, 34, 35, 39
Extremalsatz von Weierstraß 101, 102
Extremum, lokales 102

F

Fermat P. 102
Ferngerade 54, 56
Fernpunkt 56
Fischer W. 143
Fixpunktproblem 143
folgenkompakt 108
Formel von Liouville 35
Fréchet M.R. 108
Fundamentalsystem 6, 35
  adjungiertes 6, 37
  Markov- 52, 90

spezielles 28, 37, 62
Funktion
implizite 143
monoton steigende 133
stetig differenzierbare 143
stetige 143
streng monoton steigende 133

G

gemischtes Produkt 36
General Separation Theorem 80
Gerade in der projektiven Ebene 53
Geradenkoordinaten, homogene 6, 53, 58
glatte Kurve 54
Gleichungssystem, lineares 36, 38
Grauert H. 143, 149
Greensche Transformierte, modifizierte 22
Greguš M. 24, 50
Grundpunkte 58
Guggenheimer H. 53, 144

H

Hanan M. 23, 28, 29, 30, 103, 112
Häufungspunkt 115, 122, 156, 173
Heine H.E. 108
Heine-Borel-Überdeckungseigenschaft 108, 109
Herold H. 5, 7, 11, 12, 18, 19, 22
Hilfsformeln 16
Hilfspunkte 120
Hinton D.B. 5, 25
homogene Koordinaten
einer Geraden 6
eines Punktes 6, 53
Hyperebenenkoordinaten 6, 53, 58

I

Infimum 120, 121, 122
Integral, unbestimmtes 13
Integralkurve 6, 53
Integralungleichung 11, 14
Integration, partielle 16
Intergal
uneigentliches 13
Intervall 5, 11, 25, 163, 168, 175
Intervall, ausgeartetes 133, 134, 138
Intervall, echtes 138
Intervalleigenschaft 133
Inzidenz in $\mathbb{P}^2$ 59
Isomorphie 58

J

Jones G.D. 28, 29, 50, 112
j-te Ableitung
beschränkte 24
mit Grenzwert Null 24
ohne Grenzwert 24
quadratisch integrierbare 24

K

kanonische Basis 53
kartesische Koordinaten 54
Kegel, konvexer linearer 47
Kettenregel für die Differentiation 143, 144
Kim W.J. 23, 28
Klaasen G.A. 28, 47, 113
Klasse
C_{II}^k 28
C_I^k 28
D 40
K 158, 159
K_I 28
K_{II} 28
von Differentialgleichungen 7, 27, 28, 67
Knopp K. 13, 143, 149
Koeffizienten der linearen Differentialgleichung 3. Ordnung 57
Komplement, orthogonales 38
Konuskombination 47
Koordinaten
homogene 6, 53
kartesische 54, 63, 64
projektive 53, 55
Koordinatensystem, projektives 58
Kowalsky H.-J. 5, 27, 37, 38, 45, 58
Kreuzprodukt 35
Kronecker L. 26
Kronecker-Symbol 26
Krümmung der Integralkurve 55
Kurvenstück 79
geschlossenes 85

L

l'Hospital G.F.A. 56, 84, 89, 102, 103, 105
Lagrange J.L. 5, 25, 38
Lagrangesche Identität 38
Landau E. 11
Landau-Symbol 11
Lazer A.C. 23, 24, 28, 29, 50, 112
Leibniz G. W. 36
Lieb I. 149
lineare Hülle 38, 93
Liouville J. 35
Formel von 35
Lösung
der Differentialgleichung 11
monotone 29
nichtnegative 7
nichtoszillatorische 7, 28, 40, 111
nullstellenfreie 7, 29, 111
oszillatorische 40
vorzeichenwechselfreie 46
Lösungen
linear abhängige 32, 34
linear unabhängige 38, 79
orthogonale 27, 58
Lösungsraum der Differentialgleichung 25

