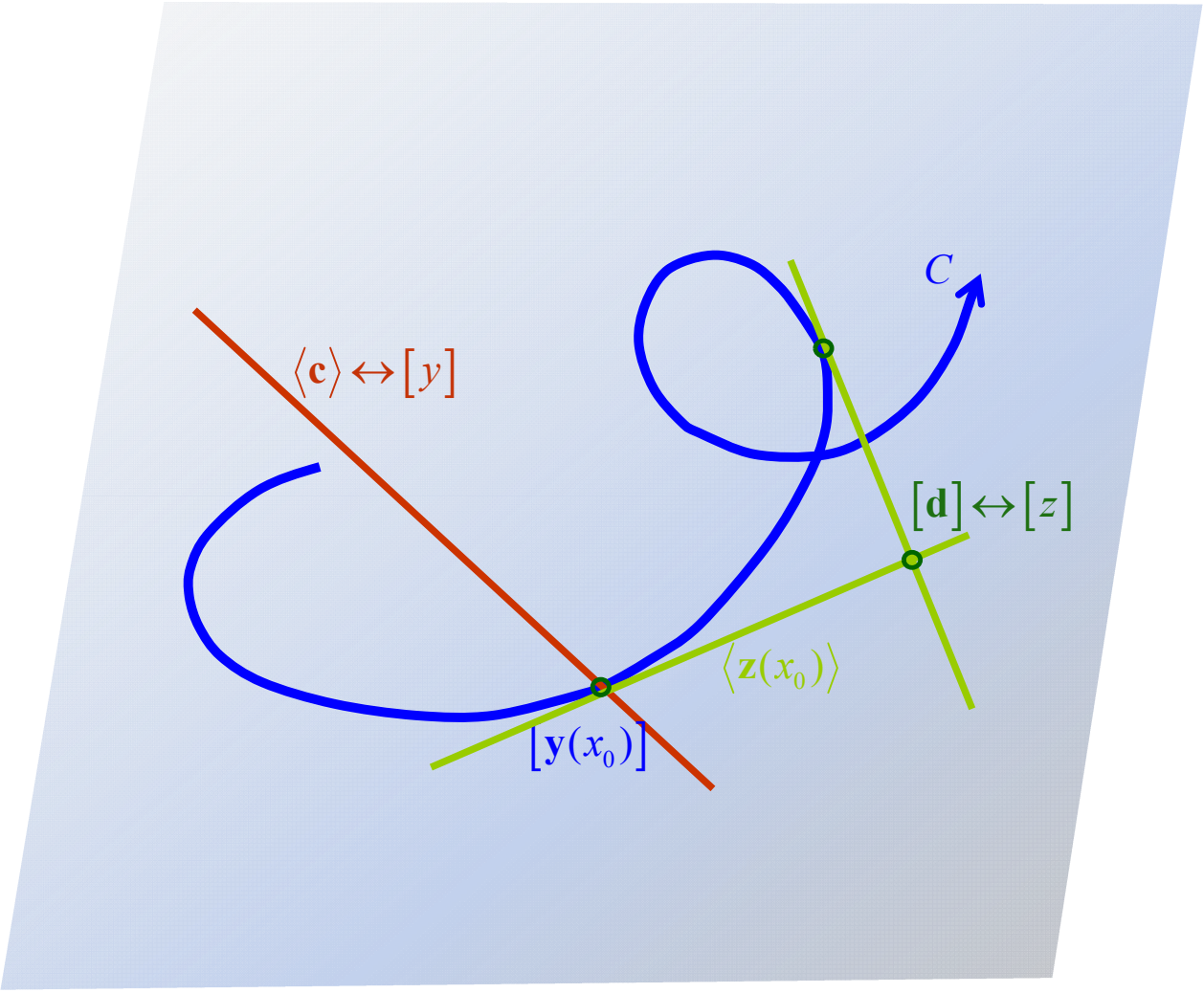
Rudolf Pleier

Nullstellenverteilung der Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung dritter Ordnung



Der Autor Rudolf Pleier ist 1948 in Etzenricht in der Oberpfalz (Bayern) geboren. In den 1970er Jahren studierte er Mathematik und Physik an der Universität Würzburg mit den Abschlüssen Diplom und Promotion. Bei der vorliegenden Arbeit handelt es sich im Wesentlichen um seine Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades des Naturwissenschaftlichen Fachbereichs IV (Mathematik) der Julius-Maximilians-Universität Würzburg im Jahr 1979. Es wurden nur zur besseren Lesbarkeit einige Textpassagen hinzugefügt.

© Rudolf Pleier D-92694 Etzenricht 1979/2020

Vorwort

Es wird die homogene lineare Differentialgleichung (Dgl.) dritter Ordnung

(L) $$L[y] \equiv y''' + py'' + qy' + ry = 0$$

mit im Intervall J ($\subseteq \mathbb{R}$) stetigen Koeffizienten p, q, r betrachtet. Im ersten Kapitel werden für komplexwertige Koeffizienten und Lösungen hinreichende Bedingungen an die Koeffizienten von (L) dafür hergeleitet, dass bei den Lösungen und deren Ableitungen gewisse Nullstellenkonfigurationen nicht auftreten können. Dabei werden Resultate von Divakova[1] (1970) und Herold[2] (1972), die den Spezialfall $p \equiv q \equiv 0$ behandeln, verallgemeinert und Methoden angegeben, mit denen weitere derartige Kriterien gewonnen werden können. In den Kapiteln 2, 3 und 4 werden nur reellwertige Koeffizienten und Lösungen betrachtet. Diese Kapitel können auch unabhängig vom ersten Kapitel gelesen werden.

Im engen Zusammenhang mit der Differentialgleichung (L) steht die zu (L) adjungierte Differentialgleichung

(L^+) $$L^+[z] \equiv ((z' - pz)' + qz)' - rz = 0$$

($p, q, r \in C(J)$; siehe Barrett[3] (1964) und für die Dgl. n-ter Ordnung Hinton[4] (1966)), die äquivalent ist zu dem System von homogenen linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\begin{aligned} v_1' &= pv_1 + v_2 \\ v_2' &= -qv_1 + v_3 \\ v_3' &= rv_1 \end{aligned}$$

für die Funktion

$$v_1 = z$$

und deren verallgemeinerten Ableitungen

$$v_2 = D^1[z] = z' - pz,$$
$$v_3 = D^2[z] = (D^1[z])' + qz.$$

In der Literatur wurde bisher meist noch die 1766 von Lagrange[5] betrachtete klassische Adjungierte

(L*) $$L^*[z] \equiv z''' + Pz'' + Qz' + Rz = 0$$

mit $P = -p$, $Q = q - 2p'$, $R = -r + q' - p''$ für den Spezialfall $p \in C^2(J)$, $q \in C^1(J)$ verwendet. Im Kapitel 2 werden allgemeine Beziehungen zwischen den Differentialgleichungen (L) und (L^+) dargestellt. Unter Verwendung der Tatsache, dass die zu (L) und (L^+) gehörigen dreidimensionalen Lösungsräume S und S^+ mit der durch

$$B[y,z] = y''z - y'D^1[z] + yD^2[z]$$

gegebenen Bilinearform $B : S \times S^+ \to \mathbb{R}$ als skalaren Produkt[6] ein duales Raumpaar bilden, werden Wechselbeziehungen zwischen den Lösungen von (L) und (L^+), zwischen deren Nullstellenverteilun-

---

1 Alexandra Yakovlevna Divakova ist eine ukrainische Mathematikerin an der Nationalen Mechnikova-Universität Odessa und dort später assoziierte Professorin in der Analysis.

2 Horst Herold (1938–1998) war ein deutscher Mathematiker, der sich mit Differentialgleichungen befasste und Lehrtätigkeiten an den Universitäten in Würzburg, Berlin und Marburg ausübte.

3 John Herbert Barrett (1922–1969) war ein US-amerikanischer Mathematiker, der bekannt ist für seine Arbeiten über die Oszillation und Diskonjugiertheit von linearen Differentialgleichungen und über Randwertprobleme.

4 Don Barker Hinton (1937–) ist ein US-amerikanischer Mathematiker mit Forschungsinteressen in der Spektraltheorie von Differentialgleichungen und den damit verbundenen Funktionsungleichungen.

5 Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) war ein französischer Mathematiker und Astronom mit italienischer Herkunft.

6 Für die Abbildung B wird in Kapitel 2 gezeigt, dass sie Werte in $\mathbb{R}$ hat, bezüglich der Argumente $y \in S$ und $z \in S^+$ jeweils linear ist und die beiden folgenden Eigenschaften aufweist: 1) $B[y,z] = 0 \ \forall\, z \in S^+ \Rightarrow y = 0$; 2) $B[y,z] = 0 \ \forall\, y \in S \Rightarrow z = 0$. Somit wird nach Kowalsky (1967), S. 251, $(S,S^+;B)$ als ein duales Raumpaar und B als das die Dualität bestimmende skalare Produkt bezeichnet. Hans-Joachim Kowalsky (1921–2010) war ein deutscher Mathematiker, der sich mit topologischen Vektorräumen befasste und ein Lehrbuch der Linearen Algebra schrieb.

gen und zwischen den Lösungsräumen S und S^+ hinsichtlich Oszillation, Existenz von stark oszillatorischen zweidimensionalen Unterräumen und Diskonjugiertheit bewiesen. Außerdem werden Charakterisierungen von speziellen Doppelkegelstrukturen der Menge N der nichtoszillatorischen Lösungen von (L) durch asymptotische Eigenschaften der Lösungen gegeben und Beispiele für derartige Strukturen aufgeführt.

Wilczynski[7] hat 1905 für die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung – hier wird es in Kapitel 3 für $n = 3$ formuliert – die Funktionswerte

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x) \qquad (x \in J)$$

eines beliebig fixierten Fundamentalsystems y_1, y_2, y_3 von (L) als die homogenen Koordinaten eines Punktes

$$P = P(x) = [(y_1(x),y_2(x),y_3(x))]$$

in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ interpretiert. Wenn x das Intervall J durchläuft, bewegt sich der Punkt $P(x)$ entlang der sogenannten Integralkurve C von (L). Die Tangente von C im Kurvenpunkt ist die Gerade durch die beiden Punkte $P(x)$ und $P'(x)$, wobei $P'(x)$ die homogenen Koordinaten $y_j'(x)$ ($j = 1, 2, 3$) besitzt, und hat die homogenen Geradenkoordinaten (Hyperebenenkoordinaten)

$$z_1(x), z_2(x), z_3(x),$$

wenn z_1, z_2, z_3 das zu y_1, y_2, y_3 adjungierte Fundamentalsystem von (L*) ist. Dies gilt auch mit (L^+) statt (L*).

Diese Integralkurve C benutzt 1911 Birkhoff[8], um mittels geometrischer Begründungen Resultate über die Nullstellen der Lösungen herzuleiten. Um eine Nullstelle einer nichttrivialen Lösung von (L) als Inzidenz in $\mathbb{P}^2$ zu interpretieren und die Lösung selbst in $\mathbb{P}^2$ geometrisch zu veranschaulichen, deutet er die Koordinaten c_1, c_2, c_3 dieser nichttrivialen Lösung

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$$

von (L) bezüglich der Basis y_1, y_2, y_3 von S als die homogenen Koordinaten einer Geraden in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$. Demzufolge ist $x_0 \in J$ eine Nullstelle (bzw. eine zweifache Nullstelle) von y genau dann, wenn die zu y gehörige Gerade $\langle (c_1, c_2, c_3) \rangle$ in $\mathbb{P}^2$ die Integralkurve im Punkt $P(x_0) = [(y_1(x_0),y_2(x_0),y_3(x_0))]$ trifft (bzw. berührt).

In der vorliegenden Arbeit werden in Kapitel 3 und 4 nun auch noch die Nullstellen der nichttrivialen Lösungen

$$z = d_1z_1 + d_2z_2 + d_3z_3$$

von (L^+) als Inzidenzen in $\mathbb{P}^2$ interpretiert und die Lösungen selbst in $\mathbb{P}^2$ geometrisch veranschaulicht, indem man deren Koordinaten d_1, d_2, d_3 bezüglich der Basis z_1, z_2, z_3 von S^+ als die homogenen Koordinaten eines Punktes in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ deutet. Demzufolge ist $x_0 \in J$ genau dann eine Nullstelle von z, wenn der zu z gehörige Punkt $[(d_1,d_2,d_3)]$ in $\mathbb{P}^2$ auf der Tangente von C im Punkt $P(x_0)$ mit den Geradenkoordinaten $z_k(x_0)$ ($k = 1, 2, 3$) liegt. Und x_0 ist genau dann eine zweifache Nullstelle von z, wenn der zu z gehörige Punkt $[(d_1,d_2,d_3)]$ auf der Integralkurve C liegt und zwar gleich $P(x_0)$ ist.

Allgemeiner wird gezeigt, dass die nichttrivialen Lösungen $y \in S$ und $z \in S^+$ genau dann orthogonal bezüglich des skalaren Produktes B sind ($B[y,z] = 0$), wenn in $\mathbb{P}^2$ die zu y gehörige Gerade durch den zu z gehörigen Punkt geht. Damit lassen sich also Resultate über die Nullstellenverteilung der

---

7 Ernest Julius Wilczynski (1876–1932) war ein deutschstämmiger US-amerikanischer Mathematiker, der sich mit projektiver Differentialgeometrie befasste, und Professor an der University of Chicago.

8 George David Birkhoff (1884–1944) war ein US-amerikanischer Mathematiker mit Arbeiten in der Ergodentheorie, Zahlentheorie, Relativitätstheorie, zum Dreikörperproblem und zum Vier-Farben-Satz. Er war Professor an den Universitäten Princeton und Havard.

Lösungen von (L) und (L^+) geometrisch veranschaulichen und umgekehrt hat man dadurch auch eine Quelle für Vermutungen über neue mögliche Sätze und auch deren analytische Beweise.

Hinsichtlich der Ergebnisse von Birkhoff schreibt Barrett (1969), S. 431: „Obwohl bei jeder Arbeit über Differentialgleichungen dritter Ordnung der Hinweis auf Birkhoffs Artikel nicht fehlen darf, werden seine Ergebnisse und Methoden selten erwähnt.“ Daher werden nun in der hier vorliegenden Arbeit mehrere seiner geometrisch begründeten Resultate auch noch analytisch bewiesen. Dazu werden in Abschnitt 3.1 zunächst geometrische Eigenschaften der Integralkurve C wie etwa das Auftreten von Doppelpunkten, Doppeltangenten, Selbstschneidungen, Selbstberührungen, der Treffpunktfreiheit bzw. der Schnittpunktfreiheit der Tangenten mit dem vorhergehenden bzw. nachfolgenden Kurvenstück und der Spiralform durch analytische Bedingungen an Lösungen von (L) und (L^+) ausführlich charakterisiert. In Abschnitt 3.2 wird dann ein von Birkhoff geometrisch begründeter allgemeiner Trennungssatz richtiggestellt und in verallgemeinerter Form analytisch bewiesen. Außerdem werden neue Sätze über die Nullstellenverteilung der Lösungen aufgestellt und mittels der Integralkurve C geometrisch veranschaulicht.

Für viele Aussagen über die Lösungen der Differentialgleichung (L) bzw. (L^+) genügt es anstelle von Bedingungen an die Koeffizienten p, q, r vorauszusetzen, dass die Differentialgleichung zu einer gewissen Klasse gehört, was heißen soll, dass bei den Lösungen und deren (verallgemeinerten) Ableitungen gewisse Nullstellenkonfigurationen nicht auftreten. So ist etwa die Zugehörigkeit der Differentialgleichung (L) in J zur Klasse K_{II} (bzw. K_{I}) dadurch definiert, dass es zu beliebigen Stellen $c, d \in J$ mit $c < d$ (bzw. $d < c$) keine nichttriviale Lösung y von (L) gibt mit

$$y(c) = y'(c) = y(d) = 0 \neq y'(d).$$

Bei einer Differentialgleichung (L) der Klasse K_{II} gibt es also keine nichttriviale Lösung y, die rechts von einer zweifachen Nullstelle c noch eine einfache Nullstelle d besitzt. Geometrisch bedeutet die Zugehörigkeit von (L) zur Klasse K_{II} zunächst, dass jede Tangente von C das nachfolgende Kurvenstück höchstens berührt, aber nicht schneidet. Analog bedeutet die Zugehörigkeit von (L) zur Klasse K_{I}, dass jede Tangente von C das vorhergehende Kurvenstück höchstens berührt, aber nicht schneidet. Weiter folgt aus der Zugehörigkeit von (L) zur Klasse $K_{\mathrm{I}} \cup K_{\mathrm{II}}$ zunächst notwendig, dass die Integralkurve eine nach außen bzw. nach innen fortlaufende Spiralform hat.

Eigenschaften dieser Klassen werden in Kapitel 4 bewiesen hinsichtlich Charakterisierungen der Diskonjugiertheit, Charakterisierung der nichtoszillatorischen Lösungen als die nullstellenfreien Lösungen, Existenz von nichtnegativen (nichttrivialen) Lösungen und von stark oszillatorischen zweidimensionalen Unterräumen, Äquivalenz der Oszillation von (L) und (L^+), Diskonjugiertheit an den Intervallgrenzen und Existenz von nullstellenfreien Lösungen. Zu Letzterem werden auch die entsprechenden Aussagen für die homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung in einem Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ verglichen.
Ferner werden in Abschnitt 4.6 die von Birkhoff 1911 mittels der Integralkurve C geometrisch formulierte und begründete Charakterisierung der Klasse $K_{\mathrm{I}} \cup K_{\mathrm{II}}$ durch die Spiralform mit möglichen Selbstberührungen unter Verwendung der Begriffe Doppelpunkt, Doppeltangente, Selbstschneidung, Selbstberührung und Selbstdurchsetzung von C hier analytisch beschrieben, analytisch bewiesen und die einzelnen Beweisschritte mittels der Integralkurve C veranschaulicht.
Dabei besitzt eine Integralkurve $C \in K_{\mathrm{I}}$ eine nach außen fortlaufende Spiralform, bei der die Kurve in einem Kurvenpunkt vom nachfolgenden Kurvenstück höchstens berührt und nicht durchsetzt wird. Eine Kurve $C \in K_{\mathrm{II}}$ besitzt eine nach innen fortlaufende Spiralform, bei der die Kurve in einem Kurvenpunkt vom vorhergehenden Kurvenstück höchstens berührt, aber nicht durchsetzt wird.
Es zeigt sich, dass der analytische Beweis wesentlich aufwendiger als der geometrische ist und etlicher Hilfssätze bedarf. In diesem Zusammenhang werden auch Hilfspunkte im Intervall J verwendet, die als Endpunkte maximaler Intervalle von bestimmten Klassenzugehörigkeiten definiert sind. Es werden Wechselbeziehungen zwischen diesen Hilfspunkten, insbesondere Eigenschaften der durch

die ersten konjugierten Punkte gegebenen Funktion η beschrieben und auch neue Erkenntnisse zur Differenzierbarkeit von η hergeleitet.

Herrn Prof. Dr. Horst Herold danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

1 Nullstellenverteilung bei komplexwertigen Lösungen und deren Ableitungen 12

1.1 Hilfssätze 12

1.2 Hilfsformeln 17

1.3 Nullstellenverteilung der Lösungen für komplexwertige Koeffizienten 19

1.4 Nullstellenfreiheit der komplexwertigen Produktfunktion *ww'w"* 21

1.5 Nullstellenverteilung der reellwertigen Lösungen bei reellwertigen Koeffizienten 22

1.6 Weitere Bedingungen zur Nullstellenverteilung der Lösungen für komplexwertige Koeffizienten 23

1.7 Weitere Bedingungen zur Nullstellenverteilung der reellwertigen Lösungen bei reellwertigen Koeffizienten 24

2 Beziehungen zwischen der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung (L) **und ihrer Adjungierten** (L^+) **..... 25**

2.1 Die Bilinearform *B* des Raumpaars (S,S^+) 25

2.2 Eigenschaften der speziellen Lösungen $u_j(.,x_0)$ und $u_m^+(.,x_0)$ 26

2.3 Das skalare Produkt *B* des dualen Raumpaars ($S,S^+;B$) 27

2.4 Definition der Klassen C_{I}^k, C_{II}^k, K_{I}, K_{II} mit den speziellen Lösungen $u_2(.,t)$ und $u_2^+(.,t)$ 27

2.5 Eigenschaften der Klassen 28

2.5.1 Notwendige Bedingung für die Klassen $C_{\mathrm{I}}^3(J)$ und $C_{\mathrm{II}}^3(J)$ 29

2.5.2 Charakterisierung der Klassen $C_{\mathrm{I}}^k(J)$ und $C_{\mathrm{II}}^k(J)$ durch die Lösungen u_j^+ von (L^+) und der Klassen $C_{\mathrm{I}}^{k+}(J)$ und $C_{\mathrm{II}}^{k+}(J)$ durch die Lösungen u_j von (L). 29

2.5.3 Wechselbeziehungen zwischen den Klassen von (L) und denen von (L^+) 29

2.6 Wechselbeziehungen zwischen den Lösungen von (L) und (L^+) 31

2.6.1 Wechselbeziehungen zwischen den speziellen Lösungen $u_j(.,c)$ und $u_j^+(.,c)$ .. 34

2.6.2 Adjungierte Fundamentalsysteme bzw. duale Basen 35

2.6.3 Die Koordinaten der zu zwei Lösungen orthogonalen Lösung 38

2.6.4 Die Koordinaten der speziellen Lösungen $u_j(.,t)$ und $u_j^+(.,t)$ 38

2.7 Wechselbeziehungen zwischen der Nullstellenverteilung der Lösungen von (L) und der Nullstellenverteilung der Lösungen von (L^+) 40

2.7.1 Oszillation von (L) und von (L^+) 40

2.7.2 Zweidimensionale Unterräume der Lösungsräume *S* und S^+ 41

2.7.3 Beschreibung der zweidimensionalen Unterräume durch Differentialgleichungen zweiter Ordnung 42

2.7.4 Trennung der Nullstellen zweier Funktionen 43

2.7.5 Weitere Wechselbeziehungen zwischen den Nullstellenverteilungen bei (L) und bei (L^+) 45

2.7.6 Charakterisierung spezieller Doppelkegelstrukturen der Menge *N* der nichtoszillatorischen Lösungen und der Menge *O* der oszillatorischen Lösungen beim halboffenen Intervall $J = [a,b[$ 46
2.7.7 Diskonjugiertheit in Teilintervallen von *J* 51

3 Die Integralkurve in der projektiven Ebene 53

3.1 Geometrische Interpretation der Nullstellen der Lösungen 53
3.1.1 Die Integralkurve *C* in der projektiven Ebene 53
3.1.2 Die Integralkurve *C* in der euklidischen Ebene 54
3.1.3 Tangenten von *C* 54
3.1.4 Krümmung von *C* 55
3.1.5 Das begleitende Dreieck von *C* 57
3.1.6 Analytische Beschreibung von Inzidenzen in $\mathbb{P}^2$ 58
3.1.7 Analytische Charakterisierung geometrischer Eigenschaften von *C* 64
3.1.8 Geometrische Beschreibung der Klassen $C_{\mathrm{I}}^{k}(J)$, $C_{\mathrm{II}}^{k}(J)$, $C_{\mathrm{I}}^{k+}(J)$, $C_{\mathrm{II}}^{k+}(J)$, $D(J)$ 67
3.1.9 Geometrische Beschreibung der Klassen $K_{\mathrm{I}}(J)$, $K_{\mathrm{II}}(J)$, $K_{\mathrm{I}}^{+}(J)$, $K_{\mathrm{II}}^{+}(J)$ 70
3.1.10 Weitere geometrische Eigenschaften der Klassen $C_{\mathrm{I}}(J)$, $C_{\mathrm{II}}(J)$, $K_{\mathrm{I}}(J)$, $K_{\mathrm{II}}(J)$ 73
3.1.11 Beispiel für einen geometrischen Beweis 76
3.2 Beziehungen zwischen den Nullstellenverteilungen der Lösungen von (L) und (L^+) 78
3.2.1 Nullstellenanzahl bei zwei nicht orthogonalen Lösungen 78
3.2.2 Nullstellenanzahl für zwei orthogonale Lösungen 81

4 Eigenschaften der Klassen K_{I} und K_{II} 101

4.1 Diskonjugiertheit 101
4.2 Charakterisierung der nichtoszillatorischen Lösungen als die nullstellenfreien Lösungen 110
4.3 Oszillation von (L) und (L^+) 111
4.4 Diskonjugiertheit an den Intervallgrenzen 113
4.5 Existenz von nullstellenfreien Lösungen 114
4.6 Analytischer Beweis der geometrischen Charakterisierung der Klasse $K_{\mathrm{I}} \cup K_{\mathrm{II}}$ durch die Spiralform der Integralkurve 115
4.6.1 Ein Hilfssatz zur Existenz einer Nullstelle bestimmter Lösungen 116
4.6.2 Definition und Wechselbeziehungen von maximalen Intervallen bestimmter Klassenzugehörigkeiten 119
4.6.3 Eigenschaften der Funktionen η und η_- 131
4.6.4 Analytische Definition der Klasse $K(J)$ zur Beschreibung der Spiralform der Integralkurve *C* 158
4.6.5 Übereinstimmung der Klasse $K(J)$ mit der Klasse $K_{\mathrm{I}}(J) \cup K_{\mathrm{II}}(J)$ 160

Literaturverzeichnis 181

Sachverzeichnis 185

1 Nullstellenverteilung bei komplexwertigen Lösungen und deren Ableitungen

Es wird die Verteilung der Nullstellen des Produkts $ww'w''$ für komplexwertige Lösungen w der homogenen linearen Differentialgleichung 3. Ordnung

(L) $$L[w] \equiv y''' + pw'' + qw' + rw = 0$$

im Intervall $J \subset \mathbb{R}$ untersucht. Die Endpunkte von J seien a und b ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$). Die Koeffizienten p, q, r seien in J komplexwertige und stetige Funktionen. Eine Lösung von (L) sei eine in J dreimal stetig differenzierbare komplexwertige Funktion w, welche in J die Gleichung $L[w] = 0$ erfüllt.

1.1 Hilfssätze

Bevor Resultate von Herold (1972) und Divakova (1970) verallgemeinert werden, wird mit Hilfssatz 1.1 eine Integralgleichung und mit Hilfssatz 1.2 eine Integralungleichung bereitgestellt. Der erste Hilfssatz wurde speziell für $f \equiv 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ und reellwertiges w von Beesack[9] (1956), S. 212, bewiesen.

Hilfssatz 1.1 Riccatische Differentialgleichung und Integralgleichung

Für die reellwertigen Funktionen $f, g \in C(]c,d[)$, $-\infty < c < d < \infty$, gelte $f > 0$,

$$f(x) = O\left(\left((x-c)(d-x)\right)^{-\alpha}\right) \quad \text{und} \quad g(x) = O\left(\left((x-c)(d-x)\right)^{-\beta}\right)$$

mit reellen Zahlen α und β, $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta < 3$.[10] Die spezielle Riccatische Differentialgleichung[11]

$$R[\varphi] \equiv \varphi' + \frac{\varphi^2}{f(x)} + g(x) = 0$$

habe eine reellwertige Lösung $\varphi \in C^1(]c,d[)$ mit

$$\varphi(x) = O\left(\left((x-c)(d-x)\right)^{-\gamma}\right)$$

mit einem $\gamma < 2$. Dann gilt für jede in $[c,d]$ stetige und stückweise stetig differenzierbare komplexwertige Funktion w mit

$$w(c) = w(d) = 0$$

die Integralgleichung

$$\int_c^d \left(f|w'|^2 - g|w|^2\right) dx = \int_c^d \frac{1}{f} |fw' - \varphi w|^2 \, dx .$$

---

9 Paul Richard Beesack war ein kanadischer Mathematiker und Professor an der Carleton University in Ottawa.

10 Das Landau-Symbol O (O-Notation, „groß O von … für den Grenzübergang …“) für den Vergleich der Größenordnung von Funktionen bei einem Grenzübergang wurde erstmals 1894 verwendet vom deutschen Zahlentheoretiker Paul Gustav Heinrich Bachmann (1837–1920) und bekannt gemacht vom deutschen Zahlentheoretiker Edmund Georg Hermann Landau (1877–1938).

11 Die Riccatische Differentialgleichung ist benannt nach dem italienischen Mathematiker Jacopo Francesco Riccati (1676–1754).

R. Pleier, *Nullstellenverteilung der Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung 3. Ordnung* (Distribution of the zeros of solutions of the ordinary linear differential equation of third order), D-92694 Etzenricht, 1979/2020

Bemerkung: Das rechte Integral ist bei positiver Funktion f immer nichtnegativ und es ist genau dann gleich Null, wenn $w = \lambda v$ in $]c,d[$ ist mit einem $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v(x) = \exp\int \frac{\varphi}{f}dx$.

Beweis von Hilfssatz 1.1: Die Riccatische Differentialgleichung $R[\varphi] = 0$ hat genau dann eine in ganz $]c,d[$ definierte und stetig differenzierbare reellwertige Lösung φ, wenn die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

(1.1) $\qquad (fv')' + gv = 0$

eine in $]c,d[$ nullstellenfreie reellwertige Lösung v (v differenzierbar und fv' stetig differenzierbar) besitzt, wobei $\varphi = fv'/v$ bzw. $v = \exp\int \frac{\varphi}{f}dx$ ist (Coppel[12] 1971, S. 6, Th. 3).

Gemäß dem Beweis des Hilfssatzes 1 von Herold (1972) gelten dann in jedem Teilintervall von $]c,d[$, in dem w stetig differenzierbar ist, mit einer reellwertigen Lösung $\varphi \in C^1(]c,d[)$ von $R[\varphi] = 0$ und der damit definierten nullstellenfreien Lösung $v = \exp\int \frac{\varphi}{f}dx$ von (1.1) die Umformungen

$$\left(\frac{|w|^2}{v}\right)' = -|w|^2\frac{v'}{v^2} + \frac{1}{v}(w'\overline{w} + w\overline{w}'),$$

$$-v'\left(\frac{|w|^2}{v}\right)' = \frac{1}{v^2}\left(v'^2|w|^2 - vv'(w'\overline{w} + w\overline{w}')\right),$$

$$\begin{aligned}
|w'|^2 - v'\left(\frac{|w|^2}{v}\right)' &= \frac{1}{v^2}\left(v^2|w'|^2 + v'^2|w|^2 - vv'w\overline{w}' - vv'w'\overline{w}\right) \\
&= \frac{1}{v^2}(vw' - v'w)(v\overline{w}' - v'\overline{w}) = \frac{1}{v^2}|vw' - v'w|^2 \\
&= v^2\left|\left(\frac{w}{v}\right)'\right|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f|w'|^2 &= fv'\left(\frac{|w|^2}{v}\right)' + fv^2\left|\left(\frac{w}{v}\right)'\right|^2 \\
&= \left(fv'\frac{|w|^2}{v}\right)' - (fv')'\frac{|w|^2}{v} + fv^2\left|\left(\frac{w}{v}\right)'\right|^2 && (fv'/v = \varphi,\ (fv')'/v = -g) \\
&= \left(\varphi|w|^2\right)' + g|w|^2 + fv^2\left|\left(\frac{w}{v}\right)'\right|^2.
\end{aligned}$$

Da die Funktion f in $]c,d[$ nullstellenfrei vorausgesetzt ist (f ist positiv in $]c,d[$ oder negativ in $]c,d[$), folgt weiter

$$v\cdot\left(\frac{w}{v}\right)' = w' - \frac{wv'}{v} = \frac{1}{f}(fw' - \varphi w) \qquad (v'/v = \varphi/f),$$

[12] William Andrew Coppel (1930–) ist ein australischer Mathematiker, der an der University of Cambridge (England) promovierte und Professor war an der Australian National University in Canberra.

$$fv^2\left|\left(\frac{w}{v}\right)'\right|^2 = \frac{1}{f}\left|fw' - \varphi w\right|^2$$

und

$$f|w'|^2 - g|w|^2 = \left(\varphi|w|^2\right)' + \frac{1}{f}\left|fw' - \varphi w\right|^2 .$$

Im offenen Intervall $]c,d[$ erhält man bei dem stetigen Integranden $f|w'|^2 - g|w|^2$ für die Stammfunktion bzw. das unbestimmte Integral die Gleichung

$$\text{(1.2)} \qquad \int\left(f|w'|^2 - g|w|^2\right)dx = \frac{fv'|w|^2}{v} + \int fv^2\left|\left(\frac{w}{v}\right)'\right|^2 dx$$

$$= \varphi|w|^2 + \int\frac{1}{f}\left|fw' - \varphi w\right|^2 dx .$$

Aufgrund der vorausgesetzten Größenordnung der Funktionen f und g beim Grenzübergang $x \longrightarrow c$ ist der Quotient $f(x)/(x - c)^{-\alpha}$ beschränkt bzw. ist

$$|f(x)| \le M/(x - c)^{\alpha}$$

mit einer reellen Konstanten M. Da außerdem $|w'|^2$ in c stetig und damit beschränkt ist, gilt

$$|f(x)|\,|w'(x)|^2 \le K/(x - c)^{\alpha}$$

in einer Umgebung von c mit einer reellen Konstanten K. Da das sog. uneigentliche Integral (mit unbeschränktem Integranden)

$$\int_c^{x_0}\frac{K}{(x-c)^{\alpha}}\,dx = \lim_{c_1\searrow c}\int_{c_1}^{x_0}K(x-c)^{-\alpha}\,dx = \lim_{c_1\searrow c}\left.\frac{K(x-c)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{c_1}^{x_0} = \frac{K(x_0-c)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

als Grenzwert existiert ($c < c_1 < x_0 < d$, $1 - \alpha > 0$), konvergiert nach dem Majorantenkriterium[13] auch das dadurch majorisierte uneigentliche Integral

$$\int_c^{x_0} f|w'|^2\,dx .$$

Weiter ist beim Grenzübergang $x \longrightarrow c$ der Quotient $g(x)/(x - c)^{-\beta}$ beschränkt bzw.

$$|g(x)| \le \tilde{M}/(x-c)^{\beta}$$

in einer Umgebung von c mit einer reellen Konstanten $\tilde{M}$. Da außerdem w in c (rechtsseitig) differenzierbar und $w(c) = 0$ ist, ist

$$\lim_{x\searrow c}\frac{w(x) - 0}{(x-c)} = w'(c) \in \mathbb{C},$$

also in einer rechtsseitigen Umgebung von c der Quotient $w(x)/(x - c)$ beschränkt und $|w(x)| \le \tilde{K}\cdot(x-c)$ bzw.

$$|w(x)|^2 \le \tilde{K}^2\cdot(x-c)^2$$

mit einer reellen Konstanten $\tilde{K}$. Insgesamt gilt dann in einer Umgebung von c die Abschätzung

$$|g(x)|\,|w(x)|^2 \le \frac{\tilde{M}\tilde{K}^2}{(x-c)^{\beta-2}} .$$

Da das uneigentliche Integral (mit unbeschränktem Integranden)

[13] Das Majorantenkriterium für die Existenz bzw. Konvergenz eines uneigentlichen Integrals bei nicht beschränktem Integranden findet man bei Mangoldt, Knopp (1975), Band 3, S. 479. Hans Karl Friedrich von Mangoldt (1854–1925) war ein deutscher Mathematiker und königlich preußischer Geheimer Regierungsrat. Konrad Theodor Hermann Knopp (1882–1957) war ein deutscher Mathematiker.

$$\int_c^{x_0} \frac{\tilde{M}\tilde{K}^2}{(x-c)^{\beta-2}}\,dx = \lim_{c_1 \searrow c} \int_{c_1}^{x_0} \tilde{M}\tilde{K}^2 (x-c)^{2-\beta}\,dx = \lim_{c_1 \searrow c} \frac{\tilde{M}\tilde{K}^2 (x-c)^{3-\beta}}{3-\beta}\Bigg|_{c_1}^{x_0} = \frac{\tilde{M}\tilde{K}^2 (x_0-c)^{3-\beta}}{3-\beta}$$

als Grenzwert existiert ($c < c_1 < x_0 < d$, $3 - \beta > 0$), existiert nach dem Majorantenkriterium auch das dadurch majorisierte uneigentliche Integral

$$\int_c^{x_0} g|w|^2\,dx\,.$$

Da Analoges auch für die rechte Intervallgrenze d gilt, existiert insgesamt das uneigentliche Integral

$$\int_c^d \left(f|w'|^2 - g|w|^2\right) dx = \lim_{c_1 \searrow c} \int_{c_1}^{x_0} \left(f|w'|^2 - g|w|^2\right) dx + \lim_{d_1 \nearrow d} \int_{x_0}^{d_1} \left(f|w'|^2 - g|w|^2\right) dx\,.$$

Da für den Grenzübergang $x \longrightarrow c$ mit reellen Konstanten M^* und $\tilde{K}$ die Abschätzungen

$$|\varphi(x)| \le M^*(x\text{-}c)^{-\gamma}\,,\ |w(x)|^2 \le \tilde{K}^2 \cdot (x-c)^2$$

und somit

$$|\varphi(x)|\,|w(x)|^2 \le M^*\tilde{K}^2 (x-c)^{2-\gamma}$$

gelten, konvergiert bei diesem Grenzübergang wegen $2 - \gamma > 0$ der erste Summand der rechten Seite von (1.2). Da auch die linke Seite von (1.2) konvergiert, gilt dies dann auch für den zweiten Summanden der rechten Seite. Da Analoges für den Grenzübergang $x \longrightarrow d$ gilt, erhält man für w die Integralgleichung

(1.3) $$\int_c^d \left(f|w'|^2 - g|w|^2\right) dx = \Big[\varphi|w|^2\Big]_c^d + \int_c^d \frac{1}{f}|fw' - \varphi w|^2\,dx\,.$$ □

Zu beachten ist, dass die Beziehung (1.3) auch für $f < 0$ in $]c,d[$ gilt. Dies wird beim Beweis des nachfolgenden Hilfssatzes 1.2, b) und von Satz 1.2, (3), (4), (5) benötigt.

Im Spezialfall, dass die Funktionen f, g und φ im gesamten Intervall J stetig sind, existieren für c, $d \in J$ die in (1.3) aufgeführten (eigentlichen) Integrale und der erste Summand der rechten Seite für beliebige Werte $w(c)$, $w(d) \in \mathbb{C}$. Weiter ist die Existenz einer Lösung $\varphi \in C([c,d])$ der Dgl. $R[\varphi] = 0$ insbesondere dann gesichert, wenn die Dgl. (1.1) eine im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ nullstellenfreie reellwertige Lösung v besitzt (Coppel 1971, S. 6, Th. 3). Die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (1.1) besitzt nun genau dann eine in $[c,d]$ nullstellenfreie reellwertige Lösung, wenn sie in $[c,d]$ diskonjugiert ist, d. h. wenn jede nichttriviale Lösung von (1.1) in $[c,d]$ höchstens eine Nullstelle hat (Coppel 1971, S. 5, Th.1). Damit kann der nachfolgende zweite Hilfssatz mit der Bereitstellung einer Integralungleichung bewiesen werden.

Hilfssatz 1.2 Integralungleichung

a) Es sei c, $d \in J$ mit $c < d$. Die reellwertigen Funktionen f und g seien in J stetig und es sei

$$f > 0 \text{ in } J.$$

Dann gilt für jede in $[c,d]$ stetige und stückweise stetig differenzierbare komplexwertige Funktion w mit $w \not\equiv 0$ in $[c,d]$ die Integralungleichung

(1.4) $$\int_c^d \left(f|w'|^2 - g|w|^2\right) dx > 0,$$

falls noch eine der folgenden drei Bedingungen erfüllt ist:

1) $w(c) = w(d) = 0$ und die homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung (1.1) ist in J diskonjugiert, besitzt also die Eigenschaft D = Diskonjugiertheit und somit in jedem abgeschlossenen Teilintervall $[c,d]$ eine nullstellenfreie Lösung v;
2) $w(c) = 0$ und (1.1) hat in J die Eigenschaft D^+:
   Zu jedem Teilintervall $[c,d] \subseteq J$ gibt es eine Lösung $v > 0$ in $[c,d]$ mit $v'(d) \ge 0$;

3) $w(d) = 0$ und (1.1) hat in J die Eigenschaft D^-:

Zu jedem Teilintervall $[c,d] \subseteq J$ gibt es eine Lösung $v > 0$ in $[c,d]$ mit $v'(c) \leq 0$.

b) Ist anstelle von $f > 0$ in J jetzt

$$f < 0 \text{ in } J,$$

so ist das in (1.4) angegebene Integral negativ,

$$\int_c^d \left(f\,|w'|^2 - g\,|w|^2 \right) dx < 0,$$

falls noch eine der oben in a) angegebenen Bedingungen erfüllt ist.

Beweis von Hilfssatz 1.2: a) 1) Wegen der Stetigkeit der Funktionen f, g, w und w' in $[c,d]$ existiert das Integral auf der linken Seite von (1.3). Aufgrund der Diskonjugiertheit von (1.1) in J und damit in $[c,d]$ existiert eine in $[c,d]$ nullstellenfreie Lösung v von (1.1) und dann mit $\varphi = fv'/v$ eine Lösung $\varphi \in C([c,d])$ der Dgl. $R[\varphi] = 0$. Wegen der Voraussetzung $w(c) = w(d) = 0$ verschwindet dann der erste Summand der rechten Seite von (1.3):

$$\left[\varphi\,|w|^2 \right]_c^d = 0.$$

Das Integral auf der rechten Seite von (1.3) existiert, ist nichtnegativ und von Null verschieden, da sonst $w = \lambda v$ in $]c,d[$ mit einem $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v(x) = \exp \int \frac{\varphi}{f} dx$ $(\neq 0)$ gilt und dann $0 = w(c) = \lambda v(c)$, $\lambda = 0$, $w \equiv 0$ in $[c,d]$ folgt, im Widerspruch zur Voraussetzung. Demzufolge ist die rechte Seite von (1.3) positiv.

2) Aufgrund der Eigenschaft D^+ ist $\varphi = fv'/v \in C([c,d])$ eine Lösung von $R[\varphi] = 0$ mit

$$\varphi(d) = f(d)v'(d)/v(d) \geq 0.$$

Wegen $\varphi(c)\,|w(c)|^2 = 0$ und $\varphi(d)\,|w(d)|^2 \geq 0$ ist dann der erste Summand der rechten Seite von (1.3) nichtnegativ:

$$\left[\varphi\,|w|^2 \right]_c^d = \varphi(d)\,|w(d)|^2 - \varphi(c)\,|w(c)|^2 \geq 0.$$

Da $w \not\equiv 0$ in $[c,d]$ gilt, folgt wie in Beweisteil 1), dass der zweite Summand der rechten Seite von (1.3) und damit die gesamte rechte Seite von (1.3) positiv ist.

3) Der Beweis von 3) ergibt sich analog zu Beweisteil 2).

b) Der Beweis der Aussage b) für negatives f erfolgt analog zur Aussage a) für positives f. □

Bemerkungen zu den Eigenschaften D, D^+ und D^-:

1. Falls die Koeffizientenbedingungen

   $$f > 0 \text{ und } g \leq 0 \text{ in } J$$

   gelten, ist die Differentialgleichung (1.1) in J diskonjugiert (Eigenschaft D) und hat (1.1) in J die Eigenschaften D^+ und D^-.

2. Die Differentialgleichung (1.1) hat in J die Eigenschaft D^+ (bzw. D^-), falls $b \in J$ (bzw. $a \in J$),

   $$f > 0,\ g \geq 0 \text{ in } J$$

   ist und eine Lösung v von (1.1) existiert mit

   $$v'(b) = 0 \text{ (bzw. } v'(a) = 0) \text{ und } v \neq 0 \text{ in } J.$$

3. Die Differentialgleichung (1.1) hat in $J = [a,b[$ (bzw. $J =]a,b]$) die Eigenschaft D^+ (bzw. D^-), falls

   $$f > 0,\ g \geq 0 \text{ in } [a,b[\text{ (bzw. }]a,b]),$$

   $$\int_c^b \frac{dt}{f(t)} = \infty,\ g \not\equiv 0 \text{ in jedem } [c,b[\text{ (bzw. }]a,c]),$$

   $a < c < b$, und (1.1) in $]a,b[$ diskonjugiert ist (Coppel 1971, S. 14, Prop. 5).

Für reellwertiges w stimmt Hilfssatz 1.2, 1) überein mit L.1.12, Th.1.11 (i $\Rightarrow$ vi), Hilfssatz 1.2, 2) überein mit L.1.11 ($\Leftarrow$) und Hilfssatz 1.2, 2) in Verbindung mit Bemerkung 3 ($b = \infty$) überein mit Th.1.9 von Barrett (1969). Umgekehrt lassen sich aber auch aus den Aussagen für reellwertige w die entsprechenden für komplexwertige w folgern. Denn mit $w = w_1 + iw_2$, $w_1 = \operatorname{Re} w$, $w_2 = \operatorname{Im} w$, $i = \sqrt{-1}$ gilt in J $|w|^2 = w_1^2 + w_2^2$ und $|w'|^2 = w_1'^2 + w_2'^2$.

1.2 Hilfsformeln

Es werden jetzt einige Hilfsformeln angegeben, die für beliebige in J genügend oft stetig differenzierbare komplexwertige Funktionen h und w gelten und die für die Herleitung hinreichender Bedingungen für spezielle Nullstellenverteilungen der Lösungen von (L) verwendet werden können. Partielle Integration liefert

$$\int h\bar{w}w'''dx = h\bar{w}w'' - \int h'\bar{w}w''dx - \int h\bar{w}'w''dx\,, \tag{1.5}$$

$$\int h\bar{w}w''dx = h\bar{w}w' - \int h'\bar{w}w'dx - \int h|\bar{w}'|^2dx \tag{1.6}$$

und

$$\int h\bar{w}w'dx = h|w|^2 - \int h'|w|^2dx - \int h\bar{w}'wdx\,.$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$2\int h\operatorname{Re}(\bar{w}w')dx = h|w|^2 - \int h'|w|^2dx$$

und somit

$$2\int h\bar{w}w'dx = h|w|^2 - \int h'|w|^2dx + 2i\int h\operatorname{Im}(\bar{w}w')dx\,. \tag{1.7}$$

Für Funktionen $w, s \in C^3(J)$, $p \in C^2(J)$, $q \in C^1(J)$, $r \in C(J)$ erhält man mit Hilfe der Beziehungen (1.5), (1.6) und (1.7)

$$\begin{aligned}2\int s\bar{w}L[w]dx = &\; -s|w'|^2 - (-s''+(sp)'-sq)|w|^2 + 2s\bar{w}w'' + 2(sp-s')\bar{w}w' \\ &+ \int(2sr-(sq)'+(sp)''-s''')|w|^2dx + \int(3s'-2sp)|w'|^2dx \\ &- 2\int is\operatorname{Im}(\bar{w}'w'')dx - 2\int i(-s''+(sp)'-sq)\operatorname{Im}(\bar{w}w')dx\,.\end{aligned}$$

Übergang zum Realteil liefert

$$\begin{aligned}2\operatorname{Re}\int s\bar{w}L[w]dx = &\; -F_s[w] + \int\left(f_0|w|^2 + f_1|w'|^2\right)dx \\ &+ 2\int\operatorname{Im}s\operatorname{Im}(\bar{w}'w'')dx + 2\int\operatorname{Im}(-s''+(sp)'-sq)\operatorname{Im}(\bar{w}w')dx\end{aligned}$$

mit

$$F_s[w] = \operatorname{Re}\left[s|w'|^2 + (-s''+(sp)'-sq)|w|^2 - 2s\bar{w}w'' - 2(sp-s')\bar{w}w'\right]$$

und

$$f_0 = \operatorname{Re}[2sr-(sq)'+(sp)''-s'''],$$
$$f_1 = \operatorname{Re}[3s'-2sp].$$

Ist nun w eine Lösung von (L) (d. h. $L[w] \equiv 0$), s reellwertig ($\operatorname{Im} s \equiv 0$) und

$$\operatorname{Im}(-s''+(sp)'-sq) = s'\operatorname{Im}p + s\operatorname{Im}(p'-q) \equiv 0$$

in J, so gilt für $c, d \in J$

(1.8) $$F_s[w]\Big|_c^d = \int_c^d \left(f_0 |w|^2 + f_1 |w'|^2 \right) dt .$$

Gelten nun noch im Intervall J die Vorzeichenbedingungen

$$f_1 \geq 0, f_0 \geq 0 \qquad (\text{bzw. } f_1 \leq 0, f_0 \leq 0),$$

so ist für jede nichttriviale Lösung w von (L) gemäß (1.8) die Funktion $F_s[w](x)$ in J monoton steigend (bzw. monoton fallend) und so gibt es insbesondere keine $c, d \in J$ mit $c < d$ und

$$F_s[w](c) > 0 \geq F_s[w](d) \quad (\text{bzw. } F_s[w](c) < 0 \leq F_s[w](d))$$

oder

$$F_s[w](c) \geq 0 > F_s[w](d) \quad (\text{bzw. } F_s[w](c) \leq 0 < F_s[w](d)).$$

Im Folgenden soll die **Schreibweise**

$$f_0 \underset{\cdot}{>} 0 \quad (\text{bzw. } f_0 \underset{\cdot}{<} 0)$$

mit dem **Symbol** $\underset{\cdot}{>}$ bzw. $\underset{\cdot}{<}$ bedeuten, dass $f_0 \geq 0$ (bzw. $f_0 \leq 0$) und $f_0 \not\equiv 0$ in jedem Teilintervall von J ist.

Gelten in J die stärkeren Vorzeichenbedingungen

$$f_1 \geq 0 \text{ und } f_0 \underset{\cdot}{>} 0 \quad (\text{bzw. } f_1 \leq 0 \text{ und } f_0 \underset{\cdot}{<} 0)$$

und ist $]c,d[\subseteq J$ ein beliebiges offenes Intervall, so ist für jede nichttriviale Lösung w von (L) wegen der Stetigleit zunächst $|w|^2 > 0$ zumindest in einer Umgebung $U(x_0)$ einer Stelle $x_0 \in]c,d[$. Wegen der Stetigkeit von f_0 ist dann auch $f_0 > 0$ ($f_0 < 0$) in einer Umgebung $U(x_1) \subseteq U(x_0)$ einer Stelle $x_1 \in U(x_0)$. Weiter ist dann $f_0 |w|^2 > 0$ (< 0) in $U(x_1)$ und somit der Integrand $f_0 |w|^2 + f_1 |w'|^2 \not\equiv 0$ in $]c,d[$. Daher ist die Funktion $F_s[w](x)$ in J streng monoton steigend (bzw. streng monoton fallend). Es gibt also insbesondere keine Stellen $c, d \in J$ mit $c < d$ und

$$F_s[w](c) \geq 0 \geq F_s[w](d) \quad (\text{bzw. } F_s[w](c) \leq 0 \leq F_s[w](d)).$$

Die Vorzeichenbedingungen für $F_s[w]$ lassen sich nun in Vorzeichenbedingungen für w, w', w'' und Ausdrücke von s, p, q und r übertragen. Für jede nichttriviale Lösung w von (L) und jedes $x_0 \in J$ ist nämlich

$F_s[w](x_0) = 0$, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a) $w(x_0) = w'(x_0) = 0$;

b) $w'(x_0) = w''(x_0) = 0$ und $-s''+(sp)'-sq \equiv 0$;

$F_s[w](x_0) \geq 0$ (>), falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

c) $w'(x_0) = w''(x_0) = 0$ und $-s''+(sp)'-sq \geq 0$ (>);

d) $w(x_0) = 0$ und $s \geq 0$;

e) $w''(x_0) = 0$ und $s(x) = \exp\int p(x)dx =: \sigma(x)$ (wobei hier sogar $p \in C(J)$ genügt), p, q reellwertig, $q \leq 0$ (<);

$F_s[w](x_0) \leq 0$ (<), falls

f) $w'(x_0) = w''(x_0) = 0$ und $-s''+(sp)'-sq \leq 0$ (<).

1.3 Nullstellenverteilung der Lösungen für komplexwertige Koeffizienten

Mit den eben durchgeführten Betrachtungen zur Monotonie von $F_s[w]$ in J und zum Vorzeichen von $F_s[w](x_0)$ ergeben sich die drei nachfolgenden Sätze über die Nullstellenverteilung der Lösungen von (L).

Satz 1.1 Ausschluss bestimmter Nullstellenkonfigurationen
a) Für die komplexwertigen Koeffizienten $p \in C^2(J)$, $q \in C^1(J)$, $r \in C(J)$ von (L) seien mit einer reellwertigen Funktion $s \in C^3(J)$ in J die Gleichung

(1.9) $$s'\cdot \operatorname{Im} p + s\cdot \operatorname{Im}(p' - q) \equiv 0$$

und mit den Funktionen

$$f_0 = \operatorname{Re}\left[2sr - (sq)' + (sp)'' - s'''\right],$$
$$f_1 = \operatorname{Re}\left[3s' - 2sp\right]$$

die unten noch jeweils angegebenen Bedingungen erfüllt. Dann gibt es für jede nichttriviale Lösung w von (L) keine Stellen $c, d \in J$ mit $c < d$ und einer der folgenden Eigenschaften:

(1) $w(c) = w'(c) = 0 = w(d) = w'(d)$, $\quad f_0 \gneq 0, f_1 \geq 0$;

(2) $w(c) = w'(c) = 0 = w'(d) = w''(d)$, $\quad f_0 \gneq 0\ (\geq), f_1 \geq 0$, $-s''+(sp)'-sq \leq 0\ (<)$;

(3) $w'(c) = w''(c) = 0 = w'(d) = w''(d)$, $\quad -s''+(sp)'-sq \equiv 0, f_0 = 2s \operatorname{Re} r \gneq 0, f_1 \geq 0$;

(4) $w(c) = w'(c) = 0 = w(d)$, $\quad f_0 \lneq 0, f_1 \leq 0, s \geq 0$;

(5) $w'(c) = w''(c) = 0 = w(d)$, $\quad f_0 \lneq 0\ (\leq), f_1 \leq 0, s \geq 0$, $-s''+(sp)'-sq \leq 0\ (<)$.

b) Sind für reellwertige $p \in C(J)$, $q \in C^1(J)$, komplexwertiges $r \in C(J)$, $s = \sigma := \exp\int p(x)dx$ und damit $f_0 = \sigma\cdot[2 \operatorname{Re} r - pq - q']$, $f_1 = \sigma\cdot p$, $F_s[w] = \sigma\cdot[\,|w'|^2 - q\,|w|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{w}w'')]$ die jeweils angegebenen Bedingungen erfüllt, dann gibt es für keine nichttriviale Lösung w von (L) Stellen $c, d \in J$ mit $c < d$ und einer der folgenden Eigenschaften:

(6) $w(c) = w'(c) = 0 = w''(d)$, $\quad 2 \operatorname{Re} r - q' - pq \lneq 0\ (\leq), p \leq 0, q \leq 0\ (<)$;

(7) $w'(c) = w''(c) = 0 = w''(d)$, $\quad \operatorname{Re} r \lneq 0, p \leq 0, q \equiv 0$.

Bemerkung: Falls $r \not\equiv 0$ in jedem Teilintervall von J ist, kann die Bedingung

$$f_0 \gneq 0, f_1 \geq 0 \qquad (\text{bzw. } f_0 \lneq 0, f_1 \leq 0)$$

durch

$$f_0 \geq 0, f_1 \geq 0, f_0 + f_1 \gneq 0 \qquad (\text{bzw. } f_0 \leq 0, f_1 \leq 0, f_0 + f_1 \lneq 0)$$

ersetzt werden, da in diesem Fall für jede nichttriviale Lösung w von (L) sowohl w als auch die Ableitung w' in keinem Teilintervall identisch verschwindet: Wäre nämlich $w' \equiv 0$ in einem offenen Teilintervall $J' \subseteq J$, dann ist $w'' \equiv 0$ und $w''' \equiv 0$ in J' und $w(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in J'$. Durch Wahl des Teilintervalls J' gilt o. E. (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) auch schon in diesem Intervall $w \neq 0$, $rw = L[w] \equiv 0$ und somit $r \equiv 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit ist unter diesen Voraussetzungen der Integrand $f_0|w|^2 + f_1|w'|^2 \gneq 0$ (bzw. $\lneq 0$) in J und das Integral auf der rechten Seite von (1.8) positiv (bzw. negativ).

Speziell für $p \equiv q \equiv 0$, $s \equiv 1$ ($f_0 = 2 \operatorname{Re} r$, $f_1 = 0$, $F_1[w] = |w'|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{w}w'')$) ergeben (4), (5), (6), (7) die Aussage 1 und mittels der Substitution $x = -t$ auch die Aussage 2 des Satzes 1 von Herold (1972).

Anstatt die Positivität (bzw. Negativität) des Integrals in (1.8), also

$$F_s[w](d) - F_s[w](c) = \int_c^d \left(f_1 |w'|^2 + f_0 |w|^2 \right) dt > 0 \text{ (bzw. } < 0) \text{ für } c < d,$$

$c, d \in J$, durch die in Satz 1.1 verwendeten Vorzeichenbedingungen $f_1 \geq 0, f_0 \gneq 0$ (bzw. $f_1 \leq 0, f_0 \lneq 0$) zu sichern, kann das Vorzeichen des Integrals auch mittels Hilfssatz 1.2, also hier durch Eigenschaften ($f_1 > 0$ bzw. $f_1 < 0$, D, D^+, D^-) der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

(1.10) $(f_1 v')' - f_0 v = 0$

und durch die Bedingung $w(c) = 0$ oder $w(d) = 0$ festgelegt werden. Nur für die Kriterien (3) und (7) von Satz 1.1 lassen sich hiermit keine analogen aufstellen, da bei diesen nicht $w(c) = 0$ oder $w(d) = 0$ gesichert ist. Bei der Formulierung des damit resultierenden Satzes 1.2 wird die Voraussetzung, dass die Differentialgleichung (1.10) in J die Eigenschaft D (= Diskonjugiertheit), D^+ bzw. D^- hat, abgekürzt angegeben durch D(1.10), D^+(1.10) bzw. D^-(1.10). Beim Beweis der Kriterien (1) und (2) von Satz 1.2 ist das in (1.8) angegebene Integral positiv und für die auszuschließenden Stellen $c, d \in J$ der Term $F_s[w]\big|_c^d$ jedoch nichtpositiv. Beim Beweis der Kriterien (3), (4) und (5) ist das Integral negativ und der Term $F_s[w]\big|_c^d$ nichtnegativ.

Satz 1.2 Ausschluss bestimmter Nullstellenkonfigurationen

a) Für die komplexwertigen Koeffizienten $p \in C^2(J)$, $q \in C^1(J)$, $r \in C(J)$ von (L), eine reellwertige Funktion $s \in C^3(J)$, die Funktionen $f_0 = \mathrm{Re}\left[2sr - (sq)' + (sp)'' - s'''\right]$ und $f_1 = \mathrm{Re}\left[3s' - 2sp\right]$ und die Differentialgleichung (1.10) seien in J die Bedingung (1.9) $s' \cdot \mathrm{Im}\, p + s \cdot \mathrm{Im}(p' - q) \equiv 0$ und die nachfolgend jeweils noch angegebenen Voraussetzungen erfüllt. Dann gibt es für jede nichttriviale Lösung w von (L) keine Stellen $c, d \in J$ mit $c < d$ und einer der folgenden Eigenschaften:

(1) $w(c) = w'(c) = 0 = w(d) = w'(d)$, $f_1 > 0$, D(1.10);

(2) $w(c) = w'(c) = 0 = w'(d) = w''(d)$, $f_1 > 0$, D^+(1.10), $-s'' + (sp)' - sq \leq 0$;

(3) $w(c) = w'(c) = 0 = w(d)$, $f_1 < 0$, D(1.10), $s \geq 0$;

(4) $w'(c) = w''(c) = 0 = w(d)$, $f_1 < 0$, D^-(1.10), $s \geq 0$, $-s'' + (sp)' - sq \leq 0$.

b) Sind für reellwertige $p \in C(J)$, $q \in C^1(J)$, komplexwertiges $r \in C(J)$ und das spezielle $s = \sigma = \exp\int p(x)dx$ ($f_0 = \sigma \cdot [2\,\mathrm{Re}\, r - pq - q']$, $f_1 = \sigma \cdot p$) die unten noch angegebenen Bedingungen erfüllt, dann gibt es für keine nichttriviale Lösung w von (L) Stellen $c, d \in J$ mit $c < d$ und der folgenden Eigenschaft:

(5) $w(c) = w'(c) = 0 = w''(d)$, $s = \sigma$, $p < 0$, D^+(1.10), $q \leq 0$.

Speziell für $p \equiv q \equiv 0$, $s(x) = x - a$ bzw. $s(x) = x - k$ ($k \in \mathbb{R}$) in $J = [a,b[$ ergibt (3) mit der Substitution $x = -t$ den Satz 2a und (1) den Satz 2b von Herold (1972).

1.4 Nullstellenfreiheit der komplexwertigen Produktfunktion $ww'w''$

Es werden jetzt noch hinreichende Kriterien dafür hergeleitet, dass für eine Lösung w von (L) die Produktfunktion

$$(ww'w'')(x) \neq 0 \text{ für alle } x > x_0 \ (x < x_0),\ x, x_0 \in J,$$

ist. Es sei in J wieder s reellwertig und die Bedingung (1.9) $s'\cdot\mathrm{Im}\, p + s\cdot\mathrm{Im}(p' - q) \equiv 0$ erfüllt.

Ist $f_0 \lneq 0, f_1 \leq 0$ (bzw. $f_0 \gneq 0, f_1 \geq 0$) in J und w eine nichttriviale Lösung von (L) mit $F_s[w](x_0) \leq 0$ ($x_0 \in J$), so folgt für die gemäß (1.8) streng monoton fallende (bzw. streng monoton steigende) Funktion $F_s[w](x)$ die Ungleichung

$$F_s[w](x) < 0 \text{ für } x > x_0 \ (x < x_0),\ x \in J.$$

Gilt andererseits $f_1 < 0$, $D^+(1.10)$ ($f_1 > 0$, $D^-(1.10)$) und ist w eine nichttriviale Lösung von (L) mit $w(x_0) = 0$ und $F_s[w](x_0) \leq 0$, so folgt mit Hilfssatz 1.2 aus (1.8) ebenfalls

$$F_s[w](x) < 0 \text{ für } x > x_0 \ (x < x_0),\ x \in J.$$

Setzt man noch speziell $s = \sigma = \exp\int p(x)dx$, p reellwertig und

$$-s''+(sp)'-sq = -\sigma q \geq 0,$$

also $q \leq 0$ voraus, so bekommt man für $x > x_0$ ($x < x_0$) die Ungleichung

$$0 > F_s[w](x) = \sigma(x)\cdot[\,|w'|^2 - q\,|w|^2 - 2\mathrm{Re}(\overline{w}w'')](x) \geq -2\sigma(x)\,\mathrm{Re}(\overline{w}\,w'')(x)$$

und somit $\mathrm{Re}(\overline{w}\,w'')(x) > 0$ und $(ww'')(x) \neq 0$.
Daraus folgt weiter

$$\mathrm{Re}(\overline{w}\,w')'(x) = |w'(x)|^2 + \mathrm{Re}(\overline{w}\,w'')(x) > 0$$

für $x > x_0$ ($x < x_0$)), $x \in J$, sodass $\mathrm{Re}(\overline{w}\,w')$ und dann auch w' höchstens eine Nullstelle im Intervall $J \cap \{x \geq x_0\}$ ($J \cap \{x \leq x_0\}$). Im Fall $w''(x_0) = 0$ hat w' und dann insgesamt $ww'w''$ keine Nullstelle in $J \cap \{x > x_0\}$ ($J \cap \{x < x_0\}$).

Speziell für $s = \sigma$ ist

$$-s''+(sp)'-sq = -\sigma q,$$
$$f_0 = \sigma\cdot[2\,\mathrm{Re}\, r - pq - q'] \text{ und}$$
$$f_1 = \sigma\cdot p.$$

Weiter ist stets $F_s[w](x_0) = 0$ im Falle $w(x_0) = w''(x_0) = 0$. Im Spezialfall $s = \sigma$ ist unter der Voraussetzung $q \equiv 0$ ($-s''+(sp)'-sq = -\sigma q \equiv 0$, $f_0 = 2\sigma\,\mathrm{Re}\, r$) noch $F_s[w](x_0) \leq 0$ im Falle $w'(x_0) = w''(x_0) = 0$. Damit erhält man den folgenden Satz, der insbesondere Verstärkungen der Aussagen von Satz 1.1 (6), Satz 1.2 (5) und Satz 1.1 (7) gibt.

Satz 1.3 Nullstellenfreiheit der Produktfunktion $ww'w''$
Es seien die Koeffizienten $p \in C(J)$, $q \in C^1(J)$ reellwertig und $r \in C(J)$ komplexwertig. Für die nichttriviale Lösung w von (L) gilt

$$(ww'w'')(x) \neq 0$$

für alle $x > x_0$ ($x < x_0$), $x, x_0 \in J$, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(1) $w(x_0) = w''(x_0) = 0$, $\quad s = \sigma$, $2\,\mathrm{Re}\, r - pq - q' \lneq 0$ ($\gneq$), $p \leq 0$ ($\geq$), $q \leq 0$;

(2) $w(x_0) = w''(x_0) = 0$, $\quad s = \sigma$, $p < 0$ ($>$), $D^+(1.10)$ ($D^-(1.10)$), $q \leq 0$;

(3) $w'(x_0) = w''(x_0) = 0$, $\quad s = \sigma$, $\mathrm{Re}\, r \lneq 0$ ($\gneq$), $p \leq 0$ ($\geq$), $q \equiv 0$.

Zu den Bedingungen (1) und (2) vergleiche man die von Divakova (1970) in Th.1 und Th.2 für $p \equiv q \equiv 0$ auf Strecken bzw. Gebieten in der komplexen Ebene aufgestellten Kriterien.

1.5 Nullstellenverteilung der reellwertigen Lösungen bei reellwertigen Koeffizienten

Sind die Koeffizienten p, q, r von (L) reellwertig und ist $y = u_2(.,c)$ die Lösung von (L) mit der Anfangsbedingung

$$y(c) = y'(c) = 0,\ y''(c) = 1,$$

so gilt $y > 0$ in $]c,b] \cap J$, falls die in Satz 1.1 (4) oder Satz 1.2 (3) gegebenen Bedingungen erfüllt sind. Die Bedingungen von Satz 1.1 (4) lauten speziell

für $s = \sigma^{2/3}$: $\quad 2r - q' - \frac{2}{3}pq + \frac{4}{27}p^3 + \frac{2}{3}pp' + \frac{1}{3}p'' \lneq 0$;

für $s = \sigma$: $\quad p \leq 0,\ 2r - pq - q' \lneq 0$;

für $s \equiv 1$: $\quad p \geq 0,\ 2r - q' + p'' \lneq 0$ (für $s \equiv 1, p \equiv 0$ siehe Hanan[14] (1961), Th.2.2).

Weiter gilt für die spezielle Lösung $y = u_2(.,c)$

$$yy' > 0 \text{ in }]c,b] \cap J,$$

falls mit einer Funktion $s \in C^3(J)$ in J

$$s > 0, f := -s'' + (sp)' - sq \geq 0$$

gilt und eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(1) $f_1 \leq 0, f_0 \lneq 0$,

(2) $f_1 < 0$, $D^+(1.10)$.

Zum Beweis zeigt man mittels $F_s[y](x)$, dass $(yy'')(x) > 0$ in allen $x \in J$, $x > c$, mit $y'(x) = 0$ gilt.

Analog erhält man Bedingungen dafür, dass $(yy'')(x) < 0$ in allen Nullstellen x von y' in $]c,b] \cap J$ gilt und somit sich die Nullstellen von y und y' in $]c,b] \cap J$ trennen: Für die reellwertige Lösung y von (L) gelte dazu mit einem $s \in C^3(J)$

$$s > 0, f \leq 0 \text{ und}$$

(1) $f_1 \geq 0, f_0 \gneq 0, F_s[y](c) \geq 0$ oder

(2) $f_1 > 0$, $D^+(1.10)$, $y(c) = 0$.

(Zu (1) für $s \equiv 1, p \equiv 0$ und damit $f = -q$, $f_1 = 0, f_0 = 2r - q'$ siehe Hanan (1961), S.937.)

Ferner gilt für die spezielle Lösung $y = u_2(.,c)$ in $]c,b] \cap J$ $yy'y'' > 0$, falls mit einem $s \in C^3(J)$ in J

$$s > 0, f \geq 0, s' - sp \geq 0 \text{ und}$$

(1) $f_1 \leq 0, f_0 \leq 0$ oder

(2) $f_1 < 0$, $D^+(1.10)$

erfüllt ist. Zum Beweis zeigt man mittels $F_s[y](x)$, dass aus $yy' > 0$ in $]c,d]$ $y''(d) > 0$ folgt. Speziell für $s = \sigma$ stimmen diese Bedingungen überein mit denen von Satz 1.3 (1), (2) für reellwertiges r.

[14] Maurice Hanan ist eine US-amerikanische Mathematikerin, die 1960 an der Carnegie Mellon University in Pittsburgh promovierte.

1.6 Weitere Bedingungen zur Nullstellenverteilung der Lösungen für komplexwertige Koeffizienten

Weitere Kriterien über die Nullstellenverteilung bei den Lösungen von (L) kann man in gleicher Weise gewinnen, wenn man (L) mit $s\overline{w}^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3$) multipliziert. Integration und Übergang zum Realteil liefern dann die Beziehungen

(1.11) $$2\,\mathrm{Re}\int s\,\overline{w}\,'L[w]dx = G_s[w] - \int\left(g_0|w|^2 + g_1|w'|^2 + g_2|w''|^2\right)dx$$
$$- 2\int\left(\mathrm{Im}(sr)\,\mathrm{Im}(w\overline{w}') + \mathrm{Im}(sp - s')\,\mathrm{Im}(\overline{w}'w'')\right)dx$$

mit

$$G_s[w] = \mathrm{Re}\left[sr|w|^2 + (sp - s')|w'|^2 + 2s\overline{w}'w''\right],$$
$$g_0 = \mathrm{Re}(sr)',\ g_1 = \mathrm{Re}(-s''+(sp)'-2sq),\ g_2 = 2\,\mathrm{Re}\,s;$$

(1.12) $$2\,\mathrm{Re}\int s\,\overline{w}\,''L[w]dx = H_s[w] - \int\left(h_0|w|^2 + h_1|w'|^2 + h_2|w''|^2\right)dx$$
$$-2\int\left(\mathrm{Im}\,s\,\mathrm{Im}(w'''\overline{w}'') + \mathrm{Im}(sq)\,\mathrm{Im}(w'\overline{w}'') - \mathrm{Im}(sr)'\,\mathrm{Im}(w\overline{w}')\right)dx$$

mit

$$H_s[w] = \mathrm{Re}\left[-(sr)'|w|^2 + sq|w'|^2 + s|w''|^2 + 2srw\overline{w}'\right],$$
$$h_0 = -\,\mathrm{Re}(sr)'',\ h_1 = \mathrm{Re}(2sr + (sq)'),\ h_2 = 2\,\mathrm{Re}(s' - 2sp);$$

(1.13) $$2\,\mathrm{Re}\int s\,\overline{w}\,'''L[w]dx = K_s[w] - \int\left(k_0|w|^2 + k_1|w'|^2 + k_2|w''|^2 + k_3|w'''|^2\right)dx$$
$$- 2\int\left(\mathrm{Im}(sp)\,\mathrm{Im}(w''\overline{w}''') + \mathrm{Im}\left((sq)' + sr\right)\mathrm{Im}(\overline{w}'w'') + \mathrm{Im}(sr)''\,\mathrm{Im}(w\overline{w}')\right)dx$$

mit

$$K_s[w] = \mathrm{Re}\left[(sr)''|w|^2 - \left((sq)' + sr\right)|w'|^2 + sp|w''|^2 - 2(sr)'w\overline{w}' + 2srw\overline{w}'' + 2sqw'\overline{w}''\right],$$
$$k_0 = \mathrm{Re}(sr)''',\ k_1 = -\,\mathrm{Re}((sq)'+sr),\ k_2 = \mathrm{Re}((sp)' + 2sq),\ k_3 = -\,2\,\mathrm{Re}\,s.$$

Andere Bedingungen zur Nullstellenverteilung der Lösungen für komplexwertige Koeffizienten

Andere Koeffizientenbedingungen erhält man, wenn man beispielsweise in der (durch Modifikation von (1.11) erhaltenen) Beziehung

$$2\,\mathrm{Re}\int s\,\overline{w}\,'L[w]dx = \hat{G}_s[w] - \int\left(g_0|w|^2 - 2\,\mathrm{Re}(sq)|w'|^2 + g_2|w''|^2\right)dx$$
$$+ 2\int\mathrm{Re}\left((sp - s')\overline{w}'w''\right)dx - 2\int\mathrm{Im}(sr)\,\mathrm{Im}(w\overline{w}')dx$$

mit

$$\hat{G}_s[w] = \mathrm{Re}\left[sr|w|^2 + 2s\overline{w}'w''\right]$$

statt der wieder auf (1.11) führenden Anwendung von (1.7) auf das zweite Integral der rechten Seite nun den Integranden folgendermaßen umformt:

Mit $sp - s' = \psi_1\cdot\psi_2$ gilt

$$2\,\mathrm{Re}\left((sp - s')\overline{w}'w''\right) = 2\,\mathrm{Re}\left(\psi_1\overline{w}'\cdot\psi_2 w''\right) = |\psi_1|^2|w'|^2 + |\psi_2|^2|w''|^2 - |\overline{\psi}_1 w' - \psi_2 w''|^2$$

und daher

(1.14) $$2\,\mathrm{Re}\int s\,\overline{w}\,'L[w]dx = \hat{G}_s[w] - \int\left(g_0|w|^2 - \left(2\,\mathrm{Re}(sq) + |\psi_1|^2\right)|w'|^2 + \left(g_2 - |\psi_2|^2\right)|w''|^2\right)dx$$
$$+ 2\int\mathrm{Re}\left((sp - s')\overline{w}'w''\right)dx - 2\int\mathrm{Im}(sr)\,\mathrm{Im}(w\overline{w}')dx\,.$$

Um diese zu (L) gehörigen Beziehungen mit den entsprechenden für die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

(l) $v'' + pv' + qv = 0$

zu vergleichen, setzt man $r \equiv 0$ und $w' = v$. So bekommt man beispielsweise aus (1.11) für $s \equiv \lambda - i\mu$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), $p \equiv 0$, $q = q_1 + iq_2$ die modifizierte Greensche Transformierte von Beesack (1956), S. 213, und aus (1.14) für $s \equiv (1 - i\gamma)/2$ ($\gamma \in \mathbb{R}$), $\psi_2 \equiv 1$, $\psi_1 = sp$, $q = q_1 + iq_2$ die Gleichung (4) von Herold (1971), S. 292.

1.7 Weitere Bedingungen zur Nullstellenverteilung der reellwertigen Lösungen bei reellwertigen Koeffizienten

Für reellwertige Koeffizienten p, q, r von (L) kann man zur Gewinnung von Kriterien über die Nullstellenverteilung der Lösungen von (L) auch noch die folgenden für Lösungen y von (L), $c, d \in J$ und $s \in C^k(J)$ ($k = 2$ bzw. $k = 3$) geltenden Beziehungen verwenden:

(1.15) $$y''' = -py'' - qy' - ry$$

(siehe Kim[15] (1970), L.1, L.2, und Ahmad[16], Lazer[17] (1969), L.1).

Mit $f := y' - y$ gilt

(1.16) $$\begin{aligned} f'' &= -(p+1)y'' - qf - (q+r)y, \\ y''' &= -py'' - qf - (q+r)y \end{aligned}$$

(siehe Villari[18] (1958), S.77).

Mit $g := y'' - y'$ gilt

(1.17) $$\begin{aligned} g' &= -(p+1)g - (p+1+q)y' - ry, \\ y''' &= -pg - (p+q)y' - ry. \end{aligned}$$

Mit $h := y'' - y$ gilt

(1.18) $$\begin{aligned} h' &= -ph - (q+1)y' - (p+r)y, \\ y''' &= -ph - qy' - (p+r)y. \end{aligned}$$

Aus $\sigma \cdot L[y] = 0$ mit $\sigma = \exp\int p dx$ ergibt sich

(1.19) $$(\sigma y'')' = -\sigma q y' - \sigma r y$$

(siehe Etgen[19], Shih[20] (1973b), S. 153, Kim (1970), Cor.1).

Mit $\tilde{G}_s[y] = (sp - s')y'^2 + 2sy'y''$ und $g_1 = -s'' + (sp)' - 2sq$ (s reellwertig) gilt

(1.20) $$0 = 2\int_c^d sy'L[y]dx = \tilde{G}_s[y]\Big|_c^d - \int_c^d \left(g_1 y'^2 + 2sy''^2\right)dx + 2\int_c^d sryy'dx$$

(für $s \equiv 1$, $p \equiv 0$ und damit $\tilde{G}_s[y] = 2y'y''$, $g_1 = -2q$ siehe Hanan (1961), L.2.4).

---

15 Woo Jong Kim ist ein US-amerikanischer Mathematiker, der 1967 an der Carnegie Mellon University in Pittsburgh promovierte.

16 Shair Ahmad ist ein US-amerikanischer Mathematiker und Professor an der University of Texas at San Antonio.

17 Alan Cecil Lazer (1938–2020) war ein US-amerikanischer Mathematiker und Professor an der University of Miami.

18 Gaetano Villari (1923–2014) war ein italienischer Mathematiker und ordentlicher Professor an der Universität Florenz, der sich mit Approximationstheorie, Spezialfunktionen und gewöhnlichen Differentialgleichungen befasste. Quelle: Marini, Mawhin (2014).

19 Garrett Jay Etgen ist ein US-amerikanischer Mathematiker, der 1964 an der Universtity of North Carolina at Chapel Hill promovierte und Professor war an der University of Houston.

20 Chao-Dung Shih ist ein US-amerikanischer Mathematiker, der 1972 an der University of Houston promovierte und sich mit gewöhnlichen Differentialgleichungen befasste.

Mit $E_s[y] = sy'' + (sp - s')y' + (sq - (sp)' + s'')y = B[y,s]$ und $e_0 = - sr + (sq)' - (sp)'' + s''' = L^+[s]$ (s reellwertig) gilt

(1.21) $$0 = 2\int_c^d sL[y]dx = E_s[y]\Big|_c^d - \int_c^d e_0 y dx$$

(für $s \equiv 1$ und damit $E_1[y] = y'' + py' + (q - p')y$, $e_0 = - r + q' - p''$ siehe Etgen, Shih (1973b), S. 153).

Mit $\tilde{E}_s[y] = sy' + (sp - 2s')y$ und $e_1 = - 3s'' + 2(sp)' - sq$ gilt

(1.22) $$\tilde{E}_s[y]\Big|_c^d - \int_c^d e_1(x)y(x)dx - (d - c)E_s[y](c) = \int_c^d E_s[y]\Big|_c^x dx = \int_c^d\int_c^x e_0(t)y(t)dtdx$$

$$= \int_c^d (d-t)e_0(t)y(t)dt\,.$$

Mit $e_2 = 3s' - sp$ gilt

(1.23) $$[sy]_c^d - \int_c^d e_2(x)y(x)dx - (d - c)\,\tilde{E}_s[y]\,(c) = \int_c^d \tilde{E}_s[y]\Big|_c^x dx$$

$$= \int_c^d (x - c)E_s[y](c)dx + \int_c^d\int_c^x \big(e_1(t) + (x - t)e_0(t)\big)\,y(t)dtdx$$

$$= \tfrac{1}{2}(d - c)^2 E_s[y](c) + \int_c^d \Big((d - t)e_1(t) + \tfrac{1}{2}(d - t)^2 e_0(t)\Big)\,y(t)dt\,.$$

Weitere Eigenschaften von Lösungen

Mittels der in den Abschnitten 1.2 und 1.6 definierten Operatoren F_s, G_s, H_s, K_s lassen sich auch hinreichende Bedingungen dafür herleiten, dass

- für jede in $J = [a,b[$ oszillatorische (nichttriviale) Lösung y von (L) der Grenzwert
  $$\lim_{x\to b} y^{(j)}(x)$$
  der j-ten Ableitung nicht existiert ($j \in \{0,1,2\}$; siehe etwa Lazer (1966), L.1.4, und die Beweise von Greguš[21] (1963), Satz 3 und Lazer (1966), Th.3.6),
- für jede in $J = [a,b[$ oszillatorische Lösung y von (L) die j-te Ableitung
  $y^{(j)}$ in $J = [a,b[$ beschränkt
  ist ($j \in \{0,1\}$; siehe etwa Lazer (1966), L.1.4 und L.2.3),
- für die Lösung y von (L) die j-te Ableitung
  $y^{(j)}$ in $J = [a,b[$ quadratisch integrierbar
  ist ($j \in \{0,1,2,3\}$; siehe etwa die Beweise von Lazer (1966) für Th.2.4 und Th.3.6) oder
- für die Lösung y von (L) der Grenzwert der j-ten Ableitung gleich Null ist:
  $$\lim_{x\to\infty} y^{(j)}(x) = 0$$
  ($j \in \{0,1,2\}$; siehe etwa die Beweise von Lazer (1966) für Th.2.4 und Th.3.6). Beim Beweis von Lazers Th.3.6 wird speziell für $s \equiv 1$, $p \equiv 0$ und damit $F_1[y] = y'^2 - qy^2 - 2yy''$, $E_1[y] = y'' + qy$ noch die folgende Beziehung verwendet:
  (1.24) $$sy'^2 = F_s[y] + \big(2E_s[y] + (-s'' + (sp)' - sq)\,y\big)\cdot y\,.$$

[21] Michal Greguš (1926–2002) war ein slowakischer Mathematiker und Professor an der Universität Bratislava, der sich mit Differentialgleichungen höherer Ordnung beschäftigte.

2 Beziehungen zwischen der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung (L) und ihrer Adjungierten (L^+)

Im engen Zusammenhang mit der homogenen linearen Differentialgleichung 3. Ordnung

(L) $\qquad L[y] \equiv y''' + py'' + qy' + ry = 0$

(p, q, r reellwertig und stetig im Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$) steht die dazu adjungierte Differentialgleichung

(L^+) $\qquad L^+[z] \equiv \left(D^2[z]\right)' - rz = ((z' - pz)' + qz)' - rz = 0$

mit den verallgemeinerten Ableitungen

$$D^1[z] = z' - pz \quad \text{und}$$
$$D^2[z] = (D^1[z])' + qz$$

von z (siehe Barrett (1964), S. 254, und für die Dgl. n-ter Ordnung Hinton (1966)). Im Spezialfall $p \in C^2(J)$, $q \in C^1(J)$ erhält man für $z \in C^3(J)$ den klassischen adjungierten Differentialoperator

$$L^+[z] = z''' - (pz)'' + (qz)' - rz$$
$$= z''' + Pz'' + Qz' + Rz =: L^*[z]$$

mit $P = -p$, $Q = q - 2p'$, $R = -r + q' - p''$ von Lagrange (1766). In diesem Falle ist $L^{**} = L$.

In diesem und in allen weiteren Kapiteln seien die Lösungen von (L) und (L^+) stets reellwertig. Es seien S und S^+ die Lösungsräume von (L) bzw. (L^+), d. h.

$$S = \{y \in C^3(J) : L[y] = 0 \text{ in } J\},$$
$$S^+ = \{z \in C^1(J) : D^1[z] \in C^1(J),\ D^2[z] \in C^1(J),\ L^+[z] = 0 \text{ in } J\}.$$

2.1 Die Bilinearform B des Raumpaars (S,S^+)

Allgemeiner ist der zum Differentialoperator

$$L_s[y] := s \cdot L[y] = s\,y''' + sp\,y'' + sq\,y' + sry$$

adjungierte Differentialoperator $L_s^+[z]$ gegeben durch

$$L_s^+[z] := \left(D_s^2[z]\right)' - rD_s^o[z]$$

mit den verallgemeinerten Ableitungen

$$D_s^0[z] = sz,$$
$$D_s^1[z] = \left(D_s^0[z]\right)' - pD_s^0[z],$$
$$D_s^2[z] = \left(D_s^1[z]\right)' + qD_s^0[z].$$

Denn für $y \in C^3(J)$, $s \in C^1(J)$ und $z \in C^1(J)$ mit $D_s^1[z]$, $D_s^2[z] \in C^1(J)$ gilt in J

$$\int y\,L_s^+[z]\,dx = B_s[y,z] - \int zL_s[y]dx$$

mit

$$B_s[y,z] = \sum_{k=0}^{2} (-1)^k y^{(2-k)} D_s^k[z]$$
$$= y''sz - y'\,D_s^1[z] + y\,D_s^2[z]\ .$$

Wegen $D_s^k[z] = D^k[sz]$ ($k = 0, 1, 2$) gilt $L_s^+[z] = L^+[sz]$ und $B_s[y,z] = B[y,sz]$.

Für x, $x_0 \in J$ und Lösungen $y \in S$, $z \in S^+$ ist

$$B_s[y,z](x) = B_s[y,z](x_0) + \int_{x_0}^{x} \left(yL_s^+[z] + zL_s[y]\right)dt \quad y''$$

R. Pleier, *Nullstellenverteilung der Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung 3. Ordnung* (Distribution of the zeros of solutions of the ordinary linear differential equation of third order), D-92694 Etzenricht, 1979/2020

$$= B_s[y,z](x_0)$$

konstant für alle $x \in J$. Da die Ableitungen $y^{(k)}$ linear von y abhängen und die verallgemeinerten Ableitungen $D_s^k[z]$ linear von z abhängen, ist auch $B_s[y,z]$ bei festem z linear von y und bei festem y linear von z abhängig.
Speziell für $s \equiv 1$ liefert der Ausdruck

$$B[y,z] := B_1[y,z] = \sum_{k=0}^{2}(-1)^k y^{(2-k)} D^k[z]$$
$$= z - y' D^1[z] + y D^2[z].$$

eine Bilinearform $B : S \times S^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ des Raumpaars (S,S^+).

2.2 Eigenschaften der speziellen Lösungen $u_j(.,x_0)$ und $u_m^+(.,x_0)$

Sind $u_j(.,x_0)$ und $u_j^+(.,x_0)$ für $x_0 \in J, j = 0, 1, 2$, die speziellen Lösungen von (L) bzw. (L⁺) mit den Anfangsbedingungen

$$u_j^{(k)}(x_0,x_0) = \delta_{k,j} \quad \text{bzw.} \quad D^k[u_j^+](x_0,x_0) = \delta_{k,j} \qquad (k, j = 0, 1, 2)$$

(wobei $u_j^{(k)}(x,t) := \frac{\partial}{\partial x^k} u_j(x,t)$, $D^k[u_j^+](x,t) := D^k\left[u_j^+(.,t)\right](x)$ und $\delta_{k,j}$ das Kronecker-Symbol[1] ist), so gilt zwischen diesen speziellen Lösungen $u_j(.,t)$ und $u_{2-k}^+(.,x)$ die Beziehung

(2.1) $$u_j^{(k)}(x,t) = (-1)^{k+j} D^{2-j}[u_{2-k}^+](t,x) \qquad (x, t \in J;\ k, j = 0, 1, 2).$$

Denn es ist für $y = u_j(.,t)$ und $z = u_{2-k}^+(.,x)$

$$0 = \int_x^t \left(yL^+[z] + zL[y]\right)(\tau)d\tau = B[y,z]\Big|_x^t$$
$$= (-1)^{2-j} D^{2-j}[z](t) - (-1)^{2-k} y^{(k)}(x).$$

Beispielsweise ergibt sich für $j = 2$, $k = 0$ die Eigenschaft

$$u_2(x,t) = u_2^+(t,x).$$

Eine übersichtliche Aufstellung der verschiedenen Fälle der Formel (2.1) gibt die folgende Tabelle 2.1.

Tab. 2.1 Übereinstimmung bestimmter Ableitungen bzw. verallgemeinerter Ableitungen der speziellen Lösungen . $u_j(x,t)$. und $u_m^+(t,x)$

$(-1)^i u_{2-i}^{(k)}(x,t) = (-1)^k D^i[u_{2-k}^+](t,x) \quad (i,k = 0,1,2)$			
i \ k	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$
$i = 0$	$u_2(x,t) = u_2^+(t,x)$	$u_2'(x,t) = -u_1^+(t,x)$	$u_2''(x,t) = u_0^+(t,x)$
$i = 1$	$-u_1(x,t) = D^1[u_2^+](t,x)$	$-u_1'(x,t) = -D^1[u_1^+](t,x)$	$-u_1''(x,t) = D^1[u_1^+](t,x)$
$i = 2$	$u_0(x,t) = D^2[u_2^+](t,x)$	$u_0'(x,t) = -D^2[u_1^+](t,x)$	$u_0''(x,t) = D^2[u_1^+](t,x)$

Man vergleiche hierzu bei Barrett (1969), S. 438, L.2.9, dessen Beziehung (2.19)

[1] Das Kronecker-Symbol (Kronecker-δ, Kroneckerscher δ-Operator; $\delta_{k,j} = 1$ für $k = j$ und $\delta_{k,j} = 0$ für $k \neq j$) ist benannt nach dem deutschen Mathematiker Leopold Kronecker (1823–1891).

$$D_k u_j(x,t) = (-1)^{k+j} D^+_{2-j}[u^+_{2-k}](t,x)$$

für Lösungen von (E_3) und (E_3^+) und damit insbesondere auch für Lösungen von

(L_σ) $$L_\sigma[y] \equiv (\sigma y'')' + \sigma q y' + \sigma r y$$
$$\equiv (\sigma y'' + \rho y)' + (\sigma q - \rho) y' = 0$$

und

(L^+_σ) $$L^+_\sigma[z] \equiv (D^2_\sigma[z])' - r\sigma z$$
$$\equiv \left((\sigma z')' + (\sigma q - \rho) z\right)' + \rho z' = 0$$

($\sigma(x) = \exp\int p dx$, $\rho(x) = \exp\int \sigma r dx$), wobei dann

$$D_0 y = y,\ D_1 y = y',\ D_2 y = \sigma y'' + \rho y,$$

$$D^+_0 z = z = \frac{1}{\sigma} D^0_\sigma[z],\ D^+_1 z = \sigma z' = D^1_\sigma[z],\ D^+_2 z = (D^+_1 z)' + (\sigma q - \rho) z = D^2_\sigma[z] - \rho z$$

ist (siehe auch Dolan[2] (1970), S. 370, 371).

[2] James Michael Dolan ist ein US-amerikanischer Mathematiker, der 1967 an der University of Tennessee in Knoxville promovierte.

2.3 Das skalare Produkt B des dualen Raumpaars ($S,S^+;B$)

Die Bilinearform B besitzt noch zwei Eigenschaften, die eine Abschwächung der positiven Definitheit ($B[y,y] \geq 0$ und $B[y,y] = 0 \Rightarrow y = 0$) des skalaren Produkts eines euklidischen Vektorraums darstellen:

1) Aus $B[y,z] = 0$ für alle $y \in S$ folgt $z = 0$;

2) Aus $B[y,z] = 0$ für alle $z \in S^+$ folgt $y = 0$.

Da die Bilinearform B des Raumpaars (S,S^+) diese beiden Eigenschaften besitzt, ist ($S,S^+;B$) ein **duales Raumpaar** mit dem die Dualität bestimmenden **skalaren Produkt** (Skalarprodukt) B.[3]
Die Lösungen $y \in S$, $z \in S^+$ heißen **orthogonal** ($y \perp z$), wenn ihr Skalarprodukt gleich Null ist:

$$B[y,z] = 0.$$

Beweis: 1) Aus $B[y,z] = 0$ für alle $y \in S$ folgt unter Verwendung der speziellen Lösung $y = u_2(.,x_0)$ mit $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ und $y''(x_0) = 1$ die Gleichung

$$0 = B[y,z](x_0) = y''(x_0)z(x_0) - y'(x_0)\, D_s^1[z]\,(x_0) + y(x_0)\, D_s^2[z] = z(x_0),$$

also der Wert $z(x_0) = 0$. Ebenso folgt mit $y = u_1(.,x_0)$ der Wert $D_s^1[z]\,(x_0) = 0$ und mit $y = u_0(.,x_0)$ der Wert $D_s^2[z]\,(x_0) = 0$. Aufgrund dieser Anfangswerte ist $z = 0$ die triviale Lösung von (L^+).

2) Aus $B[y,z] = 0$ für alle $z \in S^+$ folgen unter sukzessiver Verwendung der speziellen Lösungen $z = u_j^+(.,x_0)$ ($j = 2, 1, 0$) für y die Anfangswerte $y(x_0) = y'(x_0) = y''(x_0) = 0$, also $y = 0$. □

[3] Die Definition eines skalaren Produkts für ein duales Raumpaar und die Definition der Orthogonalität findet man bei Kowalsky (1967), S. 251, 254.

R. Pleier, *Nullstellenverteilung der Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung 3. Ordnung* (Distribution of the zeros of solutions of the ordinary linear differential equation of third order), D-92694 Etzenricht, 1979/2020

2.4 Definition der Klassen C_{I}^k, C_{II}^k, K_{I}, K_{II} mit den speziellen Lösungen $u_2(.,t)$ und $u_2^+(.,t)$

Für viele Aussagen über die Lösungen der Differentialgleichungen (L) bzw. (L^+) genügt es an Stelle von Bedingungen an die Koeffizienten p, q, r vorauszusetzen, dass die Differentialgleichung zu einer gewissen Klasse gehört, was heißen soll, dass bei bestimmten Lösungen und deren (verallgemeinerten) Ableitungen gewisse Nullstellenkonfigurationen nicht auftreten. Viele Sätze in der Literatur (Hinweise siehe Abschnitt 2.5) lassen sich nun dadurch verallgemeinern, indem man die speziellen Koeffizientenbedingungen durch die Voraussetzung ersetzt, dass die Differentialgleichung zu einer dieser Klassen gehört. Koeffizientenbedingungen für die Zugehörigkeit der Differentialgleichung zu einer dieser Klassen lassen sich mittels der in Kapitel 1 dargestellten Methoden herleiten.

Definition von Klassen von Differentialgleichungen durch die Nullstellenfreiheit der Lösungen $u_2(.,t)$ bzw. $u_2^+(.,t)$

Die Differentialgleichung (L) gehört im Intervall J zur Klasse C_{I}^k ($L \in C_{\mathrm{I}}^k(J)$) genau dann, wenn

$$(-1)^k u_2^{(k)}(x,t) > 0 \quad \text{für alle } x, t \in J \text{ mit } x < t$$

gilt ($k \in \{0, 1, 2, 3\}$). Die Differentialgleichung (L) gehört im Intervall J zur Klasse C_{II}^k ($L \in C_{\mathrm{II}}^k(J)$) genau dann, wenn

$$u_2^{(k)}(x,t) > 0 \qquad \text{für alle } x, t \in J \text{ mit } x > t$$

gilt ($k \in \{0, 1, 2, 3\}$).

Für die Differentialgleichung (L^+) soll analog $L^+ \in C_{\mathrm{I}}^{k+}(J)$ bzw. $L^+ \in C_{\mathrm{II}}^{k+}(J)$ bedeuten, dass

$$(-1)^k D^k[u_2^+](x,t) > 0 \quad \text{für alle } x, t \in J \text{ mit } x < t \text{ bzw.}$$

$$D^k[u_2^+](x,t) > 0 \qquad \text{für alle } x, t \in J \text{ mit } x > t$$

gilt ($k \in \{0, 1, 2\}$).

Ferner bedeute $L \in K_{\mathrm{I}}(J)$ (bzw. $L \in K_{\mathrm{II}}(J)$), dass für jedes $t \in J$ die Lösung

$$u_2(.,t) \text{ keine einfache Nullstelle } x \in J \text{ mit } x < t \text{ (bzw. } x > t)$$

besitzt. Und $L^+ \in K_{\mathrm{I}}^+(J)$ (bzw. $L^+ \in K_{\mathrm{II}}^+(J)$) bedeute, dass für jedes $t \in J$ die Lösung

$$u_2^+(.,t) \text{ keine einfache Nullstelle } x \in J \text{ mit } x < t \text{ (bzw. } x > t)$$

aufweist.

2.5 Eigenschaften der Klassen

Eigenschaften dieser oben definierten Klassen lassen sich darstellen hinsichtlich der

- Existenz von speziellen Fundamentalsystemen
  (siehe Kim (1970), Th.7, und Etgen, Shih (1973b), Th.3 (mit speziellen Koeffizientenbedingungen), Coppel (1971), S. 93, L.6, Jones (1973b), Th.1, 2, 3, 4),
- Aufstellung eines Vergleichssatzes, in dem für (L) und eine durch Abänderung der Koeffizienten aus (L) erhaltene Differentialgleichung ($\tilde{L}$) Lösungen mit gleichen Anfangswertbedingungen verglichen werden
  (siehe Birkhoff (1911), S. 123, 117 für K_{II} und K_{I}, Hanan (1961), Th.3.10 für C_{I}),
- Trennung der Nullstellen zweier Lösungen
  (siehe Kim (1970), Th.5, Lazer (1966), Th.2.5, Th.2.3, L.1.2, Hanan (1961), Th.3.1, Th.4.1, Th.5.9),

R. Pleier, *Nullstellenverteilung der Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung 3. Ordnung* (Distribution of the zeros of solutions of the ordinary linear differential equation of third order), D-92694 Etzenricht, 1979/2020

- Charakterisierung der nichtoszillatorischen Lösungen für $L \in C_{\mathrm{I}}^{k}[a,b[$ ($k = 0, 1, 2, 3$) bzw. $L^{+} \in C_{\mathrm{I}}^{k+} \cap C_{\mathrm{I}}^{0+}[a,b[$ ($k = 0, 1, 2$)
  (siehe Švec (1957), Th.2, Villari (1958), Lazer (1966), Th.1.2, L.1.2“, Hanan (1961), Th.3.4) ,
- Charakterisierung des asymptotischen Verhaltens der nichtoszillatorischen Lösungen für $L \in C_{\mathrm{I}}^{k+1}[a,b[$ ($k = 0, 1, 2$)
  (siehe Dolan, Klaasen (1975b), S. 268),
- Existenz von nullstellenfreien und monotonen Lösungen
  (siehe Švec (1965a), Th.3, Jones (1973b), S.508, Lazer (1966), Th.1.1, Švec (1965b), Satz 1, 2, 3, 4, 5),
- Charakterisierung aller in $J = [a,b[$ stark oszillatorischen zweidimensionalen Unterräume von S (bzw. S^{+}) als die orthogonalen Komplemente der nichtoszillatorischen Lösungen von (L^{+}) im Falle von $L \in C_{\mathrm{II}}[a,b[$ (bzw. von (L) im Falle von $L \in C_{\mathrm{I}}[a,b[$),
- Beziehungen zwischen den Strukturen der Mengen N und N^{+} der nichtoszillatorischen Lösungen von (L) bzw. (L^{+})
  (Ahmad (1974), Th.3.1, Ahmad, Benharbit (1975); im Falle $L \in C_{\mathrm{I}}[a,b[$ folgt aus $N_0 = [y_0]$ auch $N^{+} = S^{+} \setminus S_{y_o}^{+}$).

Eigenschaften der Klassen K_{I} und K_{II} werden in Kapitel 4 untersucht.

Für die Klassen gelten die Inklusionen

$$C_{\mathrm{I}}^{3} \subseteq C_{\mathrm{I}}^{2} \subseteq C_{\mathrm{I}}^{1} \subseteq C_{\mathrm{I}}^{0} \subseteq K_{\mathrm{I}}, \qquad C_{\mathrm{I}}^{0+} \subseteq K_{\mathrm{I}}^{+},$$
$$C_{\mathrm{II}}^{3} \subseteq C_{\mathrm{II}}^{2} \subseteq C_{\mathrm{II}}^{1} \subseteq C_{\mathrm{II}}^{0} \subseteq K_{\mathrm{II}}, \qquad C_{\mathrm{II}}^{0+} \subseteq K_{\mathrm{II}}^{+}.$$

Dabei sind $C_{\mathrm{I}}^{0} = C_{\mathrm{I}}$ und $C_{\mathrm{II}}^{0} = C_{\mathrm{II}}$ die von Hanan (1961) definierten Klassen. Im Falle $L \in K_{\mathrm{I}}(J)$ (bzw. $L \in K_{\mathrm{II}}(J)$) heißt bei Birkhoff (1911) das Intervall J ein für (L) reguläres Intervall zweiter (bzw. erster) Art.

2.5.1 Notwendige Bedingung für die Klassen $C_{\mathrm{I}}^{3}(J)$ und $C_{\mathrm{II}}^{3}(J)$

Eine notwendige Bedingung für die Klassenzugehörigkeit $L \in C_{\mathrm{II}}^{3}(J)$ ($L \in C_{\mathrm{I}}^{3}(J)$) ist

$$p \leq 0 \quad (p \geq 0) \quad \text{in } J.$$

Denn aus $L \in C_{\mathrm{II}}^{3}(J)$ folgt $u_2'''(x,t) > 0$ für $x > t$, wegen der Stetigkeit von $u_2'''(.,.)$ dann $u_2'''(t,t) \geq 0$ und mit

$$0 = L[u_2(.,t)](t) = u_2'''(t,t) + p(t)\cdot 1$$

schließlich $p(t) = -\, u_2'''(t,t) \leq 0$ für jedes $t \in J$.

2.5.2 Charakterisierung der Klassen $C_{\mathrm{I}}^{k}(J)$ und $C_{\mathrm{II}}^{k}(J)$ durch die Lösungen u_j^{+} von (L⁺) und der Klassen $C_{\mathrm{I}}^{k+}(J)$ und $C_{\mathrm{II}}^{k+}(J)$ durch die Lösungen u_j von (L)

Nach der Formel (2.1) bzw. Tabelle 2.1 von Abschnitt 2.2 zwischen den speziellen Lösungen $u_j(.,t)$ und $u_m^{+}(.,x)$ lassen sich für $k = 0, 1, 2$ die Klassenzugehörigkeiten auch mit den Lösungen der adjungierten Differentialgleichung charakterisieren ($x, t \in J$):

(2.2) **Charakterisierung der Klassen durch Lösungen der adjungierten Differentialgleichung**

$L \in C_{\mathrm{I}}^{k}(J)$ $(L \in C_{\mathrm{II}}^{k}(J))$ $\Leftrightarrow$ $u_{2-k}^{+}(x,t) > 0$ für $x > t$ $((-1)^k u_{2-k}^{+}(x,t) > 0$ für $x < t)$;

$L^{+} \in C_{\mathrm{I}}^{k+}(J)$ $(L^{+} \in C_{\mathrm{II}}^{k+}(J))$ $\Leftrightarrow$ $u_{2-k}(x,t) > 0$ für $x > t$ $((-1)^k u_{2-k}(x,t) > 0$ für $x < t)$.