M

Majorantenkriterium 13
Mangoldt H.v. 13, 143, 149
Markov A.A. 52
Markov-Fundamentalsystem 52, 80, 90, 114
Mathematica, Softwaresystem von Wolfram Research 158
Menge
der nichtoszillatorischen Lösungen 46, 111
der nullstellenfreien Lösungen 111
der oszillatorischen Lösungen 46
zusammenhängende 49
Mittelwertsatz der Differentialrechnung 149, 151, 152, 154
Monotonie 133

strenge 133
Multiplikationstabelle 36, 57

N

Neuman F. 40, 50, 53, 59, 63, 112
Nichtdiskonjugiertheit 89, 90, 96, 99
nichtoszillatorische Lösung 40
nichtoszillatorischer Unterraum 40
Normalenvektor 53
Nullstelle
einfache 28, 30, 66
gemeinsame 83
zweifache 66, 83
Nullstellenanzahl 76, 78, 79
Nullstellenfreiheit 83, 89
Nullstellensatz 48, 106

O

orthogonale Lösungen 6, 27, 58
orthogonales Komplement 38
Ostrogradski M.W. 35
oszillatorische Lösung 40
oszillatorischer Unterraum 40

P

Parameterdarstellung einer Kurve 56
Produkt, skalares 5, 6
Produktsatz für Determinanten 37, 43
projektive Ebene 6, 53
projektive Koordinaten 58
eines Punktes 53, 55
Punkt
in der projektiven Ebene 53
isolierter 156
Punkt, erster (rechter) konjugierter 7, 90, 96, 99, 122
Punkt, erster linker konjugierter 122
Punktkoordinaten, homogene 6, 53

R

Raumpaar 26
duales 5, 27
Regel von de l'Hospital 56, 84, 89, 102, 103, 105
reguläres Intervall 159
erster Art 29
zweiter Art 29
Relativtopologie 140, 156
Reynolds C.N. 53, 55, 80
Riccati J.F. 11
Riccatische Differentialgleichung 11
Riesz F. 58
Rieszscher Darstellungssatz 58
Rolle M. 41, 43, 46, 101

S

Satz
Extremal- 102
vom Minimum und Maximum 102
von Bolzano-Weierstraß 113, 115, 126
von der impliziten Funktion 143, 144, 145, 146, 148, 149, 151, 153, 155
von der Stetigkeit der Umkehrfunktion 135, 137
von Fermat 101
von Heine-Borel 108
von Rolle 41, 43, 46, 101, 115
Schlesinger L. 37
Schnittpunkt 65, 66
zweier Geraden 59
Schreibweise 17
schwach oszillatorischer Unterraum 40
Selbstberührung 7, 64, 65, 83, 159
Selbstdurchsetzung 159
Selbstschneidung, echte 65
Selbstschneidungspunkt 65, 66
Selbsttreffen 64
Selbsttreffpunkt 65
Shih C.D. 23, 28, 114
skalares Produkt 6
Skalarprodukt 27
kanonisches 35
natürliches 58
Spatprodukt 36
Spiralform
der Integralkurve 7
der Integralkurve mit Selbstberührungen 71
der Integralkurve ohne Selbstberührung 68
nach außen fortlaufend 68
nach innen fortlaufend 68
Spurtopologie 140
Stammfunktion 13
Standardbasis 35, 53
Standardskalarprodukt 35
stark oszillatorischer Unterraum 40
Stetigkeit 135
Stetigkeit der Lösung 30
Sturm J.C.F. 43
Sturmscher Trennungssatz 43, 79, 113
Summe, direkte 44
Supremum 120, 122
Švec M. 28, 29, 50, 107, 114
Symbol
$\dot{>}$ 17

T

Tangente der Integralkurve 54
Tangentenschar 79
Trennung der Nullstellen 21, 28, 43, 75
Trennungssatz, allgemeiner 80

U

überdeckungskompakt 108
Überdeckungssatz von Heine-Borel 108
Umkehrfunktion 134
Unterraum
nichtoszillatorischer 40
oszillatorischer 40
schwach oszillatorischer 40
stark oszillatorischer 7, 40

V

Vektorprodukt 35
Verbindungsgerade zweier Punkte 59
Vergleichssatz 28
Villari G. 23, 28
Vollständigkeitsaxiom 120
Vorzeichenwechsel der Krümmung 56
Vorzeichenwechselstelle 30, 158

W

Weierstraß K.T.W. 48, 102, 126
Wilczynski E.J. 6, 53, 55
Wintner A. 40
Wroński J.H. 31
Wronski-Determinante 31, 32, 35, 43, 56, 101, 119, 120, 157
  verallgemeinerte 34, 35

Z

Zwischenwertsatz 48, 49, 106