2.5.3 Wechselbeziehungen zwischen den Klassen von (L) und denen von (L^+)

Nach den oben angegebenen Charakterisierungen erhält man für ein beliebiges Intervall J insbesondere (für $k = 0$ wegen $u_2^{+}(x,t) = u_2(t,x)$) die folgenden Äquivalenzen der Klassenzugehörigkeiten hinsichtlich $C_{\mathrm{I}}(J)$, $C_{\mathrm{II}}(J)$, $C_{\mathrm{I}}^{+}(J)$, $C_{\mathrm{II}}^{+}(J)$ (siehe Hanan (1961), L.2.9). Außerdem erhält man für das offene Intervall $J =]a,b[$ die Äquivalenzen hinsichtlich $K_{\mathrm{I}}(J)$, $K_{\mathrm{II}}(J)$, $K_{\mathrm{I}}^{+}(J)$, $K_{\mathrm{II}}^{+}(J)$.

(2.3) **Äquivalenzen für die Klassenzugehörigkeiten**

$L \in C_{\mathrm{I}}(J)$ (bzw. $L \in C_{\mathrm{II}}(J)$) $\Leftrightarrow L^{+} \in C_{\mathrm{II}}^{+}(J)$ (bzw. $L^{+} \in C_{\mathrm{I}}^{+}(J)$).

$L \in K_{\mathrm{I}}]a,b[$ (bzw. $L \in K_{\mathrm{II}}]a,b[$) $\Leftrightarrow$ $L^{+} \in K_{\mathrm{II}}^{+}]a,b[$ (bzw. $L^{+} \in K_{\mathrm{I}}^{+}]a,b[$).

Denn ist etwa $L \notin K_{\mathrm{I}}]a,b[$, dann gibt es $x, t \in]a,b[$ mit $x < t$ und $0 > u_2(x,t) = u_2^{+}(t,x)$, sodass $L^{+} \notin K_{\mathrm{II}}^{+}]a,b[$ folgt. Dass diese Äquivalenzen der Klassenzugehörigkeiten für ein beliebiges Intervall J nicht richtig sind, wird durch Beispiele von Integralkurven in der Abbildung 3.10 in Abschnitt 3.1.9 belegt. Beispielsweise kann für den Fall $L \in K_{\mathrm{I}}([a,b])$ eine Integralkurve angegeben werden, für die am Kurvenende eine Doppeltangente ohne Doppelpunkt auftritt und somit $L^{+} \notin K_{\mathrm{II}}^{+}([a,b])$ gilt.

(2.4) **Zugehörigkeit zu den Klassen K_{I}, K_{II}, K_{I}^{+}, K_{II}^{+} an den Intervallgrenzen**

Für $c, d \in J$ mit $c < d$ gilt:

a) 1) Aus $L \in K_{\mathrm{I}}]c,d[$ folgt $L \in K_{\mathrm{I}}]c,d]$.

2) Aus $L \in K_{\mathrm{II}}]c,d[$ folgt $L \in K_{\mathrm{II}}[c,d[$.

b) 1) Aus $L^{+} \in K_{\mathrm{I}}^{+}]c,d[$ folgt $L^{+} \in K_{\mathrm{I}}^{+}]c,d]$.

2) Aus $L^{+} \in K_{\mathrm{II}}^{+}]c,d[$ folgt $L^{+} \in K_{\mathrm{II}}^{+}[c,d[$.

Beweis: Zur Begründung von a, 1) etwa nimmt man an, dass die Lösung $u_2(.,d)$ eine einfache Nullstelle und damit Vorzeichenwechselstelle $x_0 \in]c,d[$ besitzt. Wenn x_0 o. E. die größte[4] Vorzeichenwechselstelle in $]c,d[$ ist, dann gibt es ein $x_1 \in]c,x_0[$ mit $u_2^{+}(d,x_1) = u_2(x_1,d) < 0$. Wegen der Stetigkeit der Lösung $u_2^{+}(.,x_1)$ an der Stelle $t = d$ gibt es $\delta > 0$, sodass

$$u_2^{+}(.,x_1) < 0 \text{ in }]d-\delta,d[\subseteq]x_1,d[.$$

Wählt man ein $t_1 \in]d-\delta,d[\subseteq]x_1,d[\subseteq]c,d[$, so ist

$$u_2(x_1,t_1) = u_2^{+}(t_1,x_1) < 0.$$

Daher hat für dieses $t_1 \in]c,d[$ auch die Lösung $u_2(.,t_1)$, eine Vorzeichenwechselstelle und somit einfache Nullstelle $x_2 \in]x_1,t_1[\subseteq]c,t_1[$, im Widerspruch zu $L \in K_{\mathrm{I}}]c,d[$. Also besitzt auch $u_2(.,d)$ keine einfache Nullstelle in $]c,d[$ und es gilt insgesamt $L \in K_{\mathrm{I}}]c,d]$. □

[4] Eine Begründung dafür, dass im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ nur endlich viele Nullstellen und damit nur endlich viele einfache Nullstellen einer nichttrivialen Lösung auftreten, wird in einer Fußnote von Abschnitt 4.5 gegeben.

2.6 Wechselbeziehungen zwischen den Lösungen von (L) und (L^+)

Zu zwei beliebigen Lösungen $y_1, y_2 \in S$ lässt sich auch eine Lösung $z \in S^+$ konstruieren: Denn mit $\sigma(x) = \exp\int p(x)dx$ und der Wronski-Determinante[5]

$$W[y_1,y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2$$

der beiden Funktionen y_1, y_2 gilt für die damit definierte Funktion

$$z := \sigma W[y_1,y_2] = \sigma\cdot(y_1y_2' - y_1'y_2)$$

zunächst

$$\begin{aligned}
D^1[z] &= z' - pz = \sigma' W[y_1,y_2] + \sigma\cdot(W[y_1,y_2])' - p\sigma W[y_1,y_2] \\
&= \sigma\cdot(W[y_1,y_2])' = \sigma\cdot(y_1y_2'' - y_1''y_2) \\
&= \sigma\cdot\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \sigma y_1'' & \sigma y_2'' \end{vmatrix}, \\
z' &= D^1[z] + pz \\
&= \sigma\cdot\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} + p\sigma\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \\
(\sigma y_j'')' &= \sigma p y_j'' + \sigma y_j''' = -\sigma q y_j' - \sigma r y_j \qquad (y_j \in S,\ y_j''' + p y_j'' = -q y_j' - r y_j), \\
(D^1[z])' &= \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ \sigma y_1'' & \sigma y_2'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ (\sigma y_1'')' & (\sigma y_2'')' \end{vmatrix} \\
&= \sigma\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} - \sigma q\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\
&= \sigma W[y_1',y_2'] - qz, \\
D^2[z] &= (D^1[z])' + qz = \sigma W[y_1',y_2'], \\
(D^2[z])' &= p\sigma W[y_1',y_2'] + \sigma\cdot(W[y_1',y_2'])' \\
&= p\sigma W[y_1',y_2'] + \sigma\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1''' & y_2''' \end{vmatrix} \qquad (y_j \in S,\ y_j''' = -p y_j'' - q y_j' - r y_j) \\
&= \sigma p W[y_1',y_2'] + \sigma\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ -p y_1'' - r y_1 & -p y_2'' - r y_2 \end{vmatrix} \\
&= -\sigma r\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = +rz, \\
L^+[z] &= (D^2[z])' - rz = 0
\end{aligned}$$

und somit $z \in S^+$.

[5] Die Wronski-Determinante ist nach dem polnischen Mathematiker Josef Hoëné-Wroński (1776–1853) benannt, der diese Determinante im Jahr 1821 eingeführt hat.

Außerdem gilt noch die Beziehung

$$\begin{aligned}\sigma W[y_1'',y_2''] &= \sigma \begin{vmatrix} y_1'' & y_2'' \\ -qy_1'-ry_1 & -qy_2'-ry_2 \end{vmatrix} \\ &= -q\sigma \begin{vmatrix} y_1'' & y_2'' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} - r\sigma \begin{vmatrix} y_1'' & y_2'' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \\ &= +q D^2[z] + r D^1[z].\end{aligned}$$

Falls für zwei Lösungen $y_1, y_2 \in S$ die Determinante $W[y_1,y_2] = z/\sigma$ in einem Teilintervall von J identisch 0 ist, sind in diesem Teilintervall auch z, z', $D^1[z]$, $(D^1[z])'$, $D^2[z]$ identisch 0, sodass mittels des Existenz- und Einzigkeitssatzes für (L^+) folgt, dass $z \equiv 0$ und $W[y_1,y_2] \equiv 0$ im gesamten Intervall J gilt.

Weiter wird jetzt eine Charakterisierung der linearen Unabhängigkeit von zwei Lösungen y_1, y_2 von (L) bewiesen:

Für zwei Lösungen y_1 und y_2 von (L) gilt $W[y_1,y_2] \equiv 0$ in J genau dann, wenn y_1, y_2 (in J) linear abhängig sind.

Beweis: „⇐“: Falls $y_2 = \lambda y_1$ in J gilt mit $\lambda \in \mathbb{R}$ (der Fall $y_1 = \mu y_2$, $\mu \in \mathbb{R}$, wird analog behandelt), so ist

$$W[y_1,y_2] = \lambda W[y_1,y_1] \equiv 0 \text{ in } J.$$

„⇒“: Es seien y_1 und y_2 Lösungen von (L) mit $W[y_1,y_2] \equiv 0$ in J. Falls y_1 oder y_2 die triviale Lösung von (L) ist, so sind y_1, y_2 linear abhängig. Ist jetzt also o. E. $y_1 \not\equiv 0$ in J, so ist wegen der Stetigkeit von y_1 in einem Teilintervall $J' \subseteq J$ $y_1 \neq 0$. Für die Hilfsfunktion $h := y_2/y_1$ gilt dann in J'

$$h' = (y_2'y_1 - y_2y_1')/y_1^2 = W[y_1,y_2]/y_1^2 \equiv 0$$

und damit $h = \lambda \in \mathbb{R}$, $y_2 = \lambda y_1$, $y_2' = \lambda y_1'$ und $y_2'' = \lambda y_1''$ in J'. Aufgrund des Existenz- und Einzigkeitssatzes für (L) folgt dann, dass $y_2 = \lambda y_1$ in ganz J gilt und y_1, y_2 linear abhängig sind. □

Ist neben den beiden Funktionen $y_1, y_2 \in C^2(J)$ noch eine dritte Funktion $v \in C^2(J)$ gegeben, so bekommt man für die Wronski-Determinante

$$W[v,y_1,y_2] = \begin{vmatrix} v & y_1 & y_2 \\ v' & y_1' & y_2' \\ v'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}$$

der drei Funktionen v, y_1, y_2 durch Entwicklung nach der ersten Spalte mit $z := \sigma W[y_1,y_2]$:

$$\begin{aligned}\sigma W[v,y_1,y_2] &= \sigma v \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} - \sigma v' \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} + \sigma v'' \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= +v D^2[z] - v' D^1[z] + v'' z \\ &= B[v,z],\end{aligned}$$

also

(2.5) $\sigma W[v,y_1,y_2] = B[v,z]$ für $z := \sigma W[y_1,y_2]$.

Aus dieser Beziehung (2.5) ergibt sich, dass das zu den beiden Lösungen $y_1, y_2 \in S$ konstruierte $z \in S^+$ orthogonal zu y_1 und y_2 ($B[y_j,z] = 0, j = 1, 2$) und damit orthogonal zu dem von y_1 und y_2 aufgespannten Unterraum $[y_1,y_2]$ ist:

$$z := \sigma W[y_1,y_2] \in [y_1,y_2]^{\perp}.$$

Analog zur oben angegebenen Aussage für zwei Lösungen $y_1, y_2 \in S$ lässt sich auch zu zwei beliebigen Lösungen $z_1, z_2 \in S^+$ eine dazu orthogonale Lösung $y \in S$ konstruieren: Für die Lösungen z_j gilt z_j, $D^1[z_j]$, $D^2[z_j] \in C^1(J)$ und $L^+[z_j] = 0$ ($j = 1, 2$). Für die damit definierte Funktion

$$y := \frac{1}{\sigma} W^+[z_1,z_2] := \begin{vmatrix} \frac{z_1}{\sigma} & \frac{z_2}{\sigma} \\ D^1[z_1] & D^1[z_2] \end{vmatrix} = \frac{1}{\sigma} \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' - pz_1 & z_2' - pz_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sigma} W[z_1,z_2]$$

gilt aufgrund der Beziehungen

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sigma} z_j\right)' &= -\frac{p}{\sigma} z_j + \frac{1}{\sigma} z_j' = \frac{1}{\sigma} D^1[z_j], \\
\left(D^1[z_j]\right)' &= D^2[z_j] - qz_j \\
\left(\frac{1}{\sigma} D^1[z_j]\right)' &= -\frac{p}{\sigma} D^1[z_j] + \frac{1}{\sigma}(D^1[z_j])' = -p\frac{D^1[z_j]}{\sigma} + \frac{D^2[z_j]}{\sigma} - q\frac{z_j}{\sigma}, \\
\left(D^2[z_j]\right)' &= L^+[z_j] + rz_j = rz_j \qquad (z_j \in S^+, j = 1, 2)
\end{aligned}$$

für die Ableitungen

$$\begin{aligned}
y' &= \begin{vmatrix} \left(\frac{z_1}{\sigma}\right)' & \left(\frac{z_2}{\sigma}\right)' \\ D^1[z_1] & D^1[z_2] \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{z_1}{\sigma} & \frac{z_2}{\sigma} \\ (D^1[z_1])' & (D^1[z_2])' \end{vmatrix} = 0 + \begin{vmatrix} \frac{z_1}{\sigma} & \frac{z_2}{\sigma} \\ D^2[z_1] & D^2[z_2] \end{vmatrix}, \\
y'' &= \begin{vmatrix} \left(\frac{z_1}{\sigma}\right)' & \left(\frac{z_2}{\sigma}\right)' \\ D^2[z_1] & D^2[z_2] \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{z_1}{\sigma} & \frac{z_2}{\sigma} \\ (D^2[z_1])' & (D^2[z_2])' \end{vmatrix} \qquad (z_1, z_2 \in S^+) \\
&= \begin{vmatrix} \frac{D^1[z_1]}{\sigma} & \frac{D^1[z_2]}{\sigma} \\ D^2[z_1] & D^2[z_2] \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{z_1}{\sigma} & \frac{z_2}{\sigma} \\ rz_1 & rz_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{D^1[z_1]}{\sigma} & \frac{D^1[z_2]}{\sigma} \\ D^2[z_1] & D^2[z_2] \end{vmatrix} + 0, \\
y''' &= \begin{vmatrix} \left(\frac{D^1[z_1]}{\sigma}\right)' & \left(\frac{D^1[z_2]}{\sigma}\right)' \\ D^2[z_1] & D^2[z_2] \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{D^1[z_1]}{\sigma} & \frac{D^1[z_2]}{\sigma} \\ (D^2[z_1])' & (D^2[z_2])' \end{vmatrix} \\
&= -p \begin{vmatrix} \frac{D^1[z_1]}{\sigma} & \frac{D^1[z_2]}{\sigma} \\ D^2[z_1] & D^2[z_2] \end{vmatrix} + 0 - q \begin{vmatrix} \frac{z_1}{\sigma} & \frac{z_2}{\sigma} \\ D^2[z_1] & D^2[z_2] \end{vmatrix} + r \begin{vmatrix} \frac{D^1[z_1]}{\sigma} & \frac{D^1[z_2]}{\sigma} \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\
&= -py'' - qy' - ry
\end{aligned}$$

und somit $y \in S$.

Außerdem gelten noch die Beziehungen

$$y'' = \frac{1}{\sigma} W\left[D^1[z_1], D^1[z_2]\right] - qy$$

und

$$\frac{1}{\sigma} W\left[D^2[z_1], D^2[z_2]\right] = -\,ry' \qquad (z_1, z_2 \in S^+).$$

Falls $W[z_1,z_2] = \sigma y$ in einem Teilintervall von J identisch verschwindet, sind in diesem Teilintervall auch y, y' und y'' identisch Null, sodass mittels des Existenz- und Einzigkeitssatzes für (L) folgt, dass $y \equiv 0$ und $W[z_1,z_2] \equiv 0$ in J gilt.

Für die Lösungen z_1 und z_2 von (L⁺) gilt $W[z_1, z_2] \equiv 0$ in J genau dann, wenn z_1, z_2 (in J) linear abhängig sind.

Der Beweis stimmt überein mit dem obigen Beweis für $y_1, y_2 \in S$.

Ist neben den beiden Funktionen $z_1, z_2 \in C^1(J)$ mit $D^1[z_1], D^1[z_2] \in C^1(J)$ noch die Funktion $v \in C^1(J)$ mit $D^1[v] \in C^1(J)$ gegeben, so bekommt man für die verallgemeinerte Wronski-Determinante

$$W^+[z_1, z_2, v] = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & v \\ D^1[z_1] & D^1[z_2] & D^1[v] \\ D^2[z_1] & D^2[z_2] & D^2[v] \end{vmatrix}$$

der drei Funktionen z_1, z_2, v durch Entwicklung nach der dritten Spalte und Verwendung der oben hergeleiteten Beziehungen für y' und y'' die Beziehung

$$\text{(2.6)} \qquad \frac{1}{\sigma} W^+[z_1,z_2,v] = y''v - y' D^1[v] + y D^2[v] = B[y,v] \quad \text{für } y := \frac{1}{\sigma} W^+[z_1, z_2].$$

Aus dieser Beziehung (2.6) ergibt sich, dass das zu den beiden Lösungen $z_1, z_2 \in S^+$ konstruierte $y \in S$ orthogonal zu z_1 und z_2 ($B[y,z_j] = 0$, $j = 1, 2$) und damit orthogonal zu dem von z_1 und z_2 aufgespannten Unterraum $[z_1,z_2]$ ist:

$$y := \frac{1}{\sigma} W^+[z_1, z_2] \in [z_1,z_2]^\perp.$$

2.6.1 Wechselbeziehungen zwischen den speziellen Lösungen $u_j(.,c)$ und $u_j^+(.,c)$

Für die speziellen Lösungen $u_j = u_j(.,c)$ von (L) und $u_j^+ = u_j^+(.,c)$ von (L^+) ($c \in J$, $j = 0, 1, 2$) folgen auf Grund der Anfangsbedingungen bei $x = c$ mit $\sigma(x) = \exp\int_c^x p(t)dt$ die nachstehenden Beziehungen:

$$\text{(2.7)} \qquad \begin{aligned} &u_2^+ = \sigma W[u_1,u_2], && u_1^+ = \sigma W[u_0,u_2], && u_0^+ = \sigma W[u_0,u_1], \\ &u_2 = \frac{1}{\sigma} W[u_1^+,u_2^+], && u_1 = \frac{1}{\sigma} W[u_0^+,u_2^+], && u_0 = \frac{1}{\sigma} W[u_0^+,u_1^+]. \end{aligned}$$

Beweis: Beispielsweise hat die Lösung $z := \sigma W[u_1,u_2] \in S^+$ wegen $u_2(c) = u_2'(c) = 0$ den Wert

$$z(c) = \sigma(c) \begin{vmatrix} u_1(c) & u_2(c) \\ u_1'(c) & u_2'(c) \end{vmatrix} = 0,$$

wegen $u_1(c) = u_2(c) = 0$ den Wert

$$D^1[z](c) = \sigma(c) \begin{vmatrix} u_1(c) & u_2(c) \\ u_1''(c) & u_2''(c) \end{vmatrix} = 0$$

und wegen $\sigma(c) = 1$, $u_1'(c) = u_2''(c) = 1$, $u_1''(c) = u_2'(c) = 0$ den Wert

$$D^2[z](c) = \sigma(c)\begin{vmatrix} u_1'(c) & u_2'(c) \\ u_1''(c) & u_2''(c) \end{vmatrix} = 1.$$

Aufgrund dieser Anfangsbedingungen stimmen also nach dem Existenz- und Einzigkeitssatz für (L^+) die Lösungen z und u_2^+ überein. □

2.6.2 Adjungierte Fundamentalsysteme bzw. duale Basen

Für Vektoren $\mathbf{c} = (c_1,c_2,c_3)$, $\mathbf{d} = (d_1,d_2,d_3) \in \mathbb{R}^3$ sei im Folgenden

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{d} = \sum_{j=1}^{3} c_j d_j \in \mathbb{R}$$

das Standardskalarprodukt (kanonische Skalarprodukt) und

$$\mathbf{c} \times \mathbf{d} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = (c_2d_3 - c_3d_2, -(c_1d_3 - c_3d_1), c_1d_2 - c_2d_1) \in \mathbb{R}^3$$

das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) der Vektoren, wobei $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ die Standardbasis (kanonische Basis) des $\mathbb{R}^3$ ist.

Für ein Fundamentalsystem $\mathbf{y} = (y_1,y_2,y_3)$ von (L) erfüllt die zugehörige von Null verschiedene Wronski-Determinante

$$W[\mathbf{y}] = W[y_1,y_2,y_3] = \det(y_j^{(k)}) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \\ \mathbf{y}'' \end{vmatrix}$$

($j = 1, 2, 3$; $k = 0, 1, 2$) die homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$(W[\mathbf{y}])' = -pW[\mathbf{y}],$$

sodass

$$W[\mathbf{y}] = \gamma\cdot\exp(-\textstyle\int p dx) = \dfrac{\gamma}{\sigma(x)}$$

mit einem reellen $\gamma \neq 0$ und $\sigma(x) = \exp\int p(x)dx$ gilt (Formel von Liouville[6]).

Analog ist für ein Fundamentalsystem $\mathbf{z} = (z_1,z_2,z_3)$ von (L^+) die zugehörige von Null verschiedene verallgemeinerte Wronski-Determinante

$$W^+[\mathbf{z}] = W^+[z_1,z_2,z_3] = \det(D^k[z_j]) = \begin{vmatrix} \mathbf{z} \\ D^1[\mathbf{z}] \\ D^2[\mathbf{z}] \end{vmatrix}$$

($j = 1, 2, 3$; $k = 0, 1, 2$) eine Lösung der Differentialgleichung

$$(W^+[\mathbf{z}])' = pW^+[\mathbf{z}],$$

sodass

$$W^+[\mathbf{z}] = \delta\cdot\exp\textstyle\int p dx = \delta\cdot\sigma(x)$$

mit einem reellen $\delta \neq 0$ gilt.

Ist $\mathbf{y} = (y_1,y_2,y_3)$ ein Fundamentalsystem von (L), dann ist das dazu mittels des Vektorprodukts gebildete Tripel

---

[6] Die Liouvillesche Formel ist benannt nach dem französischen Mathematiker Joseph Liouville (1809–1882), der diese Formel 1838 gleichzeitig mit dem ukrainisch-russischen Mathematiker Michail Wassiljewitsch Ostrogradski (1801–1860) fand.

(2.8) $$\mathbf{z} = \frac{1}{W[\mathbf{y}]}\mathbf{y}\times\mathbf{y}' = \left(\frac{W[y_2,y_3]}{W[\mathbf{y}]}, -\frac{W[y_1,y_3]}{W[\mathbf{y}]}, \frac{W[y_1,y_2]}{W[\mathbf{y}]}\right)$$

nach obigen Betrachtungen zunächst ein Tripel von Lösungen von (L^+) und dann nach der Cramerschen Regel[7] oder nach den für das Spatprodukt (gemischte Produkt)

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

geltenden Determinanten-Rechenregeln auch eine Lösung des linearen Gleichungssystems

(2.9) $$\mathbf{yz} = 0,\ \mathbf{y}'\mathbf{z} = 0,\ \mathbf{y}''\mathbf{z} = 1.$$

Beispielsweise erhält man die dritte Gleichung folgendermaßen:

$$\mathbf{y}''\mathbf{z} = \mathbf{y}''\cdot\frac{1}{W[\mathbf{y}]}(\mathbf{y}\times\mathbf{y}') = \frac{1}{W[\mathbf{y}]}\begin{vmatrix} y_1'' & y_2'' & y_3'' \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \end{vmatrix} = 1.$$

Aus (2.9) folgt wegen $\mathbf{y}''' = -p\mathbf{y}'' - q\mathbf{y}' - r\mathbf{y}$ noch

$$\mathbf{y}'''\,\mathbf{z} = -p.$$

Durch Differentiation von (2.9) bekommt man

(2.10) $$\mathbf{y}\,\mathbf{z}' = 0,\ \mathbf{y}'\,\mathbf{z}' = -1,\ \mathbf{y}''\,\mathbf{z}' = p.$$

Aus (2.9) und (2.10) folgt für $D^1[\mathbf{z}] = \mathbf{z}' - p\,\mathbf{z}$

(2.11) $$\mathbf{y}\,D^1[\mathbf{z}] = 0,\ \mathbf{y}'\,D^1[\mathbf{z}] = -1,\ \mathbf{y}''\,D^1[\mathbf{z}] = 0$$

und daraus

$$\mathbf{y}'''\,D^1[\mathbf{z}] = (-p\mathbf{y}'' - q\mathbf{y}' - r\mathbf{y})\,D^1[\mathbf{z}] = q.$$

Differentiation von (2.11) liefert

(2.12) $$\mathbf{y}(D^1[\mathbf{z}])' = 1,\ \mathbf{y}'(D^1[\mathbf{z}])' = 0,\ \mathbf{y}''(D^1[\mathbf{z}])' = -q.$$

Aus (2.9) und (2.12) folgt für $D^2[\mathbf{z}] = (D^1[\mathbf{z}])' + q\,\mathbf{z}$

(2.13) $$\mathbf{y}\,D^2[\mathbf{z}] = 1,\ \mathbf{y}'\,D^2[\mathbf{z}] = 0,\ \mathbf{y}''\,D^2[\mathbf{z}] = 0.$$

Aus (2.9), (2.11) und (2.13) ergibt sich für die Vektoren $\mathbf{y}^{(k)}$ und $D^m[\mathbf{z}]$ die folgende **Multiplikationstabelle**.

Tab. 2.2 Die Multiplikationstabelle mit den Skalarprodukten der Vektoren $\mathbf{y}^{(k)}$ und $D^m[\mathbf{z}]$

(2.14)

	$\mathbf{z}$	$D^1[\mathbf{z}]$	$D^2[\mathbf{z}]$
$\mathbf{y}$	0	0	1
$\mathbf{y}'$	0	-1	0
$\mathbf{y}''$	1	0	0

Aus dieser erhält man unter Verwendung der Aussage, dass die Determinante einer Matrix und die Determinante ihrer Transponierten übereinstimmen, und mittels des Produktsatzes für Determinanten, wonach die Determinante eines Matrizenprodukts gleich dem Produkt der Determinanten der Matrizen ist, die Gleichung

[7] Die Cramersche Regel ist benannt nach dem Genfer Mathematiker Gabriel Cramer (1704–1752), der sie 1750 veröffentlichte. Sie ist jedoch bereits 1678 in einem Manuskript von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) zu finden.

$$W[\mathbf{y}]\cdot W^+[\mathbf{z}] = \begin{vmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \\ \mathbf{y}'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{z}^\mathsf{T} & D^1[\mathbf{z}]^\mathsf{T} & D^2[\mathbf{z}]^\mathsf{T} \end{vmatrix}$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \\ \mathbf{y}'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}^\mathsf{T} & D^1[\mathbf{z}]^\mathsf{T} & D^2[\mathbf{z}]^\mathsf{T} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

und daher die Beziehung

(2.15) $$W^+[\mathbf{z}] = \frac{1}{W[\mathbf{y}]} \neq 0.$$

Das oben aus **y** gebildete Tripel **z** ist wegen $W^+[\mathbf{z}] \neq 0$ somit ein Fundamentalsystem von (L^+). Außerdem erhält man für die beiden Fundamentalsysteme **y** und **z** mittels der Formel (2.5) von Abschnitt 2.6 für $v = y_j$ und $z = z_k = W[y_{k+1}, y_{k+2}]/W[\mathbf{y}]$ für die modulo 3 angegebenen Indizes j, k = 1, 2, 3 das Skalarprodukt:

(2.16) $$B[y_j, z_k] = W[y_j, y_{k+1}, y_{k+2}]/W[\mathbf{y}] = \delta_{j,k}.$$

Man bezeichnet daher **z** als das zu **y** **adjungierte Fundamentalsystem** oder **z** als die (eindeutig bestimmte) **duale Basis**[8] zu **y**. Für $L^+ = L^*$ siehe Birkhoff (1911), S. 106; für die entsprechende Aussage bei der Differentialgleichung n-ter Ordnung siehe Schlesinger[9] (1895), S. 62–64.

Beispielsweise gehört zum speziellen Fundamentalsystem von S bzw. zur speziellen S-Basis

$$u_0(.,x_0),\ u_1(.,x_0),\ u_2(.,x_0) \in S \qquad (x_0 \in J)$$

die duale S^+-Basis

$$u_2^+(.,x_0),\ -u_1^+(.,x_0),\ u_0^+(.,x_0) \in S^+.$$

Sind **y** und **z** zueinander duale Basen, so berechnet sich für beliebige Lösungen

$$y = \mathbf{c}\mathbf{y} \in S,\ z = \mathbf{d}\mathbf{z} \in S^+$$

mit den Koordinatentripeln $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$ das Skalarprodukt aus den Koordinaten zu

$$B[y,z] = \sum_{j,k=1}^{3} c_j d_k B[y_j, z_k] = \sum_{j,k=1}^{3} c_j d_k \delta_{j,k} = \sum_{j=1}^{3} c_j d_j = \mathbf{c}\cdot\mathbf{d},$$

also

(2.17) $$B[y,z] = \mathbf{c}\cdot\mathbf{d}.$$

Dies bedeutet, dass die dualen Raumpaare $(S, S^+; B)$ und $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \cdot)$ zueinander isomorph sind.

Für eine Teilmenge T von S ist im dualen Raum S^+ das **orthogonale Komplement**[10] $T^\perp \subseteq S^+$ definiert durch die Menge aller $z \in S^+$, die zu allen y in T orthogonal sind:

$$T^\perp = \{z \in S^+ : B[y,z] = 0 \text{ für alle } y \in S\}$$

---

8 Die Definition der dualen Basis bei einem dualen Raumpaar findet man bei Kowalsky (1967), S. 254.

9 Ludwig Schlesinger (1864–1933) war ein slowakisch-ungarisch-deutscher Mathematiker jüdischer Abstammung. Er befasste sich mit linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen und Differentialgeometrie und war Professor an den Universitäten Berlin, Bonn, Klausenburg, Budapest und Gießen.

10 Die Definition des orthogonalen Komplements bei einem dualen Raumpaar findet man bei Kowalsky (1967), S. 254.

$$= \{z = \mathbf{dz} \in S^+ : \mathbf{cd} = 0 \text{ für alle } \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } y = \mathbf{cy} \in T\},$$

wobei **y**, **z** zueinander duale Basen von S und S^+ sind. Entsprechend ist das orthogonale Komplement einer Teilmenge von S^+ definiert. Wird für eine Teilmenge $T \subseteq S$ (bzw. $T \subseteq S^+$) mit $[T] = \text{lin } T$ die lineare Hülle von T bezeichnet,

$$[T] := \text{lin } T := \{\lambda y : y \in T, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

so gilt $T^\perp = [T]^\perp$.

Da **y** die Lösung des linearen Gleichungssystems

(2.18) $\mathbf{y}\,\mathbf{z} = 0,\ \mathbf{y}\,D^1[\mathbf{z}] = 0,\ \mathbf{y}\,D^2[\mathbf{z}] = 1$

ist, bekommt man (nach der Cramerschen Regel bzw. der Determinantenmethode zur theoretischen Lösung eines linearen Gleichungssystems) umgekehrt aus dem Fundamentalsystem **z** auch wieder das Fundamentalsystem **y**:

(2.19) $$\mathbf{y} = \frac{1}{W^+[\mathbf{z}]}\mathbf{z}\times\mathbf{z}' = \left(\frac{W[z_2,z_3]}{W^+[\mathbf{z}]}, -\frac{W[z_1,z_3]}{W^+[\mathbf{z}]}, \frac{W[z_1,z_2]}{W^+[\mathbf{z}]}\right).$$

Analog kann man auch ausgehend von einem Fundamentalsystem $\mathbf{z}$ von (L^+) für das durch (2.19) definierte Tripel $\mathbf{y}$ die angegebenen Gleichungen und schließlich (2.15) und (2.8) folgern.

2.6.3 Die Koordinaten der zu zwei Lösungen orthogonalen Lösung

(2.20) Sind die mit dem Fundamentalsystem $\mathbf{y}$ gebildeten Lösungen $\tilde{y}_1 = \mathbf{c}_1\mathbf{y},\ \tilde{y}_2 = \mathbf{c}_2\mathbf{y} \in S$ linear unabhängig, dann besitzt die zu den Lösungen $\tilde{y}_1,\ \tilde{y}_2$ konstruierte orthogonale Lösung

$$z = W[\tilde{y}_1, \tilde{y}_2]/W[\mathbf{y}] \in S^+$$

bezüglich dem zu **y** adjungierten Fundamentalsystem $\mathbf{z} := (\mathbf{y} \times \mathbf{y}')/W[\mathbf{y}]$ die Koordinatendarstellung

$$z = \mathbf{dz} \quad \text{mit } \mathbf{d} := \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2.$$

(2.21) Sind die mit dem Fundamentalsystem $\mathbf{z}$ gebildeten Lösungen $\tilde{z}_1 = \mathbf{d}_1\mathbf{z},\ \tilde{z}_2 = \mathbf{d}_2\mathbf{z} \in S^+$ linear unabhängig, dann hat die zu den Lösungen $\tilde{z}_1,\ \tilde{z}_2$ konstruierte orthogonale Lösung

$$y = W[\tilde{z}_1, \tilde{z}_2]/W^+[\mathbf{z}] \in S$$

bezüglich dem zu $\mathbf{z}$ adjungierten Fundamentalsystem $\mathbf{y} := (\mathbf{z} \times \mathbf{z}')/W^+[\mathbf{z}]$ die Koordinatendarstellung

$$y = \mathbf{cy} \quad \text{mit } \mathbf{c} := \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2.$$

Beweis: Beispielsweise gilt wegen der auf Lagrange zurückgehenden Lagrangeschen Identität für das Skalarprodukt von zwei Kreuzprodukten

$$W[\tilde{y}_1, \tilde{y}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{c}_1\mathbf{y} & \mathbf{c}_2\mathbf{y} \\ \mathbf{c}_1\mathbf{y}' & \mathbf{c}_2\mathbf{y}' \end{vmatrix} = (\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2)\cdot(\mathbf{y} \times \mathbf{y}') = \mathbf{d}\cdot\mathbf{z}\cdot W[\mathbf{y}],$$

also $z = W[\tilde{y}_1, \tilde{y}_2]/W[\mathbf{y}] = \mathbf{dz}$. □

2.6.4 Die Koordinaten der speziellen Lösungen $u_j(.,t)$ und $u_j^+(.,t)$

Für die mit Hilfe der adjungierten Fundamentalsysteme $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ zu festen $t \in J$, $k \in \{0,1,2\}$ gebildeten Lösungen

$$y(x) = \mathbf{y}(x)D^k[\mathbf{z}](t),$$
$$z(x) = \mathbf{y}^{(k)}(t)\mathbf{z}(x)$$

ergeben sich wegen der aus der Multiplikationstabelle (2.14) zu entnehmenden Anfangswerte bei $x = t$ nach dem Existenz- und Einzigkeitssatz für lineare Differentialgleichungen die Identitäten

(2.22) $(-1)^k u_{2-k}(x,t) = \mathbf{y}(x)D^k[\mathbf{z}](t),$

(2.23) $(-1)^k u^+_{2-k}(x,t) = \mathbf{y}^{(k)}(t)\mathbf{z}(x) \qquad (t \in J;\ k = 0, 1, 2).$

Die Formel (2.22) mit $k = 0$, also

$$u_2(x,t) = \mathbf{y}(x)\mathbf{z}(t),$$

und mit $p \in C^2(J)$, $q \in C^1(J)$ findet man bei Birkhoff (1911), S. 115, (10), (11) und speziell mit dem Fundamentalsystem $y_1 = u_0(.,a)$, $y_2 = u_1(.,a)$, $y_3 = u_2(.,a)$ bei Azbelev[11], Caljuk (1964), S. 234. Analog erhält man für $k = 0$ aus der Formel (2.23) die Beziehung

$$u_2^+(x,t) = \mathbf{y}(t)\mathbf{z}(x).$$

Die Formeln (2.22) und (2.23) lassen sich zusammenfassen zu

(2.24) $(-1)^m u^{(k)}_{2-m}(x,t) = \mathbf{y}^{(k)}(x)D^m[\mathbf{z}](t) = (-1)^k D^m[u^+_{2-k}](t,x)$

für $k, m \in \{0,1,2\}$, woraus sich auch nochmal (2.1) von Abschnitt 2.2 ergibt.

Wechselbeziehungen zwischen den Lösungen von (L_s) **und** (L_s^+)

Analoge Beziehungen gelten für die mit einem $s \in C^1(J)$ gebildeten Differentialgleichungen

(L_s) $L_s[y] = s\cdot L[y] = sy''' + spy'' + sqy' + sry = 0$

und

(L_s^+) $L_s^+[z] = L^+[sz] = \big(((sz)' - psz)' + qsz\big)' - rsz = 0.$

Denn sind z_1, z_2 Lösungen von (L_s^+), dann sind $\zeta_1 = sz_1$, $\zeta_2 = sz_2$ Lösungen von (L^+). Folglich ist

$$y = \frac{1}{\sigma}W[\zeta_1,\zeta_2] = \frac{s^2}{\sigma}W[z_1,z_2]$$

($\sigma(x) = \exp\int p(x)dx$) eine Lösung von (L) und damit auch von (L_s). Ist noch $s \neq 0$ in J und sind y_1, y_2 Lösungen von (L_s) und damit von (L), dann ist

$$\zeta = \sigma W[y_1,y_2]$$

Lösung von (L^+) und

$$z = \frac{\zeta}{s} = \frac{\sigma}{s}W[y_1,y_2]$$

Lösung von (L_s^+). Den Spezialfall $s = \sigma$ behandelt Dolan (1970). Den von Dolan für (L_σ) und (L_σ^+) bewiesenen Resultaten in L.1, L.2, Th.1, Cor.1 und Th.2 entsprechen die folgenden sich auf (L) und (L^+) beziehenden Ergebnisse von Satz 2.1, Hilfssatz 2.2 und Satz 2.2.

[11] Nikolay Viktorovich Azbelev (1922–2006) war ein bekannter russischer Mathematiker, der sich über fünf Jahrzehnte mit Differential- und Integralgleichungen befasste. Quelle: Bulgakov et al. (2009).

2.7 Wechselbeziehungen zwischen der Nullstellenverteilung der Lösungen von (L) und der Nullstellenverteilung der Lösungen von (L^+)

2.7.1 Oszillation von (L) und von (L^+)

Definition: Oszillatorische und nichtoszillatorische Lösung; oszillatorischer, nichtoszillatorischer, schwach oszillatorischer und stark oszillatorischer Unterraum; diskonjugierte Differentialgleichung

Eine nichttriviale Lösung von (L) bzw. (L^+) heißt **oszillatorisch** im Intervall J, falls sie in J unendlich viele Nullstellen besitzt. Falls sie nur endlich viele Nullstellen in J besitzt, heißt sie **nichtoszillatorisch** in J. Ein Unterraum U von S bzw. von S^+ heißt oszillatorisch in J, falls er eine in J oszillatorische nichttriviale Lösung enthält; andernfalls heißt U nichtoszillatorisch in J. U heißt **schwach oszillatorisch** in J, falls U sowohl eine in J oszillatorische nichttriviale Lösung als auch eine in J nichtoszillatorische nichttriviale Lösung enthält. U heißt **stark oszillatorisch** in J, falls jede in U enthaltene nichttriviale Lösung oszillatorisch in J ist. Die Differentialgleichung (L) (bzw. (L^+)) heißt in J oszillatorisch, nichtoszillatorisch, schwach oszillatorisch oder stark oszillatorisch, falls das entsprechende für den Lösungsraum S (bzw. S^+) gilt. Die Differentialgleichung (L) (bzw. (L^+)) heißt **diskonjugiert**[12] in J ($L \in D(J)$ bzw. $L^+ \in D(J)$), falls jede nichttriviale Lösung von (L) (bzw. (L^+)) höchstens zwei (mit ihren Vielfachheiten gezählte) Nullstellen in J hat.

Satz 2.1 Die schwache Oszillation von S als hinreichende Bedingung für die Oszillation des dualen Raums S^+

Falls S (bzw. S^+) schwach oszillatorisch in J ist, dann ist auch S^+ (bzw. S) oszillatorisch in J.

Folgerung: Ausschluss der schwachen Oszillation durch die Nichtoszillation des dualen Raums

Falls S^+ (bzw. S) nichtoszillatorisch in J ist, dann ist S (bzw. S^+) nicht schwach oszillatorisch in J, also entweder nichtoszillatorisch oder stark oszillatorisch.

Es gibt Beispiele für den Fall, dass S und S^+ beide in J schwach oszillatorisch sind (etwa falls $L \in C_I \cup C_{II}$ und (L) oszillatorisch in J ist; siehe Beispiel 1 nach Satz 2.3 in Abschnitt 2.7.6), und für den Fall, dass S (bzw. S^+) schwach oszillatorisch und S^+ (bzw. S) stark oszillatorisch in J ist (siehe Dolan 1970, S. 386, Neuman[13] 1972, S. 592, und Beispiel 2 nach Satz 2.3). Eine Verstärkung von Satz 2.1 liefert der unten folgende Satz 2.2, der aus der schwachen Oszillation von S (bzw. S^+) sogar die Existenz eines stark oszillatorischen zweidimensionalen Unterraums von S^+ (bzw. S) und die Oszillation jedes zweidimensionalen Unterraums von S^+ (bzw. S) folgert.

Beweis von Satz 2.1: Ist $y_1 \in S \setminus \{o\}$ nichtoszillatorisch in J und $y_2 \in S \setminus \{o\}$ oszillatorisch in J, dann sind y_1, y_2 linear unabhängig und ist $z = \sigma\, W[y_1,y_2] \in S^+$ nichttrivial. Da in allen $x \in J$ mit $y_1(x) \neq 0$ und somit zumindest in einer J-Umgebung von einer der Intervallgrenzen a oder b für z die Darstellung

[12] Der Begriff ‚diskonjugiert' geht zurück auf Wintner (1951), S. 368. Aurel Friedrich Wintner (1903–1958) war ein US-amerikanischer Mathematiker ungarischer Herkunft, der sich u. a. mit Analysis und Himmelsmechanik befasste, und Professor an der Johns Hopkins-Universität in Baltimore.

[13] František Neuman (1937–) ist ein tschechischer Mathematiker.

$$z = \sigma y_1^2 \left(\frac{y_2}{y_1} \right)'$$

gilt, folgt nach dem Satz von Rolle[14], dass z oszillatorisch in J ist. □

2.7.2 Zweidimensionale Unterräume der Lösungsräume S und S^+

Für eine nichttriviale Lösung $z = \mathbf{dz} \in S^+ \setminus \{o\}$ bzw. $y = \mathbf{cy} \in S \setminus \{o\}$ ist das zugehörige orthogonale Komplement

$$\begin{aligned} S_z &:= [z]^\perp = \{z\}^\perp = \{y \in S : B[y,z] = 0\} \\ &= \{y = \mathbf{cy} \in S : \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{cd} = 0\} \subseteq S \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} S_y^+ &:= [y]^\perp = \{y\}^\perp = \{z \in S^+ : B[y,z] = 0\} \\ &= \{z = \mathbf{dz} \in S^+ : \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{cd} = 0\} \subseteq S^+ \end{aligned}$$

ein zweidimensionaler Unterraum von S bzw. S^+.

Für zwei Lösungen $z_1, z_2 \in S^+ \setminus \{o\}$ (bzw. $y_1, y_2 \in S \setminus \{o\}$) gilt die Übereinstimmung der orthogonalen Komplemente, also

$$S_{z_1} = S_{z_2} \quad (\text{bzw. } S_{y_1}^+ = S_{y_2}^+),$$

genau dann, wenn z_1 und z_2 (bzw. y_1 und y_2) linear abhängig sind ($[z_1] = S_{z_1}^{\perp} = S_{z_2}^{\perp} = [z_2]$ bzw. $[y_1] = S_{y_1}^{+\perp} = S_{y_2}^{+\perp} = [y_2]$).

Aufgrund des speziellen Wertes des Skalarprodukts von $u_{2-j} \in S$ und $z \in S^+$ bzw. von $y \in S$ und $u_{2-j}^+ \in S^+$, nämlich

$$\begin{aligned} B[u_{2-j}(.,x_0),z] &= B[u_{2-j}(.,x_0),z](x_0) &&= (-1)^j D^j[z](x_0) \quad \text{bzw.} \\ B[y, u_{2-j}^+(.,x_0)] &= B[y, u_{2-j}^+(.,x_0)](x_0) &&= (-1)^j y^{(j)}(x_0), \end{aligned}$$

speziell für $j = 0$:

$$\begin{aligned} B[u_2(.,x_0),z] &= z(x_0) \quad \text{bzw.} \\ B[y, u_2^+(.,x_0)] &= y(x_0), \end{aligned}$$

gilt die nachfolgende Charakterisierung der Inzidenz der speziellen Lösungen u_{2-j} und u_{2-j}^+ mit den zweidimensionalen Unterräumen S_z bzw. S_y^+ :

(2.25) **Charakterisierung der Inzidenz der speziellen Lösungen $u_k(.,x_0)$ und $u_k^+(.,x_0)$ mit zweidimensionalen Unterräumen bzw. der Orthogonalität der speziellen Lösungen zu beliebigen Lösungen $z \in S^+$ und $y \in S$:**

Für $z \in S^+$ (bzw. $y \in S$) und $x_0 \in J$ gilt die Inzidenz

$$u_{2-j}(.,x_0) \in S_z = [z]^\perp \quad (\text{bzw. } u_{2-j}^+(.,x_0) \in S_y^+ = [y]^\perp)$$

genau dann, wenn

$$D^j[z](x_0) = 0 \quad (\text{bzw. } y^{(j)}(x_0) = 0)$$

ist ($j \in \{0, 1, 2\}$).

Speziell für $j = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} u_2(.,x_0) \perp z &\Leftrightarrow z(x_0) = 0; \\ u_2^+(.,x_0) \perp y &\Leftrightarrow y(x_0) = 0. \end{aligned}$$

---

[14] Der Satz von Rolle ist benannt nach dem französischen Mathematiker Michel Rolle (1652–1719). Er ist ein zentraler Satz der Differentialrechnung und besagt, dass eine in einem abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ stetige und im offenen Intervall $]c,d[$ differenzierbare Funktion f zwischen den Nullstellen c und d von f eine Nullstelle der Ableitung f' besitzt.

2.7.3 Beschreibung der zweidimensionalen Unterräume durch Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Ist $z \in S^+ \setminus \{o\}$, dann genügen die $y \in S_z$ in allen $x \in J$ mit $z(x) \neq 0$ der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\text{(2.26)} \qquad \frac{\sigma B[y,z]}{z^2} \equiv \left(\frac{\sigma}{z}y'\right)' + \frac{\sigma D^2[z]}{z^2}y = 0.$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sigma}{z}y'\right)' &= \frac{\sigma}{z}y'' + \left(\frac{\sigma}{z}\right)'y' = \frac{\sigma}{z^2}zy'' + \frac{\sigma pz - \sigma z'}{z^2}y' = \frac{\sigma}{z^2}\left(zy'' - D^1[z]y'\right)\\ &= \frac{\sigma}{z^2}\left(B[y,z] - D^2[z]y\right).\end{aligned}$$

Analog genügen zu einem $y \in S \setminus \{o\}$ mit $y \neq 0$ in $\tilde{J} \subseteq J$ alle $u = z/\sigma$ mit $z \in S_y^+$ in $\tilde{J}$ der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\text{(2.27)} \qquad \frac{B[y,\sigma u]}{y^2} \equiv \left(\frac{\sigma}{y}u'\right)' + \frac{y'' + qy}{y^2}\sigma u = 0.$$

Denn es ist

$$\begin{aligned}\frac{B[y,z]}{y^2} &= \frac{1}{y^2}\left(\left(D^1[z]\right)'y + qzy - D^1[z]y' + zy''\right)\\ &= \left(\frac{D^1[z]}{y}\right)' + \frac{qy + y''}{y^2}z\end{aligned}$$

und

$$D^1[\sigma u] = (\sigma u)' - p\sigma u = \sigma u'.$$

Ist noch $p \in C^1(J)$, dann genügen die $z \in S_y^+$ in $\tilde{J}$ der Differentialgleichung

$$\text{(2.28)} \qquad \frac{B[y,z]}{y} \equiv z'' + fz' + gz = 0$$

mit

$$f = -p - \frac{y'}{y}, \quad g = q - p' + p\frac{y'}{y} + \frac{y''}{y}$$

bzw. der Differentialgleichung

$$\text{(2.29)} \qquad \frac{B[y,z]}{\sigma y^2} \equiv \left(\frac{z'}{\sigma y}\right)' + hz = 0$$

mit

$$h = \frac{g}{\sigma y} = \left(y'' + py' + (q - p')y\right)\Big/\left(\sigma y^2\right)$$

und alle $v = z/\rho$ mit $\rho := \left(\sigma|y|\right)^{1/2}$, $z \in S_y^+$ in $\tilde{J}$ der Differentialgleichung

$$\text{(2.30)} \qquad \frac{B[y,\rho v]}{\rho y} \equiv v'' + \left(g - \frac{f'}{2} - \frac{f^2}{4}\right)v = 0.$$

Es gilt nämlich $\rho' = \frac{\sigma}{2\rho}\left(p|y| + y'\operatorname{sgn} y\right)$, $\rho'/\rho = \frac{1}{2}\left(p + \frac{y'}{y}\right) = -\frac{1}{2}f$, $\rho''/\rho = (\rho'/\rho)' + (\rho'/\rho)^2$ $= -\frac{1}{2}f' + \frac{1}{4}f^2$ und

$$\frac{B[y,\rho v]}{\rho y} = \frac{1}{\rho}\left((\rho v)'' + f(\rho v)' + g\rho v\right) = v'' + \left(2\frac{\rho'}{\rho} + f\right)v' + \left(\frac{\rho''}{\rho} + f\frac{\rho'}{\rho} + g\right)v$$
$$= v'' + \eta v$$

mit $\eta := \rho''/\rho + f\rho'/\rho + g = g - f'/2 - f^2/4$.

2.7.4 Trennung der Nullstellen zweier Funktionen

Definition: Trennung der Nullstellen zweier Funktionen
Man sagt, die Nullstellen von zwei Funktionen $u, v \in C^1(J)$ trennen sich in J, wenn in J die Funktionen u und v keine gemeinsame Nullstelle und jeweils keine zweifache Nullstelle haben, zwischen zwei Nullstellen von u eine Nullstelle von v liegt und auch das Umgekehrte gilt.

Der folgende Hilfssatz ist der wesentliche Bestandteil des Beweises des Sturmschen Trennungssatzes[15] für lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung.

Hilfssatz 2.1 Nullstellenverteilung zweier Funktionen und ihrer Ableitungen bei nicht verschwindender Wronski-Determinante
Ist für Funktionen $u, v \in C^1(J)$ die Wronski-Determinante $W[u,v] \neq 0$ in J, dann haben u' und v' keine gemeinsame Nullstelle in J und trennen sich die Nullstellen von u und v in J gemäß obiger Definition.
Sind $y_1, y_2 \in [u,v] = \operatorname{lin}\{u,v\}$ linear unabhängig, dann gilt ebenfalls $W[y_1,y_2] \neq 0$ in J und somit für y_1 und y_2 die gleiche Aussage wie für u und v.

Beweis: a) Beim Auftreten einer gemeinsamen Nullstelle x_0 von u' und v' würde

$$W[u,v](x_0) = \begin{vmatrix} u(x_0) & v(x_0) \\ u'(x_0) & v'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u(x_0) & v(x_0) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

folgen, im Widerspruch zur Voraussetzung.
b) Analog zu a) folgt, dass u und v keine gemeinsame Nullstelle haben, dass u keine zweifache Nullstelle und auch v keine zweifache Nullstelle besitzt. O. E. bleibt zu zeigen, dass zwischen zwei Nullstellen $x_1, x_2 \in J$ von u eine Nullstelle von v liegt. Wegen $u(x_1) = u(x_2) = 0$ und $W[u,v] \neq 0$ ist $v(x_1) \neq 0$ und $v(x_2) \neq 0$. Nimmt man an, dass $v \neq 0$ in $]x_1,x_2[$ ist, so ist $h := u/v \in C^1[x_1,x_2]$ und $h(x_1) = h(x_2) = 0$. Nach dem Satz von Rolle hat dann h' eine Nullstelle in $]x_1,x_2[$. Andererseits ist aber

$$h' = -W[u,v]/v^2 \neq 0$$

in $[x_1,x_2]$. Also besitzt v eine Nullstelle im offenen Intervall $]x_1,x_2[$.
c) Für die Funktionen

$$y_1 = c_{11}u + c_{21}v, \quad y_2 = c_{12}u + c_{22}v \in [u,v]$$

($c_{jk} \in \mathbb{R}$; $j, k = 1, 2$) gilt nach dem Determinatenproduktsatz

$$W[y_1,y_2] = W[u,v]\cdot\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

[15] Der Sturmsche Trennungssatz ist benannt nach dem schweizerisch-französischen Mathematiker und Physiker Jacques Charles François (Jakob Karl F.) Sturm (1803–1855).

falls det $(c_{jk}) \neq 0$ ist. Die Determinante det (c_{jk}) ist von Null verschieden, da y_1, y_2 als linear unabhängig vorausgesetzt sind. □

Hilfssatz 2.2 Ein- und zweidimensionale Unterräume von S und S^+

1) Zu jedem $y \in S$ (bzw. $z \in S^+$) gibt es Lösungen $z_1, z_2 \in S^+$ (bzw. $y_1, y_2 \in S$) mit
$$y = W[z_1,z_2]/\sigma \qquad \text{(bzw. } z = \sigma W[y_1,y_2]).$$

2) Ist $y_0 \in S \setminus \{o\}$ (bzw. $z_0 \in S^+ \setminus \{o\}$) und $z_1 \in S^+ \setminus S^+_{y_0}$ (bzw. $y_1 \in S \setminus S_{z_0}$), dann gilt
$$S = [y_0] \oplus S_{z_1} \qquad \text{(bzw. } S^+ = [z_0] \oplus S^+_{y_1}),$$
d. h. S (bzw. S^+) ist die direkte Summe der Unterräume $[y_0]$ und S_{z_1} (bzw. $[z_0]$ und $S^+_{y_1}$).

3) Falls $z_1, z_2 \in S^+$ (bzw. $y_1, y_2 \in S$) linear unabhängig sind, dann ist
$$[z_1,z_2] = S^+_{y_0} \qquad \text{(bzw. } [y_1,y_2] = S_{z_0})$$
und
$$S_{z_1} \cap S_{z_2} = [y_0] \qquad \text{(bzw. } S^+_{y_1} \cap S^+_{y_2} = [z_0])$$
mit $y_0 = W[z_1,z_2]/\sigma \not\equiv 0$ (bzw. $z_0 = \sigma\, W[y_1,y_2] \not\equiv 0$).

4) Ist $z_1 \in S^+ \setminus \{o\}$ (bzw. $y_1 \in S \setminus \{o\}$), dann gilt
$$y \in S_{z_1} \qquad \text{(bzw. } z \in S^+_{y_1})$$
genau dann, wenn
$$y = W[z_1,z_2]/\sigma \qquad \text{(bzw. } z = \sigma\, W[y_1,y_2])$$
mit einem $z_2 \in S^+$ (bzw. $y_2 \in S$) ist.

5) Ist U^+ (bzw. U) ein zweidimensionaler Unterraum von S^+ (bzw. S), dann gilt
$$S = \bigcup_{z \in U^+ \setminus \{o\}} S_z \qquad \text{(bzw. } S^+ = \bigcup_{y \in U \setminus \{o\}} S^+_y).$$

6) **Nicht schwach oszillatorische orthogonale Komplemente der nichtoszillatorischen Lösungen**:
Falls $z \in S^+ \setminus \{o\}$ (bzw. $y \in S \setminus \{o\}$) nichtoszillatorisch in J ist, dann ist das zugehörige orthogonale Komplement S_z (bzw. S^+_y) nicht schwach oszillatorisch in J.
Darüber hinaus gilt, dass die orthogonalen Komplemente S_z (bzw. S^+_y) mit nichtoszillatorischen $z \in S^+ \setminus \{o\}$ (bzw. $y \in S \setminus \{o\}$) entweder alle nichtoszillatorisch oder alle stark oszillatorisch sind.

Beweis: 1) Für $y \equiv 0$ gilt die Behauptung mit zwei beliebigen linear abhängigen $z_1, z_2 \in S^+$. Falls $y \in S \setminus \{o\}$ ist, gibt es eine Basis $\mathbf{y} = (y_1,y_2,y_3)$ von S mit $y_3 = y$. Mit der durch (2.8) gegebenen zu $\mathbf{y}$ dualen Basis $\mathbf{z} = (z_1,z_2,z_3)$ erhält man nach (2.19) speziell für $y = y_3$ die Darstellung
$$y = y_3 = W[z_1,z_2]/W^+[\mathbf{z}] = \frac{1}{\sigma} W[z_1/\delta,z_2] = \frac{1}{\sigma} W[\tilde{z}_1,z_2] \qquad (W^+[\mathbf{z}] = \delta\sigma)$$
mit einem $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\tilde{z}_1 = z_1/\delta$, $z_2 \in S^+$.

2) Ist $y_0 \in S \setminus \{o\}$, $z_1 \in S^+ \setminus S^+_{y_0}$ und somit $z_1 \not\equiv 0$ in J und $z_1 \not\perp y_0$, dann ist dim $S_{z_1} = 2$ und $y_0 \notin S_{z_1}$. Also ist die Summe der Unterräume $[y_0]$ und S_{z_1} gleich S und ihr Durchschnitt trivial: $[y_0] \cap S_{z_1} = \{o\}$.

3) Für linear unabhängige $z_1, z_2 \in S^+$ und $y_0 := \frac{1}{\sigma} W[z_1,z_2] \not\equiv 0$ gilt nach (2.6)
$$B[y_0,z_j] = \frac{1}{\sigma} W^+[z_1,z_2,z_j] = 0 \qquad (j = 1, 2),$$

also

$$y_0 \in S_{z_1} \cap S_{z_2} = [z_1,z_2]^{\perp}.$$

Wegen dim $[z_1,z_2] = 2$, dim $[z_1,z_2]^{\perp} = 1$ und folglich

$$[z_1,z_2] = [y_0]^{\perp} = S^+_{y_0},$$

$$S_{z_1} \cap S_{z_2} = [z_1,z_2]^{\perp} = [y_0].$$

4) „⇐“: Falls $y = \frac{1}{\sigma} W[z_1,z_2]$ mit $z_1, z_2 \in S^+$ ist, dann ist nach 3) $y_0 \in S_{z_1} \cap S_{z_2} \subseteq S_{z_1}$.

„⇒“: Ist umgekehrt $z_1 \in S^+ \setminus \{o\}$ und ein beliebiges $y \in S_{z_1}$ gegeben, dann ist $y \perp z_1$ und $z_1 \in S_y$. Wählt man noch ein von z_1 linear unabhängiges $z \in S_y$, dann ist $y \perp z_1$, $y \perp z$ und $y \in S_{z_1} \cap S_z$ und nach 3)

$$y = \lambda \frac{1}{\sigma} W[z_1,z] = \frac{1}{\sigma} W[z_1,\lambda z] = \frac{1}{\sigma} W[z_1,z_2]$$

mit einem passenden $\lambda \in \mathbb{R}$ und mit $z_2 = \lambda z$.

5) Für den zweidimensionalen Unterraum U^+ von S^+ gibt es nach 3) ein $y_1 \in S$ mit $U^+ = S^+_{y_1}$. Für ein beliebiges $y \in S$ ist dim $(S^+_{y_1} \cap S^+_y) \geq 1$, sodass mit einem $z \in S^+_{y_1} \cap S^+_y \setminus \{o\}$ dann $y \in S_z$ und $z \in S^+_{y_1} \setminus \{o\} = U^+ \setminus \{o\}$ gilt.[16]

6) Ist $z \in S^+ \setminus \{o\}$ nichtoszillatorisch in J und sind y_1, y_2 beliebige linear unabhängige Lösungen von S_z, dann gilt $z \in S^+_{y_1} \cap S^+_{y_2}$ und nach 3) mit einem reellen $\lambda \neq 0$

$$z = \lambda\sigma W[y_1,y_2].$$

In jedem Teilintervall von J, in dem z nullstellenfrei ist, trennen sich nach Hilfssatz 2.1 die Nullstellen von y_1 und y_2. Und da nach Voraussetzung die Lösung z in J nur endlich viele Nullstellen hat, gibt es offene Umgebungen der Intervallgrenzen a und b, in denen sich die Nullstellen von y_1 und y_2 trennen. Daher haben y_1 und y_2 dasselbe Oszillationsverhalten: Es ist y_2 nichtoszillatorisch, wenn y_1 nichtoszillatorich ist, und es ist y_2 oszillatorisch, wenn y_1 oszillatorisch ist. Damit ergibt sich, dass S_z entweder nichtoszillatorisch in J oder stark oszillatorisch in J ist.

Die zweite Behauptung von 6) ergibt sich, da zwei verschiedene derartige zweidimensionale Unterräume S_{z_1} und S_{z_2} (z_1, $z_2 \in S^+$ linear unabhängig) nach 3) zumindest einen eindimensionalen Durchschnitt haben und sich daher das jeweilige einheitliche Oszillationsverhalten seiner Lösungen von einem Unterraum S_{z_1} auf den anderen Unterraum S_{z_2} überträgt. □

2.7.5 Weitere Wechselbeziehungen zwischen den Nullstellenverteilungen bei (L) und bei (L⁺)

Im oben angeführten Satz 2.1 wurde die schwache Oszillation des Lösungsraumes S als hinreichende Bedingung für die Oszillation des dualen Lösungsraumes S^+ angegeben. Der nachfolgende Satz 2.2 verschärft diese Aussage, indem er bei gleicher Voraussetzung sogar die Existenz eines stark oszillatorischen zweidimensionalen Unterraums und damit die starke Oszillation jedes zweidimensionalen Unterraums in S^+ nachweist. Die Existenz eines stark oszillatorischen zweidimensionalen Unterraums von S^+ wird im weiter unten folgenden Hilfssatz 4.3 auch durch eine andere hinreichende Bedingung an S gesichert, nämlich durch die Existenz einer in J oszillatorischen Lösung

[16] Es kommt hier der Dimensionssatz für endlich erzeugbare Unterräume U und W eines Vektorraums zur Anwendung: dim $(U + W)$ + dim $(U \cap W)$ = dim U + dim W. Diese Dimensionsformel findet man z. B. bei Kowalsky (1967), S. 167. Hier im Text folgt aus dim $S^+_{y_1} = 2$, dim $S^+_y \geq 2$, dim $(S^+_{y_1} + S^+_y) \leq$ dim $S^+ = 3$ die Ungleichung dim $(S^+_{y_1} \cap S^+_y)$ = dim $S^+_{y_1}$ + dim S^+_y - dim $(S^+_{y_1} + S^+_y) \geq 4 - 3 = 1$.

$y_0 \in S \setminus \{o\}$, die in J ohne Vorzeichenwechsel ist (o. E. $y_0 \geq 0$). Demzufolge existiert also ein stark oszillatorischer zweidimensionaler Unterraum in S^+, wenn im oszillatorischen Lösungsraum S eine in J oszillatorische vorzeichenwechselfreie oder eine in J nichtoszillatorische Lösung $y_0 \in S \setminus \{o\}$ existiert. Die Existenz einer vorzeichenwechselfreien nichttrivialen Lösung wiederum wird beispielsweise durch den unten folgenden Satz 4.7 für die Klasse $K_{\mathrm{I}} \cup K_{\mathrm{II}}$ bewiesen.

Satz 2.2 Die schwache Oszillation als hinreichende Bedingung für die Existenz eines stark oszillatorischen zweidimensionalen Unterraums im dualen Lösungsraum

Ist S (bzw. S^+) schwach oszillatorisch in J und wählt man $y_1 \in S \setminus \{o\}$ (bzw. $z_1 \in S^+ \setminus \{o\}$) als nichttriviale nichtoszillatorische Lösung in J, dann ist der zweidimensionale Unterraum $S^+_{y_1}$ (bzw. S_{z_1}) stark oszillatorisch in J. Außerdem ist dann jeder zweidimensionale Unterraum von S^+ (bzw. S) oszillatorisch in J.

Folgerung: Ausschluss der schwachen Oszillation durch die Existenz eines nichtoszillatorischen zweidimensionalen Unterraums im dualen Raum

Besitzt S^+ (bzw. S) einen in J nichtoszillatorischen zweidimensionalen Unterraum, dann ist S (bzw. S^+) nicht schwach oszillatorisch in J.

Dolan (1970), S. 385, gibt ein Beispiel für den Fall, dass der gesamte Lösungsraum S nichtoszillatorisch und der Lösungsraum S^+ stark oszillatorisch in $J = [a,\infty[$ ist.
Weiter wird mit Beispiel 2 in Abschnitt 2.7.6 ein Beispiel für den Fall gegeben, dass die Menge aller nichtoszillatorischen Lösungen von (L) genau einen zweidimensionalen Unterraum bildet. Nach obiger Folgerung ist dann S^+ nicht schwach oszillatorisch. Da in diesem Beispiel auch eine oszillatorische Lösung $y_3 \in S$ existiert, ist S schwach oszillatorisch, sodass nach Satz 2.2 in S^+ ein stark oszillatorischer zweidimensionaler Unterraum existiert, jeder zweidimensionale Unterraum oszillatorisch ist und auch S^+ oszillatorisch ist. Da S^+ nicht schwach oszillatorisch ist, ist also S^+ stark oszillatorisch.

Beweis von Satz 2.2: Es sei $y_1 \in S \setminus \{o\}$ nichtoszillatorisch in J und $y_2 \in S \setminus \{o\}$ oszillatorisch in J. Es gibt dann ein Teilintervall $J_1 \subseteq J$, in dem y_1 nullstellenfrei und y_2 oszillatorisch ist. In J_1 ist dann auch die Funktion $h := y_2/y_1$ oszillatorisch und nach dem Satz von Rolle auch $h' = W[y_1,y_2]/y_1^2$ und $z := \sigma W[y_1,y_2] = \sigma\, y_1^2 h'$ oszillatorisch. Demnach ist z eine nichttriviale in J oszillatorische Lösung von (L^+) und nach Hilfssatz 2.2, 3) $z \in S^+_{y_1}$. Da y_1 nichtoszillatorisch ist, folgt nach Hilfssatz 2.2, 6), dass $S^+_{y_1}$ nicht schwach oszillatorisch und somit stark oszillatorisch in J ist. Da für jedes $y \in S \setminus \{o\}$ der Durchschnitt $S^+_y \cap S^+_{y_1}$ von zwei zweidimensionalen Unterräumen nichttrivial ist und somit eine oszillatorische Lösung (von $S^+_{y_1}$) enthält, ist S^+_y oszillatorisch in J. □

2.7.6 Charakterisierung spezieller Doppelkegelstrukturen der Menge *N* der nichtoszillatorischen Lösungen und der Menge *O* der oszillatorischen Lösungen beim halboffenen Intervall *J* = [*a*,*b*[

Es sei

N (bzw. N^+) die Menge aller in J nichtoszillatorischen Lösungen und

O (bzw. O^+) die Menge aller in J oszillatorischen Lösungen von (L) (bzw. (L^+)).

Man erhält dann für den Lösungsraum S (bzw. S^+) die disjunkte Zerlegung

$S = N \cup \{o\} \cup O$ (bzw. $S^+ = N^+ \cup \{o\} \cup O^+$).

Weiter sei

$$N_0 := N \cup \{o\}, \quad N_0^+ := N^+ \cup \{o\},$$

$$O_0 := O \cup \{o\}, \quad O_0^+ := O^+ \cup \{o\}.$$

Es sei jetzt speziell $J = [a,b[$ ein halboffenes Intervall. Ist nun N^{pos} (bzw. N^{neg}) die Teilmenge der nichtoszillatorischen Lösungen von S, die jeweils in einer Umgebung der rechten Intervallgrenze b positiv (bzw. negativ) sind, dann ist $N_0^{pos} := N^{pos} \cup \{o\}$ (bzw. $N_0^{neg} := N^{neg} \cup \{o\}$) ein konvexer linearer Kegel, also abgeschlossenen bezüglich der Konuskombination (nichtnegativen Linearkombination) (Dolan, Klaasen 1975a, L.1). Die Menge

$$N_0 = N_0^{pos} \cup N_0^{neg}$$

ist dann ein **Doppelkegel** aus zwei konvexen linearen Kegeln in S. Analog ist auch

$$N_0^+ = N_0^{+pos} \cup N_0^{+neg}$$

ein Doppelkegel in S^+ mit den entsprechend definierten Teilmengen N^{+pos}, N^{+neg}, N_0^{+pos} und N_0^{+neg} in S^+.

Die speziellen Doppelkegelstrukturen, dass $N_0 = [v_0] \neq \{o\}$ ein eindimensionaler Unterraum $[v_0]$ von S ist oder dass N das Komplement eines zweidimensionalen Unterraums von S ist, also $N = S \setminus U$ (bzw. $N_0 = S \setminus (U \setminus \{o\})$) mit einem zweidimensionalen Unterraum $U = [u_1,u_2]$ von S gilt, charakterisiert Ahmad (1974) in Th.3.4 und Th.3.3 mittels asymptotischer Eigenschaften der Lösungen von (L):

Unter der Voraussetzung

$$S = U + [v_0]$$

mit einem zweidimensionalen Unterraum $U \subseteq O_0$ und einem eindimensionalen Unterraum $[v_0] \subseteq N_0$ charakterisiert er den Fall

$$N_0 = [v_0] \text{ bzw. } O = S \setminus [v_0]$$

durch die Unbeschränktheit der Quotienten u/v_0 nach oben und nach unten für alle $u \in U \setminus \{o\}$:

$$\liminf_{x \to b} \frac{u(x)}{v_0(x)} = -\infty \text{ und } \limsup_{x \to b} \frac{u(x)}{v_0(x)} = +\infty \ \forall\, u \in U \setminus \{o\}.$$

Weiter charakterisiert er unter dieser Voraussetzung $S = U + [v_0]$ ($U \subseteq O_0$, $[v_0] \subseteq N_0$) den Fall

$$N = S \setminus U \text{ bzw. } O_0 = U$$

durch die Konvergenz der Quotienten u/v_0 gegen Null für alle $u \in U \setminus \{o\}$:

$$\lim_{x \to b} \frac{u(x)}{v_0(x)} = 0 \ \forall\, u \in U \setminus \{o\}.$$

Analog lassen sich nachfolgend auch die speziellen Doppelkegelstrukturen, dass N das Komplement eines eindimensionalen Unterraums von S ist, also

$$N = S \setminus [u_0]$$

mit einem $u_0 \in S \setminus \{o\}$ gilt, oder dass

$$N_0 = V$$

ein zweidimensionaler Unterraum $V = [v_1,v_2]$ von S ist, charakterisieren:

Satz 2.3 Charakterisierung spezieller Doppelkegelstrukturen für N_0

1) Ist $S = V + [u_0]$ mit einem zweidimensionalen Unterraum $V \subseteq N_0$ und einem eindimensionalen Unterraum $[u_0] \subseteq O_0$, so gilt

$$N = S \setminus [u_0], \ O_0 = [u_0]$$

genau dann, wenn

$$\lim_{x \to b} \frac{u_0(x)}{v(x)} = 0 \ \forall\, v \in V \setminus \{o\}$$

ist.

2) Weiter gelten unter dieser Voraussetzung $S = V + [u_0]$ ($V \subseteq N_0$, $[u_0] \subseteq O_0$) die speziellen Strukturen

$$N_0 = V, \quad O = S \setminus V$$

genau dann, wenn

$$\liminf_{x \to b} \frac{u_0(x)}{v(x)} = -\infty \quad \text{und} \quad \limsup_{x \to b} \frac{u_0(x)}{v(x)} = +\infty \quad \forall\, v \in V \setminus \{o\}$$

erfüllt ist.

Beweis für die Charakterisierungen von 1) $N = S \setminus [u_0]$ und 2) $N = V \setminus \{o\}$:

1) Bei vorausgesetzter Summendarstellung $S = V + [u_0]$ ($V \setminus \{o\} \subseteq N$, $u_0 \in O$) gilt stets

$$S \setminus [u_0] \supseteq S \setminus O_0 = N.$$

Es ist also nur zu zeigen, dass die umgekehrte Inklusion

$$S \setminus [u_0] \subseteq N$$

äquivalent ist zur Konvergenz des Quotienten u_0/v ($v \in V \setminus \{o\}$) gegen Null.

„$\Leftarrow$“: Es sei nun vorausgesetzt, dass der Quotient u_0/v beim Grenzübergang $x \longrightarrow b$ gegen Null konvergiert. Es ist zu zeigen, dass jedes beliebige $y \in S \setminus [u_0]$, also jedes

$$y = v + \lambda u_0 \text{ mit } v \in V \setminus \{o\},\ \lambda \in \mathbb{R},$$

nichtoszillatorisch ist. Wegen $V \setminus \{o\} \subseteq N$ ist der erste Summand v nichtoszillatorisch in $[a,b[$ und somit nullstellenfrei in einer Umgebung $]b\text{-}\delta,b[$ ($\delta > 0$) von b. Daher erhält man in dieser Umgebung für y die Darstellung

$$y = v \cdot [1 + \lambda u_0/v],$$

in welcher der Klammerausdruck gegen 1 konvergiert und somit in einer Umgebung $]b\text{-}\tilde{\delta},b[$ ($\tilde{\delta} > 0$) von b nullstellenfrei ist. Daher ist y nichtoszillatorisch in $[a,b[$. Es gilt also $S \setminus [u_0] \subseteq N$.

„$\Rightarrow$“: Es ist zu zeigen, dass aus der Inklusion $S \setminus [u_0] \subseteq N$ die Konvergenz des Quotienten u_0/v (für beliebige $v \in V \setminus \{o\} \subseteq N$) gegen Null folgt. Äquivalent zu dieser Aussage ist, dass aus der Nichtkonvergenz von u_0/v (für ein $v \in V \setminus \{o\}$) gegen Null die Relation $S \setminus [u_0] \nsubseteq N$, d. h. die Existenz eines $\tilde{y} \in (S \setminus [u_0]) \cap O$ folgt. Wenn u_0/v beim Grenzübergang $x \longrightarrow b$ nicht gegen Null konvergiert, dann gibt es eine Umgebung $]b\text{-}\delta,b[$ ($\delta > 0$) von b, in der $v \neq 0$ ist, weiter eine Folge von Nullstellen x_n von u_0 mit $x_n \longrightarrow b$, ein $\varepsilon > 0$ und dazu eine Folge von Stellen $c_n \longrightarrow b$ mit

$$\left| \frac{u_0(c_n)}{v(c_n)} \right| \geq \varepsilon.$$

O. E. kann ggf. durch Übergang zu einer Teilfolge $c_n > x_n$ angenommen werden. Es gibt dann eine Teilfolge $d_n > x_n$ mit $u_0(d_n)/v(d_n) \geq +\varepsilon$ oder eine Teilfolge $e_n > x_n$ mit $u_0(e_n)/v(e_n) \leq -\varepsilon$. Im ersten Fall gibt es nach dem Zwischenwertsatz[17] von Bolzano eine Folge von Stellen $t_n \in]x_n,d_n]$ mit $t_n \longrightarrow b$ und

$$\frac{u_0(t_n)}{v(t_n)} = \varepsilon \text{ bzw. } u_0(t_n) - \varepsilon v(t_n) = 0.$$

Demzufolge ist die Lösung $\tilde{y} := u_0 - \varepsilon v$ oszillatorisch und $\tilde{y} \in S \setminus [u_0]$ (wegen $\varepsilon \neq 0$, $v \in V \setminus \{o\} \subseteq N$ und damit $v \notin [u_0]$). Also ist $S \setminus [u_0] \nsubseteq N$. Im zweiten Fall ergibt sich mit der Teilfolge e_n, dass die Lösung $\hat{y} := u_0 + \varepsilon v \in S \setminus [u_0]$ oszillatorisch ist und somit ebenfalls $S \setminus [u_0] \nsubseteq N$ gilt.

---

[17] Der Zwischenwertsatz oder Nullstellensatz wurde zuerst im Jahr 1817 von dem böhmischen Mathematiker, Philosophen und Theologen Bernardus Placidus Gonzal Nepomuk Bolzano (1781–1848) und später noch von dem deutschen Mathematiker Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897) bewiesen. Er ist einer der wichtigsten Sätze über reellwertige stetige Funktionen und präzisiert die Aussage, dass der Graph einer stetigen Funktion ohne Absetzen gezeichnet werden kann. Eine Verallgemeinerung dieses Satzes ist die Aussage, dass bei einer stetigen Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ zwischen den metrischen Räumen X und Y das Bild (der Wertebereich) einer bogenweise (kurvenweise, weg-) zusammenhängenden Menge $M \subseteq X$ ebenfalls bogenweise zusammenhängend ist.

2) Bei der vorausgesetzten Summendarstellung $S = V + [u_0]$ ($V \subseteq N_0$, $u_0 \in O$) gilt stets

$$S \setminus V \supseteq S \setminus N_0 = O.$$

Es ist also nur zu zeigen, dass die umgekehrte Inklusion

$$S \setminus V \subseteq O$$

äquivalent ist zu den angegebenen Werten von lim inf und lim sup von u_0/v.

„$\Leftarrow$“: Es sei nun vorausgesetzt, dass der Quotient u_0/v beim Grenzübergang $x \longrightarrow b$ nach oben und nach unten unbeschränkt ist. Es ist zu zeigen, dass jedes beliebige $y \in S \setminus V$, also jedes

$$y = v + \lambda u_0 \text{ mit } v \in V,\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{o\},$$

oszillatorisch ist. Im Falle $v = o$ ist $y = \lambda u_0 \in O$. Im Falle $v \in V \setminus \{o\}$ ist v nichtoszillatorisch in $[a,b[$ und somit nullstellenfrei in einer Umgebung $]b\text{-}\delta,b[$ ($\delta > 0$) von b. In dieser Umgebung hat y die Darstellung

$$y = v\cdot[1 + \lambda u_0/v],$$

sodass y genau dann oszillatorisch ist, wenn der Klammerausdruck $w := [1 + \lambda u_0/v]$ oszillatorisch ist. Aufgrund der vorausgesetzten Unbeschränktheit von u_0/v nach oben und nach unten gibt es Folgen von Stellen c_n, $d_n \in]b\text{-}\delta,b[$ mit $c_n \longrightarrow b$, $d_n \longrightarrow b$, $u_0(c_n)/v(c_n) \longrightarrow -\infty$, $u_0(d_n)/v(d_n) \longrightarrow +\infty$ und o. E. $c_n < d_n$. Für beliebig vorgegebenes $\lambda \neq 0$ gibt es einen Index $n_0 = n_0(-1/\lambda)$, sodass

$$\frac{u_0(c_n)}{v(c_n)} < -\frac{1}{\lambda} < \frac{u_0(d_n)}{v(d_n)}$$

für alle $n \geq n_0$ gilt. Nach dem Zwischenwertsatz von Bolzano gibt es eine Folge von Stellen $t_n \in]c_n,d_n[$ mit $t_n \longrightarrow b$ und

$$\frac{u_0(t_n)}{v(t_n)} = -\frac{1}{\lambda}.$$

Demzufolge ist

$$w(t_n) = 1 + \lambda\frac{u_0(t_n)}{v(t_n)} = 0 \text{ für die } t_n \in]c_n,d_n[,$$

somit der Klammerausdruck $w = 1 + \lambda u_0/v$ und dann auch die Lösung $y = v\cdot w$ oszillatorisch.

„$\Rightarrow$“: Es ist zu zeigen, dass aus der Inklusion $S \setminus V \subseteq O$ für beliebiges $v \in V \setminus \{o\}$ die Unbeschränktheit von u_0/v nach oben und nach unten folgt. Man wählt nun ein beliebiges $v \in V \setminus \{o\}$, eine Umgebung $]b\text{-}\delta,b[$ ($\delta > 0$) von b, in der v nullstellenfrei ist, und Folgen $\lambda_n > 0$, $\tilde{\lambda}_n < 0$ mit $\lambda_n \searrow 0$ und $\tilde{\lambda}_n \nearrow 0$. Da die Lösungen

$$y_n = v + \lambda_n u_0,\ \tilde{y}_n = v + \tilde{\lambda}_n u_0 \in S \setminus V \subseteq O$$

oszillatorisch sind, gibt es Folgen $t_{n,k} \longrightarrow b$ und $\tilde{t}_{n,k} \longrightarrow b$ bei $k \longrightarrow \infty$ mit $y_n(t_{n,k}) = \tilde{y}_n(\tilde{t}_{n,k}) = 0$.

Da in der angegebenen Umgebung von b die Lösungen y_n und $\tilde{y}_n$ die Darstellungen

$$y_n = v\cdot[1 + \lambda_n u_0/v],\ \ \tilde{y}_n = v\cdot[1 + \tilde{\lambda}_n u_0/v].$$

haben, erhält man für den Quotienten u_0/v insbesondere an den gegen b konvergierenden Stellen $x_n := t_{n,n}$ und $\tilde{x}_n := \tilde{t}_{n,n}$ die Werte

$$\frac{u_0(x_n)}{v(x_n)} = -\frac{1}{\lambda_n} \longrightarrow -\infty \text{ und } \frac{u_0(\tilde{x}_n)}{v(\tilde{x}_n)} = -\frac{1}{\tilde{\lambda}_n} \longrightarrow +\infty,$$

sodass der Quotient u_0/v beim Grenzübergang $x \longrightarrow b$ nach unten und nach oben unbeschränkt ist. □

Weiter können auch noch ähnliche Bedingungen an das asymptotische Verhalten der Lösungen von (L) und (L^+) angegeben werden, die hinreichend für das Auftreten der speziellen Fälle

$$N_0 = [v_0] \neq \{o\}$$

($v_0 \in S \setminus \{o\}$) oder

$$N = S \setminus U$$

($U = [u_1,u_2]$ zweidimensionaler Unterraum von S) sind. In der Literatur werden bei den entsprechenden Sätzen diese asymptotischen Eigenschaften der Lösungen noch durch spezielle Koeffizientenbedingungen gesichert (siehe Lazer (1966), Th.1.4, Greguš. (1963), Satz 3, Švec (1965b), Satz 1, Lazer (1966), Th.3.6, Jones (1974a), Th.4, und Ahmad, Lazer (1969), Th.3, Jones (1974b), Th.1).

Einen Zusammenhang zwischen den Strukturen von N und N^+ liefert Th.3.1 von Ahmad (1974) und einen Zusammenhang zwischen den Fundamentalsystemen $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ von (L) bzw. (L^+) das Th.2.3 von Ahmad (1974) (letzterer ergibt sich unmittelbar aus (2.19) $\mathbf{y} = (\mathbf{z} \times \mathbf{z}')/W^+[\mathbf{z}]$ und (2.8) $\mathbf{z} = (\mathbf{y} \times \mathbf{y}')/W[\mathbf{y}]$).

Neuman gibt in (1972), S. 592, ein Beispiel für den Fall

$$O_0 = [u_0] \neq \{o\},$$

weiter in (1972), Th.2 ein Beispiel für den Fall

$$O_0 = S \text{ und } N_0^+ = S^+ \qquad (\text{oder } N_0 = S \text{ und } O_0^+ = S^+)$$

und in (1974), S. 594, 595, ein Beispiel für

$$O_0 = S \text{ und } O_0^+ = S^+.$$

Nachfolgend werden jetzt noch Beispiele für die speziellen Fälle

$$N_0 = [v_0] \neq \{o\},$$
$$N = S \setminus U \text{ mit 2-dim. Unterraum } U \text{ von } S,$$
$$N_0 = V = [v_1,v_2] \text{ ist ein 2-dim. Unterraum von } S$$

angegeben.

Beispiele für spezielle Doppelkegelstrukturen der Menge N der nichtoszillatorischen Lösungen

1) **Die Fälle $N_0 = [v_0] \neq \{o\}$ und $N = S \setminus U$**

Die drei Funktionen

$$y_1(x) = e^{\gamma x}\cos x, \qquad y_2(x) = e^{\gamma x}\sin x, \qquad y_3(x) = 1$$

($\gamma \in \mathbb{R}$) bilden in $J = [a,\infty[$ ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

(L) $\qquad L[y] \equiv W[y_1,y_2,y_3,y]/W[y_1,y_2,y_3] = 0$

($W[y_1,y_2,y_3] = (1+\gamma^2)e^{2\gamma x}$). Es ist $y_1, y_2 \in O$ und $y_3 \in N$. Ein Fundamentalsystem für die dazu adjungierte Differentialgleichung (L^+) ist gegeben durch

$$\tilde{z}_1(x) = -e^{-\gamma x}(\gamma \sin x + \cos x) \in O^+,$$
$$\tilde{z}_2(x) = e^{-\gamma x}(\gamma \cos x - \sin x) \in O^+,$$
$$\tilde{z}_3(x) = 1 \in N^+.$$

a) Für $\gamma > 0$ ist

$$N_0 = [y_3], \qquad N^+ = S^+ \setminus [\tilde{z}_1, \tilde{z}_2]$$

nach den oben angegebenen Charakterisierungen, da $u/y_3 = u$ unbeschränkt nach oben und unbeschränkt nach unten ist für alle $u \in U = [y_1,y_2]$ bzw. da $\tilde{u}/\tilde{z}_3 = \tilde{u}$ gegen Null konvergiert für alle $\tilde{u} \in U^+ = [\tilde{z}_1, \tilde{z}_2]$.

b) Für $\gamma < 0$ ist

$$N = S \setminus [y_1,y_2], \qquad N_0^+ = [\tilde{z}_3],$$

da $u/y_3 = u$ gegen Null konvergiert für alle $u \in U = [y_1,y_2]$ bzw. da $\tilde{u}/\tilde{z}_3 = \tilde{u}$ unbeschränkt nach oben und unbeschränkt nach unten ist für alle $\tilde{u} \in U^+ = [\tilde{z}_1, \tilde{z}_2]$.

2) **Der Fall** $N_0 = V = [v_1,v_2]$

Die Funktionen

$$y_1(x) = \alpha + \operatorname{arctg} x, \quad y_2(x) = \alpha + \frac{\cos x}{1+x^2}, \quad y_3(x) = (1 + x^2)\sin x$$

($\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$) bilden für ein hinreichend großes $a \in \mathbb{R}$ in $J = [a,\infty[$ ein Fundamentalsystem für eine Differentialgleichung (L). Es ist nämlich

$$W[y_1,y_2,y_3](x) = \operatorname{arctg} x + \alpha\cdot(1 + \sin x) + O\left(\frac{1}{x}\right) \text{ bei } x \to \infty.$$

Zunächst ist $y_1, y_2 \in N$ und $y_3 \in O$. Weiter ist

$$N_0 = V = [y_1,y_2],$$

da y_3/v nach oben und nach unten unbeschränkt ist für alle $v \in V \setminus \{o\}$. Nach den Ausführungen im Anschluss an Satz 2.2 und die zugehörige Folgerung ergibt sich, dass der zu S duale Raum S^+ stark oszillatorisch ist. △

2.7.7 Diskonjugiertheit in Teilintervallen von *J*

Der nachfolgende Satz 2.4 gibt mit der Existenz einer nichtoszillatorischen Lösung $y \in S$ und eines nichtoszillatorischen zweidimensionalen Unterraums $U^+ \subseteq S^+$ eine hinreichende Bedingung für die Diskonjugiertheit von (L) und (L^+) an den Intervallgrenzen.

Satz 2.4 Hinreichende Bedingung für die Diskonjugiertheit an den Intervallgrenzen
Enthält $S \setminus \{o\}$ (bzw. $S^+ \setminus \{o\}$) eine in J nichtoszillatorische Lösung und der dazu duale Raum S^+ (bzw. S) einen nichtoszillatorischen zweidimensionalen Unterraum, dann gibt es $c, d \in]a,b[$, sodass (L) und (L^+) diskonjugiert sind in $J \cap [d,b]$ und in $J \cap [a,c]$.

Man vergleiche dazu Th.2.15 (ohne Beweis) von Barrett (1969), in dem die Differentialgleichungen (E_3) und (E_3^+) beide als nichtoszillatorisch in $J = [a,\infty[$ vorausgesetzt sind. Aus dem nachfolgenden Beweis ergibt sich auch der folgende Zusatz zur lokalen Diskonjugiertheit, den Coppel (1971), S. 98, L.11, für die Differentialgleichung n-ter Ordnung auf eine andere Weise begründet hat.

Zusatz: Lokale Diskonjugiertheit

1) Für jedes $c \in J$ gibt es ein reelles $\delta = \delta(c) > 0$, sodass die Differentialgleichungen (L) und (L^+) diskonjugiert sind in $[c-\delta,c+\delta] \cap J$.
2) Insbesondere folgt damit auch im Falle $p \in C(J)$ (statt $p \in C^1(J)$), dass auch die Lösung $u_2^+(.,c)$ in einer punktierten J-Umgebung von c positiv ist:

$$u_2^+(t,c) = u_2(c,t) > 0 \text{ für } t \in [c-\delta,c[\cup]c,c+\delta],\ t \in J.$$

Beweis von Satz 2.4: Aus der Voraussetzung eines nichtoszillatorischen zweidimensionalen Unterraums $U^+ \subseteq S^+$ folgt mittels der Folgerung aus Satz 2.2 zunächst, dass S nicht schwach oszillatorisch ist und dann wegen einer vorausgesetzten nichtoszillatorischen Lösung $y \in S \setminus \{o\}$ somit nichtoszillatorisch in J ist. Insbesondere besitzt dann auch S einen nichtoszillatorischen zweidimensionalen Unterraum U. Ebenfalls nach der Folgerung aus Satz 2.2 ergibt sich weiter, dass S^+ nicht schwach oszillatorisch ist und dann wegen des vorausgesetzten nichtoszillatorischen Unterraums U^+ nichtoszillatorisch in J ist.
Wählt man $y_1 \in S \setminus \{o\}$ und $z_1 \in S^+_{y_1}$, dann ist nach Hilfssatz 2.2, 4)

$$z_1 = \sigma W[y_1,y_2]$$

mit einem $y_2 \in S$ und nach Hilfssatz 2.2, 3) $[y_1,y_2] = S_{z_1}$. Wählt man noch $y_3 \in S \setminus S_{z_1}$, d. h. y_3 linear unabhängig von y_1, y_2, dann ist

$$W[y_1,y_2,y_3] \neq 0 \text{ in } J.$$

Da S und S^+ nichtoszillatorisch in J sind, haben y_1 und z_1 nur endlich viele Nullstellen in J. Ist $\tilde{J}$ ein Teilintervall von J, in dem

$$y_1 \in S \text{ und } z_1 \in S^+_{y_1} \text{ nullstellenfrei}$$

sind, dann gilt mit passend gewählten $\lambda_j = \pm 1$ für die Lösungen $\tilde{y}_j = \lambda_j y_j \in S$ ($j = 1, 2, 3$) in $\tilde{J}$

$$\tilde{y}_1 = \lambda_1 y_1 > 0,$$
$$W[\tilde{y}_1, \tilde{y}_2] = \lambda_1\lambda_2 W[y_1,y_2] = \lambda_1\lambda_2 z_1/\sigma > 0,$$
$$W[\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3] = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 W[y_1,y_2,y_3] > 0.$$

Das bedeutet aber, dass (L) in $\tilde{J}$ ein Markov-Fundamentalsystem[18] besitzt und somit nach Coppel (1971), S. 89, Prop.5, (L) in $\tilde{J}$ diskonjugiert ist. Aus der Diskonjugiertheit von (L) folgt dann nach dem unten noch folgenden Satz 4.2, 1) auch die Diskonjugiertheit von (L^+).

Im Falle $b \notin J$ wählt man $y_1 \in S \setminus \{o\}$ und $z_1 \in S^+_{y_1}$ beliebig und $\tilde{J} = J \cap [d,b]$ mit hinreichend nahe bei b gelegenem d, sodass y_1 und z_1 nullstellenfrei und die Differentialgleichungen (L) und (L^+) in $\tilde{J}$ diskonjugiert sind.

Im Falle $b \in J$ wählt man die Lösungen $y_1 \in S$ und $z_1 \in S^+_{y_1}$ mit $y_1(b) \neq 0$ und $z_1(b) \neq 0$: Für die Vorgabe der weiteren Anfangswerte $y_1'(b)$, $y_1''(b)$, $D^1[z_1](b)$, $D^2[z_1](b)$ der Lösungen y_1 und z_1 an der Stelle $x = b$ hat man dabei nur noch die Bedingung $z_1 \perp y_1$, also

$$0 = B[y_1,z_1] = B[y_1,z_1](b) = y_1''(b)\, z_1(b) - y_1'(b)\, D^1[z_1](b) + y_1(b)\, D^2[z_1](b)\,,$$

zu beachten. Dann sind wegen ihrer Stetigkeit die Lösungen y_1 und z_1 in einem Intervall $J \cap [d,b]$ mit passendem $d < b$ nullstellenfrei und nach Obigem daher (L) und (L^+) in $J \cap [d,b]$ diskonjugiert. Analog folgt die Diskonjugiertheit von (L) und (L^+) in einem Intervall $J \cap [a,c]$ ($a < c$). □

Beweis des Zusatzes: Für jedes $c \in J$ gibt es Lösungen $y_1 \in S$ und $z_1 \in S^+_{y_1}$ mit $y_1(c) \neq 0$ und $z_1(c) \neq 0$ (Begründung wie im obigen Beweis von Satz 2.4) und dann ein hinreichend kleines reelles $\delta = \delta(c) > 0$, sodass y_1 und z_1 nullstellenfrei im abgeschlossenen Intervall $\tilde{J} := [c-\delta, c+\delta] \cap J$ sind. Nach obigem Beweis des Satzes folgt dann die Diskonjugiertheit der Differentialgleichungen (L) und (L^+) in $\tilde{J}$. □

[18] Ein Markov-Fundamentalsystem ist benannt nach dem russischen Mathematiker Andrej Andrejewitsch Markov (senior, 1856–1922).

3 Die Integralkurve in der projektiven Ebene

3.1 Geometrische Interpretation der Nullstellen der Lösungen

Es sei $X := \mathbb{R}^3$ der dreidimensionale euklidische Raum der reellen Zahlentripel $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3)$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ die Standardbasis (kanonische Basis) von X, $\mathbf{y} = (y_1,y_2,y_3)$ eine beliebig fixierte Basis von S und $\mathbf{z} = (z_1,z_2,z_3) = (\mathbf{y} \times \mathbf{y}')/W[\mathbf{y}]$ die dazu duale Basis von S^+.
Das Verhalten der Lösungen von (L) und (L^+) lässt sich übersetzen in geometrische Eigenschaften der durch das Fundamentalsystem $\mathbf{y}$ von (L) gegebenen Kurve

(3.1) $\qquad x \in J \mapsto \mathbf{y}(x) \in X \qquad$ (mit $W[\mathbf{y}] \neq 0$).

Für die Differentialgleichung n-ter Ordnung wird diese Kurve bei Neuman (1972) betrachtet. Beschränken sich die Untersuchungen auf die Nullstellen der Lösungen, so verwendet man statt (3.1) auch die Kurven

(3.2) $\qquad x \in J \mapsto \dfrac{\mathbf{y}(x)}{|\mathbf{y}(x)|} \in S^2 := \{\mathbf{w} \in X : |\mathbf{w}| = 1\}$

(mit der euklidischen Norm $|\mathbf{w}| = |(w_1,w_2,w_3)| = (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)^{1/2}$ eines Vektors $\mathbf{w}$ von X) und

(3.3) $\qquad C : x \in J \mapsto [\mathbf{y}(x)] \in \mathbb{P}^2 := \{[\mathbf{x}] \subseteq X : \mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{o}\}\}$

(mit der linearen Hülle $[\mathbf{x}] := \operatorname{lin} \mathbf{x} = \{\lambda\mathbf{x} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ eines Vektors $\mathbf{x}$ von X). Die Kurve (3.2) auf der Einheitssphäre S^2 des $\mathbb{R}^3$ wird für die Differentialgleichung n-ter Ordnung von Neuman (1972, 1974) verwendet und für die Differentialgleichung 3. Ordnung (L) von Guggenheimer[1] (1972), S. 243 ff. Die Kurve (3.3) im projektiven Raum $\mathbb{P}^2$ wird für die Differentialgleichung n-ter Ordnung von Wilczynski (1905), Reynolds[2] (1921) und Guggenheimer (1976) verwendet und für die Differentialgleichung 3. Ordnung (L) von Birkhoff (1911), Bol[3] (1950) und Guggenheimer (1972, 1976).

3.1.1 Die Integralkurve *C* in der projektiven Ebene

Im Folgenden wird von diesen Kurven nur die **Integralkurve** C in der **projektiven Ebene** $\mathbb{P}^2$ betrachtet. Dabei werden die zweidimensionalen Unterräume

$$\langle \mathbf{c} \rangle := \{\mathbf{x} \in X : \mathbf{cx} = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0\} \subseteq X \qquad (\mathbf{c} = (c_1,c_2,c_3) \in X \setminus \{\mathbf{o}\})$$

des Vektorraums X mit den entsprechenden Geraden

$$G = \{[\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^2 : \mathbf{cx} = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2$$

(als Mengen von Punkten) in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ identifiziert. Für einen Punkt $P = [\mathbf{x}] = [\lambda\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^2$ ($\lambda \neq 0$) ist der Vektor $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3) \in X \setminus \{\mathbf{o}\}$ nur bis auf einen von Null verschiedenen Faktor $\lambda \neq 0$ bestimmt. Daher werden die projektiven Koordinaten x_1, x_2, x_3 des Punktes $P \in \mathbb{P}^2$ bezüglich der Basis $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ von X als homogene (Punkt-)Koordinaten bezeichnet. Für eine Gerade $G = \langle \mathbf{c} \rangle = \langle \rho\mathbf{c} \rangle \subseteq \mathbb{P}^2$ ($\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) ist der Normalenvektor $\mathbf{c} = (c_1,c_2,c_3)$ nur bis auf einen von Null verschiedenen Faktor $\rho \neq 0$ bestimmt. Daher bezeichnet man seine Komponenten c_1, c_2, c_3 als homogene (Geraden-)Koordinaten (Hyperebenenkoordinaten) der Geraden G.

---

[1] Heinrich Walter Guggenheimer (1924–2021) war ein deutschstämmiger schweizerisch-US-amerikanischer Mathematiker mit Beiträgen zur Differentialgeometrie, Topologie, algebraischen Geometrie und Konvexgeometrie.

[2] Clarence Newton Reynolds war ein US-amerikanischer Mathematiker, der 1919 an der Havard University in Cambridge (USA) promovierte.

[3] Gerrit Bol (1906–1989) war ein niederländischer Mathematiker, der sich mit Geometrie beschäftigte.

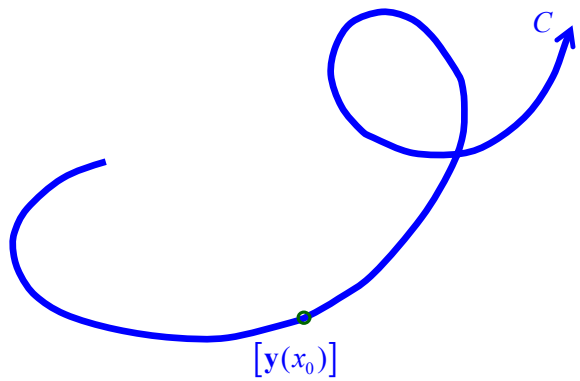


Abb. 3.1 Die Integralkurve C in der projektiven Ebene

3.1.2 Die Integralkurve C in der euklidischen Ebene

Wegen $W[\mathbf{y}] \neq 0$ ist $\mathbf{y}(x) \neq \mathbf{o}$ für alle $x \in J$. Es sei jetzt $x \in J$ fest gewählt und o. E. (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) $y_3(x) \neq 0$. Durch die Tilgung der Geraden (des 2-dimensionalen Unterraums des Vektorraums X)

$$H := \langle \mathbf{e}_3 \rangle = \{\mathbf{u} = (u_1,u_2,0) \in X : u_1, u_2 \in \mathbb{R}, u_3 = \mathbf{e}_3\mathbf{u} = 0\}$$

aus $\mathbb{P}^2$ erhält man die euklidische Ebene

$$\begin{aligned} E &:= \{[\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^2 : x_3 = \mathbf{e}_3\mathbf{x} \neq 0\} \\ &= \{[\mathbf{e}_3 + \mathbf{u}] \in \mathbb{P}^2 : \mathbf{u} \in H\} = \{[(u_1,u_2,1)] : u_1, u_2 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

mit der Richtung H der affinen Ebene E (H **Ferngerade** von E).
Wegen der Voraussetzung $\mathbf{e}_3\mathbf{y}(x) = y_3(x) \neq 0$ liegt der Kurvenpunkt $P = [\mathbf{y}] = [\mathbf{y}(x)]$ in E und hat die kartesischen Koordinaten

$$v_j = \frac{y_j}{y_3} \in \mathbb{R} \quad (j = 1, 2).$$

3.1.3 Tangenten von C

Wegen $W[z_1,z_2]/W^+[\mathbf{z}](x) = y_3(x) \neq 0$ gilt $(z_1(x),z_2(x)) \neq (0,0)$ in J, sodass die Kurve

$$x \in J \mapsto \mathbf{v}(x) = (v_1(x),v_2(x)) \in \mathbb{R}^2$$

im zugehörigen Koordinatenraum, also in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$, eine nichtverschwindende Ableitung besitzt und somit eine sog. glatte Kurve ist: Wegen

$$v_j' = y_j'/y_3 - y_jy_3'/y_3^2 = (y_j'y_3 - y_jy_3')/y_3^2$$

ist nämlich

$$\mathbf{v}'(x) = \left(\frac{W[y_3,y_1]}{y_3(x)^2}, \frac{W[y_3,y_2]}{y_3(x)^2}\right) = (z_2(x),-z_1(x))\cdot\frac{W[\mathbf{y}](x)}{y_3(x)^2} \neq (0,0).$$

In E ist die **Tangente** von C im Kurvenpunkt $P = [\mathbf{y}]$ die Menge aller Punkte $Q = Q(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, mit den kartesischen Koordinaten

$$v_j + \lambda v_j' \qquad (j = 1, 2)$$

und mit den projektiven Koordinaten

$$q_j = (v_j + \lambda v_j')y_3 = y_j + \lambda y_j' - \lambda\, y_jy_3'/y_3 \quad (j = 1 ,2), \quad q_3 = y_3,$$

also die Menge der Punkte

$$Q = [\mathbf{y} + \lambda\mathbf{y}' - \lambda\frac{y_3'}{y_3}\mathbf{y}] \in \mathbb{P}^2, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Daher ist in $\mathbb{P}^2$ die zum Kurvenpunkt $P = [\mathbf{y}(x)]$ gehörige Tangente von C gegeben durch die Gerade

$$[\mathbf{y},\mathbf{y}'] = \langle \mathbf{z} \rangle \text{ mit } \mathbf{z} = \mathbf{y} \times \mathbf{y}'/W[\mathbf{y}] \quad (\perp \mathbf{y}, \mathbf{y}')$$

(siehe Wilczynski (1905), S. 54, 55; Birkhoff (1911), S. 106; Reynolds (1921), S. 222; Bol (1950), S. 2, 10): Gemäß den Gleichungen (2.9) ist nämlich das **y** adjungierte Fundamentalsystem **z** orthogonal zu **y** und **y**‘ und somit ein Normalenvektor zur Tangente [**y**,**y**‘] der Integralkurve C im Kurvenpunkt [**y**].

3.1.4 Krümmung von C

Die **Krümmung** $\kappa(x)$ der Integralkurve C im Punkt $P = [\mathbf{y}(x)] \in E$ berechnet sich aus der Parameterdarstellung in den kartesischen Koordinaten $v_j(x)$ zu

$$\kappa(x) = \frac{W[\mathbf{v}'](x)}{|\mathbf{v}'(x)|^3} = \frac{\begin{vmatrix} v_1' & v_2' \\ v_1'' & v_2'' \end{vmatrix}}{\left(v_1'^2 + v_2'^2\right)^{3/2}}(x)$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & 1 \\ v_1' & v_2' & 0 \\ v_1'' & v_2'' & 0 \end{vmatrix}}{\left(v_1'^2 + v_2'^2\right)^{3/2}}(x) = \frac{W[\mathbf{y}/y_3](x)}{|\mathbf{v}'(x)|^3} = \frac{W[\mathbf{y}](x)}{y_3(x)^3\,|\mathbf{v}'(x)|^3},$$

also

$$\kappa(x) = \frac{W[\mathbf{y}](x)}{y_3(x)^3\,|\mathbf{v}'(x)|^3} \neq 0. \tag{3.4}$$

Denn es ist

$$(v_1, v_2, 1) = \mathbf{y}/y_3,$$
$$(v_1', v_2', 0) = (\mathbf{y}/y_3)' = \mathbf{y}'\cdot 1/y_3 + \mathbf{y}\cdot(1/y_3)',$$
$$(v_1'', v_2'', 0) = (\mathbf{y}/y_3)'' = \mathbf{y}''\cdot 1/y_3 + 2\mathbf{y}'\cdot(1/y_3)' + \mathbf{y}\cdot(1/y_3)'',$$

also

$$W[\mathbf{v}'] = W[\mathbf{y}/y_3] = \begin{vmatrix} \mathbf{y}/y_3 \\ (\mathbf{y}/y_3)' \\ (\mathbf{y}/y_3)'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{y}/y_3 \\ \mathbf{y}'/y_3 \\ \mathbf{y}''/y_3 \end{vmatrix} = W[\mathbf{y}]/y_3^3.$$

Die Krümmung κ der Integralkurve C verschwindet also in der euklidischen Ebene E nirgends.

Falls es ein $x_0 \in J$ mit $\mathbf{e}_3\mathbf{y}(x) = y_3(x_0) = 0$ gibt, so trifft die Integralkurve C im Kurvenpunkt $P(x_0) = [\mathbf{y}(x_0)]$ die Ferngerade H und für die Krümmung κ gilt

$$\lim_{x\to x_0} \kappa(x) = 0:$$

Denn in einer punktierten J-Umgebung von x_0 erhält man mit den Hilfsgrößen

$$h_j := y_3 v_j' = y_j' - y_j \frac{y_3'}{y_3} \qquad (j = 1, 2) \text{ und}$$

$$h := y_3^2\,|\mathbf{v}'|^2 = h_1^2 + h_2^2$$

und damit in Abhängigkeit von den projektiven Koordinaten y_1, y_2, y_3 für die Krümmung den Ausdruck

$$\kappa = \frac{W[\mathbf{y}]}{h^{3/2}\cdot \operatorname{sgn} y_3},$$

wobei nachfolgend für die Hilfsgröße h noch der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} h(x) = \infty$ bewiesen wird.

Beweis für $h(x) \longrightarrow \infty$ bei $x \longrightarrow x_0$: Wegen der Nichtnegativität von h_1^2 und h_2^2 ist die Behauptung gezeigt, falls $h_k^2 \longrightarrow \infty$ zumindest für einen Index $k \in \{1,2\}$ nachgewiesen wird. Zunächst gilt

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{y_3'(x)}{y_3(x)}\right| = \infty$$

für die beiden möglichen Fälle

1) $y_3(x_0) = 0 \neq y_3'(x_0)$ und
2) $y_3(x_0) = y_3'(x_0) = 0 \neq y_3''(x_0)$.

Es ist nämlich im nichttrivialen zweiten Fall bei $y_3''(x_0) > 0$ (und analog bei $y_3''(x_0) < 0$) in einer punktierten J-Umgebung von x_0

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} y_3(x) &= \operatorname{sgn} y_3''(x) = +1 && \text{für } x \neq x_0,\\ \operatorname{sgn} y_3'(x) &= -1 && \text{für } x < x_0,\\ \operatorname{sgn} y_3'(x) &= +1 && \text{für } x > x_0, \end{aligned}$$

somit (wegen der Konstanz der Vorzeichen jeweils in linksseitiger und rechtsseitiger J-Umgebung)

$$\frac{|y_3'|'}{|y_3|'} = \frac{(y_3'\operatorname{sgn} y_3')'}{(y_3\operatorname{sgn} y_3)'} = \frac{y_3''\operatorname{sgn} y_3'}{y_3'\operatorname{sgn} y_3} = \frac{y_3''\operatorname{sgn} y_3}{y_3'\operatorname{sgn} y_3'} = \frac{y_3''\operatorname{sgn} y_3''}{y_3'\operatorname{sgn} y_3'} = \frac{|y_3''|}{|y_3'|}$$

und nach der Regel von de l'Hospital und Bernoulli[4]

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|y_3'(x)|}{|y_3(x)|} = \lim_{x\to x_0}\frac{|y_3'(x)|'}{|y_3(x)|'} = \lim_{x\to x_0}\frac{|y_3''(x)|}{|y_3'(x)|} = \infty.$$

Weiter gibt es wegen $(y_1(x_0),y_2(x_0),0) = \mathbf{y}(x_0) \neq \mathbf{o}$ zumindest einen Index $k \in \{1,2\}$ mit $y_k(x_0) \neq 0$, somit

$$\lim_{x\to x_0}|h_k(x)| = \lim_{x\to x_0}\left|y_k'(x) - y_k(x)\frac{y_3'(x)}{y_3(x)}\right| = \lim_{x\to x_0}\left|y_k(x)\frac{y_3'(x)}{y_3(x)}\right| = \infty$$

und

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} h_k(x)^2 = \infty. \qquad \square$$

Außerdem ergibt sich aus der Formel (3.4) für die Krümmung $\kappa(x)$, dass im Fall

$$y_3(x_0) = 0 \neq y_3'(x_0),$$

d. h. wenn die Integralkurve C die Ferngerade $\langle \mathbf{e}_3 \rangle$ im Fernpunkt $[\mathbf{y}(x_0)]$ schneidet, mit der Lösung y_3 auch die Krümmung κ in x_0 das Vorzeichen wechselt (siehe Birkhoff (1911), S. 108).
Weiter folgt im Fall

$$y_3(x_0) = y_3'(x_0) = 0 \neq y_3''(x_0),$$

d. h. wenn C die Ferngerade im Fernpunkt $[\mathbf{y}(x_0)]$ in 1. Ordnung berührt, die Krümmung κ in x_0 eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel hat. Die Krümmung κ nimmt also den Wert Null an, wenn die Integralkurve C die Ferngerade trifft, und κ wechselt das Vorzeichen genau dann, wenn die zur Ferngeraden gehörige Lösung von (L), hier in obiger Betrachtung y_3, das Vorzeichen wechselt. Der Integralkurve C der Differentialgleichung (L) entspricht also in jedem hinreichend klein gewählten Teilintervall $\tilde{J}$ von J, in welchem wenigstens eine der Lösungen y_j des Fundamentalssystems $\mathbf{y}$ nullstellenfrei ist, beim Rückzug auf die entsprechende euklidische Ebene einer Kurve in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit der Parameterdarstellung

$$x \in \tilde{J} \mapsto \mathbf{v}(x) = (v_1(x),v_2(x)) \in \mathbb{R}^2$$

mit $v_j \in C^3(J)$ $(j = 1, 2)$ und nicht verschwindender Krümmung κ bzw. nicht verschwindender Wronski-Determinante $W[\mathbf{v}']$ von $\mathbf{v}'$.

---

[4] Die Regel von de l'Hospital ist benannt nach dem französischen Mathematiker Guillaume François Antoine Marquis de L'Hospital oder L'Hôpital (1661–1704), wurde aber vom Schweizer Mathematiker und Arzt Johann I Bernoulli (1667–1748) entdeckt.

Umgekehrt kann man jede derartige Kurve $x \in \tilde{J} \mapsto \mathbf{v}(x)$ in $\mathbb{R}^2$ als eine Integralkurve einer Differentialgleichung (L) interpretieren. Man wählt dazu noch eine beliebige Funktion $y_3 \in C^3(J)$ ohne Nullstellen in $\tilde{J}$ und setzt

$$y_j := v_j \cdot y_3 \in C^3(J) \quad \text{für } j = 1, 2.$$

Wegen $W[\mathbf{v}'] \neq 0$ ist $\mathbf{v}' \neq \mathbf{o}$ und somit die zum Funktionentripel $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ gehörige Wronski-Determinante $W[\mathbf{y}]$ ebenfalls in $\tilde{J}$ von Null verschieden:

$$W[\mathbf{y}] = y_3^3 W[\mathbf{v}'] = y_3^3 |\mathbf{v}'|^3 \kappa \neq 0 \quad \text{in } \tilde{J}.$$

Demnach liefert $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ in $\tilde{J}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

(L)
$$\begin{aligned} L[y] &\equiv W[y_1, y_2, y_3, y]/W[\mathbf{y}] \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y \\ y_1' & y_2' & y_3' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y'' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' & y''' \end{vmatrix} / W[\mathbf{y}] \\ &= y''' + py'' + qy' + ry = 0 \end{aligned}$$

mit den Koeffizienten

$$p = -\begin{vmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \\ \mathbf{y}''' \end{vmatrix} / W[\mathbf{y}], \quad q = +\begin{vmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}'' \\ \mathbf{y}''' \end{vmatrix} / W[\mathbf{y}], \quad r = -\begin{vmatrix} \mathbf{y}' \\ \mathbf{y}'' \\ \mathbf{y}''' \end{vmatrix} / W[\mathbf{y}].$$

3.1.5 Das begleitende Dreieck von *C*

Die Multiplikationstabelle (2.14) bedeutet geometrisch, dass in $\mathbb{P}^2$ die Punkte

$$[\mathbf{y}], [\mathbf{y}'], [\mathbf{y}'']$$

und Geraden

$$\langle \mathbf{z} \rangle, \langle D^2[\mathbf{z}] \rangle, \langle D^1[\mathbf{z}] \rangle$$

die Ecken und Seiten eines Dreiecks bilden. Zu jedem Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x)]$, $x \in J$, der Integralkurve C erhält man damit das sogenannte **begleitende Dreieck**. Eine grafische Darstellung dieser Situation gibt die Abbildung 3.2.

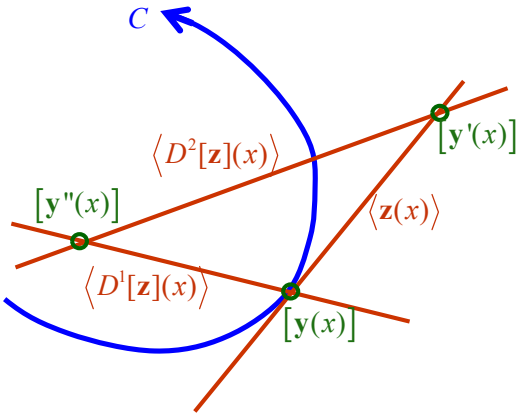


Abb. 3.2 Das begleitende Dreieck der Integralkurve C

Im Falle $p \in C^1(J)$ (und damit $\mathbf{z}' = D^1[\mathbf{z}] + p\mathbf{z} \in C^1(J)$) bilden auch die Punkte

$$[\mathbf{y}], [\mathbf{y}'], [\mathbf{y}'' + p\mathbf{y}' + f\mathbf{y}]$$

und die Geraden

$$\langle \mathbf{z} \rangle, \langle \mathbf{z}'' - p\mathbf{z}' + g\mathbf{z} \rangle, \langle \mathbf{z}' \rangle$$

in $\mathbb{P}^2$ die Ecken und Seiten eines Dreiecks, wenn für die Funktionen $f, g : J \to \mathbb{R}$ noch die Gleichung $f + g = q - p'$ gilt: Es folgt nämlich aus den Skalarprodukten (2.12) mit

$$(D^1[\mathbf{z}])' = \mathbf{z}'' - p\mathbf{z}' - p'\mathbf{z}$$

und unter Verwendung von (2.9) und (2.10)

$$\mathbf{y}\mathbf{z}'' = 1,\ \mathbf{y}'\mathbf{z}'' = -p,\ \mathbf{y}''\mathbf{z}'' = -q + p' + p^2$$

und daraus

$$(\mathbf{y}'' + p\mathbf{y}' + f\mathbf{y})(\mathbf{z}'' - p'\mathbf{z}' + g\mathbf{z}) = -q + p' + f + g.$$

Speziell für $p \equiv 0, f = g = \frac{q}{2}$ erhält man das begleitende Dreieck von Bol (1950), S. 14, mit den Ecken $[\mathbf{y}]$, $[\mathbf{y}']$, $[\mathbf{y}''+\frac{q}{2}\mathbf{y}]$ und den Seiten $\langle\mathbf{z}\rangle$, $\left\langle\mathbf{z}''+\frac{q}{2}\mathbf{z}\right\rangle$, $\langle\mathbf{z}'\rangle$.

3.1.6 Analytische Beschreibung von Inzidenzen in $\mathbb{P}^2$

Inzidenz von Punkt und Gerade

Ordnet man nach Festlegung eines Fundamentalsystems $\mathbf{y}$ von (L) und damit auch des dazu adjungierten Fundamentalsystems $\mathbf{z}$ von (L^+) den eindimensionalen Unterräumen $[z]$ von S^+ mit

$$z = \mathbf{d}\mathbf{z} = \sum_{k=1}^{3} d_k z_k \ \in S^+ \setminus \{o\}$$

bijektiv die Punkte $[\mathbf{d}] \in \mathbb{P}^2$ in der projektiven Ebene mit den projektiven Koordinaten d_1, d_2, d_3 bezüglich des projektiven Koordinatensystems $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (mit den Grundpunkten $[\mathbf{e}_1]$, $[\mathbf{e}_2]$, $[\mathbf{e}_3]$ und dem Einheitspunkt $[\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3]$) von $\mathbb{P}^2$ zu, und ordnet man den eindimensionalen Unterräumen $[y]$ von S mit

$$y = \mathbf{c}\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{3} c_k y_k \ \in S \setminus \{o\}$$

bzw. den zweidimensionalen Unterräumen $S_y^+ = [y]^\perp$ von S^+ bijektiv die Geraden $\langle\mathbf{c}\rangle$ in $\mathbb{P}^2$ mit den Geradenkoordinaten (Hyperebenenkoordinaten) c_1, c_2, c_3 zu, so liegt der Punkt $[\mathbf{d}]$ auf der Geraden $\langle\mathbf{c}\rangle$, d. h. es gilt die Inklusion bzw. Inzidenz

$$[\mathbf{d}] \subseteq \langle\mathbf{c}\rangle \text{ bzw. } [\mathbf{d}] \in \langle\mathbf{c}\rangle,$$

genau dann, wenn für die Lösungen $z = \mathbf{d}\mathbf{z} \in S^+$ und $y = \mathbf{c}\mathbf{y} \in S$ gemäß der Berechnung (2.17) deren Skalarprodukt Null ist,

(3.5) $\qquad B[y,z] = \mathbf{c}\mathbf{d} = 0,$

also die Lösungen y und z orthogonal sind. Dieser geometrischen Interpretation der Orthogonalität als Inzidenz liegt die Isomorphie der dualen Raumpaare (S^+,S) und (X,X^*) zugrunde, wobei $X^* = L(X,\mathbb{R}) = \{\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R} : \varphi \text{ lineare Abbildung}\}$ der Dualraum zu X und $\langle\mathbf{x},\varphi\rangle = \varphi(\mathbf{x})$ das natürliche Skalarprodukt des dualen Raumpaars (X,X^*) ist.[5] Der Orthogonalität der eindimensionalen Unterräume $[z] \subseteq S^+$ und $[y] \subseteq S$ im dualen Raumpaar (S^+,S) bzw. der eindimensionalen Unterräume $[\mathbf{d}] \subseteq X$ und $[\mathbf{c}] \subseteq X^*$ im dualen Raumpaar (X,X^*) entspricht also die Inklusion

$$[z] \subseteq S_y^+ = [y]^\perp$$

des eindimensionalen Unterraums $[z]$ und des zweidimensionalen Unterraums $[y]^\perp$ im Vektorraum S^+ und die Inzidenz des Punktes $[\mathbf{d}]$ mit der Geraden $\langle\mathbf{c}\rangle$ in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$. Für die eindi-

[5] Der Dualraum zu einem Vektorraum wird behandelt bei Kowalsky (1967), S. 256–260, die Isomorphie von dualen Raumpaaren auf S. 258. Im Rieszschen Darstellungssatz, der nach dem ungarischen Mathematiker Frigyes Riesz (1880–1956) benannt ist, wird die eindeutige Darstellung einer auf einem beliebigen endlichdimensionalen euklidischen reellen Vektorraum V definierten Linearform $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ mittels des Skalarprodukts $\langle\cdot,\cdot\rangle$ beschrieben: Es ist $\varphi(v) = \langle\psi,v\rangle$ mit einem eindeutig bestimmten $\psi \in V$. Hier bei $X = \mathbb{R}^3$ ist jedes $\varphi \in X^*$ darstellbar durch $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x}$ mit einem $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. Frigyes Riesz war ein ungarischer Mathematiker mit wichtigen Beiträgen zur Funktionalanalysis.

mensionalen Unterräume (UR) $[y] \subseteq S$ und $[z] \subseteq S^+$ ($y = \mathbf{c}\mathbf{y} \in S \setminus \{o\}$, $z = \mathbf{d}\mathbf{z} \in S^+ \setminus \{o\}$) werden dabei also die folgenden bijektiven Zuordnungen verwendet:

$$\underset{\text{1-dim. UR}}{[z] \subseteq S^+} \leftrightarrow \underset{\text{1-dim. UR}}{[\mathbf{d}] \subseteq \mathbb{R}^3} \leftrightarrow \underset{\text{Punkt in proj. Ebene } \mathbb{P}^2}{P = [\mathbf{d}] \in \mathbb{P}^2}$$

$$\underset{\text{1-dim. UR}}{[y] \subseteq S} \leftrightarrow \underset{\text{2-dim. UR}}{[y]^\perp \subseteq S^+} \leftrightarrow \underset{\text{2-dim. UR}}{\langle \mathbf{c} \rangle = [\mathbf{c}]^\perp \subseteq \mathbb{R}^3} \leftrightarrow \underset{\text{Gerade in proj. Ebene } \mathbb{P}^2}{G = \langle \mathbf{c} \rangle = \{[\mathbf{d}] \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus O : \mathbf{c}\cdot\mathbf{d} = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2}$$

Abb. 3.3 Bijektive Zuordnungen für die Interpretation der ein- und zweidimensionalen Unterräume (UR) von S^+ als Punkte und Geraden in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$

Beispielsweise spiegelt sich die Koordinatenberechnung (2.20) bzw. (2.21) für die zu zwei linear unabhängigen Lösungen orthogonale Lösung in $\mathbb{P}^2$ geometrisch dadurch wider, dass

$$[\mathbf{d}] = [\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2]$$

der Schnittpunkt der beiden voneinander verschiedenen Geraden $\langle \mathbf{c}_1 \rangle$ und $\langle \mathbf{c}_2 \rangle$ ist,

$$[\mathbf{d}] = \langle \mathbf{c}_1 \rangle \cap \langle \mathbf{c}_2 \rangle,$$

bzw. dass

$$\langle \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 \rangle$$

die Verbindungsgerade der beiden voneinander verschiedenen Punkte $[\mathbf{d}_1]$ und $[\mathbf{d}_2]$ ist,

$$\langle \mathbf{c} \rangle = [\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2] = [\mathbf{d}_1] + [\mathbf{d}_2].$$

Inzidenz der speziellen Punkte $[\mathbf{y}^{(k)}(x_0)]$ mit einer Geraden

Eine Beschreibung der Inzidenzen von speziellen Punkten mit Geraden erhält man unter Verwendung von (2.20) ($k = 0, 1, 2$) mit

$$z = \mathbf{d}\mathbf{z} = \mathbf{y}^{(k)}(x_0)\mathbf{z} = (-1)^k u^+_{2-k}(.,x_0) \in S^+ \setminus \{o\} \qquad (x_0 \in J)$$

und

$$y = \mathbf{c}\mathbf{y} \in S \setminus \{o\}.$$

Es liegt genau dann die Inzidenz

$$[\mathbf{y}^{(k)}(x_0)] \in \langle \mathbf{c} \rangle$$

vor, wenn

$$B[y,z] = \mathbf{c}\,\mathbf{y}^{(k)}(x_0) = y^{(k)}(x_0) = 0$$

ist (siehe Charakterisierung (2.25) für die Inzidenz $u^+_{2-k}(.,x_0) \in S^+_y$). Der zur k-ten Ableitung des Fundamentalsystems $\mathbf{y}$ bei $x = x_0$ gehörige Punkt $[\mathbf{y}^{(k)}(x_0)] \in \mathbb{P}^2$ liegt auf der Geraden $\langle \mathbf{c} \rangle$ genau dann, wenn die k-te Ableitung $y^{(k)}$ der zu $\mathbf{c}$ gehörigen Lösung $y = \mathbf{c}\mathbf{y}$ bei $x = x_0$ eine Nullstelle hat.

Treffpunkt einer Geraden mit der Integralkurve: Insbesondere trifft (für $k = 0$) die Gerade $\langle \mathbf{c} \rangle$ die Integralkurve C im Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x_0)]$ genau dann, wenn $y(x_0) = 0$ für die Lösung $y = \mathbf{c}\mathbf{y}$ ist (siehe Birkhoff (1911), S. 111, und vergleiche Neuman (1972), Th.1):

$$[\mathbf{y}(x_0)] \in \langle \mathbf{c} \rangle \iff y(x_0) = 0 \text{ für die Lösung } y = \mathbf{c}\mathbf{y} \in S.$$

Im Spezialfall, dass die Gerade $\langle \mathbf{c} \rangle$ durch die Tangente $\langle \mathbf{z}(t_0) \rangle$ im Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(t_0)]$ gegeben ist, erhält man wegen (2.19) ($k = 0$) die Charakterisierung für einen **Treffpunkt einer Tangente mit der Integralkurve** mit der speziellen Lösung

$$y = \mathbf{c}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{z}(t_0)\mathbf{y} = \lambda u_2(.,t_0) \quad (\lambda \neq 0):$$

Die Tangente $\langle \mathbf{z}(t_0) \rangle$ trifft die Integralkurve C im Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x_0)]$ genau dann, wenn $u_2(x_0,t_0) = 0$ ist:

$$[\mathbf{y}(x_0)] \in \langle \mathbf{z}(t_0) \rangle \quad \Leftrightarrow \quad u_2(x_0,t_0) = 0.$$

Mit der Beziehung (2.1) ($j = 2$, $k = 0$) $u_2(x_0,t_0) = u_2^+(t_0,x_0)$ erhält man die dazu äquivalente Bedingung

$$u_2^+(t_0,x_0) = 0.$$

Diese wird nachfolgend auch noch bei der Betrachtung einer durch einen Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x_0)]$ gehenden Tangente $\langle \mathbf{z}(t_0) \rangle$ eines weiteren Kurvenpunkts $[\mathbf{y}(t_0)]$ der Integralkurve hergeleitet. Eine geometrische Darstellung eines Treffpunktes einer Geraden $\langle \mathbf{c} \rangle$ mit der Kurve C und der Spezialfall eines Treffpunktes einer Tangente mit der Kurve C in einem weiteren Kurvenpunkt wird in Abbildung 3.4 gegeben.

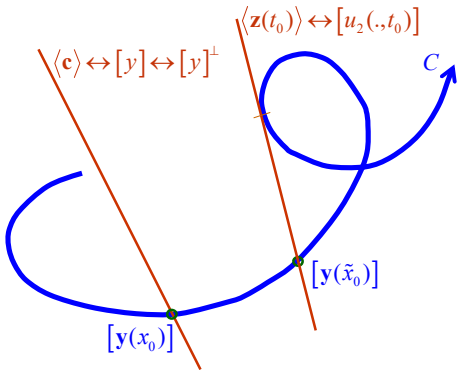


Abb. 3.4 a) Schnittpunkt $[\mathbf{y}(x_0)]$ einer Geraden $\langle \mathbf{c} \rangle$ mit der Integralkurve C: $y(x_0) = \mathbf{c}\mathbf{y}(x_0) = 0$;
b) Schnittpunkt $[\mathbf{y}(\tilde{x}_0)]$ einer Tangente $\langle \mathbf{z}(t_0) \rangle$ mit der Integralkurve C: $u_2(x_0,t_0) = \mathbf{z}(t_0)\mathbf{y}(x_0) = 0$

Inzidenz eines Punktes mit den speziellen Geraden $\langle D^k[\mathbf{z}](x_0) \rangle$

Analog erhält man nach (2.19) für $k = 0, 1, 2$ mit

$$z = \mathbf{d}\mathbf{z} \in S^+ \setminus \{o\}$$

und

$$y = D^k[\mathbf{z}](x_0)\mathbf{y} = (-1)^k u_{2-k}(.,x_0) \in S \setminus \{o\} \qquad (x_0 \in J)$$

genau dann die Inzidenz

$$[\mathbf{d}] \in \langle D^k[\mathbf{z}](x_0) \rangle,$$

wenn

$$B[y,z] = D^k[\mathbf{z}](x_0)\mathbf{d} = D^k[z](x_0) = 0$$

ist (Charakterisierung (2.25) der Inzidenz $z \in S_{u_{2-k}(.,x_0)}$). Auf der zur k-ten verallgemeinerten Ableitung des Fundamentalsystems $\mathbf{z}$ bei $x = x_0$ gehörigen Geraden $\langle D^k[\mathbf{z}](x_0) \rangle \subseteq \mathbb{P}^2$ liegt genau dann der Punkt $[\mathbf{d}]$, wenn die k-te verallgemeinerte Ableitung $D^k[z]$ der zu $\mathbf{d}$ gehörigen Lösung $z = \mathbf{d}\mathbf{z}$ bei $x = x_0$ eine Nullstelle hat.

Tangente von einem Punkt aus an die Integralkurve: Insbesondere liegt (für $k = 0$) der Punkt $[\mathbf{d}]$ auf der Tangente $\langle \mathbf{z}(x_0) \rangle$ des Kurvenpunkts $[\mathbf{y}(x_0)]$ genau dann, wenn die Lösung $z = \mathbf{d}\mathbf{z}$ in x_0 eine Nullstelle hat:

$$[\mathbf{d}] \in \langle \mathbf{z}(x_0) \rangle \quad \Leftrightarrow \quad z(x_0) = 0 \text{ für die Lösung } z = \mathbf{d}\mathbf{z} \in S^+.$$

Im Spezialfall, dass der Punkt [**d**] durch einen Kurvenpunkt [**y**(t_0)] gegeben ist, erhält man wegen (2.23) ($k = 0$) eine Charakterisierung einer **Tangente von einem Kurvenpunkt aus an die Integralkurve** mit der speziellen Lösung

$$z = \mathbf{dz} = \mu\mathbf{y}(t_0)\mathbf{z} = \mu u_2^+(.,t_0) \quad (\mu \neq 0):$$

Vom Kurvenpunkt [**y**(t_0)] aus gibt es also eine an einem weiteren Kurvenpunkt [**y**(x_0)] anliegende Tangente $\langle \mathbf{z}(x_0) \rangle$ an die Integralkurve C genau dann, wenn $u_2^+(x_0,t_0) = 0$ bzw. nach (2.1) ($j = 2$, $k = 0$) $u_2(t_0,x_0) = 0$ ist:

$$[\mathbf{y}(t_0)] \in \langle \mathbf{z}(x_0) \rangle \;\Leftrightarrow\; u_2^+(x_0,t_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; u_2(t_0,x_0) = 0.$$

Der noch speziellere Fall, dass die durch den Punkt [**y**(t_0)] gehende Tangente $\langle \mathbf{z}(x_0) \rangle$ des Kurvenpunkts [**y**(x_0)] auch noch mit der Tangente $\langle \mathbf{z}(t_0) \rangle$ des Kurvenpunkts [**y**(t_0)] übereinstimmt, also eine Doppeltangente

$$\langle \mathbf{z}(x_0) \rangle = \langle \mathbf{z}(t_0) \rangle$$

vorliegt, wird durch die Bedingung

$$[u_2(.,x_0)] = [u_2(.,t_0)]$$

charakterisiert. Der weitere speziellere Fall, dass der Kurvenpunkt [**y**(t_0)] mit dem Kurvenpunkt [**y**(x_0)] übereinstimmt, also ein Doppelpunkt

$$[\mathbf{y}(x_0)] = [\mathbf{y}(t_0)]$$

vorliegt, wird durch die Bedingung

$$[u_2^+(.,x_0)] = [u_2^+(.,t_0)]$$

charakterisiert. Die Begründungen hierfür ergeben sich aus den nachfolgenden Betrachtungen zur Übereinstimmung spezieller Geraden bzw. spezieller Punkte für $k = 0$. In der Abbildung 3.5 werden geometrische Darstellungen gegeben für den Fall a), dass vom Punkt [**d**] aus eine Tangente an die Kurve C existiert, für den Fall b), dass vom Kurvenpunkt [**y**($\tilde{t}_0$)] aus eine Tangente an C zu einem anderen Kurvenpunkt [**y**($\tilde{x}_0$)] existiert, und für den Fall c) einer Doppeltangente $\langle \mathbf{z}(\hat{x}_0) \rangle = \langle \mathbf{z}(\hat{t}_0) \rangle$ in zwei Kurvenpunkten [**y**($\hat{t}_0$)] und [**y**($\hat{x}_0$)].

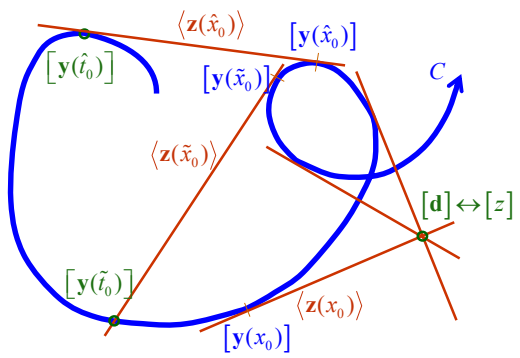


Abb. 3.5 a) Tangente von [**d**] aus an C zum Kurvenpunkt [**y**(x_0)]: $z(x_0) = \mathbf{dz}(x_0) = 0$;
b) Tangente von [**y**($\tilde{t}_0$)] aus an C zum Kurvenpunkt [**y**($\tilde{x}_0$)]: $u_2^+(x_0,t_0) = \mathbf{y}(t_0)\mathbf{z}(x_0) = 0$;
c) Doppeltangente $\langle \mathbf{z}(\hat{x}_0) \rangle = \langle \mathbf{z}(\hat{t}_0) \rangle$ in den Kurvenpunkten [**y**($\hat{t}_0$)] und [**y**($\hat{x}_0$)]: $u_2(\hat{t}_0,\hat{x}_0) = u_2'(\hat{t}_0,\hat{x}_0) = 0$

Übereinstimmung mit den speziellen Geraden $\langle D^k[\mathbf{z}](x_0)\rangle$ bzw. Punkten $[\mathbf{y}^{(k)}(x_0)]$

Für $x_0 \in J$, $k = 0, 1, 2$ gilt mit $y = \mathbf{c}\mathbf{y} \in S \setminus \{o\}$ in $\mathbb{P}^2$ die Geraden-Übereinstimmung

$$\langle \mathbf{c} \rangle = \langle D^k[\mathbf{z}](x_0)\rangle$$

bzw. die zugehörige Normalenvektorgleichung $\mathbf{c} = \lambda D^k[\mathbf{z}](x_0)$ ($\lambda \neq 0$) genau dann, wenn für die Lösung $y \in S$ nach (2.22) die Gleichung $y = \mathbf{c}\mathbf{y} = \lambda D^k[\mathbf{z}](x_0)\mathbf{y} = \lambda u_{2-k}(.,x_0)$ erfüllt ist, also in S die eindimensionalen Unterräume $[y]$ und $[u_{2-k}(.,x_0)]$ übereinstimmen:

$$\langle \mathbf{c} \rangle = \langle D^k[\mathbf{z}](x_0)\rangle \Leftrightarrow [y] = [u_{2-k}(.,x_0)] \text{ für } y = \mathbf{c}\mathbf{y} \in S \setminus \{o\} \qquad (k = 0, 1, 2).$$

Speziell für den Index $k = 0$ erhält man, dass eine Gerade $\langle \mathbf{c} \rangle$ mit der Tangente $\langle \mathbf{z}(x_0)\rangle$ des Kurvenpunkts $[\mathbf{y}(x_0)]$ (Berührpunkt einer Geraden mit der Integralkurve) genau dann übereinstimmt, wenn die nichttriviale Lösung $y = \mathbf{c}\mathbf{y} \in S \setminus \{o\}$ ein Vielfaches von $u_2(.,x_0)$ ist:

$$\langle \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{z}(x_0)\rangle \Leftrightarrow [y] = [u_2(.,x_0)] \text{ für } y = \mathbf{c}\mathbf{y} \in S \setminus \{o\}.$$

Insbesondere liegt eine **Doppeltangente** $\langle \mathbf{z}(x_0)\rangle = \langle \mathbf{z}(t_0)\rangle$ ($x_0, t_0 \in J$) der Integralkurve C genau dann vor, wenn die Lösungen $u_2(.,x_0)$ und $u_2(.,t_0)$ linear abhängig sind:

$$\langle \mathbf{z}(x_0)\rangle = \langle \mathbf{z}(t_0)\rangle \Leftrightarrow [u_2(.,x_0)] = [u_2(.,t_0)] \qquad (x_0, t_0 \in J).$$

Analog gilt mit $z = \mathbf{d}\mathbf{z} \in S^+ \setminus \{o\}$ nach (2.23) in $\mathbb{P}^2$ die Punkte-Übereinstimmung

$$[\mathbf{d}] = [\mathbf{y}^{(k)}(x_0)],$$

genau dann, wenn in S^+ die Unterräume $[z]$ und $[u^+_{2-k}(.,x_0)]$ übereinstimmen:

$$[\mathbf{d}] = [\mathbf{y}^{(k)}(x_0)] \Leftrightarrow [z] = [u^+_{2-k}(.,x_0)] \text{ für } z = \mathbf{d}\mathbf{z} \in S^+ \setminus \{o\} \qquad (k = 0, 1, 2).$$

Speziell für den Index $k = 0$ erhält man, dass ein Punkt $[\mathbf{d}]$ mit dem Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x_0)]$ genau dann übereinstimmt, wenn die nichttriviale Lösung $z = \mathbf{d}\mathbf{z} \in S^+ \setminus \{o\}$ ein Vielfaches von $u^+_2(.,x_0)$ ist:

$$[\mathbf{d}] = [\mathbf{y}(x_0)] \Leftrightarrow [z] = [u^+_2(.,x_0)] \text{ für } z = \mathbf{d}\mathbf{z} \in S^+ \setminus \{o\}.$$

Insbesondere liegt ein **Doppelpunkt** $[\mathbf{y}(x_0)] = [\mathbf{y}(t_0)]$ ($x_0, t_0 \in J$) der Integralkurve C genau dann vor, wenn die Lösungen $u^+_2(.,x_0)$ und $u^+_2(.,t_0)$ linear abhängig sind:

$$[\mathbf{y}(x_0)] = [\mathbf{y}(t_0)] \Leftrightarrow [u^+_2(.,x_0)] = [u^+_2(.,t_0)] \qquad (x_0, t_0 \in J).$$

Dem zum Kurvenparameter $x_0 \in J$ gehörigen speziellen Fundamentalsystem

$$u_2(.,x_0),\ u_1(.,x_0),\ u_0(.,x_0)$$

von S und dem dazu adjungierten Fundamentalsystem

$$u^+_0(.,x_0),\ -u^+_1(.,x_0),\ u^+_2(.,x_0)$$

von S^+ sind also in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ die Geraden

$$\langle \mathbf{z}(x_0)\rangle,\ \langle D^1[\mathbf{z}](x_0)\rangle,\ \langle D^2[\mathbf{z}](x_0)\rangle$$

und die Punkte

$$[\mathbf{y}''(x_0)],\ [\mathbf{y}'(x_0)],\ [\mathbf{y}(x_0)]$$

zugeordnet, also die Seiten und Ecken des **begleitenden Dreiecks**. Insbesondere ist (für $k = 0$) der Lösung $u_2(.,x_0) \in S$ die Tangente $\langle \mathbf{z}(x_0)\rangle$ zugeordnet und der Lösung $u^+_2(.,x_0) \in S^+$ der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x_0)]$. Eine geometrische Darstellung des begleitenden Dreiecks mit den zugeordneten Lösungen wird in Abbildung 3.6 gegeben.

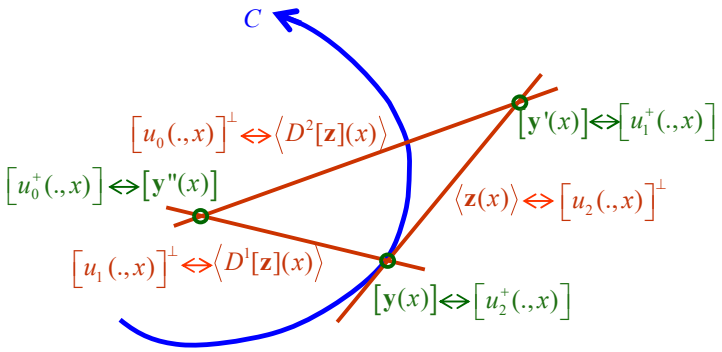


Abb. 3.6 Das begleitende Dreieck der Integralkurve C mit den zu den Ecken und Seiten gehörigen Lösungen

Berührpunkt einer Geraden mit der Integralkurve: Der bei der vorhergehenden Betrachtung speziell für $k = 0$ behandelte Fall, dass eine Gerade $\langle \mathbf{c}\rangle$ die Integralkurve C im Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x_0)]$ berührt und somit gleich der Tangente $\langle \mathbf{z}(x_0)\rangle$ ist, liegt genau dann vor, wenn für die Lösung $y = \mathbf{cy}$ die Übereinstimmung $y = \lambda\mathbf{z}(x_0)\mathbf{y} = \lambda u_2(.,x_0)$, $\lambda \neq 0$, gilt, also x_0 zweifache Nullstelle von y ist (siehe Birkhoff (1911), S. 117, und vergleiche Neuman (1972), Th.1):

$$\langle \mathbf{c}\rangle = \langle \mathbf{z}(x_0)\rangle \;\Leftrightarrow\; y(x_0) = y'(x_0) = 0,\ y''(x_0) \neq 0 \text{ für } y = \mathbf{cy} \in S.$$

In einer (hinreichend kleinen) punktierten J-Umgebung $\dot{U}(x_0)$ von x_0 gilt $\mathbf{cy}(x) = y(x) > 0$ im Falle $y''(x_0) > 0$ bzw. $\mathbf{cy}(x) = y(x) < 0$ im Falle $y''(x_0) < 0$, sodass die zugehörigen Kurvenpunkte $[\mathbf{y}(x)]$ alle auf „einer Seite der Geraden" $\langle \mathbf{c}\rangle$, d. h. in derselben Halbebene, liegen: Ist nämlich o. E. $y_3(x_0) > 0$ und wegen der Stetigkeit von y_3 auch noch $y_3 > 0$ in der hinreichend klein gewählten punktierten J-Umgebung $\dot{U}(x_0)$ von x_0, dann gilt mit den kartesischen Koordinaten

$$v_j := y_j/y_3 \quad (j = 1, 2)$$

für alle zur punktierten Umgebung $\dot{U}(x_0)$ gehörigen Kurvenpunkte $(v_1(x), v_2(x))$ beispielsweise im Falle $y''(x_0) > 0$ die inhomogene lineare Ungleichung

$$c_1v_1(x) + c_2v_2(x) + c_3 = y(x)/y_3(x) > 0.$$

Dies bedeutet, dass diese Kurvenpunkte alle auf einer Seite der Geraden $\langle \mathbf{c}\rangle$ mit der Gleichung

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3 = 0$$

liegen. Ein Berührpunkt $[\mathbf{y}(x_0)]$ einer Geraden $\langle \mathbf{c}\rangle$ mit der Kurve C ($\langle \mathbf{c}\rangle = \langle \mathbf{z}(x_0)\rangle$) wird in Abbildung 3.5, a) dargestellt.

Schnittpunkt einer Geraden mit der Integralkurve: Bei Vorliegen einer einfachen Nullstelle x_0 von $y = \mathbf{cy}$ dagegen,

$$y(x_0) = 0 \neq y'(x_0),$$

wechselt y in x_0 das Vorzeichen und es gilt etwa bei $y'(x_0) > 0$ für die Lösung y in einer J-Umgebung von x_0

$$\mathbf{cy}(x) = y(x) < 0 \text{ für } x < x_0 \text{ und}$$
$$\mathbf{cy}(x) = y(x) > 0 \text{ für } x > x_0.$$

Wie oben lässt sich mit kartesischen Koordinaten begründen, dass die Gerade $\langle \mathbf{c}\rangle$ ($\neq \langle \mathbf{z}(x_0)\rangle$) die Integralkurve C im Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x_0)]$ schneidet, wobei die zur J-Umgebung von x_0 gehörigen Kurvenpunkte $[\mathbf{y}(x)]$ für die Parameter $x < x_0$ alle auf der einen Seite und die für $x > x_0$ alle auf der anderen Seite der Geraden liegen. Ein (echter) Schnittpunkt $[\mathbf{y}(x_0)]$ einer Geraden $\langle \mathbf{c}\rangle$ mit der Kurve C mit

dem damit verbundenen Seitenwechsel der Kurve im Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x_0)]$ bezüglich der Geraden wird in Abbildung 3.4, a) dargestellt. Er wird folgendermaßen charakterisiert:

$$[\mathbf{y}(x_0)] \in \langle \mathbf{c} \rangle \wedge \langle \mathbf{c} \rangle \neq \langle \mathbf{z}(x_0) \rangle \Leftrightarrow y(x_0) = 0 \neq y'(x_0) \text{ für } y = \mathbf{c}\mathbf{y} \in S.$$

3.1.7 Analytische Charakterisierung geometrischer Eigenschaften von *C*

Mittels der oben angegebenen analytischen Beschreibung von Inzidenzen lassen sich geometrische Eigenschaften der Kurve C durch Bedingungen an die Lösungen charakterisieren: Das ungeordnete Paar $\{c,d\}$ von Kurvenparametern $c, d \in J$, $c \neq d$, liefert für die Kurve C die nachfolgend in Tabelle 3.1 genannten Eigenschaften jeweils genau dann, wenn eine der dazu angegebenen untereinander äquivalenten Bedingungen für Lösungen von (L) und (L^+) erfüllt ist. Die Kurveneigenschaften (3.6) bis (3.11) sind alle symmetrisch bezüglich dem geordneten Kurvenparameterpaar (c,d), $c \neq d$, d. h. dass mit (c,d) auch das Paar (d,c) die jeweilige Kurveneigenschaft erfüllt. Eine Veranschaulichung dieser geometrischen Eigenschaften wird in der Abbildung 3.7 im Anschluss an den Beweis der Charakterisierungen angegeben.

Tab. 3.1 Äquivalente analytische Charakterisierungen spezieller geometrischer Eigenschaften der Integralkurve

(3.6)	Doppelpunkt (Selbsttreffen, DP) $[\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)]$	1) $[u_2^+(.,c)] = [u_2^+(.,d)]$; 2) $u_2^+(d,c) = D^1[u_2^+](d,c) = 0$; 3) $u_2(c,d) = u_1(c,d) = 0$.
(3.7)	Doppeltangente (DT) $\langle \mathbf{z}(c) \rangle = \langle \mathbf{z}(d) \rangle$	1) $[u_2(.,c)] = [u_2(.,d)]$; 2) $u_2(d,c) = u_2'(d,c) = 0$; 3) $u_2^+(c,d) = u_1^+(c,d) = 0$.
(3.8)	Doppelpunkt oder Doppeltangente, $[\mathbf{y}(d)] \in \langle \mathbf{z}(c) \rangle \wedge [\mathbf{y}(c)] \in \langle \mathbf{z}(d) \rangle$ 3 verschiedene Fälle: a) $[\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)] = \langle \mathbf{z}(c) \rangle \cap \langle \mathbf{z}(d) \rangle$ b) $[\mathbf{y}(c),\mathbf{y}(d)] = \langle \mathbf{z}(c) \rangle = \langle \mathbf{z}(d) \rangle$ c) $[\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)] \subsetneq \langle \mathbf{z}(c) \rangle = \langle \mathbf{z}(d) \rangle$	1) $u_2(d,c) = u_2(c,d) = 0$; 2) $u_2^+(c,d) = u_2^+(d,c) = 0$; 3) $u_2^+(c,d) = u_2^+{}'(c,d) = 0$ oder $u_2(d,c) = u_2'(d,c) = 0$; 4) $[u_2^+(.,c)] = [u_2^+(.,d)]$ oder $[u_2(.,c)] = [u_2(.,d)]$.
(3.9)	Doppelpunkt und Doppeltangente (Selbstberührung(spunkt), SBP) $[\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)] \subsetneq \langle \mathbf{z}(c) \rangle = \langle \mathbf{z}(d) \rangle$	1) $[u_2^+(.,c)] = [u_2^+(.,d)] \wedge [u_2(.,c)] = [u_2(.,d)]$; 2) $u_2^+(d,c) = D^1[u_2^+](d,c) = 0$ $= u_2(c,d) = u_2'(c,d)$; 3) $u_2(c,d) = u_2'(c,d) = u_1(c,d) = 0$; 4) $u_2^+(d,c) = D^1[u_2^+](d,c) = u_1^+(d,c) = 0$; 5) $u_2^+(d,c) = u_1(c,d) = 0 = u_2(d,c) = u_1^+(c,d)$.
(3.10)	Doppelpunkt und keine Doppeltangente (echte Selbstschneidung, Selbstschneidung(spunkt), SSP) $[\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)] = \langle \mathbf{z}(c) \rangle \cap \langle \mathbf{z}(d) \rangle$	1) $[u_2^+(.,c)] = [u_2^+(.,d)] \wedge [u_2(.,c)] \neq [u_2(.,d)]$; 2) $u_2^+(d,c) = u_2^+{}'(d,c) = 0 \neq u_2'(d,c)$; 3) $u_2^+(d,c) = D^1[u_2^+](d,c) = 0 \neq u_1^+(c,d)$; 4) $u_2(c,d) = u_2(d,c) = 0 \neq u_2'(d,c)$; 5) $u_2^+(d,c) = u_1(c,d) = 0 \neq u_1^+(c,d)$.
(3.11)	Doppeltangente und kein Doppelpunkt	1) $[u_2(.,c)] = [u_2(.,d)] \wedge [u_2^+(.,c)] \neq [u_2^+(.,d)]$;

$[\mathbf{y}(c),\mathbf{y}(d)] = \langle \mathbf{z}(c) \rangle = \langle \mathbf{z}(d) \rangle$	2) $u_2(d,c) = u_2'(d,c) = u_2(c,d) = u_2'(c,d) = 0 \neq u_2^{+}{}'(d,c)$; 3) $u_2(d,c) = u_2'(d,c) = 0 \neq u_1(c,d)$; 4) $u_2^{+}(c,d) = u_2^{+}(d,c) = 0 \neq D^1[u_2^{+}](d,c)$; 5) $u_2(d,c) = u_1^{+}(c,d) = 0 \neq u_1(c,d)$.

Beweis von (3.6): Die Begründung der Charakterisierung 1) für einen Doppelpunkt (Selbsttreffpunkt) der Kurve ergibt sich aus der in Abschnitt 3.1.6 durchgeführten Betrachtung zur Übereinstimmung mit den speziellen Punkten $[\mathbf{y}^{(k)}(x_0)]$ für $k = 0$. Demnach ist mit $z = \mathbf{dz} \in S^{+}$ die Bedingung

$$[\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{d}] = [\mathbf{y}(d)]$$

äquivalent zu

$$[u_2^{+}(.,c)] = [z] = [u_2^{+}(.,d)].$$

Die Charakterisierung 2) beschreibt 1) durch Anfangsbedingungen der Lösung $u_2^{+}(.,c)$ an der Stelle d. Die Charakterisierung 3) übersetzt 2) mittels der Beziehung (2.1) für die speziellen Lösungen $u_j(.,x_0)$ und $u_m^{+}(.,x_0)$.

Beweis von (3.7): Die Charakterisierung 1) für eine Doppeltangente erhält man aus der in Abschnitt 3.1.6 durchgeführten Betrachtung zur Übereinstimmung mit speziellen Geraden für $k = 0$. Die Charakterisierung 2) beschreibt 1) durch Anfangsbedingungen der Lösung $u_2(.,c)$ an der Stelle d. Die Charakterisierung 3) übersetzt 2) mittels der Beziehung (2.1) für die speziellen Lösungen $u_j(.,x_0)$ und $u_m^{+}(.,x_0)$.

Beweis von (3.9): Die Charakterisierung 1) für das gleichzeitige Auftreten eines Doppelpunkts und einer Doppeltangente (Selbstberührung(spunkt) der Kurve) ergibt sich aus den Charakterisierungen 1) von (3.6) und (3.7). Wie bei den Beweisen von (3.6) und (3.7) erhält man aus 1) auch die Charakterisierungen 2) und 3) durch Beschreibung mit Anfangsbedingungen bzw. durch Übersetzung mittels (2.1).

Beweis von (3.10): Die Charakterisierung 1) für das Auftreten eines Doppelpunkts ohne Doppeltangente (Selbstschneidungspunkt, (echter) Schnittpunkt der Kurve) ergibt sich aus der Charakterisierung 1) von (3.6) und der Verneinung der Charakterisierung 1) von (3.7). Die Charakterisierung 2) beschreibt 1) durch Anfangsbedingungen der Lösungen $u_2^{+}(.,c)$, $u_2^{+}(.,d)$, $u_2(.,c)$ und $u_2(.,d)$ an den Stellen c und d. Die Charakterisierung 3) beschreibt den Doppelpunkt durch die Charakterisierung 2) von (3.6) und übersetzt die Bedingung "$\neq 0$" von (3.10), 2) (keine Doppeltangente) mittels der Beziehung (2.1) ($j = 2$, $k = 1$). Die Charakterisierung 4) ergibt sich aus der Charakterisierung 1) des Falls (3.8) Doppelpunkt oder Doppeltangente mit Ausschluss der Doppeltangente gemäß der Charakterisierung 2) von (3.7).

Beweis von (3.11): Die Charakterisierung 1) für das Auftreten einer Doppeltangente ohne Doppelpunkt ergibt sich aus der Charakterisierung 1) von (3.7) Doppeltangente und der Verneinung der Charakterisierung 1) von (3.6) Doppelpunkt. Die Charakterisierung 2) beschreibt 1) durch Anfangsbedingungen der Lösungen $u_2(.,c)$, $u_2(.,d)$, $u_2^{+}(.,c)$ und $u_2^{+}(.,d)$ an den Stellen c und d. Die Charakterisierung 3) beschreibt die Doppeltangente durch die Charakterisierung 2) von (3.7) und die Bedingung "kein Doppelpunkt" mittels der Charakterisierung (3.6), 3). Die Charakterisierung 4) ergibt sich aus der Charakterisierung 1) des Falls (3.8) Doppelpunkt oder Doppeltangente mit Ausschluss des Doppelpunkts mittels der Charakterisierung (3.6), 2).

Beweis von (3.8): Die Kurveneigenschaft (3.8)

$$[\mathbf{y}(d)] \in \langle \mathbf{z}(c) \rangle \wedge [\mathbf{y}(c)] \in \langle \mathbf{z}(d) \rangle$$

besagt, dass der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(d)]$ auf der Tangente $\langle \mathbf{z}(c) \rangle$ des Kurvenpunkts $[\mathbf{y}(c)]$ liegt und der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(c)]$ auf der Tangente $\langle \mathbf{z}(d) \rangle$ des Kurvenpunkts $[\mathbf{y}(d)]$ liegt. Mit der in Abschnitt 3.1.6 hergeleiteten analytischen Beschreibung des Falls, dass eine Tangente $\langle \mathbf{z}(t_0) \rangle$ die Integralkurve C im Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x_0)]$ trifft, erhält man die Charakterisierungen 1) und 2) für (3.8): Es ist sowohl d eine Nullstelle und c eine zweifache Nullstelle der Lösung $u_2(.,c)$ als auch c eine Nullstelle und d eine zweifache Nullstelle der Lösung $u_2(.,d)$. Die äquivalente Formulierung für Lösungen in S^+ lautet, dass sowohl c eine Nullstelle und d eine zweifache Nullstelle der Lösung $u_2^+(.,d)$ als auch d eine Nullstelle und c eine zweifache Nullstelle der Lösung $u_2^+(.,c)$ ist.

Es wird zunächst gezeigt, dass im Fall (3.8) $u_2(d,c) = 0 = u_2(c,d)$, $u_2^+(d,c) = 0 = u_2^+(c,d)$ die beiden Lösungen $u_2(.,c)$ und $u_2^+(.,c)$ nicht beide gleichzeitig bei d eine einfache Nullstelle aufweisen. Im Fall, dass d einfache Nullstelle von $u_2(.,c)$ ist ($u_2'(d,c) \neq 0$), ist nämlich $[u_2(.,c)] \neq [u_2(.,d)]$ und $\dim [u_2(.,c),u_2(.,d)] = 2$. Da außerdem mit $z_1 := u_2^+(.,c)$ und $z_2 := u_2^+(.,d)$ aus den Gleichungen $z_1(c) = z_1(d) = 0$, $z_2(c) = z_2(d) = 0$ nach (2.25) ($j = 0$) die Relationen $z_1 \perp u_2(.,c), u_2(.,d)$ und $z_2 \perp u_2(.,c), u_2(.,d)$ folgen, erhält man die Übereinstimmung

$$[z_1] = [u_2(.,c),u_2(.,d)]^\perp = [z_2],$$

also $[u_2^+(.,c)] = [u_2^+(.,d)]$, sodass d eine zweifache Nullstelle von $u_2^+(.,c)$ ist und die Stellen c und d einen Doppelpunkt liefern.

Analog folgt im Fall, dass d einfache Nullstelle von $u_2^+(.,c)$ ist, mit $y_1 := u_2(.,c)$ und $y_2 := u_2(.,d)$ aus $y_1(c) = y_1(d) = 0$, $y_2(c) = y_2(d) = 0$ die Übereinstimmung

$$[y_1] = [u_2^+(.,c), u_2^+(.,d)]^\perp = [y_2],$$

also $[u_2(.,c)] = [u_2(.,d)]$, sodass d eine zweifache Nullstelle von $u_2(.,c)$ ist und die Stellen c und d eine Doppeltangente liefern.

Hinsichtlich der Vielfachheit der Nullstellen können also nur die folgenden drei Fälle a), b) und c) eintreten:

a) Es sind c und d jeweils zweifache Nullstellen von $u_2^+(.,c)$ und $u_2^+(.,d)$, d einfache Nullstelle von $u_2(.,c)$ und c einfache Nullstelle von $u_2(.,d)$, sodass $[u_2^+(.,c)] = [u_2^+(.,d)]$ und $[u_2(.,c)] \neq [u_2(.,d)]$ gilt und der Fall (3.10) eines Doppelpunkts ohne Doppeltangente (Selbstschneidungspunkt, echter Schnittpunkt der Kurve) vorliegt.

b) Es sind c und d jeweils zweifache Nullstellen von $u_2(.,c)$ und $u_2(.,d)$, d einfache Nullstelle von $u_2^+(.,c)$ und c einfache Nullstelle von $u_2^+(.,d)$, sodass $[u_2(.,c)] = [u_2(.,d)]$ und $[u_2^+(.,c)] \neq [u_2^+(.,d)]$ gilt und der Fall (3.11) einer Doppeltangente ohne Doppelpunkt vorliegt.

c) Es sind c und d jeweils zweifache Nullstellen der Lösungen $u_2^+(.,c)$, $u_2^+(.,d)$, $u_2(.,c)$ und $u_2(.,d)$, sodass $[u_2^+(.,c)] = [u_2^+(.,d)]$ und $[u_2(.,c)] = [u_2(.,d)]$ gilt und der Fall (3.9) eines Doppelpunkts mit Doppeltangente vorliegt.

Bei der Fallunterscheidung kann man anstelle der analytischen Formulierung mit den Lösungen auch geometrisch mit den Objekten Punkt und Gerade argumentieren. Da stets die Kurvenpunkte auch auf ihrer Tangente liegen, also auch $[\mathbf{y}(c)] \in \langle \mathbf{z}(c) \rangle$ und $[\mathbf{y}(d)] \in \langle \mathbf{z}(d) \rangle$ gilt, ist (3.8) zunächst äquivalent zur Unterraum-Inklusion

$$[\mathbf{y}(c),\mathbf{y}(d)] \subseteq \langle \mathbf{z}(c) \rangle \cap \langle \mathbf{z}(d) \rangle .$$

a) Falls die Tangenten $\langle \mathbf{z}(c) \rangle$ und $\langle \mathbf{z}(d) \rangle$ voneinander verschieden sind, fallen die Kurvenpunkte $[\mathbf{y}(c)]$ und $[\mathbf{y}(d)]$ zusammen und sind gleich dem Schnittpunkt dieser Tangenten, sodass der Fall (3.10) eines Doppelpunkts ohne Doppeltangente vorliegt:

$$[\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)] = \langle \mathbf{z}(c) \rangle \cap \langle \mathbf{z}(d) \rangle .$$

b) Falls die Kurvenpunkte $[\mathbf{y}(c)]$ und $[\mathbf{y}(d)]$ voneinander verschieden sind, fallen die Tangenten $\langle \mathbf{z}(c) \rangle$ und $\langle \mathbf{z}(d) \rangle$ zusammen und sind gleich der Verbindungsgeraden dieser Punkte, sodass die Eigenschaft (3.11) einer Doppeltangente ohne Doppelpunkt vorliegt:

$$[\mathbf{y}(c),\mathbf{y}(d)] = \langle \mathbf{z}(c) \rangle = \langle \mathbf{z}(d) \rangle .$$

c) Falls sowohl die Kurvenpunkte $[\mathbf{y}(c)]$ und $[\mathbf{y}(d)]$ zusammenfallen als auch die Tangenten $\langle \mathbf{z}(c) \rangle$ und $\langle \mathbf{z}(d) \rangle$ zusammenfallen, liegt der Fall (3.9) eines Doppelpunkts mit Doppeltangente vor:

$$[\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)] \subseteq \langle \mathbf{z}(c) \rangle = \langle \mathbf{z}(d) \rangle .$$

Die drei verschiedenen Fälle (3.9), (3.10) und (3.11) sind also genau die möglichen Spezialfälle von (3.8). □

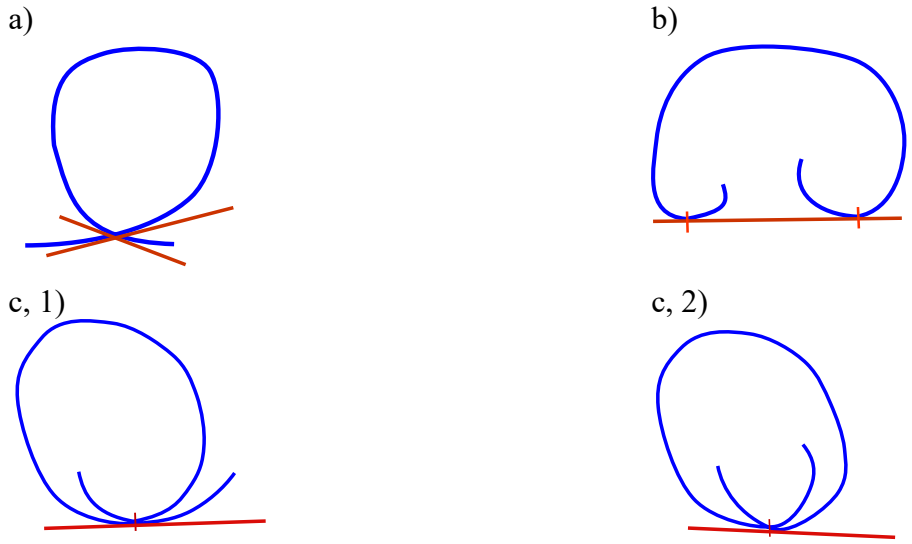


Abb. 3.7 Eine Integralkurve C mit a) einem Selbstschneidungspunkt (Doppelpunkt ohne Doppeltangente), b) einer Doppeltangente ohne Doppelpunkt, c, 1) einem Selbstberührungspunkt (Doppelpunkt und Doppeltangente) ohne Selbstdurchsetzung und c, 2) einem Selbstberührungspunkt mit Selbstdurchsetzung

3.1.8 Geometrische Beschreibung der Klassen $C_{\mathrm{I}}^{k}(J)$, $C_{\mathrm{II}}^{k}(J)$, $C_{\mathrm{I}}^{k+}(J)$, $C_{\mathrm{II}}^{k+}(J)$, $D(J)$

Für die Differentialgleichung (L) gilt die Klassenzugehörigkeit

$$L \in C_{\mathrm{I}}^{k}(J) \text{ bzw. } L \in C_{\mathrm{II}}^{k}(J) \qquad (k = 0, 1, 2)$$

gemäß der Definition genau dann, wenn

$$(-1)^k u_2^{(k)}(x,t) > 0 \quad \text{für alle } x, t \in J \text{ mit } x < t \text{ bzw.}$$

$$u_2^{(k)}(x,t) > 0 \qquad \text{für alle } x, t \in J \text{ mit } x > t$$

ist, und dann nach der Beziehung (2.24) $(-1)^m u_{2-m}^{(k)}(x,t) = \mathbf{y}^{(k)}(x) D^m[\mathbf{z}](t)$ mit $m = 0$ genau dann, wenn für die angegebenen x die Relation $\mathbf{y}^{(k)}(x)\mathbf{z}(t) \neq 0$ gilt bzw. der Punkt $[\mathbf{y}^{(k)}(x)]$ nicht auf der Tangente $\langle \mathbf{z}(t) \rangle$ liegt:

$L \in C_{\mathrm{I}}^{k}(J)$ bzw. $L \in C_{\mathrm{II}}^{k}(J)$ gilt genau dann, wenn die folgende Aussage gilt:
$[\mathbf{y}^{(k)}(x)] \notin \langle \mathbf{z}(t) \rangle$ für alle $x, t \in J$ mit $x < t$ bzw. $x > t$.

Weiter gilt für die Differentialgleichung (L^+) die Klassenzugehörigkeit

$$L^+ \in C_{\mathrm{I}}^{k+}(J) \text{ bzw. } L^+ \in C_{\mathrm{II}}^{k+}(J) \qquad (k = 0, 1, 2),$$

nach (2.24) (mit Vertauschen von m und k und dann mit $m = 0$) genau dann, wenn für die angegebenen x die Relation $\mathbf{y}(x)D^k[\mathbf{z}](t) \neq 0$ gilt bzw. der Punkt $[\mathbf{y}(x)]$ nicht auf der Geraden $\langle D^k[\mathbf{z}](t)\rangle$ liegt:

$L^+ \in C_{\mathrm{I}}^{k+}(J)$ bzw. $L^+ \in C_{\mathrm{II}}^{k+}(J)$ gilt genau dann, wenn die folgende Aussage gilt:
$[\mathbf{y}(x)] \notin \langle D^k[\mathbf{z}](t)\rangle$ für alle $x, t \in J$ mit $x < t$ bzw. $x > t$.

Zur Begründung beipielsweise der Aussagenrichtung ($k = 0$)

$$[\mathbf{y}(x)] \notin \langle \mathbf{z}(t)\rangle \Rightarrow u_2(x,t) > 0 \text{ für } x < t$$

ist anzumerken, dass zunächst aus der Voraussetzung nur $u_2(x,t) \neq 0$ (statt > 0) für $x < t$ folgt. Da aber in einer punktierten Umgebung von t aufgrund der Anfangswerte von $u_2(.,t)$ die Ungleichung $u_2(x,t) > 0$ erfüllt ist, gilt sie wegen der Stetigkeit von $u_2(.,t)$ dann auch für alle $x < t$. Entsprechende Vorzeichenüberlegungen gelten auch für die anderen Aussagen.

Bei der geometrischen Beschreibung der Klasse $C_{\mathrm{I}}(J)$ ($k = 0$) liegt für jedes $x \in J$ der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x)]$ auf keiner Tangente der zum nachfolgenden Kurvenstück gehörenden Schar von Tangenten $\langle \mathbf{z}(t)\rangle$, $t > x$, $t \in J$. Gleichbedeutend dazu ist, dass jede Tangente $\langle \mathbf{z}(t)\rangle$ das vorhergehende Kurvenstück $[\mathbf{y}(x)]$, $x < t$, nicht trifft. Demzufolge liegt insbesondere der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(t)]$ ($\in \langle \mathbf{z}(t)\rangle$) nicht auf dem vorhergehenden Kurvenstück. Es tritt also kein Selbsttreffen der Kurve C auf. Beachtet man für den vorliegenden Fall $L \in C_{\mathrm{I}}(J)$ noch die Vorzeichenverteilung der Lösungen $u_2(.,t)$ im Bereich $x < t$,

$$u_2(x,t) > 0 \text{ für } x < t,\ x, t \in J,$$

so ergibt sich geometrisch (man vergleiche hierzu das lokale Verhalten der Kurve C bei einem Berührpunkt einer Geraden $\langle \mathbf{c}\rangle$ mit der Kurve C in Abschnitt 3.1.6) hier global, dass bezüglich jeder Tangente $\langle \mathbf{z}(t)\rangle$, $t \in\ ]a,b[$, das vorhergehende Kurvenstück $\{[\mathbf{y}(x)] : x < t\}$ jeweils auf derselben Seite der Tangente liegt. Insbesondere liegt dann für jeden Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(t)]$ ($\in \langle \mathbf{z}(t)\rangle$) das vorhergehende Kurvenstück $\{[\mathbf{y}(x)] : x < t\}$ jeweils auf derselben Seite des ab $[\mathbf{y}(t)]$ folgenden Kurvenstücks. Ein früherer Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x)]$, $x < t$, liegt in dem von der nachfolgenden Tangentenschar $\langle \mathbf{z}(t)\rangle$ begrenzten Bereich. Die Integralkurve C mit nicht verschwindender Krümmung in der euklidischen Ebene hat somit eine „von innen herkommende“ bzw. „nach außen fortlaufende“ **Spiralform ohne Selbstberührung**.

Weiter liegt bei einer Kurve C der Klasse $C_{\mathrm{II}}(J)$ für jedes $x \in J$ der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x)]$ auf keiner Tangente der zum vorhergehenden Kurvenstück gehörenden Schar von Tangenten $\langle \mathbf{z}(t)\rangle$, $t < x$, $t \in J$. Gleichbedeutend dazu ist, dass jede Tangente $\langle \mathbf{z}(t)\rangle$ das nachfolgende Kurvenstück $[\mathbf{y}(x)]$, $x > t$, nicht trifft. Insbesondere tritt auch hier kein Selbsttreffen der Kurve C auf. Beachtet man für den vorliegenden Fall $L \in C_{\mathrm{II}}(J)$ noch die Vorzeichenverteilung der Lösungen $u_2(.,t)$ im Bereich $x > t$,

$$u_2(x,t) > 0 \text{ für } x > t,\ x, t \in J,$$

so ergibt sich geometrisch, dass bezüglich jeder Tangente $\langle \mathbf{z}(t)\rangle$, $t \in\ ]a,b[$, das nachfolgende Kurvenstück $\{[\mathbf{y}(x)] : x > t\}$ jeweils auf derselben Seite der Tangente liegt. Insbesondere liegt dann für jeden Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(t)]$ ($\in \langle \mathbf{z}(t)\rangle$) das nachfolgende Kurvenstück $\{[\mathbf{y}(x)] : x > t\}$ jeweils auf derselben Seite des vorhergehenden Kurvenstücks. Ein nachfolgender Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x)]$, $x > t$, liegt in dem von der vorhergehenden Tangentenschar $\langle \mathbf{z}(t)\rangle$ begrenzten Bereich. Die Integralkurve C hat somit eine „nach innen fortlaufende“ **Spiralform ohne Selbstberührung**.

Insgesamt gilt also

$$L \in C_{\mathrm{I}}(J) \cup C_{\mathrm{II}}(J)$$

genau dann, wenn die Integralkurve C eine der beiden Spiralformen ohne Selbstberührung bzw. ohne Selbsttreffen hat. Eine geometrische Darstellung der jeweiligen Spiralform ohne Selbsttreffen für die Klasse $C_{\mathrm{I}}(J)$ mit nach außen fortlaufender Spiralform und die Klasse $C_{\mathrm{II}}(J)$ mit nach innen fortlaufender Spiralform wird in der Abbildung 3.8 gegeben. In der Abbildung wird für die Klassenzugehörigkeit $L \in C_{\mathrm{I}}(J)$ auch $C \in C_{\mathrm{I}}(J)$ geschrieben und analog für die anderen Klassen.

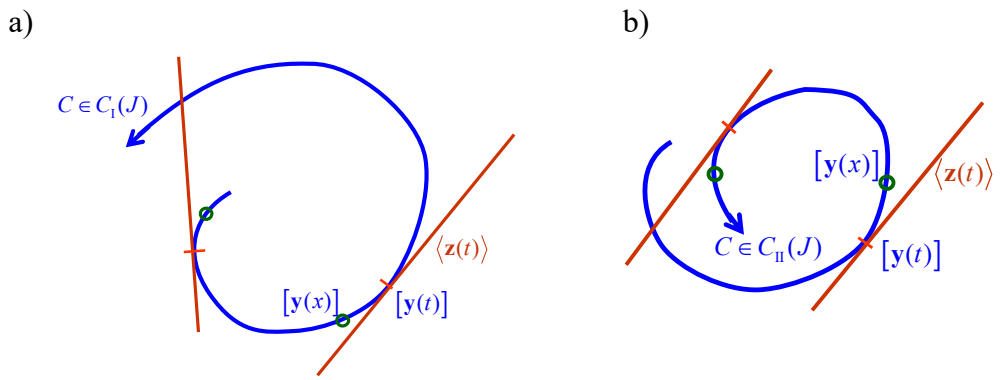


Abb. 3.8 Eine Integralkurve C mit Spiralform ohne Selbsttreffen für a) die Klasse $C_{\mathrm{I}}(J)$ mit nach außen verlaufender Spiralform und b) die Klasse $C_{\mathrm{II}}(J)$ mit nach innen verlaufender Spiralform

Die noch speziellere Klassenzugehörigkeit

$$L \in D(J) := C_{\mathrm{I}}(J) \cap C_{\mathrm{II}}(J),$$

also nach Satz 4.2 die Diskonjugiertheit der Differentialgleichung, gilt genau dann, wenn

$$u_2(x,t) = u_2^+(t,x) = \mathbf{y}(x)\mathbf{z}(t) \neq 0 \text{ für } x \neq t,\ x,\ t \in J,$$

ist, also für jedes $x \in J$ der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x)]$ nur auf der Tangente $\langle \mathbf{z}(x) \rangle$ und auf keiner der anderen Tangenten $\langle \mathbf{z}(t) \rangle$, $x \neq t$, x, $t \in J$, der Kurve C liegt. Geometrisch bedeutet das gleichzeitige Vorliegen der beiden Spiralformen, dass jede Tangente $\langle \mathbf{z}(t) \rangle$ das vorhergehende und das nachfolgende Kurvenstück $[\mathbf{y}(x)]$, $x \neq t$, nicht trifft:

$L \in D(J)$ gilt genau dann, wenn die folgende Aussage richtig ist:
$[\mathbf{y}(x)] \notin \langle \mathbf{z}(t) \rangle$ für $x \neq t$, x, $t \in J$.

Eine geometrische Darstellung dieser speziellen Spiralform für die Klasse $D(J)$ gibt Abbildung 3.9.

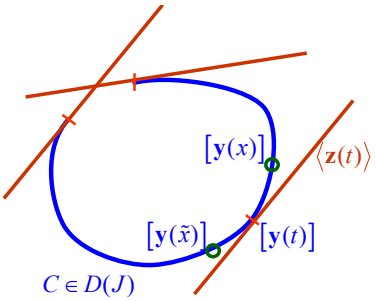


Abb. 3.9 Eine Integralkurve C mit der speziellen Spiralform der Klasse $D(J) = C_{\mathrm{I}}(J) \cap C_{\mathrm{II}}(J)$

3.1.9 Geometrische Beschreibung der Klassen $K_{\mathrm{I}}(J)$, $K_{\mathrm{II}}(J)$, $K_{\mathrm{I}}^{+}(J)$, $K_{\mathrm{II}}^{+}(J)$

Für ein **beliebiges Intervall** J gilt die Klassenzugehörigkeit

$$L \in K_{\mathrm{I}}(J) \text{ (bzw. } L \in K_{\mathrm{II}}(J))$$

definitionsgemäß genau dann, wenn für jedes $t \in J$ die Lösung $u_2(.,t) \in S$ keine einfache Nullstelle $x \in J$ mit $x < t$ (bzw. $x > t$) besitzt, wenn also eine Nullstelle $x < t$ von $u_2(.,t) = \mathbf{y}(.)\mathbf{z}(t)$ sogleich eine zweifache Nullstelle ist und daher

$$[u_2(.,x)] = [u_2(.,t)]$$

gilt. Geometrisch bedeutet dies, dass ein Treffpunkt $[\mathbf{y}(x)]$ der Tangente $\langle \mathbf{z}(t) \rangle$ mit der Kurve C im Bereich $x < t$ (bzw. $x > t$) kein (echter) <u>Schnitt</u>punkt, sondern ein Berührpunkt der Tangente $\langle \mathbf{z}(t) \rangle$ mit der Kurve C ist. Es liegt also der Fall (3.7) einer Doppeltangente der Kurve C vor:

$$\langle \mathbf{z}(x) \rangle = \langle \mathbf{z}(t) \rangle .$$

Falls also der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x)]$ auf einer Tangente der zum nachfolgenden (bzw. vorhergehenden) Kurvenstück gehörenden Schar von Tangenten $\langle \mathbf{z}(t) \rangle$, $t \in J$, $t > x$ (bzw. $t < x$), liegt, tritt im Falle $L \in K_{\mathrm{I}}(J)$ (bzw. $L \in K_{\mathrm{II}}(J)$) gleich die Doppeltangente $\langle \mathbf{z}(x) \rangle = \langle \mathbf{z}(t) \rangle$ auf:

> $L \in K_{\mathrm{I}}(J)$ (bzw. $L \in K_{\mathrm{II}}(J)$) gilt genau dann, wenn die folgende Aussage richtig ist:
> $[\mathbf{y}(x)] \in \langle \mathbf{z}(t) \rangle$ für $x, t \in J$, $x < t$ (bzw. $x > t$) $\Rightarrow \langle \mathbf{z}(x) \rangle = \langle \mathbf{z}(t) \rangle$.

Als Spezialfall ergibt sich im Fall $L \in K_{\mathrm{I}}(J) \cup K_{\mathrm{II}}(J))$ die **Folgerung**, dass bei einem Selbsttreffen ($[\mathbf{y}(x)] = [\mathbf{y}(t)]$) der Kurve C, bei dem insbesondere auch die Inzidenzen $[\mathbf{y}(x)] \in \langle \mathbf{z}(t) \rangle$ und $[\mathbf{y}(t)] \in \langle \mathbf{z}(x) \rangle$ gelten, sogleich ein Selbstberührungspunkt (SBP) vorliegt: $[\mathbf{y}(x)] = [\mathbf{y}(t)] \wedge \langle \mathbf{z}(x) \rangle = \langle \mathbf{z}(t) \rangle$.

> Im Fall $L \in K_{\mathrm{I}}(J) \cup K_{\mathrm{II}}(J))$ gilt die Aussage:
> $[\mathbf{y}(x)] = [\mathbf{y}(t)]$ für $x, t \in J$, $x \neq t \Rightarrow \langle \mathbf{z}(x) \rangle = \langle \mathbf{z}(t) \rangle$.

Analog erhält man eine geometrische Formulierung für die Klassenzugehörigkeit zu $K_{\mathrm{I}}^{+}(J)$ und $K_{\mathrm{II}}^{+}(J)$. Zunächst gilt

$$L^{+} \in K_{\mathrm{I}}^{+}(J) \text{ (bzw. } L^{+} \in K_{\mathrm{II}}^{+}(J))$$

definitionsgemäß genau dann, wenn für jedes $t \in J$ die Lösung $u_2^{+}(.,t) \in S^{+}$ keine einfache Nullstelle $x \in J$ mit $x < t$ (bzw. $x > t$) besitzt, wenn also eine Nullstelle $x < t$ von $u_2^{+}(.,t) = \mathbf{y}(t)\mathbf{z}(.)$ sogleich eine zweifache Nullstelle ist und daher

$$[\, u_2^{+}(.,x) \,] = [\, u_2^{+}(.,t) \,]$$

gilt. Geometrisch bedeutet dies, dass ein Treffpunkt $[\mathbf{y}(t)]$ der Tangente $\langle \mathbf{z}(x) \rangle$ mit der Kurve C im Bereich $t > x$ (bzw. $t < x$) ein Doppelpunkt der Kurve C ist (Fall (3.6)):

$$[\mathbf{y}(t)] = [\mathbf{y}(x)].$$

Falls also der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(t)]$ auf einer Tangente der zum vorhergehenden (bzw. nachfolgenden) Kurvenstück gehörenden Schar von Tangenten $\langle \mathbf{z}(x) \rangle$, $x \in J$, $x < t$ (bzw. $x > t$), liegt, tritt im Falle $L^{+} \in K_{\mathrm{I}}^{+}(J)$ (bzw. $L^{+} \in K_{\mathrm{II}}^{+}(J)$) gleich der Doppelpunkt $[\mathbf{y}(t)] = [\mathbf{y}(x)]$ auf:

> $L^{+} \in K_{\mathrm{I}}^{+}(J)$ (bzw. $L^{+} \in K_{\mathrm{II}}^{+}(J)$) gilt genau dann, wenn die folgende Aussage gilt:
> $[\mathbf{y}(t)] \in \langle \mathbf{z}(x) \rangle$ für $x, t \in J$, $t > x$ (bzw. $t < x$) $\Rightarrow [\mathbf{y}(t)] = [\mathbf{y}(x)]$.

Als Spezialfall ergibt sich für den Fall $L^+ \in K_{\mathrm{I}}^+(J) \cup K_{\mathrm{II}}^+(J)$ die **Folgerung**, dass bei einer Doppeltangente $\langle \mathbf{z}(x) \rangle = \langle \mathbf{z}(t) \rangle$ der Kurve C, bei der insbesondere auch die Inzidenzen $[\mathbf{y}(t)] \in \langle \mathbf{z}(x) \rangle$ und $[\mathbf{y}(x)] \in \langle \mathbf{z}(t) \rangle$ vorliegen, sogleich ein Selbstberührungspunkt (SBP) auftritt:

Im Fall $L^+ \in K_{\mathrm{I}}^+(J) \cup K_{\mathrm{II}}^+(J)$ gilt die Aussage:
$\langle \mathbf{z}(x) \rangle = \langle \mathbf{z}(t) \rangle$ für $x, t \in J, x \neq t \Rightarrow [\mathbf{y}(t)] = [\mathbf{y}(x)]$.

Speziell für das **offene Intervall** $]a,b[$ können bei den Charakterisierungen der Klassenzugehörigkeiten die in Abschnitt 2.5.3 angegebenen Äquivalenzen von $L \in K_{\mathrm{I}}(]a,b[)$ mit $L^+ \in K_{\mathrm{II}}^+(]a,b[)$ und von $L \in K_{\mathrm{II}}(]a,b[)$ mit $L^+ \in K_{\mathrm{I}}^+(]a,b[)$ verwendet werden. Die Klassenzugehörigkeit wird dann dadurch charakterisiert, dass ein im vorhergehenden bzw. nachfolgenden Kurvenstück gelegener Treffpunkt einer Tangente sogleich ein Selbstberührungspunkt (Fall (3.9) von Doppelpunkt und Doppeltangente) der Kurve C ist:

$L \in K_{\mathrm{I}}(]a,b[)$ (bzw. $L \in K_{\mathrm{II}}(]a,b[)$) gilt genau dann, wenn die folgende Aussage gilt:
$[\mathbf{y}(x)] \in \langle \mathbf{z}(t) \rangle$ für $x, t \in]a,b[, x < t$ (bzw. $x > t$) $\Rightarrow \langle \mathbf{z}(x) \rangle = \langle \mathbf{z}(t) \rangle \wedge [\mathbf{y}(x)] = [\mathbf{y}(t)]$.
$L^+ \in K_{\mathrm{I}}^+(]a,b[)$ (bzw. $L^+ \in K_{\mathrm{II}}^+(]a,b[)$) gilt genau dann, wenn die folgende Aussage richtig ist:
$[\mathbf{y}(t)] \in \langle \mathbf{z}(x) \rangle$ für $x, t \in]a,b[, t > x$ (bzw. $t < x$) $\Rightarrow [\mathbf{y}(t)] = [\mathbf{y}(x)] \wedge \langle \mathbf{z}(t) \rangle = \langle \mathbf{z}(x) \rangle$.

Bei diesen Charakterisierungen der Klassenzugehörigkeiten sind dann auch die in Abschnitt 2.5.3 angegebenen Äquivalenzen wieder ersichtlich.

Beweis für die Aussagen zum **offenen Intervall**: Zum Beweis der Charakterisierungen ist nur noch zu zeigen, dass ein Treffpunkt einer Tangente im betreffenden Kurvenstück auch ein Selbstberührungspunkt der Kurve ist. Der Beweis wird nur für die Fälle $L \in K_{\mathrm{I}}(]a,b[)$ und $L^+ \in K_{\mathrm{I}}^+(]a,b[)$ geführt. Der Beweis für die beiden anderen Fälle $L \in K_{\mathrm{II}}(]a,b[)$ und $L^+ \in K_{\mathrm{II}}^+(]a,b[)$ verläuft analog oder ergibt sich aus den oben angegebenen Äquivalenzen für die Klassenzugehörigkeiten.

a) Es sei $L \in K_{\mathrm{I}}(]a,b[)$ und $[\mathbf{y}(x)]$ ein Treffpunkt der Tangente $\langle \mathbf{z}(t) \rangle$ mit $x, t \in]a,b[$ und $x < t$: $[\mathbf{y}(x)] \in \langle \mathbf{z}(t) \rangle$. Eine grafische Darstellung dieser Situation ist in Abbildung 3.10, a) gegeben. Nach dem oben bereits für ein beliebiges Intervall J Bewiesenen liegt dann die Doppeltangente $\langle \mathbf{z}(x) \rangle = \langle \mathbf{z}(t) \rangle$ vor. Wegen des in Abschnitt 2.5.3 bewiesenen Zusammenhangs (2.3) der Klassen K_{I} und K_{II} von (L) mit den Klassen K_{II}^+ und K_{I}^+ von (L^+) für das offene Intervall $]a,b[$ gilt hier auch $L^+ \in K_{\mathrm{II}}^+(]a,b[)$. Somit liegt nach dem oben für ein beliebiges Intervall J Bewiesenen (mit vertauschten Kurvenparametern x und t) hier bei $L^+ \in K_{\mathrm{II}}^+$ und der Inzidenz $[\mathbf{y}(x)] \in \langle \mathbf{z}(t) \rangle$ auch der Doppelpunkt $[\mathbf{y}(x)] = [\mathbf{y}(t)]$ vor. Eine weitere Begründung hierfür liefert die obige Folgerung aus dem Vorliegen der Doppeltangente im Fall $L^+ \in K_{\mathrm{I}}^+(J) \cup K_{\mathrm{II}}^+(J)$. Es liegt damit insgesamt ein Selbstberührungspunkt vor. Wenn also die Tangente $\langle \mathbf{z}(t) \rangle$ eines Kurvenpunkts $[\mathbf{y}(t)]$ das vorhergehende Kurvenstück im Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x)]$ ($x, t \in]a,b[, x < t$) trifft, so liegt sogleich ein Selbstberührungspunkt $[\mathbf{y}(x)] = [\mathbf{y}(t)]$ mit $\langle \mathbf{z}(x) \rangle = \langle \mathbf{z}(t) \rangle$ vor. Insbesondere schneidet nach der obigen Folgerung für den Fall $L \in K_{\mathrm{I}}(J) \cup K_{\mathrm{II}}(J)$) die Kurve C mit dem Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(t)]$ nicht das vorhergehende Kurvenstück in einem Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x)]$ ($x, t \in]a,b[, x < t$).
Beachtet man für den vorliegenden Fall $L \in K_{\mathrm{I}}(]a,b[)$ noch die Vorzeichenverteilung der Lösungen $u_2(.,t)$ im Bereich $x < t$,

$$u_2(x,t) \geq 0 \text{ für } x < t,\ x, t \in]a,b[,$$

so ergibt sich geometrisch (vergleiche das lokale Verhalten der Kurve C bei einem Berührpunkt einer Geraden $\langle \mathbf{c} \rangle$ mit der Kurve C in Abschnitt 3.1.6) hier global, dass bezüglich jeder Tangente $\langle \mathbf{z}(t) \rangle$, $t \in \,]a,b[$, das vorhergehende Kurvenstück $\{[\mathbf{y}(x)] : x < t\}$ jeweils auf derselben Seite der Tangente oder auf der Tangente liegt. Insbesondere liegt dann für jeden Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(t)]$ ($\in \langle \mathbf{z}(t) \rangle$) jeder beliebige Punkt $[\mathbf{y}(x)]$ des vorhergehenden Kurvenstücks $\{[\mathbf{y}(x)] : x < t\}$ jeweils auf derselben Seite des nachfolgenden Kurvenstücks oder auf ihm selbst. Ein früherer Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x)]$, $x < t$, liegt in dem von der nachfolgenden Tangentenschar $\langle \mathbf{z}(t) \rangle$ begrenzten Bereich. Die Integralkurve C mit nicht verschwindender Krümmung in der euklidischen Ebene hat somit im Parameterbereich $]a,b[$ eine **nach außen verlaufende Spiralform mit möglicher Selbstberührung**.

b) Es sei $L^+ \in K_{\mathrm{I}}^+(]a,b[)$ und $[\mathbf{y}(t)]$ ein Treffpunkt der Tangente $\langle \mathbf{z}(x) \rangle$ mit $x, t \in \,]a,b[$ und $t > x$: $[\mathbf{y}(t)] \in \langle \mathbf{z}(x) \rangle$. Eine grafische Darstellung dieser Situation ist wegen $L \in K_{\mathrm{II}}(]a,b[)$ in Abbildung 3.10, b) gegeben. Nach dem oben bereits für ein beliebiges Intervall J Bewiesenen liegt dann der Doppelpunkt $[\mathbf{y}(t)] = [\mathbf{y}(x)]$ vor. Da nach Abschnitt 2.5.3 beim offenen Intervall $]a,b[$ auch $L \in K_{\mathrm{II}}(]a,b[)$ gilt, liegt nach dem oben für ein beliebiges Intervall J Bewiesenen (mit vertauschten x und t) auch die Doppeltangente $\langle \mathbf{z}(t) \rangle = \langle \mathbf{z}(x) \rangle$ und insgesamt ein Selbstberührungspunkt vor. Wenn also die Tangente $\langle \mathbf{z}(x) \rangle$ eines Kurvenpunkts $[\mathbf{y}(t)]$ das nachfolgende Kurvenstück im Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(t)]$ ($x < t$) trifft, so liegt sogleich ein Selbstberührungspunkt $[\mathbf{y}(t)] = [\mathbf{y}(x)]$ mit $\langle \mathbf{z}(t) \rangle = \langle \mathbf{z}(x) \rangle$ vor. Insbesondere schneidet C im Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x)]$ nicht das nachfolgende Kurvenstück in einem Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(t)]$ ($t > x$).
Beachtet man für den vorliegenden Fall $L \in K_{\mathrm{II}}(]a,b[)$ noch die Vorzeichenverteilung der Lösungen $u_2(.,t)$ im Bereich $x > t$,

$$u_2(x,t) \geq 0 \text{ für } x > t,\ x,\ t \in \,]a,b[,$$

so ergibt sich geometrisch, dass bezüglich jeder Tangente $\langle \mathbf{z}(t) \rangle$, $t \in \,]a,b[$, das nachfolgende Kurvenstück $\{[\mathbf{y}(x)] : x > t\}$ jeweils auf derselben Seite der Tangente oder auf der Tangente liegt. Insbesondere liegt dann für jeden Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(t)]$ ($\in \langle \mathbf{z}(t) \rangle$) jeder beliebige Punkt $[\mathbf{y}(x)]$ des nachfolgenden Kurvenstücks $\{[\mathbf{y}(x)] : x > t\}$ jeweils auf derselben Seite des vorhergehenden Kurvenstücks oder auf ihm selbst. Ein nachfolgender Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x)]$, $x > t$, liegt in dem von der vorhergehenden Tangentenschar $\langle \mathbf{z}(t) \rangle$ begrenzten Bereich. Die Integralkurve C hat somit im Parameterbereich $]a,b[$ eine **nach innen verlaufende Spiralform mit möglicher Selbstberührung**. □

Falls bei der Klassenzugehörigkeit $L \in K_{\mathrm{I}}]a,b[$ für das offene Intervall $]a,b[$ eine Tangente die Kurve C in einem *vorher*gehenden Kurvenpunkt trifft, ist dieser Treffpunkt der Tangente mit dem vorhergehenden Kurvenstück zunächst kein Schnittpunkt der Tangente mit der Kurve, sondern ein Berührpunkt der Tangente mit der Kurve (Doppeltangente). Weiter ist dieser Treffpunkt der Tangente auch ein Doppelpunkt der Kurve und dann insgesamt ein Selbstberührungspunkt und kein Selbstschneidungspunkt der Kurve. Insbesondere wird ein Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(t)]$ vom vorhergehenden Kurvenstück im Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x)]$ höchstens berührt, aber nicht geschnitten. Für jeden Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(t)]$ gilt, dass das vorhergehende Kurvenstück auf derselben Seite der Kurve C oder auf C liegt. Eine Tangente der Kurve kann aber in diesem Fall das *nach*folgende Kurvenstück schon schneiden.
Analoges gilt im Fall $L \in K_{\mathrm{II}}]a,b[$ für das offene Intervall $]a,b[$, bei dem jede Tangente das nachfolgende Kurvenstück höchstens in einem Selbstberührungspunkt der Kurve trifft, aber das vorhergehende Kurvenstück schon schneiden kann. Für jeden Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(t)]$ gilt hier, dass das nachfolgende Kurvenstück auf derselben Seite der Kurve C oder auf C liegt.

Bei vorliegender Klassenzugehörigkeit

$$L \in K_{\mathrm{I}}]a,b[\cup K_{\mathrm{II}}]a,b[,$$

bei der im Parameterintervall $]a,b[$ die Tangenten das vorhergehende bzw. das nachfolgende Kurvenstück nicht schneiden, hat also die Integralkurve C notwendig eine der beiden Arten der Spiralform ohne Selbstschneidung, aber mit möglicher Selbstberührung. Die beiden Arten der Spiralform, nämlich a) nach außen fortlaufend und b) nach innen fortlaufend, werden in den Abbildungen 3.10, 4.2 und 4.7 dargestellt. Eine weitere Charakterisierung der Spiralform von C mit möglicher Selbstberührung wird in der Definition der Klasse $K(J)$ in Abschnitt 4.6.4 mit den Begriffen Selbstschneidungspunkt, Doppeltangente ohne Doppelpunkt und Selbstdurchsetzung gegeben.

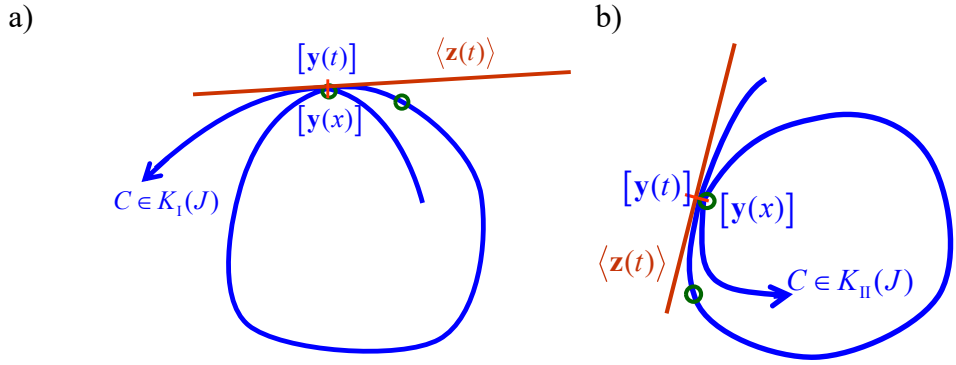


Abb. 3.10 Eine Integralkurve C mit Spiralform bei möglicher Selbstberührung, aber ohne Selbstschneidung für a) die Klasse $K_{\mathrm{I}}(J)$ mit nach außen verlaufender Spiralform und b) die Klasse $K_{\mathrm{II}}(J)$ mit nach innen verlaufender Spiralform

Bei vorliegender Klassenzugehörigkeit

$$L \in K_{\mathrm{I}}(J) \cup K_{\mathrm{II}}(J),$$

bei der im gesamten Parameterintervall J die Tangenten das vorhergehende bzw. das nachfolgende Kurvenstück nicht schneiden, ist also für das zum offenen Intervall $]a,b[$ gehörige Kurvenstück die Spiralform eine notwendige Eigenschaft. Da bei einem beliebigen Intervall J die Klassenzugehörigkeit $L \in K_{\mathrm{I}}(J) \cup K_{\mathrm{II}}(J)$ nicht notwendig äquivalent zu $L^+ \in K_{\mathrm{I}}^+(J) \cup K_{\mathrm{II}}^+(J)$ ist, wird das dabei mögliche Verhalten der Integralkurve C an den Kurvenenden noch im nächsten Abschnitt 3.1.10 näher betrachtet. Dass die hierfür geeignet definierte Spiralform der Integralkurve C auch hinreichend und damit charakteristisch für die Klassenzugehörigkeit $L \in K_{\mathrm{I}}(J) \cup K_{\mathrm{II}}(J)$ ist, wird mit Satz 4.10 bewiesen. Dazu wird in dessen Beweisteil 2) mit einer Fallunterscheidung und einem etwas aufwendigeren Beweis gezeigt, dass bei Nichtvorliegen dieser Klassenzugehörigkeit die Kurve C keine Spiralform aufweist.

3.1.10 Weitere geometrische Eigenschaften der Klassen $C_{\mathrm{I}}(J)$, $C_{\mathrm{II}}(J)$, $K_{\mathrm{I}}(J)$, $K_{\mathrm{II}}(J)$

Aus den in den Abschnitten 2.5.2 und 2.5.3 hergeleiteten analytischen Eigenschaften der Klassen ($k = 0$) von Differentialgleichungen ergeben sich noch die nachfolgenden geometrischen Eigenschaften der Klassen hinsichtlich des Auftretens der Kurveneigenschaften (3.6) bis (3.11).

Eigenschaften der Integralkurve für die verschiedenen Klassen

a) Für ein **beliebiges Intervall** J gibt es bei der Klassenzugehörigkeit

$$L \in C_{\mathrm{I}}(J) \cup C_{\mathrm{II}}(J) \; (\Leftrightarrow L^+ \in C_{\mathrm{II}}^+(J) \cup C_{\mathrm{I}}^+(J))$$

insbesondere keine Stellen $c, d \in J$, $c \neq d$, mit der Eigenschaft

(3.8) Doppelpunkt oder Doppeltangente,

also keine Stellen mit einem der drei verschiedenen Unterfälle:

(3.9) Selbstberührungspunkt (Doppelpunkt und Doppeltangente),

(3.10) Selbstschneidungspunkt (Doppelpunkt ohne Doppeltangente) oder

(3.11) Doppeltangente ohne Doppelpunkt.

b) Für ein **beliebiges Intervall** J gibt es bei der Klassenzugehörigkeit

$$L \in K_{\mathrm{I}}(J) \cup K_{\mathrm{II}}(J)$$

keine Stellen $c, d \in J$, $c \neq d$, mit

(3.10) Doppelpunkt ohne Doppeltangente

und bei

$$L^{+} \in K_{\mathrm{I}}^{+}(J) \cup K_{\mathrm{II}}^{+}(J)$$

keine Stellen $c, d \in J$, $c \neq d$, mit

(3.11) Doppeltangente ohne Doppelpunkt.

c) Speziell für ein **offenes Intervall** $J =]a,b[$ gibt es demnach bei

$$L \in K_{\mathrm{I}}]a,b[\cup K_{\mathrm{II}}]a,b[\ (\Leftrightarrow L^{+} \in K_{\mathrm{II}}^{+}]a,b[\cup K_{\mathrm{I}}^{+}]a,b[\,)$$

keine $c, d \in]a,b[$, $c \neq d$, mit

(3.10) Doppelpunkt ohne Doppeltangente oder mit

(3.11) Doppeltangente ohne Doppelpunkt.

Beweis: a) Geometrische Eigenschaften bei $L \in C_{\mathrm{I}}(J) \cup C_{\mathrm{II}}(J)$: Die Kurveneigenschaft (3.8) Doppelpunkt oder Doppeltangente wird charakterisiert durch die Bedingung $u_2(d,c) = u_2(c,d) = 0$ für Stellen $c, d \in J$, für die o. E. $c < d$ gilt. Im Fall $L \in C_{\mathrm{I}}(J)$ wird $u_2(c,d) = 0$ ausgeschlossen und im Fall $L \in C_{\mathrm{II}}(J)$ wird $u_2(d,c) = 0$ ausgeschlossen. Insgesamt können somit bei

$$L \in C_{\mathrm{I}}(J) \cup C_{\mathrm{II}}(J)$$

der Fall (3.8) und seine drei verschiedenen Unterfälle (3.9), (3.10) und (3.11) nicht auftreten.

b) Geometrische Eigenschaften bei 1) $L \in K_{\mathrm{I}}(J) \cup K_{\mathrm{II}}(J)$ bzw. bei 2) $L^{+} \in K_{\mathrm{I}}^{+}(J) \cup K_{\mathrm{II}}^{+}(J)$:

1) Da beim Vorliegen des Doppelpunkts $[\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)]$ o. E. mit $c < d$ insbesondere auch der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(c)]$ (bzw. $[\mathbf{y}(d)]$) ein Treffpunkt der Tangente $\langle \mathbf{z}(d) \rangle$ (bzw. $\langle \mathbf{z}(c) \rangle$) ist, folgt im Fall $L \in K_{\mathrm{I}}(J)$ (bzw. $L \in K_{\mathrm{II}}(J)$) nach der im vorherigen Abschnitt 3.1.9 beschriebenen geometrischen Eigenschaft der Klasse, dass auch die Doppeltangente $\langle \mathbf{z}(c) \rangle = \langle \mathbf{z}(d) \rangle$ und insgesamt ein Selbstberührungspunkt auftritt. Daher existiert bei

$$L \in K_{\mathrm{I}}(J) \cup K_{\mathrm{II}}(J)$$

kein Doppelpunkt ohne Doppeltangente.

2) Da beim Vorliegen der Doppeltangente $\langle \mathbf{z}(c) \rangle = \langle \mathbf{z}(d) \rangle$ o. E. mit $c < d$ insbesondere auch der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(d)]$ (bzw. $[\mathbf{y}(c)]$) ein Treffpunkt der Tangente $\langle \mathbf{z}(c) \rangle$ (bzw. $\langle \mathbf{z}(d) \rangle$) ist, folgt im Fall $L^{+} \in K_{\mathrm{I}}^{+}(J)$ (bzw. $L^{+} \in K_{\mathrm{II}}^{+}(J)$) nach der im Abschnitt 3.1.9 gegebenen geometrischen Charakterisierung der Klasse, dass auch der Doppelpunkt $[\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)]$ und insgesamt ein Selbstberührungspunkt auftritt. Daher existiert bei

$$L^{+} \in K_{\mathrm{I}}^{+}(J) \cup K_{\mathrm{II}}^{+}(J)$$

keine Doppeltangente ohne Doppelpunkt.

c) Geometrische Eigenschaften bei $L \in K_{\mathrm{I}}]a,b[\cup K_{\mathrm{II}}]a,b[$:

Speziell für das offene Intervall $]a,b[$ ist nach Abschnitt 2.5.3 die Klassenzugehörigkeit

$$L \in K_{\mathrm{I}}]a,b[\cup K_{\mathrm{II}}]a,b[$$

äquivalent zur Klassenzugehörigkeit $L^{+} \in K_{\mathrm{II}}^{+}]a,b[\cup K_{\mathrm{I}}^{+}]a,b[$. In diesem Fall gibt es dann nach den Beweisteilen b, 1) und 2) auf dem zum offenen Intervall $]a,b[$ gehörigen Kurvenstück keinen Doppelpunkt ohne Doppeltangente und keine Doppeltangente ohne Doppelpunkt. □

Doppeltangente oder Doppelpunkt an den Kurvenenden

Es sei jetzt $J = [a,b]$ ein **abgeschlossenes Intervall**. Aus

$$L \in K_{\mathrm{I}}(J)$$

folgt insbesondere $L \in K_{\mathrm{I}}(]a,b[)$ und daraus nach (2.3) und (2.4) von Abschnitt 2.5.3 im Allgemeinen nur $L^+ \in K_{\mathrm{II}}^+([a,b[)$. Nach den oben bewiesenen Eigenschaften (Teil b) der Klassen tritt dann im abgeschlossenen Intervall $J = [a,b]$ kein Doppelpunkt ohne Doppeltangente auf und nur im halboffenem Intervall $J' = [a,b[$ auch noch keine Doppeltangente ohne Doppelpunkt auf. Es ist also nur am Ende des Kurvenstücks, also für Stellen $\{c,d\} = \{c,b\}$, $c \in [a,b[$, eine Doppeltangente ohne Doppelpunkt möglich. Dass diese Situation im Fall $L \in K_{\mathrm{I}}(J)$ tatsächlich eintreten kann, zeigt die Abbildung 3.11, a).

Analog folgt aus

$$L \in K_{\mathrm{II}}(J)$$

im Allgemeinen nur $L^+ \in K_{\mathrm{I}}^+(]a,b])$. Demnach tritt hier im abgeschlossenen Intervall $J = [a,b]$ kein Doppelpunkt ohne Doppeltangente auf und nur im halboffenem Intervall $J'' =]a,b]$ auch noch keine Doppeltangente ohne Doppelpunkt. Wie Abbildung 3.11, b) zeigt, ist aber am Anfang des Kurvenstücks, also für Stellen $\{c,d\} = \{a,d\}$, $d \in]a,b]$, eine Doppeltangente ohne Doppelpunkt möglich.
Im spezielleren Fall

$$L \in K_{\mathrm{I}}(J) \cap K_{\mathrm{II}}(J)$$

wird demzufolge auf dem gesamten Kurvenstück, also auch an den beiden Kurvenenden, neben dem Doppelpunkt ohne Doppeltangente auch die Doppeltangente ohne Doppelpunkt ausgeschlossen.

Weiter folgt aus

$$L^+ \in K_{\mathrm{I}}^+(J)$$

im Allgemeinen nur $L \in K_{\mathrm{II}}([a,b[)$. Daher ist in diesem Fall im abgeschlossenen Intervall $J = [a,b]$ keine Doppeltangente ohne Doppelpunkt möglich und nur im halboffenem Intervall $[a,b[$ auch noch kein Doppelpunkt ohne Doppeltangente möglich. Nur am Ende des Kurvenstücks, also für Stellen $\{c,d\} = \{c,b\}$, $c \in [a,b[$, kann ein Doppelpunkt ohne Doppeltangente auftreten. Bei der Kurve in Abbildung 3.11, c) schneidet nur die Tangente $\langle \mathbf{z}(c) \rangle$ die Kurve in einem nachfolgenden Kurvenpunkt, nämlich in $[\mathbf{y}(b)]$. Alle anderen Tangenten schneiden die Kurve in keinem nachfolgenden Kurvenpunkt.

Analog ist im Fall

$$L^+ \in K_{\mathrm{II}}^+(J)$$

im Allgemeinen nur $L \in K_{\mathrm{I}}(]a,b])$, somit im abgeschlossenen Intervall $J = [a,b]$ keine Doppeltangente ohne Doppelpunkt möglich und nur im halboffenem Intervall $]a,b]$ auch noch kein Doppelpunkt ohne Doppeltangente. Nur am Anfang des Kurvenstücks, also für Stellen $\{c,d\} = \{a,d\}$, $d \in]a,b]$, kann ein Doppelpunkt ohne Doppeltangente auftreten. Bei der Kurve in Abbildung 3.11, d) schneidet nur die Tangente $\langle \mathbf{z}(d) \rangle$ die Kurve in einem vorhergehenden Kurvenpunkt, nämlich in $[\mathbf{y}(a)]$. Alle anderen Tangenten schneiden die Kurve in keinem vorhergehenden Kurvenpunkt.
Im spezielleren Fall

$$L^+ \in K_{\mathrm{I}}^+(J) \cap K_{\mathrm{II}}^+(J)$$

wird auf dem gesamten Kurvenstück, also auch an den beiden Kurvenenden, neben der Doppeltangente ohne Doppelpunkt auch der Doppelpunkt ohne Doppeltangente ausgeschlossen.

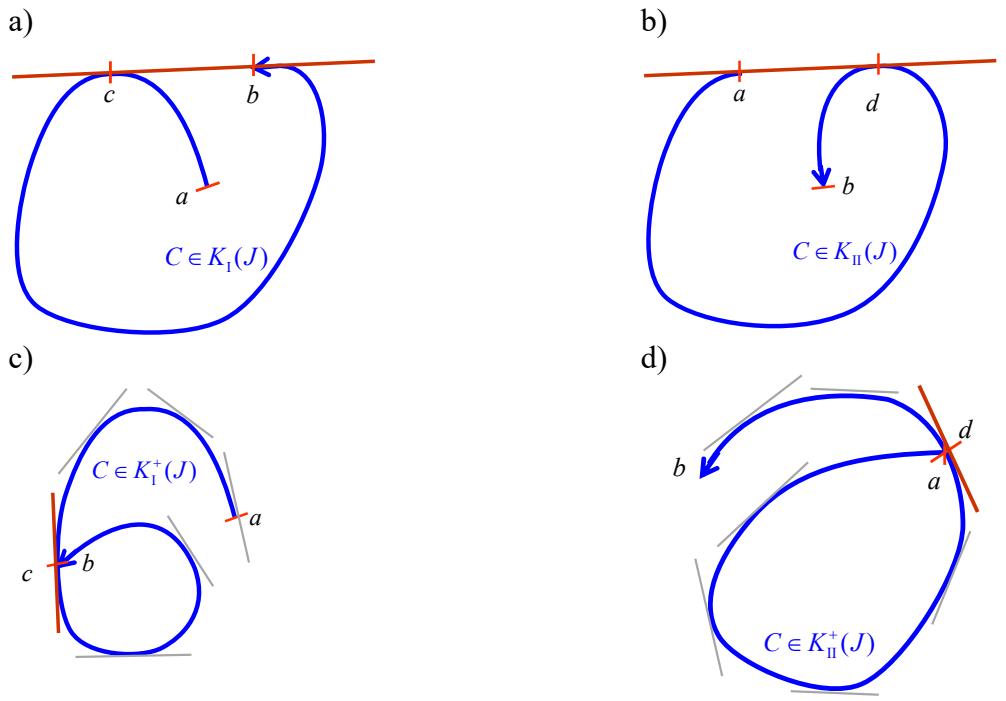


Abb. 3.11 Eine Integralkurve C der Klasse $K_I(J) \cup K_{II}(J)$ mit einer Doppeltangente ohne Doppelpunkt (siehe a und b) bzw. $K_I^+(J) \cup K_{II}^+(J)$ mit einem Doppelpunkt ohne Doppeltangente (siehe c und d) am Ende oder Anfang des Kurvenstücks

3.1.11 Beispiel für einen geometrischen Beweis

Um zu illustrieren, wie sich Eigenschaften der Lösungen von (L) und (L^+) in geometrischen Eigenschaften der Integralkurve C widerspiegeln, wird jetzt der Beweis des Hilfssatzes 2.1 in Abschnitt 2.7.4 für Funktionen $u = y_1$, $v = y_2 \in C^3(J)$ in geometrischer Sprechweise formuliert.
Für die Funktionen $y_1, y_2 \in C^3(J)$ gelte $W[y_1,y_2] \neq 0$ für alle $x \in J$. Wählt man eine beliebige in J nullstellenfreie Funktion $f \in C^1(J)$ und $y_3 = y$ als eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' - \frac{(W[y_1,y_2])'}{W[y_1,y_2]}\, y' + \frac{W[y_1',y_2']}{W[y_1,y_2]}\, y = f,$$

dann ist $y_3 \in C^3(J)$ und es gilt

$$\begin{aligned} W[y_1,y_2,y_3](x) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} \\ &= y_3''\cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} - y_3'\cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} + y_3\cdot \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} \\ &= y_3''\cdot W[y_1,y_2] - y_3'\cdot (W[y_1,y_2])' + y_3\cdot W[y_1',y_2'] \\ &= f(x)\cdot W[y_1,y_2] \neq 0 \end{aligned}$$

für alle $x \in J$. Folglich ist $\mathbf{y} = (y_1,y_2,y_3)$ (wie auch schon in Abschnitt 3.1.4 dargestellt wurde) ein Fundamentalsystem für eine Differentialgleichung (L), nämlich

$$L[y] \equiv W[y_1,y_2,y_3,y]/W[\mathbf{y}]$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y \\ y_1' & y_2' & y_3' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y'' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' & y''' \end{vmatrix} / W[\mathbf{y}]$$

$$= y''' + py'' + qy' + ry = 0$$

mit den Koeffizienten

$$p = -\begin{vmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \\ \mathbf{y}''' \end{vmatrix} / W[\mathbf{y}],\ q = \begin{vmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}'' \\ \mathbf{y}''' \end{vmatrix} / W[\mathbf{y}],\ r = -\begin{vmatrix} \mathbf{y}' \\ \mathbf{y}'' \\ \mathbf{y}''' \end{vmatrix} / W[\mathbf{y}].$$

Weiter ist $\mathbf{z} = (z_1,z_2,z_3) = \mathbf{y} \times \mathbf{y}'/W[\mathbf{y}]$ die zu $\mathbf{y}$ duale Basis von S^+. Nach Voraussetzung ist die Lösung

$$\mathbf{e}_3\mathbf{z} = z_3 = W[y_1,y_2]/W[\mathbf{y}]$$

nullstellenfrei in J. Geometrisch bedeutet dies, dass in $\mathbb{P}^2$ der Punkt $[\mathbf{e}_3]$ auf keiner der Tangenten $\langle \mathbf{z}(x) \rangle = [\mathbf{y}(x),\mathbf{y}'(x)]$, $x \in J$, der Integralkurve C liegt:

$$[\mathbf{e}_3] \notin \langle \mathbf{z}(x) \rangle \ \forall\, x \in J.$$

Insbesondere liegt dann $[\mathbf{e}_3]$ auch nicht auf der Integralkurve $C : x \in J \mapsto [\mathbf{y}(x)]$ und der Kurve $C' : x \in J \mapsto [\mathbf{y}'(x)]$:

$$[\mathbf{e}_3] \neq [\mathbf{y}(x)] \ \wedge\ [\mathbf{e}_3] \neq [\mathbf{y}'(x)] \ \forall\, x \in J.$$

Da nun

$$[\mathbf{e}_3] = \langle \mathbf{e}_1 \rangle \cap \langle \mathbf{e}_2 \rangle$$

der einzige Schnittpunkt der beiden Geraden $\langle \mathbf{e}_1 \rangle$ und $\langle \mathbf{e}_2 \rangle$ ist und nicht auf C liegt, gibt es keinen Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x_0)]$, der mit $[\mathbf{e}_3]$ übereinstimmt bzw. gleichzeitig auf diesen beiden Geraden liegt. Also gibt es keine Stelle $x_0 \in J$, die gleichzeitig Nullstelle der beiden Lösungen $y_1 = \mathbf{e}_1\mathbf{y}$ und $y_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{y}$ ist. Die Lösungen y_1 und y_2 haben somit keine gemeinsame Nullstelle in J.

Da $[\mathbf{e}_3]$ auch nicht auf der Kurve C' liegt, folgt analog, dass auch die Ableitungen $y_1' = \mathbf{e}_1\mathbf{y}'$ und $y_2' = \mathbf{e}_2\mathbf{y}'$ keine gemeinsame Nullstelle in J haben.

Für $j = 1, 2$ folgt aus $[\mathbf{e}_3] \in \langle \mathbf{e}_j \rangle$ und $[\mathbf{e}_3] \notin \langle \mathbf{z}(x) \rangle$ für die Geraden $\langle \mathbf{e}_j \rangle$ und $\langle \mathbf{z}(x) \rangle$ die Relation

$$\langle \mathbf{e}_j \rangle \neq \langle \mathbf{z}(x) \rangle = [\mathbf{y}(x),\mathbf{y}'(x)] \text{ für alle } x \in J.$$

Demnach gibt es keine Stelle $x_0 \in J$ mit $[\mathbf{y}(x_0)], [\mathbf{y}'(x_0)] \in \langle \mathbf{e}_j \rangle$, also keine gemeinsame Nullstelle x_0 der beiden Funktionen $y_j = \mathbf{e}_j\mathbf{y}$ und $y_j' = \mathbf{e}_j\mathbf{y}'$ bzw. keine zweifache Nullstelle von y_j.

Für die Trennung der Nullstellen von y_1, y_2 in J genügt es etwa noch zu zeigen, dass zwischen zwei (einfachen) Nullstellen $c, d \in J$ $(c < d)$ von $y_1 = \mathbf{e}_1\mathbf{y}$ mindestens eine Nullstelle von y_2 liegt. O. E. seien c und d aufeinanderfolgende einfache Nullstellen. Nimmt man nun das Gegenteil an ($\mathbf{e}_2\mathbf{y}(x) = y_2(x) \neq 0$ in $]c,d[$ und dann auch in $[c,d]$) und wählt $\langle \mathbf{e}_2 \rangle$ als Ferngerade, dann liegt das Kurvenstück $x \in [c,d] \mapsto [\mathbf{y}(x)] \in \mathbb{P}^2$ ganz in der durch die Tilgung der Geraden $H := \langle \mathbf{e}_2 \rangle$ aus $\mathbb{P}^2$ erhaltenen euklidischen Ebene

$$E := \{[\mathbf{w}] \in \mathbb{P}^2 : \mathbf{e}_2\mathbf{w} \neq 0\}.$$

Da die Kurve C die Gerade $\langle \mathbf{e}_1 \rangle$ in den Punkten $[\mathbf{y}(c)]$ und $[\mathbf{y}(d)]$ (echt) schneidet, gibt es einen Kurvenparameter $x_0 \in\ ]c,d[$, dessen Tangente $\langle \mathbf{z}(x_0) \rangle$ parallel zur Geraden $\langle \mathbf{e}_1 \rangle$ ist, also denselben Fernpunkt wie $\langle \mathbf{e}_1 \rangle$ hat:

$$\langle \mathbf{z}(x_0) \rangle \cap \langle \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{e}_1 \rangle \cap \langle \mathbf{e}_2 \rangle = [\mathbf{e}_3].$$

Demnach liegt $[\mathbf{e}_3]$ auf $\langle \mathbf{z}(x_0) \rangle$, im Widerspruch zur Voraussetzung $z_3(x) = \mathbf{e}_3\mathbf{z}(x) \neq 0$ in J. Somit liegt zwischen den einfachen Nullstellen $c, d \in J$ $(c < d)$ von y_1 mindestens eine Nullstelle von y_2.

3.2 Beziehungen zwischen den Nullstellenverteilungen der Lösungen von (L) und (L⁺)

Die folgenden Sätze und Folgerungen lassen sich alle mit Ausnahme von Satz 3.1 für $k = 1, 2$ mittels der Integralkurve C geometrisch veranschaulichen.

3.2.1 Nullstellenanzahl bei zwei nicht orthogonalen Lösungen

Der erste Satz betrachtet für zwei zueinander nicht orthogonale Lösungen $y \in S$ und $z \in S^+$ in Teil a) die Anzahl der Nullstellen des Produkts $z \cdot y^{(k)}$ im Intervall zwischen zwei doppelten Nullstellen von z und in Teil b) die Anzahl der Nullstellen des Produkts $y \cdot D^k[z]$ im Intervall zwischen zwei doppelten Nullstellen von y.
Bei der geometrischen Interpretation liegt im Teil a) für $k = 0$ gemäß der Voraussetzung ein Doppelpunkt

$$[\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)] =: P$$

der Integralkurve C vor, den die zu y gehörige Gerade G nicht trifft. Wenn j die Anzahl der durch den Kurvenpunkt P gehenden Tangenten $\langle \mathbf{z}(t) \rangle$, $t \in \,]c,d[$, und m die Anzahl der Treffpunkte der Geraden G mit dem zum offenen Intervall $]c,d[$ gehörigen Kurvenstück

$$C_{]c,d[} = \{[\mathbf{y}(x)] : x \in \,]c,d[\}$$

ist, dann ist die Summe $j + m$ eine gerade Zahl. Dabei werden die Stellen doppelt gezählt, wenn nicht nur ein Tangententreffpunkt $P \in \langle \mathbf{z}(t) \rangle$, sondern sogar ein Doppelpunkt $P = [\mathbf{y}(t)]$ vorliegt bzw. wenn die Gerade G die Kurve in $[\mathbf{y}(x)]$ nicht nur trifft, sondern sogar berührt, also gleich der Tangente $\langle \mathbf{z}(x) \rangle$ ist.
Im Teil b) liegt für $k = 0$ eine Doppeltangente

$$\langle \mathbf{z}(c) \rangle = \langle \mathbf{z}(d) \rangle =: T$$

vor, die nicht durch den zu z gehörigen Punkt Q geht. Wenn j die Anzahl der Treffpunkte der Geraden T mit dem zum offenen Intervall $]c,d[$ gehörigen Kurvenstück $C_{]c,d[}$ und m die Anzahl der durch Q gehenden Tangenten $\langle \mathbf{z}(t) \rangle$, $t \in \,]c,d[$, dieses Kurvenstücks ist, dann ist die Summe $j + m$ eine gerade Zahl. Dabei werden die Stellen doppelt gezählt, wenn die Gerade T die Kurve in $[\mathbf{y}(x)]$ berührt, also gleich der Tangente $\langle \mathbf{z}(x) \rangle$ ist bzw. wenn Q nicht nur Tangententreffpunkt $Q \in \langle \mathbf{z}(t) \rangle$, sondern auch noch ein Kurvenpunkt $Q = [\mathbf{y}(t)]$ ist.
Eine geometrische Veranschaulichung dieser Aussagen für $k = 0$ wird in der Abbildung 3.12 gegeben. In dieser Abbildung sind auch schon die zur in $[c,d]$ nullstellenfreien Lösung $y_0 \in S$ gehörige Gerade G_0 und der zur in $[c,d]$ nullstellenfreien Lösung $z_0 \in S^+$ gehörige Punkt Q_0 dargestellt, die unten in der geometrischen Beschreibung von Folgerung 2) auftreten.

Satz 3.1 Nullstellenanzahl bei zwei nicht orthogonalen Lösungen
Es sei $k \in \{0,1,2\}$, $c, d \in J$, $c < d$.

a) **Anzahl der Nullstellen von $z \cdot y^{(k)}$ für nicht orthogonale Lösungen $z = u^+_{2-k}(.,c) \in S^+$ und $y \in S$ zwischen zwei doppelten Nullstellen von z**
Ist $[u^+_{2-k}(.,c)] = [u^+_{2-k}(.,d)]$, $y \in S$ mit $y^{(k)}(c)y^{(k)}(d) \neq 0$ (also y nicht orthogonal zu $z = u^+_{2-k}(.,c)$) und j bzw. m die Anzahl der (mit ihren Vielfachheiten gezählten) Nullstellen von $z = u^+_{2-k}(.,c)$ bzw. $y^{(k)}$ in $]c,d[$, dann ist $k + j + m$ eine gerade Zahl.

b) **Anzahl der Nullstellen von $y{\cdot}D^k[z]$ für nicht orthogonale Lösungen $y = u_2(.,c) \in S$ und $z \in S^+$ zwischen zwei doppelten Nullstellen von y**

Ist $[u_{2-k}(.,c)] = [u_{2-k}(.,d)]$, $z \in S^+$ mit $D^k[z](c)D^k[z](d) \neq 0$ (also $y = u_{2-k}(.,c)$ und z nicht orthogonal) und j bzw. m die Anzahl der (mit ihren Vielfachheiten gezählten) Nullstellen von $y = u_{2-k}(.,c)$ bzw. $D^k[z]$ in $]c,d[$, dann ist $k + j + m$ eine gerade Zahl.

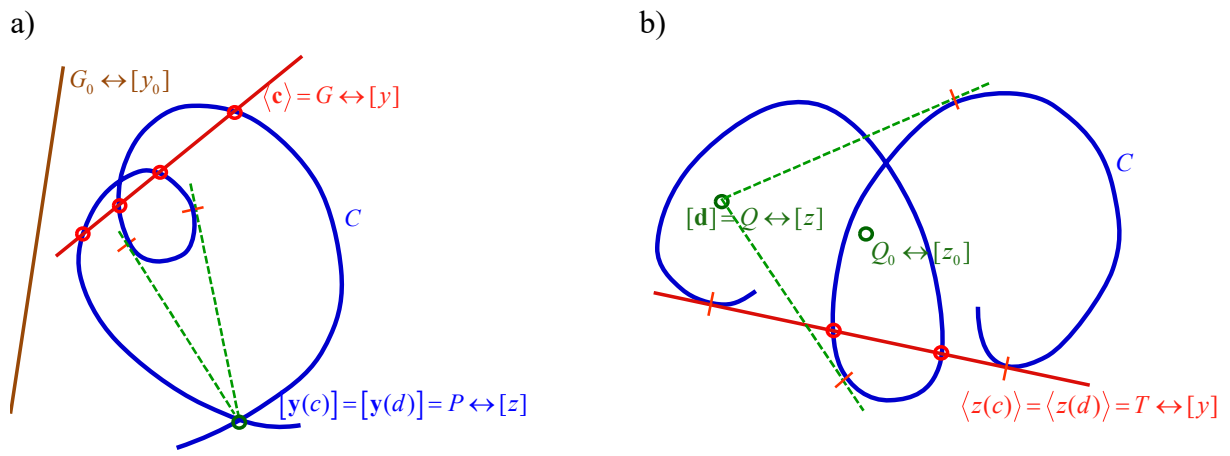


Abb. 3.12 a) Ein Doppelpunkt P der Integralkurve C, eine nicht durch P verlaufende Gerade G, die Anzahl der Tangenten von P aus an das Kurvenstück $C_{]c,d[}$ und die Anzahl der Treffpunkte der Geraden G mit dem Kurvenstück

b) Eine Doppeltangente T der Integralkurve C, ein nicht auf T liegender Punkt Q, die Anzahl der Treffpunkte der Geraden T mit dem Kurvenstück $C_{]c,d[}$ und die Anzahl der Tangenten von Q aus an das Kurvenstück

Beweis für a): Aufgrund ihrer Anfangsbedingungen bei $x = c$ ist die Lösung $u_0^+(.,c) \in S^+$ $(k = 2)$ in einer Umgebung von c positiv. Analog ist aufgrund ihrer Anfangsbedingungen die Lösung $u_1^+(.,c) \in S^+$ $(k = 1)$ in einer Umgebung von c links von c negativ und rechts von c positiv. Außerdem ist die Lösung $u_2^+(.,c) \in S^+$ $(k = 0)$ in einer punktierten Umgebung von c positiv: Letzteres folgt unter der zusätzlichen Voraussetzung $p \in C^1(J)$, da aus den Anfangsbedingungen $z(c) = D^1[z](c) = 0$, $D^2[z](c) = 1$ auch die Bedingungen $z(c) = z'(c) = 0$, $z''(c) = 1$ resultieren. Unter der schwächeren Voraussetzung $p \in C(J)$ folgt dies nach dem Zusatz zu Satz 2.4. Die gleichen Aussagen gelten auch für die Lösungen $u_{2-k}^+(.,d) \in S^+$ $(k = 0, 1, 2)$ an der Stelle d.

Da nach Voraussetzung $z := u_{2-k}^+(.,c) = \lambda u_{2-k}^+(.,d)$ mit einem reellen $\lambda = \lambda_{2-k,c,d} \neq 0$ ist und die Lösung $u_{2-k}^+(.,c)$ bzw. $u_{2-k}^+(.,d)$ in einer punktierten Umgebung von c bzw. d das oben beschriebene Vorzeichen aufweist, lässt sich das Vorzeichen von λ aus der Anzahl j der Nullstellen von $z = u_{2-k}^+(.,c)$ in $]c,d[$ bestimmen:

$$\operatorname{sgn} \lambda = (-1)^{k+j}.$$

Mit der Anzahl m der Nullstellen von $y^{(k)}$ in $]c,d[$ ergibt sich

$$\operatorname{sgn} (y^{(k)}(c)y^{(k)}(d)) = (-1)^m.$$

Weiter gilt für eine beliebige Lösung $y \in S$ nach der Definition von $B[y,z]$ in Abschnitt 2.1

$$(-1)^k y^{(k)}(c) = \sum_{s=0}^{2} (-1)^s y^{(s)}(c) D^{2-s}[u_{2-k}^+(.,c)](c) = B[y, u_{2-k}^+(.,c)](c) = B[y, u_{2-k}^+(.,c)]$$

$$= \lambda B[y, u_{2-k}^+(.,d)] = \lambda B[y, u_{2-k}^+(.,d)](d) = \lambda(-1)^k y^{(k)}(d),$$

$$y^{(k)}(c) = \lambda y^{(k)}(d).$$

Im Falle $y^{(k)}(c)y^{(k)}(d) \neq 0$ sind die Lösungen y und z nicht orthogonal $(B[y,z] \neq 0)$ und es gilt

$$\lambda = y^{(k)}(c)/y^{(k)}(d),$$

$$(-1)^m = \operatorname{sgn}(y^{(k)}(c)y^{(k)}(d)) = \operatorname{sgn} \lambda = (-1)^{k+j},$$

sodass $(-1)^{k+j+m} = 1$ und $k + j + m$ eine gerade Zahl ist. □

Folgerungen zur Nullstellenanzahl bei nicht orthogonalen Lösungen

1) a) **Anzahl der Nullstellen von $y^{(k)}$ bei nicht orthogonalen Lösungen $z = u^+_{2-k}(.,c) \in S^+$ und $y \in S$**
Ist zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 3.1, a) noch die Lösung $z = u^+_{2-k}(.,c)$ nullstellenfrei in $]c,d[$, also $j = 0$, und m die Nullstellenanzahl von $y^{(k)}$ in $]c,d[$, dann ist $k + m$ eine gerade Zahl.

b) **Anzahl der Nullstellen von $D^k[z]$ bei nicht orthogonalen Lösungen $y = u_{2-k}(.,c) \in S$ und $z \in S^+$**
Ist zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 3.1, b) noch die Lösung $y = u_{2-k}(.,c)$ nullstellenfrei in $]c,d[$, also $j = 0$, und m die Nullstellenanzahl von $D^k[z]$ in $]c,d[$, dann ist $k + m$ eine gerade Zahl.

2) a) **Anzahl der Nullstellen von nicht orthogonalen Lösungen $z = u^+_2(.,c) \in S^+$ und $y \in S$**
Ist $[\,u^+_2(.,c)\,] = [\,u^+_2(.,d)\,]$ ($k = 0$) und existiert eine in $[c,d]$ nullstellenfreie Lösung $y_0 \in S$, dann ist die Anzahl j der (mit ihren Vielfachheiten gezählten) Nullstellen von $z = u^+_2(.,c)$ gerade.
Ebenso ist die Anzahl m der (mit ihren Vielfachheiten gezählten) Nullstellen von jeder beliebigen Lösung $y \in S$ mit $y(c) \neq 0$ (und damit $y(d) \neq 0$) in $]c,d[$ eine gerade Zahl.

b) **Anzahl der Nullstellen von nicht orthogonalen Lösungen $y = u_2(.,c) \in S$ und $z \in S^+$**
Ist $[u_2(.,c)] = [u_2(.,d)]$ ($k = 0$) und existiert eine in $[c,d]$ nullstellenfreie Lösung $z_0 \in S^+$, dann ist die Anzahl j der (mit ihren Vielfachheiten gezählten) Nullstellen von $y = u_2(.,c)$ gerade.
Ebenso ist die Anzahl m der (mit ihren Vielfachheiten gezählten) Nullstellen von jeder beliebigen Lösung $z \in S^+$ mit $z(c) \neq 0$ (und damit $z(d) \neq 0$) in $]c,d[$ eine gerade Zahl.

Beweis der Folgerung 2 a): Nach Satz 3.1, a) mit $k = 0$, $z = u^+_2(.,c)$ und $m_0 = 0$ Nullstellen von y_0 ist die Anzahl der (mit ihren Vielfachheiten gezählten) Nullstellen von $z \cdot y_0$ und damit von $z = u^+_2(.,c)$ in $]c,d[$ gerade. Für eine beliebige Lösung $y \in S$ mit $y(c) \neq 0$ erhält man dann mit dem im obigen Beweis von Satz 3.1, a) verwendeten $\lambda = \lambda_{2,c,d}$ die Gleichung $y(c) = \lambda y(d)$ und somit auch $y(d) \neq 0$. Daher ist nach diesem Satz die Nullstellenanzahl $j + m$ von $z \cdot y$ gerade. Da hier auch die Nullstellenanzahl j von z gerade ist, ist auch die Nullstellenanzahl m von y gerade.
Der Beweis der Folgerung 2 b) verläuft analog. □

Bemerkung zur Existenz einer nullstellenfreien Lösung
Eine hinreichende Bedingung für die Existenz von nullstellenfreien Lösungen von (L) und (L^+) im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ wird im unten folgenden Satz 4.9 durch $L \in K_I \cup K_{II}]c,d[$ gegeben, da (L) stets nichtoszillatorisch ist in $[c,d]$ für $c, d \in J$.

Geometrische Beschreibung der Folgerungen 2 a) und b)
Geometrisch bedeutet in der Folgerung 2 a) die Existenz einer in $[c,d]$ nullstellenfreien Lösung $y_0 \in S$, dass das zum abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ gehörige Kurvenstück

$$C_{[c,d]} = \{[\mathbf{y}(x)] : x \in [c,d]\}$$

von C die zu y_0 gehörige Gerade G_0 nicht trifft und somit wegen der Stetigkeit von y_0 ganz auf einer Seite von G_0 liegt (siehe Abbildung 3.12, a). Das Kurvenstück $C_{[c,d]}$ liegt ganz in der euklidischen Ebene E, die man aus der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ durch die Tilgung der Geraden G_0 erhält. Geht die zur Lösung y gehörige Gerade G nicht durch den Doppelpunkt $[\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)] =: P$, dann ist die Anzahl m der Treffpunkte der Geraden G mit dem zum offenen Intervall $]c,d[$ gehörigen Kurvenstück $C_{]c,d[}$ eine gerade Zahl.

In Folgerung 2 b) bedeutet die Existenz einer in $[c,d]$ nullstellenfreien Lösung $z_0 \in S^+$, dass die zum abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ gehörige Tangentenschar

$$T_{[c,d]} = \{\langle \mathbf{z}(t) \rangle \ : t \in [c,d]\}$$

den zu z_0 gehörigen Punkt Q_0 nicht trifft (siehe Abbildung 3.12, b). Bei allen diesen Tangenten liegt dabei der Punkt Q_0 auf derselben Seite. Insbesondere liegt der Punkt Q_0 auch nicht auf dem Kurvenstück $C_{[c,d]}$ (da $[\mathbf{y}(t)] \in \langle \mathbf{z}(t) \rangle$) und der Doppeltangente $\langle \mathbf{z}(c) \rangle = \langle \mathbf{z}(d) \rangle =: T\ (t = c, d)$. Liegt der zur Lösung z gehörige Punkt Q nicht auf der Doppeltangente T, dann ist die Anzahl m der durch Q gehenden Tangenten $\langle \mathbf{z}(t) \rangle$, $t \in]c,d[$, des zum offenen Intervall $]c,d[$ gehörigen Kurvenstücks $C_{]c,d[}$ eine gerade Zahl. Eine geometrische Darstellung der zur in $[c,d]$ nullstellenfreien Lösung $y_0 \in S$ gehörigen Geraden G_0 bzw. des zur in $[c,d]$ nullstellenfreien Lösung $z_0 \in S^+$ gehörigen Punktes Q_0 sind auch in Abbildung 3.12 angegeben.

Eine zur obigen Folgerung 2 a) aus Satz 3.1 ähnliche Aussage erhält man unten mit der Folgerung a) aus Satz 3.2 in Abschnitt 3.2.2, bei der in $]c,d[$ eine ungerade Anzahl von Nullstellen für jede Lösung $y \in S$ vorliegt, deren zugehörige Gerade G jetzt aber durch den Doppelpunkt $[\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)] =: P$ und einen Punkt Q_0 geht, der nicht von der zum abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ gehörigen Tangentenschar $T_{[c,d]}$ getroffen wird.
Analog erhält man eine zur obigen Folgerung 2 b) aus Satz 3.1 ähnliche Aussage mit der Folgerung b) aus Satz 3.2, bei der in $]c,d[$ eine ungerade Anzahl von Nullstellen für jede Lösung $z \in S^+$ vorliegt, deren zugehöriger Punkt Q jetzt aber auf der Doppeltangente $\langle \mathbf{z}(c) \rangle = \langle \mathbf{z}(d) \rangle =: T$ und auf einer Geraden G_0 liegt, welche das zum abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ gehörige Kurvenstück $C_{[c,d]}$ nicht trifft. Eine geometrische Veranschaulichung wird in Abbildung 3.14 gegeben.

3.2.2 Nullstellenanzahl für zwei orthogonale Lösungen

Der nachfolgende Satz 3.2 befasst sich in Teil a) mit den Nullstellen von zwei (auf Grund der Randbedingungen) linear unabhängigen Lösungen $y_1, y_2 \in S$ und der dazu orthogonalen Lösung $z = \sigma W[y_1,y_2] \in S^+$. So ist beispielsweise beim Vorliegen der Randbedingung α) bei $t = c$ und $t = d$ im offenen Intervall $]c,d[$ zwischen zwei aufeinander folgenden Nullstellen c und d von y_1 die Anzahl der Nullstellen von y_2 und z zusammen eine ungerade Zahl und insbesondere ≥ 1. Da Satz 3.2 a, α, 1) in dem Spezialfall, dass auch noch z nullstellenfrei in $[c,d]$ ist, den in Hilfssatz 2.1 (in Abschnitt 2.7.4) beschriebenen wesentlichen Bestandteil des Sturmschen Trennungssatzes für die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung darstellt und der Satz 3.2 a, α, 2) die entsprechende Erweiterung für die Differentialgleichung 3. Ordnung liefert, wird der Satz 3.2 auch als Allgemeiner Trennungssatz für die Differentialgleichung 3. Ordnung bezeichnet.

Mit Teil a) des Satzes erhält man für den Fall, dass bei $t = c$ und $t = d$ jeweils die Bedingung α, 1) erfüllt ist, also im Intervall $]c,d[$ zwischen zwei Nullstellen c und d von y_1 die Nullstellenanzahl von y_2z betrachtet wird, den geometrisch begründeten sog. Allgemeinen Trennungssatz (General Separation Theorem) von Birkhoff (1911), S. 109 (dort ohne die exakte Angabe der Voraussetzung $y_2(t) \neq 0$ für y_2). Als Verallgemeinerung davon beweist Reynolds (1921), Th.1, dass für beliebige Funktionen $y_1, y_2 \in C^m[c,d]$, $m \in \mathbb{N}$, für welche c und d Nullstellen von y_1 der Ordnung $\leq m$ sind, $y_1 > 0$ in $]c,d[$ und $y_2(c)y_2(d) \neq 0$ ist, die Anzahl der Nullstellen der Funktion

$$f := y_2 \cdot W[y_1,y_2]$$

in $]c,d[$ ungerade ist. Eine geometrische Veranschaulichung der im Satz aufgeführten Resultate zu einigen Randbedingungen für die Lösungen $y_1, y_2 \in S$ bzw. $z_1, z_2 \in S^+$ wird in der Abbildung 3.13 gegeben. Es werden dabei nur die Fälle dargestellt, in denen an beiden Intervallgrenzen c und d die gleiche Randbedingung erfüllt ist.

Für den Fall, dass bei $t = c$ und $t = d$ jeweils die Bedingung α, 2) erfüllt ist, liefert Teil a) des Satzes eine Modifikation, bei der die Nullstellenanzahl von y_2z im Intervall $]c,d[$ zwischen zwei doppelten Nullstellen c und d von y_1 betrachtet wird.

Für den Fall, dass bei $t = c$ und $t = d$ jeweils eine der beiden Bedingungen 1) oder 2) von β) erfüllt ist, liefert Teil a) eine weitere Modifikation, bei der die Nullstellenanzahl von $y_2 z$ jetzt im Intervall zwischen zwei Nullstellen von y_2 betrachtet wird.
Zur Nullstellenanzahl der Produktfunktion yz von zwei nichttrivialen orthogonalen Lösungen $y \in S$ und $z \in S_y^+$ in einem Intervall ist anzumerken, dass speziell aus der Nullstellenanzahl Null die Diskonjugiertheit der Differentialgleichung (L) bzw. (L^+) in diesem Intervall folgt (siehe in Abschnitt 2.7.7 den Hinweis auf Coppel (1971) zur Äquivalenz der Diskonjugiertheit mit der Existenz eines Markov-Fundamentalsystems).

Satz 3.2 Allgemeiner Trennungssatz für die Nullstellen von zwei Lösungen und der dazu orthogonalen Lösung

Es sei $c, d \in J$, $c < d$.

a) Sei $y_1, y_2 \in S \setminus \{o\}$, $z \in S^+$ mit

$$[z] = [y_1,y_2]^\perp, \text{ also } z = \sigma W[y_1,y_2] \quad (\sigma = \exp\int p(x)dx),$$
$$y_1(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in \,]c,d[$$

und an den Intervallgrenzen $t = c, d$ je eine der vier folgenden Bedingungen erfüllt:

α) 1) $y_1(t) = 0 \neq y_2(t)$ (Birkhoff 1911) oder
2) $y_1(t) = y_1'(t) = y_2(t) = 0 \neq y_2'(t)$;

β) 1) $y_1(t) \neq 0 = y_2(t)$ oder
2) $y_1'(t) \neq 0 = y_1(t) = y_2(t) = y_2'(t)$.

Die Anzahl i der mit ihren Vielfachheiten gezählten Nullstellen der Produktfunktion $y_2 \cdot z$ (also der Nullstellen der orthogonalen Lösungen y_2 und z) in $]c,d[$ ist ungerade und insbesondere ≥ 1, falls für die Intervallgrenzen $t = c$ und $t = d$ je eine der beiden Bedingungen von α) erfüllt ist oder für $t = c$ und $t = d$ je eine der beiden Bedingungen von β) erfüllt ist (Existenz einer Nullstelle von $y_2 \cdot z$);
die Anzahl i ist gerade, falls bei $t = c$ und $t = d$ die Bedingungen α) und β) gemischt auftreten.

b) Eine analoge Aussage erhält man durch Vertauschen der Rollen von S und S^+:
Sei $z_1, z_2 \in S^+ \setminus \{o\}$, $y \in S$ mit

$$[y] = [z_1,z_2]^\perp, \text{ also } y = W^+[z_1,z_2]/\sigma,$$
$$z_1(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in \,]c,d[$$

und an den Intervallgrenzen $t = c, d$ je eine der vier folgenden Bedingungen erfüllt:

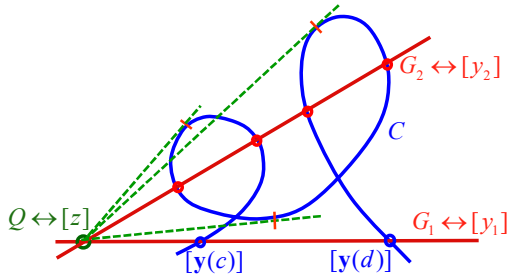
α) 1) $z_1(t) = 0 \neq z_2(t)$ oder
2) $z_1(t) = z_1'(t) = z_2(t) = 0 \neq z_2'(t)$;

β) 1) $z_1(t) \neq 0 = z_2(t)$ oder
2) $z_1'(t) \neq 0 = z_1(t) = z_2(t) = z_2'(t)$.

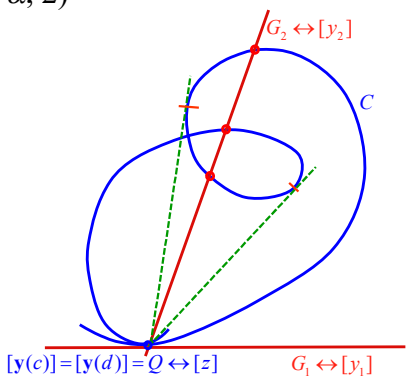
Die Anzahl i der mit ihren Vielfachheiten gezählten Nullstellen der Produktfunktion $z_2 \cdot y$ (also der Nullstellen der orthogonalen Lösungen z_2 und y) in $]c,d[$ ist ungerade und insbesondere ≥ 1, falls für die Intervallgrenzen $t = c$ und $t = d$ je eine der beiden Bedingungen von α) erfüllt ist oder für $t = c$ und $t = d$ je eine der beiden Bedingungen von β) erfüllt ist (Existenz einer Nullstelle von $z_2 \cdot y$);
die Anzahl i ist gerade, falls bei $t = c$ und $t = d$ die Bedingungen α) und β) gemischt auftreten.

a)

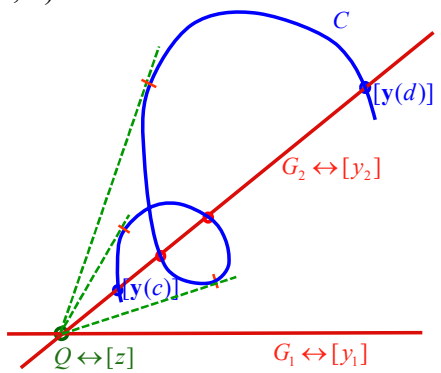
α, 1) Birkhoff (1911)



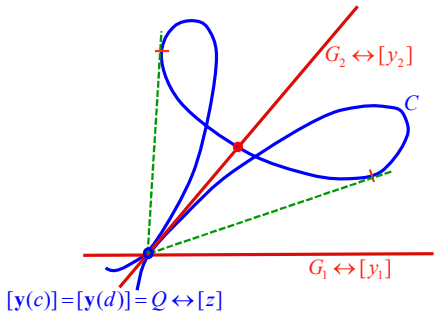
α, 2)



β, 1)

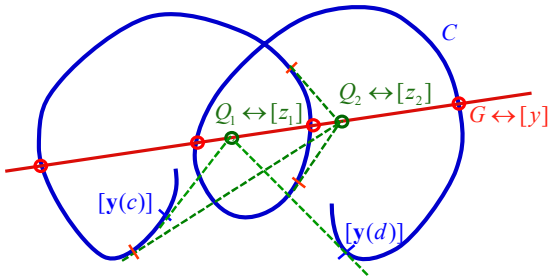


β, 2)

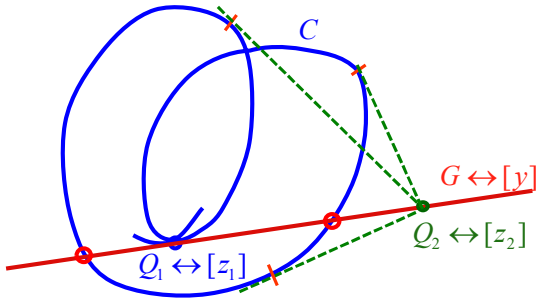


b)

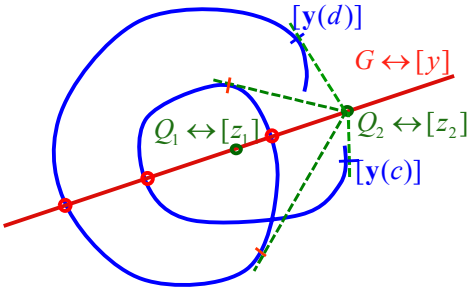
α, 1)



α, 2)



β, 1)



β, 2)

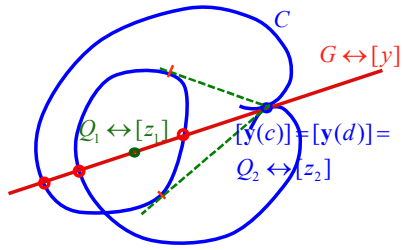


Abb. 3.13 a) Darstellung der zu den Lösungen $y_1, y_2 \in S \setminus \{o\}$ gehörigen Geraden G_1 und G_2, des zur Lösung $z \in S^+ \setminus \{o\}$, die zu y_1, y_2 orthogonal ist, gehörigen Schnittpunktes Q der Geraden G_1 und G_2, der Anzahl der Treffpunkte der Geraden G_2 mit dem Kurvenstück $C_{]c,d[}$ und der Anzahl der Tangenten von Q aus an das Kurvenstück für verschiedene Randbedingungen von y_1, y_2.

b) Darstellung der zu den Lösungen $z_1, z_2 \in S^+ \setminus \{o\}$ gehörigen Punkte Q_1 und Q_2, der zur Lösung $y \in S \setminus \{o\}$, die zu z_1, z_2 orthogonal ist, gehörigen Verbindungsgerade G der Punkte Q_1 und Q_2, der Anzahl der Tangenten von Q_2 aus an das Kurvenstück $C_{]c,d[}$ und der Anzahl der Treffpunkte der Geraden G mit dem Kurvenstück für verschiedene Randbedingungen von z_1, z_2.

Erläuterungen zu den Abbildungen: Die in Teil a) des Satzes 3.2 für die Stelle $t \in J$ angegebene Bedingung α, 2) bedeutet, dass t sowohl eine zweifache Nullstelle der Lösung y_1 als auch eine gemeinsame Nullstelle der Lösungen y_1 und y_2 ist. Wegen $y_1(t) = y_1'(t) = 0$ ist

$$[y_1] = [u_2(.,t)]$$

und die Stelle t auch eine Nullstelle der Determinante $W := W[y_1,y_2] = y_1y_2' - y_1'y_2$ (mit der Ableitung $W' = y_1y_2'' - y_1''y_2$) und eine Nullstelle der bis auf einen konstanten Faktor $\lambda \neq 0$ eindeutig bestimmten Lösung $z = \lambda\sigma W[y_1,y_2]$ (mit der Ableitung $z' = pz + \lambda\sigma W'$).
Weiter ist wegen $y_1(t) = y_2(t) = 0$ die Stelle t eine zweifache Nullstelle für die Determinante $W = W[y_1,y_2]$ und somit auch eine zweifache Nullstelle für die Lösung z, also

$$[z] = [u_2^+(.,t)].$$

Daher ist der Lösung $y_1 \in S \setminus \{o\}$ die Tangente $\langle \mathbf{z}(t) \rangle$ und der Lösung $z \in S^+ \setminus \{o\}$ der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(t)]$ als Schnittpunkt der zu y_1 und y_2 gehörigen Geraden G_1 und G_2 zugeordnet.
Falls nun an den beiden Intervallgrenzen $t = c$ und $t = d$ jeweils die Bedingung a, α, 2) erfüllt ist, gilt

$$[u_2(.,c)] = [y_1] = [u_2(.,d)] \text{ und}$$
$$[u_2^+(.,c)] = [z] = [u_2^+(.,d)],$$

sodass bei der geometrischen Interpretation die Kurvenparameter c und d einen Selbstberührungspunkt (3.9) der Integralkurve liefern.

Die in Teil a) des Satzes 3.2 für die Stelle $t \in J$ angegebene Bedingung β, 2) bedeutet

$$[y_2] = [u_2(.,t)] \text{ und } [z] = [u_2^+(.,t)],$$

sodass der Lösung $y_2 \in S \setminus \{o\}$ die Tangente $\langle \mathbf{z}(t) \rangle$ und der Lösung $z \in S^+ \setminus \{o\}$ der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(t)]$ als Schnittpunkt der zu y_1 und y_2 gehörigen Geraden G_1 und G_2 zugeordnet ist.
Falls nun an den beiden Intervallgrenzen $t = c$ und $t = d$ jeweils die Bedingung a, β, 2) erfüllt ist, gilt

$$[u_2(.,c)] = [y_2] = [u_2(.,d)] \text{ und}$$
$$[u_2^+(.,c)] = [z] = [u_2^+(.,d)],$$

sodass für die Kurvenparameter c und d eine Selbstberührung (3.9) der Integralkurve vorliegt.

Die in Teil a) des Satzes vorausgesetzte Nullstellenfreiheit der Lösung $y_1 \in S \setminus \{o\}$ im offenen Intervall $]c,d[$ bedeutet geometrisch, dass das zu diesem Intervall gehörige Kurvenstück $C_{]c,d[}$ von C ganz auf einer Seite der zu y_1 gehörigen Geraden G_1 liegt.
Die in Teil b) des Satzes vorausgesetzte Nullstellenfreiheit der Lösung $z_1 \in S^+ \setminus \{o\}$ im offenen Intervall $]c,d[$ bedeutet, dass das zu diesem Intervall gehörige Kurvenstück $C_{]c,d[}$ sich um den zu z_1 gehörigen Punkt Q_1 bewegt und der Punkt Q_1 bei allen zugehörigen Tangenten auf derselben Seite liegt.

Beweis für a): Nach Hilfssatz 2.2, 3) besitzt eine Lösung $z \in [y_1,y_2]^\perp \setminus \{o\}$ die Darstellung $z = \gamma\sigma W[y_1,y_2]$ mit $\sigma(x) = \exp\int p dx$ und einem $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für die in $]c,d[$ definierte Quotientenfunktion

$$h := \frac{y_2}{y_1}$$

gilt $h \in C^3(]c,d[)$ und

$$h' = \frac{z}{\gamma\sigma y_1^2},$$

Für den Grenzwert der Quotientenfunktion h an der Intervallgrenze $t \in \{c, d\}$ gilt im Fall α, 1)

$$\lim_{x\to t} h(x) = +\infty, \quad \text{falls } \operatorname{sgn} y_2(t) = \operatorname*{sgn}_{x\in]c,d[} y_1(x) =: s_1,$$
$$\lim_{x\to t} h(x) = -\infty, \quad \text{falls } \operatorname{sgn} y_2(t) = -s_1,$$

im Fall α, 2) nach der Regel von de l'Hospital und Bernoulli

$$\lim_{x \searrow c} h(x) = \lim_{x \searrow c} \frac{y_2'(x)}{y_1'(x)} = +\infty \text{ bzw. } -\infty, \quad \text{falls } y_2'(c)y_1''(c) > 0 \text{ bzw. } < 0,$$

$$\lim_{x \nearrow d} h(x) = \lim_{x \nearrow d} \frac{y_2'(x)}{y_1'(x)} = +\infty \text{ bzw. } -\infty, \quad \text{falls } y_2'(d)y_1''(d) < 0 \text{ bzw. } > 0,$$

also insgesamt im Fall α)

$$\lim_{x \to t} h(x) = \pm\infty .$$

Im Fall β) ergibt sich, und zwar im Fall β, 1) direkt und im Fall β, 2) nach der Regel von de l'Hospital und Bernoulli,

$$\lim_{x \to t} h(x) = 0.$$

Ferner stimmen in $]c,d[$ die Nullstellen nebst ihren Ordnungen für h und y_2 und für h' und z überein. Die Anzahl der mit ihren Vielfachheiten gezählten Nullstellen von $h \cdot h'$ in $]c,d[$ ist also gleich der Anzahl $i = m + j$ der mit ihren Vielfachheiten gezählten Nullstellen von $y_2 \cdot z$ in $]c,d[$, wobei m die Anzahl der Nullstellen von y_2 bzw. h und j die Anzahl der Nullstellen von z bzw. h' ist. Die Funktion h hat wie die nichttriviale Lösung $y_2 \in S$ höchstens Nullstellen erster und zweiter Ordnung.
In der Feststellung (2.25) ($k = 0$) wird die Inzidenz $u_2^+(.,x_0) \in S_{y_1}^+$ charakterisiert durch $y_1(x_0) = 0$. Da hier nun y_1 in $]c,d[$ nullstellenfrei ist und $z \in [y_1,y_2]^\perp \subseteq [y_1]^\perp = S_{y_1}^+$ gilt, hat demnach die Lösung z und damit auch h' in $]c,d[$ keine doppelte Nullstelle. Da also in den Nullstellen von h' die zweite Ableitung h'' von h nicht verschwindet, treten in den Nullstellen von h' für die Funktion h keine Sattelpunkte, sondern nur relative Extrema (lokale Maxima und Minima) auf. Folglich liegt in einem offenen Intervall $]x_k,x_{k+1}[$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen x_k, x_{k+1} von h eine ungerade Anzahl von Nullstellen von h' und eine ungerade Anzahl von Nullstellen von $h \cdot h'$. Außerdem ist eine doppelte Nullstelle x_k von h eine einfache Nullstelle von h' und eine dreifache Nullstelle von $h \cdot h'$. Hinsichtlich der Anzahl m der Nullstellen von y_2 bzw. h werden jetzt die beiden Fälle i) $m = 0$ und ii) $m \geq 1$ getrennt behandelt.

i) Falls die Anzahl m der mit ihren Vielfachheiten gezählten Nullstellen von h in $]c,d[$ gleich Null ist, also $y_2 \neq 0$ in $]c,d[$ ist, dann ist die Anzahl der Nullstellen von h' und damit auch von $h \cdot h'$ in $]c,d[$ ungerade, falls für beide Intervallgrenzen $t = c$ und $t = d$ nur die Bedingung α) oder für beide nur die Bedingung β) gilt: Ist nämlich o. E. $y_1 > 0$ in $]c,d[$, dann besitzt im Fall $y_2 > 0$ in $]c,d[$ (bzw. $y_2 < 0$ in $]c,d[$) die Funktion h an beiden Intervallgrenzen c und d im Fall α) jeweils den Grenzwert $+\infty$ (bzw. $-\infty$). Im Fall β) besitzt h unabhängig von den Vorzeichen von y_1 und y_2 an beiden Grenzen c und d jeweils den Grenzwert 0. In allen diesen Fällen resultiert in $]c,d[$ für h eine ungerade Anzahl von lokalen Extrema bzw. für h' eine ungerade Anzahl von (einfachen) Nullstellen.
Die Anzahl der Nullstellen von h' und damit auch die Anzahl der Nullstellen von $h \cdot h'$ ist gerade, falls an den Intervallgrenzen $t = c$, d die Bedingungen α) und β) gemischt auftreten: Zwischen den Intervallgrenzen mit gemischt auftretenden h-Grenzwerten $+\infty$ (bzw. $-\infty$) und 0 liegt nämlich eine gerade Anzahl von (einfachen) Nullstellen von h'.

ii) Für die Anzahl m der mit ihren Vielfachheiten gezählten Nullstellen von h in $]c,d[$ gelte jetzt $m \geq 1$. Weiter sei s ($1 \leq s \leq m$) die Anzahl der voneinander verschiedenen Nullstellen von h in $]c,d[$. Es seien x_k ($k = 1,\ldots,s$) die voneinander verschiedenen Nullstellen von h in $]c,d[$ mit

$$x_k < x_{k+1} \text{ für } k = 1,\ldots,s\text{-}1.$$

In x_k ist die Vielfachheit der Nullstelle von $h \cdot h'$ gleich 1, falls x_k eine einfache Nullstelle von h ist, und gleich 3, falls x_k eine zweifache Nullstelle von h ist, also insgesamt ungerade. Zwischen zwei verschiedenen Nullstellen x_k und x_{k+1} ist nach der obigen Vorüberlegung (vor der Fallunterscheidung)

die Anzahl der mit ihren Vielfachheiten gezählten Nullstellen von h' und damit auch von $h \cdot h'$ im offenen Intervall $]x_k,x_{k+1}[$ ungerade und im halboffenen Intervall $[x_k,x_{k+1}[$ gerade ($k = 1,\ldots,s\text{-}1$; $s \geq 2$). Allgemein ist für $s \geq 1$ die Anzahl der (mit ihren Vielfachheiten gezählten) Nullstellen von $h \cdot h'$ im Teilintervall

$$[x_1,x_s] = \bigcup_{k=1}^{s-1} [x_k, x_{k+1}[\cup \{x_s\}$$

als Summe einer geraden und einer ungeraden Anzahl selbst ungerade.
Außerdem ist die Anzahl der Nullstellen von h' und damit von $h \cdot h'$ in $]c,x_1[$ gerade, falls für $t = c$ die Bedingung α) ($\lim\limits_{x \searrow c} h(x) = \pm\infty$) gilt, und ungerade, falls bei $t = c$ die Bedingung β) ($\lim\limits_{x \searrow c} h(x) = 0$) gilt. Analoges gilt für die Nullstellenzahl von h' und von $h \cdot h'$ in $]x_s,d[$.
Insgesamt ist die Nullstellenanzahl von $h \cdot h'$ in

$$]c,d[=]c,x_1[\cup [x_1,x_s] \cup]x_s,d[$$

als Summe von drei ungeraden Zahlen bzw. als Summe von zwei geraden Zahlen und einer ungeraden Zahl selbst ungerade, falls an beiden Intervallgrenzen c und d nur die Bedingung α) bzw. an beiden Intervallgrenzen nur die Bedingung β) auftritt. Weiter ist diese Nullstellenanzahl als Summe von zwei ungeraden Zahlen und einer geraden Zahl selbst gerade, falls an den Intervallgrenzen c und d die Bedingungen α) und β) gemischt auftreten.

Zum Beweis von Teil b) des Satzes ist anzumerken, dass für die in $]c,d[$ definierte Quotientenfunktion

$$g := \frac{z_2}{z_1}$$

analog zu h ebenfalls $g \in C^1(]c,d[)$ gilt und

$$g' = \frac{\sigma y}{\gamma z_1^{\,2}}$$

mit $y = \frac{\gamma}{\sigma} W[z_1,z_2]$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\sigma(x) = \exp\int p dx$ ist. Die Anzahl der mit ihren Vielfachheiten gezählten Nullstellen von $g \cdot g'$ in $]c,d[$ ist also gleich der Anzahl der mit ihren Vielfachheiten gezählten Nullstellen von $z_2 \cdot y$ in $]c,d[$. □

Aus den Sätzen 3.1 und 3.2 ergeben sich auch die nachstehenden Folgerungen zur Nullstellenanzahl spezieller Lösungen. Beispielsweise befasst sich Folgerung a) mit der Nullstellenanzahl der speziellen Lösung $y \in S \setminus \{o\}$ im offenen Intervall $]c,d[$, die orthogonal zu zwei Lösungen $z_1, z_2 \in S^+ \setminus \{o\}$ ist, wobei $z_1 = z_0$ im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ nullstellenfrei ist und z_2 jeweils ein Vielfaches von $u_2^+(.,c)$ und von $u_2^+(.,d)$ ist und somit zu einem Doppelpunkt P der Integralkurve C gehört. Weiter existieren die in $[c,d]$ nullstellenfreien Lösungen $y_0 \in S$ und $z_0 \in S^+$. Die Nullstellenanzahl von y in $]c,d[$ ist dann ungerade, sodass also mindestens eine Nullstelle existiert. Die zu y_0 gehörige Gerade G_0 trifft das geschlossene Kurvenstück $C_{[c,d]}$ nicht und der zu z_0 gehörige Punkt Q_0 liegt auf keiner Tangente der zu diesem Kurvenstück gehörigen Tangentenschar $T_{[c,d]}$. Die zu y gehörige Gerade G ist die Verbindungsgerade der Punkte P und Q_0 und hat somit eine ungerade Anzahl von Treffpunkten mit dem zum offenen Intervall $]c,d[$ gehörigen Kurvenstück $C_{]c,d[}$. Dabei zählen echte Schnittpunkte einfach und Berührpunkte zweifach.
Eine geometrische Veranschaulichung der Folgerung a) wird in der Abbildung 3.14, a) gegeben, die eine ähnliche Situation wie die Abbildung 3.12, a) darstellt. Während aber in Abbildung 3.12, a) die Lösung $y \in S$ an den Stellen c und d keine Nullstelle aufweist bzw. die zugehörige Gerade G nicht durch den Kurvendoppelpunkt P geht und eine gerade Anzahl von Treffpunkten mit der Kurve C besitzt, hat hier in der Abbildung 3.14, a) die Lösung y die Nullstellen c und d bzw. geht die zugehörige Gerade G durch den Kurvendoppelpunkt P und den Punkt Q_0 und besitzt G eine ungerade Anzahl von Treffpunkten mit C.

Folgerungen zur Nullstellenanzahl einer speziellen Lösung bzw. zur Existenz einer Nullstelle einer speziellen Lösung

a) Ist $[u_2^+(.,c)] = [u_2^+(.,d)]$ und existieren im Intervall $[c,d]$ nullstellenfreie Lösungen $y_0 \in S$ und $z_0 \in S^+$, dann ist für die bis auf einen konstanten Faktor $\rho \neq 0$ eindeutig bestimmte Lösung $y \in S$ mit

$$[y] = [z_0, u_2^+(.,c)]^\perp$$

die Anzahl der mit ihren Vielfachheiten gezählten Nullstellen in $]c,d[$ ungerade und somit insbesondere ≥ 1.

b) Eine analoge Aussage erhält man durch Vertauschung der Rollen von S und S^+:
Ist $[u_2(.,c)] = [u_2(.,d)]$ und existieren im Intervall $[c,d]$ nullstellenfreie Lösungen $y_0 \in S$ und $z_0 \in S^+$, dann ist für die bis auf einen konstanten Faktor $\lambda \neq 0$ eindeutig bestimmte Lösung $z \in S^+$ mit

$$[z] = [y_0, u_2(.,c)]^\perp$$

die Anzahl der mit ihren Vielfachheiten gezählten Nullstellen in $]c,d[$ ungerade und insbesondere ≥ 1.

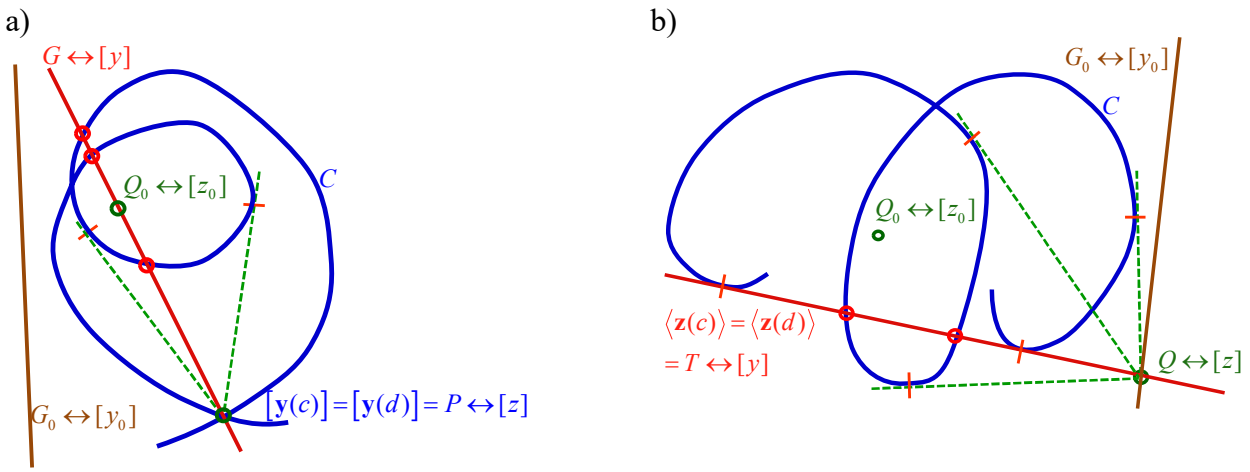


Abb. 3.14 a) Darstellung der zu den Lösungen $z_1 = z_0$, $z_2 = u_2^+(.,c) \in S^+ \setminus \{o\}$ gehörigen Punkte Q_0 und P, der zu den Lösungen y_0, $y \in S \setminus \{o\}$ gehörigen Geraden G_0 und G und der Anzahl der Treffpunkte der Geraden G mit dem Kurvenstück $C_{]c,d[}$

b) Darstellung der zu den Lösungen $y_1 = y_0$, $y_2 = u_2(.,c) \in S \setminus \{o\}$ gehörigen Geraden G_0 und T, der zu den Lösungen z_0, $z \in S^+ \setminus \{o\}$ gehörigen Punkte Q_0 und Q und der Anzahl der Tangenten von Q aus an das Kurvenstück $C_{]c,d[}$

Beweis für Folgerung a): Nach Satz 3.1, a) mit dem Index $k = 0$ und $m = 0$ Nullstellen von y_0 oder nach der Folgerung 2, a) aus Satz 3.1 ist die Anzahl der Nullstellen von $z = u_2^+(.,c)$ in $]c,d[$ gerade. Nach Satz 3.2, b, β, 1) ist für $z_1 = z_0$, $z_2 = z = u_2^+(.,c)$ und $y \in S$ mit $[y] = [z_0, u_2^+(.,c)]^\perp = [z_1, z_2]^\perp$ die Anzahl der Nullstellen von $z_2 \cdot y$ in $]c,d[$ ungerade und dann wegen der geraden Nullstellenanzahl von z_2 die Nullstellenanzahl von y in $]c,d[$ ungerade.
Aufgrund der Anfangswerte $z_0(c) \neq 0$ und $u_2^+(c,c) = 0$ sind die Lösungen z_0 und $u_2^+(.,c)$ linear unabhängig. Daher ist $\dim [z_0, u_2^+(.,c)] = 2$, $\dim [z_0, u_2^+(.,c)]^\perp = 1$ und die Lösung $y \in S$ mit

$$[y] = [z_0, u_2^+(.,c)]^\perp$$

bis auf einen konstanten Faktor $\rho \neq 0$ eindeutig bestimmt. Da die hinsichtlich der Nullstellenanzahl betrachtete Lösung $y \in S$ zu $u_2^+(.,c)$ und $u_2^+(.,d)$ orthogonal ist, gilt nach der Feststellung (2.25)

$$y(c) = y(d) = 0.$$

Zur Lösung $y \in S$ gehört die Gerade G, welche den zu z_0 gehörigen Punkt Q_0 mit dem zu $u_2^+(.,c)$ gehörigen Kurvendoppelpunkt $P = [\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)]$ verbindet. Diese Gerade G hat eine ungerade Anzahl von Treffpunkten mit der Kurve C. □

Auch die beiden folgenden Sätze 3.3 und 3.4 befassen sich wieder mit der Existenz einer Nullstelle der Produktfunktion yz von zwei orthogonalen Lösungen $y \in S$ und $z \in S^+$. Der Satz 3.3 betrachtet in Teil a) die zwei linear unabhängigen Lösungen $z_1 = u_2^+(.,c)$, $z_2 = z \in S^+$ und die dazu orthogonale Lösung y: Es ist nämlich $B[y,z_1] = B[y,u_2^+(.,c)] = y(c) = 0$, $B[y,z_2] = B[y,z] = 0$ und $[z] \neq [z_1]$ vorausgesetzt. In der geometrischen Sprechweise gibt er eine hinreichende Bedingung dafür, dass mindestens ein Treffpunkt der zu y gehörigen Gerade G mit dem Kurvenstück $C_{]c,d[}$ vorliegt oder von dem zu z gehörigen Punkt Q mindestens eine Tangente an dieses Kurvenstück $C_{]c,d[}$ geht. Im Fall 1) lautet die hinreichende Bedingung, dass ein Kurvendoppelpunkt $P = [\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)]$ vorliegt, der zu $z = z_2$ gehörige Punkt Q nicht gleich diesem Punkt P ist und die zu y gehörige Gerade G durch P und Q geht. Im Fall 2) ist die hinreichende Bedingung dadurch gegeben, dass der Kurvenpunkt $P = [\mathbf{y}(c)]$ auf der Tangente $T = \langle \mathbf{z}(d) \rangle$ liegt ($u_2(c,d) = u_2^+(d,c) = 0$), für die Parameter c und d aber kein Kurvendoppelpunkt vorliegt (aus $u_2^+(.,d) = \lambda u_2^+(.,c)$ mit $\lambda \neq 0$ würde nämlich folgen $y(d) = B[y,u_2^+(.,d)] = B[y,\lambda u_2^+(.,c)]] = \lambda y(c) = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung $y(d) \neq 0$), die zu y gehörige Gerade G durch Q und $P = [\mathbf{y}(c)]$, nicht durch $[\mathbf{y}(d)]$ geht ($B[y,z] = 0$, $y(c) = 0 \neq y(d)$) und somit verschieden von der Tangente T ist. In der nachfolgenden Abbildung 3.15 sind die Fälle dargestellt, bei denen in a) noch y nullstellenfrei und in b) noch z nullstellenfrei in $]c,d[$ ist.

Satz 3.3 Existenz einer Nullstelle der Produktfunktion von zwei orthogonalen Lösungen
Es sei $c, d \in J$, $c \neq d$.

a) Ist $y \in S \setminus \{o\}$, $z \in S^+ \setminus \{o\}$,
$$B[y,z] = 0$$
und noch eine der folgenden Randbedingungen erfüllt, dann hat $y \cdot z$ mindestens eine Nullstelle in $]c,d[$ (bzw. $]d,c[$):
1) $y(c) = 0$ $(= y(d))$, $[z] \neq [u_2^+(.,c)] = [u_2^+(.,d)]$;
2) $y(c) = 0 \neq y(d)$, $u_2^+(d,c) = 0$, $[z] \neq [u_2^+(.,c)]$ $(\neq [u_2^+(.,d)])$.
Setzt man noch die Nullstellenfreiheit von y in $]c,d[$ voraus, so kann die Existenz einer (einfachen) Nullstelle von z in $]c,d[$ gefolgert werden; setzt man die Nullstellenfreiheit von z in $]c,d[$ voraus, so kann die Existenz einer (einfachen) Nullstelle von y in $]c,d[$ gefolgert werden.

b) Eine analoge Aussage erhält man durch Vertauschen der Rollen von S und S^+:
Ist $y \in S \setminus \{o\}$, $z \in S^+ \setminus \{o\}$,
$$B[y,z] = 0$$
und noch eine der folgenden Randbedingungen erfüllt, dann hat $y \cdot z$ mindestens eine Nullstelle in $]c,d[$ (bzw. $]d,c[$):
1) $z(c) = 0$ $(= z(d))$, $[y] \neq [u_2(.,c)] = [u_2(.,d)]$;
2) $z(c) = 0 \neq z(d)$, $u_2(d,c) = 0$, $[y] \neq [u_2(.,c)]$ $(\neq [u_2(.,d)])$.
Setzt man noch die Nullstellenfreiheit von z in $]c,d[$ voraus, so kann die Existenz einer (einfachen) Nullstelle von y in $]c,d[$ gefolgert werden; setzt man die Nullstellenfreiheit von y in $]c,d[$ voraus, so kann die Existenz einer (einfachen) Nullstelle von z in $]c,d[$ gefolgert werden.

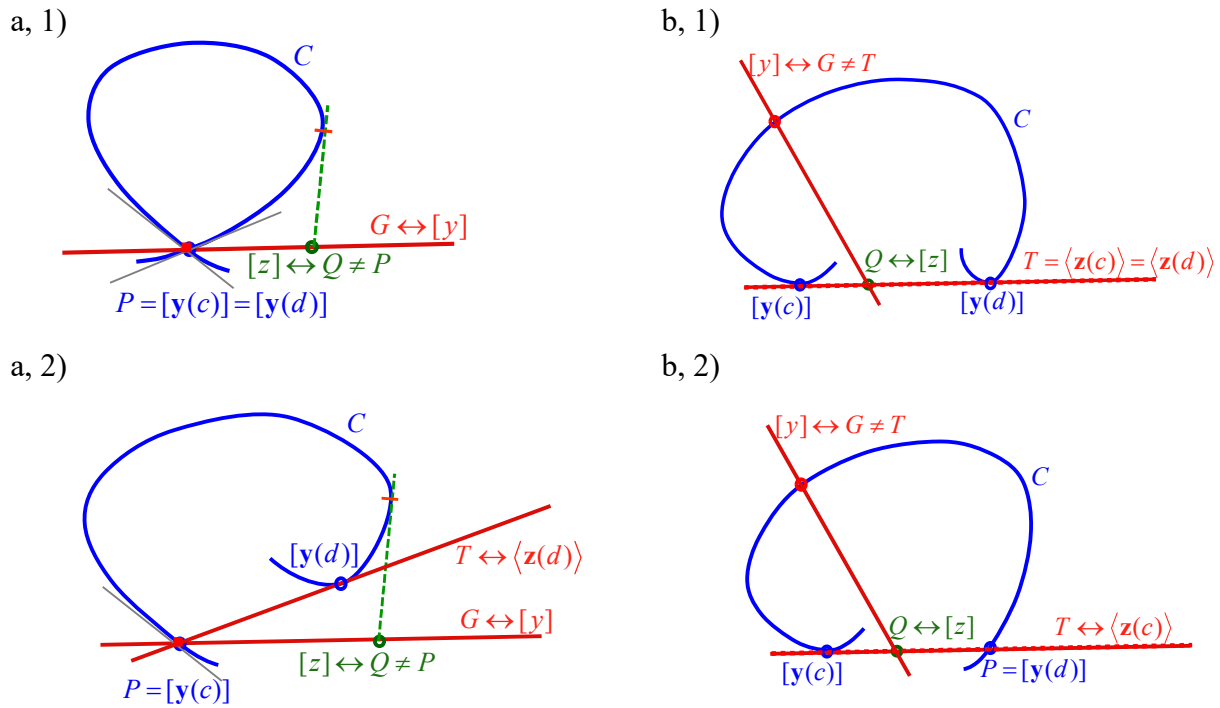


Abb. 3.15 a, 1) Darstellung des Kurvenstücks $C_{]c,d[}$ mit Kurvendoppelpunkt P bei c und d, des Punktes $Q \neq P$, der Geraden G durch P und Q hier ohne Treffpunkt mit dem Kurvenstück und einer Tangente von Q aus an das Kurvenstück

a, 2) Darstellung des Kurvenstücks $C_{]c,d[}$ mit Treffpunkt $P = [\mathbf{y}(c)]$ der Tangente $T = \langle \mathbf{z}(d) \rangle$, aber ohne Kurvendoppelpunkt bei c und d, des Punktes $Q \neq P$, der Geraden G durch P und Q, aber nicht durch $[\mathbf{y}(d)]$ und damit verschieden von der Tangente T, wobei hier G ohne Treffpunkt mit dem Kurvenstück ist, und Darstellung einer Tangente von Q aus an das Kurvenstück

b, 1) Darstellung des Kurvenstücks $C_{]c,d[}$ mit Doppeltangente T bei c und d, der Geraden $G \neq T$, des Schnittpunktes Q der Geraden T und G, von dem aus hier keine Tangente an das Kurvenstück geht, und eines Treffpunktes der Geraden G mit dem Kurvenstück

b, 2) Darstellung des Kurvenstücks $C_{]c,d[}$ mit Treffpunkt $P = [\mathbf{y}(d)]$ der Tangente $T = \langle \mathbf{z}(c) \rangle$, aber ohne Doppeltangente bei c und d, der Geraden $G \neq T$, des Schnittpunktes Q der Geraden T und G, von dem aus hier keine Tangente an das Kurvenstück geht, und eines Treffpunktes der Geraden G mit dem Kurvenstück

Beweis für a): Bevor der Beweis für die beiden Fälle 1) und 2) mittels des noch folgenden Hilfssatzes 4.1 durchgeführt wird, erfolgen dazu noch einige Vorüberlegungen.

Im Fall 1) hat aufgrund der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der Lösung z von der Lösung $u_2^+(.,c)$ bzw. von $u_2^+(.,d)$ die Lösung z in c und d höchstens einfache Nullstellen. Die in Klammern angegebene Eigenschaft $y(d) = 0$ ergibt sich mit (2.25), da $y(c) = 0$ äquivalent zur Relation $y \perp u_2^+(.,c) = \lambda u_2^+(.,d)$ $(\lambda \neq 0)$ und diese wieder äquivalent zu $y(d) = 0$ ist.

Im Fall 2) hat wegen der linearen Unabhängigkeit der Lösung z von der Lösung $u_2^+(.,c)$ die Lösung z in c höchstens eine einfache Nullstelle. Weiter hat im Fall 2) z in d keine Nullstelle: Aus der Annahme $z(d) = 0$ würde nämlich mit der in Abschnitt 2.7.2 angegebenen Charakterisierung (2.25) der Orthogonalität von $u_2(.,d)$ und z die Beziehung

$$B[u_2(.,d),z] = z(d) = 0$$

folgen. Da wegen der Voraussetzungen außerdem

$$B[y,z] = 0,$$
$$B[y,u_2^+(.,c)] = y(c) = 0 \text{ und}$$
$$B[u_2(.,d),u_2^+(.,c)] = u_2(c,d) = u_2^+(d,c) = 0$$

gilt, würde

$$[z] = [u_2(.,d),y]^\perp = [u_2^+(.,c)]$$

folgen, im Widerspruch zur Voraussetzung. Die in Klammern angegebene lineare Unabhängigkeit von $u_2^+(.,d)$ und $u_2^+(.,c)$ ergibt sich, da bei linearer Abhängigkeit aus $y(c) = 0$ nach (2.25) die Relation $y \perp u_2^+(.,c) = \lambda u_2^+(.,d)$ ($\lambda \neq 0$) und daraus wieder mit (2.25) $y(d) = 0$ folgen würde, im Widerspruch zur Voraussetzung im Fall 2).

Für den Nachweis einer Nullstelle von $y \cdot z$ in $]c,d[$ genügt es zu zeigen, dass bei einem in $]c,d[$ nullstellenfreien z dann y eine Nullstelle in $]c,d[$ aufweist. Nimmt man nun an, dass z nullstellenfrei in $]c,d[$ ist, dann sind nach obigen Vorüberlegungen die Voraussetzungen für den unten in Abschnitt 4.1 folgenden Hilfssatz 4.1, 1) mit

$$u = u_2^+(.,c)\,,\ v = z \text{ und } h = u/v$$

erfüllt:

Im Fall 1) sind nämlich die Stellen c und d für $u = u_2^+(.,c)$ zweifache Nullstellen und für $v = z$ nach der Vorüberlegung höchstens einfache Nullstellen. Demzufolge ergibt sich an der Stelle $x = c$ bei $z(c) \neq 0$ direkt und bei $z(c) = 0$ nach der Regel von de l'Hospital und Bernoulli das benötigte Grenzverhalten $h(x) \longrightarrow 0$ bei $x \longrightarrow c$. Das Grenzverhalten an der Stelle $x = d$ erhält man analog.

Im Fall 2) ist die Stelle c zweifache Nullstelle von $u = u_2^+(.,c)$ und nach der Vorüberlegung höchstens einfache Nullstelle von $v = z$. Weiter ist die Stelle d Nullstelle von u und nach der Vorüberlegung keine Nullstelle von v. Demzufolge erhält man an den Stellen c und d auch hier für die Funktion h den Grenzwert Null.

Nach Hilfssatz 4.1, 1) existieren daher in beiden Fällen 1) und 2) reelle $\lambda, \gamma \neq 0$ und ein $\xi \in\ ]c,d[$, sodass $w := u - \lambda v$ eine zweifache Nullstelle in ξ hat und somit wegen $y \perp z$, $u_2^+(.,c)$ die Inzidenz

$$u_2^+(.,\xi) = \gamma w = \gamma u_2^+(.,c) - \gamma\lambda z \in S_y^+$$

gilt. Nach (2.25) folgt $y(\xi) = 0$, also die Existenz einer Nullstelle von y in $]c,d[$. Diese Stelle ξ ist nur eine einfache Nullstelle von y, da sonst $y = \mu u_2(.,\xi)$ ($\mu \neq 0$) und dann

$$0 = B[y,z] = B[\mu u_2(.,\xi),z](\xi) = \mu z(\xi)$$

wäre, im Widerspruch zur Nullstellenfreiheit von z in $]c,d[$.

Setzt man die Nullstellenfreiheit von y in $]c,d[$ voraus, so folgt nach dem eben Bewiesenen die Existenz einer Nullstelle $t \in\ ]c,d[$ von z. Dieses t ist nur eine einfache Nullstelle von z, da sonst $z = \mu\, u_2^+(.,t)$ ($\mu \neq 0$) und dann

$$0 = B[y,z] = B[y,\mu u_2^+(.,t)](t) = \mu y(t)$$

wäre, im Widerspruch zur Nullstellenfreiheit von y in $]c,d[$. □

Eine Verallgemeinerung von Satz 3.3 liefert der folgende Satz 3.4, der wieder die Nullstellen von zwei orthogonalen Lösungen $y \in S \setminus \{o\}$ und $z \in S^+ \setminus \{o\}$ betrachtet und eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer Nullstelle von $y \cdot z$ gibt. Die hierbei vorausgesetzte Nichtdiskonjugiertheit in $[c,d]$ ist im Satz 3.3, a) durch die spezielle Voraussetzung $u_2^+(d,c) = 0$ gegeben, also durch die Existenz einer nichttrivialen Lösung von (L^+) mit einer zweifachen Nullstelle bei $x = c$ und einer Nullstelle bei $x = d$. Die Nichtdiskonjugiertheit von (L) in $[c,d]$ bedeutet geometrisch, dass es eine Gerade gibt, die mindestens drei (mit ihren Vielfachheiten gezählte) Treffpunkte mit dem Kurvenstück $C_{[c,d]}$ aufweist. Die in Teil a) des Satzes 3.4 vorausgesetzte Nullstellenfreiheit der Lösung $y \in S$ im Intervall $]c,d[$ bedeutet geometrisch, dass das zu diesem Intervall gehörige Kurvenstück $C_{]c,d[}$ von C (ohne die Kurvenenden $[\mathbf{y}(c)]$ und $[\mathbf{y}(d)]$) ganz auf einer Seite der zu y gehörigen Geraden G liegt. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz von nullstellenfreien Lösungen von (L) und (L^+) im Intervall $[c,d]$ wird beispielsweise im unten noch folgenden Satz 4.9 durch die Klassenzugehörigkeit $L \in K_I]c,d[\cup K_{II}]c,d[$ gegeben, da (L) stets nichtoszillatorisch ist in $[c,d]$ für $c, d \in J$. Die Zusatzvoraussetzung (3.12) für die Lösung z bedeutet geometrisch, dass der zugehörige Punkt Q nicht auf der

Verbindungsstrecke der Kurvenstückendpunkte $P_1 = [\mathbf{y}(c)]$ und $P_0 = [\mathbf{y}(d)]$ liegt. Im Beweis von Satz 3.4 werden die verschiedenen möglichen Fälle betrachtet, bei denen dann in Teil 1, α) die Folgerung aus Satz 3.2, in den Teilen 1, β), 2,α) und 2, β, i) der Satz 3.3 und in Teil 2, β, ii) der Hilfssatz 4.4 zur Anwendung kommen.

Satz 3.4 Existenz einer einfachen Nullstelle einer Lösung bei Nichtdiskonjugiertheit in $[c,d]$ und Nullstellenfreiheit einer orthogonalen Lösung in $]c,d[$

Es sei $c, d \in J$, $c < d$, $y \in S \setminus \{o\}$, $z \in S^+ \setminus \{o\}$,

$$B[y,z] = 0,$$

die Differentialgleichung (L) nichtdiskonjugiert in $[c,d]$ und

$$d = \eta(c)$$

der erste rechte konjugierte Punkt von c.

a) Falls y ($\in S_z$) im offenen Intervall $]c,d[$ nullstellenfrei ist und

(3.12) $$[z] \neq [\lambda u_2^+(.,c) + (1-\lambda) u_2^+(.,d)] \text{ für alle } \lambda \in [0,1]$$

gilt, dann hat z mindestens eine (einfache) Nullstelle in $]c,d[$.
Umgekehrt kann aus der Nullstellenfreiheit von z in $]c,d[$ auch die Existenz einer (einfachen) Nullstelle von y gefolgert werden.
Eine andere Formulierung der Aussage a) ist, dass bei gültiger Bedingung (3.12) die Produktfunktion $y \cdot z$ eine Nullstelle in $]c,d[$ besitzt.

b) Falls z ($\in S_y^+$) im offenen Intervall $]c,d[$ nullstellenfrei ist und

(3.13) $$[y] \neq [\lambda u_2(.,c) + (1-\lambda) u_2(.,d)] \text{ für alle } \lambda \in [0,1]$$

gilt, dann hat y mindestens eine (einfache) Nullstelle in $]c,d[$.
Umgekehrt kann aus der Nullstellenfreiheit von y in $]c,d[$ auch die Existenz einer (einfachen) Nullstelle von z gefolgert werden.
Eine andere Formulierung der Aussage b) ist, dass bei gültiger Bedingung (3.13) die Produktfunktion $y \cdot z$ eine Nullstelle in $]c,d[$ besitzt.

Beweis für a): Es sei (L) nichtdiskonjugiert in $[c,b] \cap J$ und

$$d = \eta(c) = \eta_+(c)$$

der **erste rechte konjugierte Punkt** von c (Definition in Abschnitt 4.6.2), also $[c,\eta(c)[$ das maximale Diskonjugiertheitsintervall der Form $[c,t[$, $t > c$, $t \in J$, und somit

(L) diskonjugiert in $[c,d[$.

Die Diskonjugiertheit der Differentialgleichung (L) in einem Intervall $[c,c+\delta[$, $\delta > 0$, ist nach dem Zusatz zu Satz 2.4 (in Abschnitt 2.7.7) gesichert, sodass es also ein Diskonjugiertheitsintervall der Form $[c,t[$, $t > c$, gibt. Ausführlichere Betrachtungen zur Definition von $\eta(c)$ erfolgen noch im Kapitel 4. Es werden im nachfolgenden Beweis die zwei Fälle betrachtet, nämlich dass

1) y in $[c,d]$ nullstellenfrei ist und
2) y an mindestens einer Intervallgrenze c oder d eine Nullstelle hat.

Eine geometrische Veranschaulichung von Fall 1) gibt Abbildung 3.16 und von Fall 2) Abbildung 3.17.

1) $y \neq 0$ in $[c,d]$:
Die zu y orthogonale Lösung z hat dann eine Nullstelle in $[c,d]$, da sonst nach dem Beweis von Satz 2.4 in Abschnitt 2.7.7 die Differentialgleichung (L) in $[c,d]$ ein Markov-Fundamentalsystem besitzt und damit nach Coppel (1971), S. 89, Prop. 5, in $[c,d]$ diskonjugiert wäre, im Widerspruch zur Voraussetzung. Im Falle $z(c) \cdot z(d) \neq 0$ hat dann z eine Nullstelle im offenen Intervall $]c,d[$, sodass die Aussage des Satzes in diesem Fall bewiesen ist.
Es ist also nur noch der Fall $z(c) \cdot z(d) = 0$ zu behandeln. Dazu werden die beiden Unterfälle betrachtet, nämlich dass für die Kurvenparameter c und d entweder α) eine Doppeltangente oder β) keine Dop-

peltangente vorliegt. Eine geometrische Veranschaulichung der beiden Fälle erfolgt in Abbildung 3.16.

α) Sei $[u_2(.,c)] = [u_2(.,d)]$.

Im noch zu behandelnden Falle $z(c)\cdot z(d) = 0$ ist hier

$$z(c) = B[u_2(.,c),z] = B[\mu u_2(.,d),z] = \mu z(d) \ (\mu \neq 0),$$

also

$$z(c) = z(d) = 0$$

und

$$B[u_2(.,c),z] = 0,$$

d. h. $u_2(.,c)$ orthogonal zu z. Geometrisch heißt dies, dass der zu z gehörige Punkt Q der Schnittpunkt der Geraden G mit der Doppeltangente T ist.

Außerdem ist die Lösung $y_0 := y$ nach Voraussetzung orthogonal zu z ($B[y,z] = 0$) und hier im Fall 1) nullstellenfrei in $[c,d]$. Da die Differentialgleichung (L) im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ ($\subseteq J$) stets nichtoszillatorisch ist, hier wegen der Wahl von $d = \eta(c)$ in $[c,d[$ diskonjugiert ist und damit nach Satz 4.2 auch zur Klasse $C_{\mathrm{I}}]c,d[\cap C_{\mathrm{II}}]c,d[\subseteq K_{\mathrm{I}}]c,d[\cup K_{\mathrm{II}}]c,d[$ gehört, existiert nach Satz 4.9 (mit nachfolgender Anmerkung zu einem abgeschlossenen Intervall $J = [a,b]$) auch noch eine in [c,d] nullstellenfreie Lösung $z_0 \in S^+$. Insgesamt sind damit alle Voraussetzungen für die im Anschluss an Satz 3.2 aufgeführte Folgerung b) erfüllt, sodass die Lösung z eine ungerade Anzahl von Nullstellen und somit mindestens eine Nullstelle in $]c,d[$ hat.

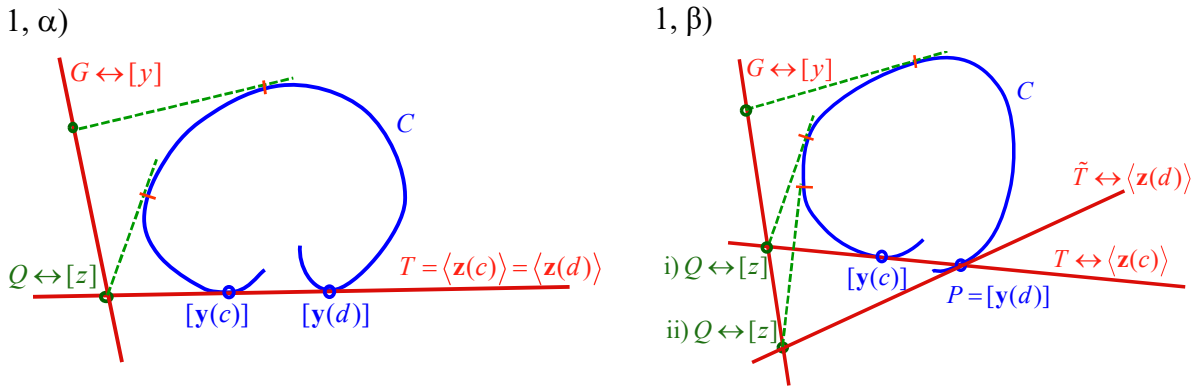


Abb. 3.16 1, α) Darstellung des Kurvenstücks $C_{]c,d[}$ mit der Doppeltangente $T = \langle \mathbf{z}(c) \rangle = \langle \mathbf{z}(d) \rangle$, der zu y gehörigen Geraden G ohne Treffpunkt mit dem Kurvenstück, des zu z gehörigen Schnittpunktes Q von G und T und einer Tangente von Q aus an das Kurvenstück.

1, β) Darstellung des Kurvenstücks $C_{]c,d[}$, wobei die Tangente $T = \langle \mathbf{z}(c) \rangle$ den Kurvenpunkt $P = [\mathbf{y}(d)]$ trifft, aber keine Doppeltangente vorliegt, der zu y und $\tilde{y} = u_2(.,d)$ gehörigen Geraden G und $\tilde{T}$ jeweils ohne Treffpunkt mit dem Kurvenstück, des zu z gehörigen Punktes Q auf G für die beiden Fälle i) $Q = T \cap G$ und ii) $Q = \tilde{T} \cap G$ und einer Tangente von Q aus an das Kurvenstück.

β) Sei $[u_2(.,c)] \neq [u_2(.,d)]$.

Nach der unten noch folgenden Feststellung (4.6) (in Abschnitt 4.6) ist

$$d = \eta(c) = \min \{z_{21}(c), z_{12}(c)\},$$

also $u_2(d,c)\cdot u_2(c,d) = 0$ (d. h. (3.8) Doppelpunkt oder Doppeltangente bei c und d) und o. E. (ggf. analoge Betrachtung)

$$u_2(d,c) = 0.$$

Geometrisch bedeutet dies, dass die zum Kurvenparameter c gehörige Tangente $\langle \mathbf{z}(c) \rangle$ durch den Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(d)]$ geht, aber keine Doppeltangente vorliegt.

Wegen $u_2(d,c) = 0$ und $u_2(d,d) = 0$ gilt nach (2.25) (mit $j = 0$, $y = u_2(.,c)$, $u_2(.,d)$) $u_2(.,c)$, $u_2(.,d) \perp u_2^+(.,d)$ und wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit von $u_2(.,c)$ und $u_2(.,d)$ dann

$$[u_2(.,c),u_2(.,d)] = [u_2^+(.,d)]^\perp.$$

Im noch zu behandelnden Falle $z(c)\cdot z(d) = 0$ ist jetzt im Fall β)

$$(z(c),z(d)) \neq (0,0);$$

denn aus $z(c) = z(d) = 0$ würden nach (2.25) (mit $j = 0$) die Relationen $u_2(.,c)$, $u_2(.,d) \perp z$, wegen der linearen Unabhängigkeit von $u_2(.,c)$ und $u_2(.,d)$ dann

$$y \in [z]^\perp = [u_2(.,c),u_2(.,d)] = [u_2^+(.,d)]^\perp,$$

$y \perp u_2^+(.,d)$ und wieder mit (2.25) (mit $j = 0$) $y(d) = 0$ folgen, im Widerspruch zur Voraussetzung des Falles 1). Die Stellen c und d sind also nicht gleichzeitig eine Nullstelle von z. Es sind nun die beiden Fälle

i) $z(c) = 0 \neq z(d)$ und
ii) $z(c) \neq 0 = z(d)$

zu behandeln, da oben schon o. E. die Stellen c und d mit $u_2(d,c) = 0$ gewählt wurden.

i) Im Fall $z(c) = 0 \neq z(d)$ sind für y und z die Voraussetzungen des Satzes 3.3, b, 2) erfüllt: Dabei ergibt sich die benötigte lineare Unabhängigkeit von y und $u_2(.,c)$, da bei linearer Abhängigkeit, also bei $y = \lambda u_2(.,c)$, hier $y(d) = \lambda u_2(d,c) = 0$ folgen würde, im Widerspruch zur Voraussetzung des Falles 1). Nach diesem Satz folgt dann, dass z in $]c,d[$ eine Nullstelle besitzt.

ii) Im Fall $z(c) \neq 0 = z(d)$ sind die Voraussetzungen des Satzes 3.3, a, 1) bzw. 2) erfüllt, wenn man c und d vertauscht, $\tilde{y} := u_2(.,d)$ anstelle von y verwendet und die Fallunterscheidung $[u_2^+(.,c)] = [u_2^+(.,d)]$ und $[u_2^+(.,c)] \neq [u_2^+(.,d)]$ durchführt: Es ist nämlich wegen der Wahl von $d = \eta(c)$ (L) diskonjugiert in $[c,d[$, insbesondere in $]c,d[$, nach Satz 4.3 von Abschnitt 4.1 dann auch in $]c,d]$ und demnach $\tilde{y} = u_2(.,d) > 0$ in $]c,d[$. Weiter ist nach (2.25) (mit $j = 0$) $B[\tilde{y},z] = B[u_2(.,d),z] = z(d) = 0$, also $\tilde{y}$ orthogonal zu z, $u_2^+(c,d) = u_2(d,c) = 0$ und $[z] \neq [u_2^+(.,c)]$ wegen $z(c) \neq 0 = u_2^+(c,c)$ im Fall ii). Außerdem sind im Fall $[u_2^+(.,c)] = [u_2^+(.,d)]$ für $\tilde{y}$ die Randbedingungen $\tilde{y}(d) = u_2(d,d) = 0$ und $\tilde{y}(c) = 0$ erfüllt, da aus $\tilde{y}(d) = 0$ nach (2.25) (mit $j = 0$) $\tilde{y} \perp u_2^+(.,d) = \mu u_2^+(.,c)$ ($\mu \neq 0$) und daraus auch $\tilde{y}(c) = 0$ folgt. Im Fall $[u_2^+(.,c)] \neq [u_2^+(.,d)]$ sind schließlich für $\tilde{y}$ die Randbedingungen $\tilde{y}(d) = 0 \neq \tilde{y}(c)$ erfüllt: Denn aus der Annahme $\tilde{y}(c) = 0$ würde hier zusammen mit $u_2(c,c) = 0$, $u_2(d,c) = 0$ nach (2.25) (mit $j = 0$) die Inzidenz $z \in [\tilde{y}]^\perp = [u_2^+(.,c),u_2^+(.,d)] = [u_2(.,c)]^\perp$, somit $z = \lambda u_2(.,c)$ und $z(c) = 0$ folgen, im Widerspruch zur Voraussetzung des betrachteten Falles ii). Nach dem Satz 3.3 besitzt somit z in $]c,d[$ eine Nullstelle.

2) $y(c)\cdot y(d) = 0$:

In dem Fall, dass y zumindest an einer Intervallgrenze c oder d eine Nullstelle aufweist, werden die beiden Unterfälle betrachtet, nämlich dass für die Stellen c und d entweder α) ein Kurvendoppelpunkt oder β) kein Kurvendoppelpunkt vorliegt. Eine geometrische Veranschaulichung der beiden Fälle wird in der Abbildung 3.17 gegeben. Die zur Lösung y gehörige Gerade geht dabei also zumindest durch einen der beiden Kurvenpunkte $[\mathbf{y}(c)]$ und $[\mathbf{y}(d)]$.

α) Sei $[u_2^+(.,c)] = [u_2^+(.,d)]$.

Bei Vorliegen eines Doppelpunkts an den Stellen c und d ist $u_2^+(.,c) = \mu u_2^+(.,d)$ mit einem $\mu \neq 0$ und damit

$$y(c) = B[y,u_2^+(.,c)] = \mu B[y,u_2^+(.,d)] = \mu y(d).$$

Im Fall 2, α) gilt also

$$y(c) = y(d) = 0.$$

Weiter ist mit der Bedingung (3.12) $[z] \neq [z_\lambda]\ \forall\ \lambda \in [0,1]$, $z_\lambda := \lambda u_2^+(.,c) + (1-\lambda)u_2^+(.,d)$, insbesondere auch

$$[z] \neq [z_1] = [u_2^+(.,c)]$$

erfüllt. Nach Satz 3.3, a, 1) folgt dann, dass z in $]c,d[$ eine Nullstelle hat.

2, α) 2, β)

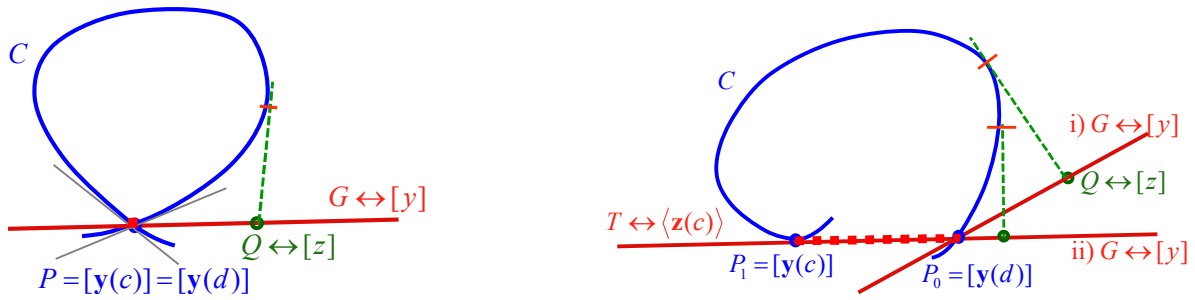


Abb. 3.17 2, α) Darstellung des Kurvenstücks $C_{]c,d[}$ mit dem Kurvendoppelpunkt $P = [\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)]$, der Geraden G durch P und ohne Treffpunkt mit dem Kurvenstück, des Punktes Q auf G mit $Q \neq P$ und einer Tangente von Q aus an das Kurvenstück

2, β) Darstellung des Kurvenstücks $C_{]c,d[}$, wobei die zum Kurvenpunkt $P_1 = [\mathbf{y}(c)]$ gehörige Tangente $T = \langle \mathbf{z}(c) \rangle$ den Kurvenpunkt $P_0 = [\mathbf{y}(d)]$ trifft, aber kein Doppelpunkt vorliegt, der Geraden G durch P_0 und ohne Treffpunkt mit dem Kurvenstück, des Punktes Q, der auf G, aber nicht auf der (rot gestrichelt gezeichneten) Verbindungsstrecke von P_1 und P_0 liegt, und einer Tangente von Q aus an das Kurvenstück

β) Sei $[u_2^+(.,c)] \neq [u_2^+(.,d)]$.

Bevor hier im Fall 2, β) die weitere Fallunterscheidung

i) $y(c) \neq 0 = y(d)$ und

ii) $y(c) = 0$

stattfindet, werden zuerst einige Vorüberlegungen durchgeführt. Geometrisch bedeutet diese Fallunterscheidung, dass einmal die zu y gehörige Gerade G durch den Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(d)]$ und nicht durch den Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(c)]$ geht und das andere Mal G durch den Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(c)]$ geht.

Bei Ausschluss eines Doppelpunkts an den Stellen c und d sind die Lösungen

$$z_1 := u_2^+(.,c) \text{ und } z_0 := u_2^+(.,d)$$

linear unabhängig und ist ihre lineare Hülle

$$[z_1,z_0] = \{z = \lambda_1 z_1 + \lambda_0 z_0 : \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}\}$$

ein zweidimensionaler Unterraum von S^+. Wie oben schon im Fall 1, β) mit der Feststellung (4.6)

$$d = \eta(c) = \min\ \{z_{21}(c), z_{12}(c)\}$$

begründet wurde, gilt $u_2(d,c)\cdot u_2(c,d) = 0$ und kann o. E. (ggf. nach Vertauschen von c, d)

$$z_0(c) = u_2^+(c,d) = u_2(d,c) = 0$$

angenommen werden. Geometrisch bedeutet dies, dass die zum Kurvenparameter c gehörige Tangente $\langle \mathbf{z}(c) \rangle$ durch den Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(d)]$ geht. Wegen $z_1(c) = z_0(c) = 0$ erhält man mittels (2.25) ($j = 0$) für den zweidimensionalen Unterraum $[z_1,z_0]$ die Darstellung als orthogonales Komplement von $u_2(.,c)$:

$$[z_1,z_0] = [u_2(.,c)]^\perp.$$

Für eine nichttriviale Lösung $w \in [z_1,z_0] \setminus \{o\}$ dieses Unterraums gilt zunächst die Darstellung $w = \lambda_1 z_1 + \lambda_0 z_0$ mit $(\lambda_1,\lambda_0) \neq (0,0)$. Im Fall $\lambda_1 + \lambda_0 = 0$ erhält man daraus die Darstellung

$$w = \lambda_1\cdot(z_1 - z_0) = \lambda_1 z_\infty \text{ mit } z_\infty := z_1 - z_0,\ \lambda_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Im Fall $\lambda_1 + \lambda_0 \neq 0$ erhält man mit $\lambda := \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_0)$ die Darstellung

$$w = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_0 =: z_\lambda \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

In beiden Fällen ist also

$$[w] = [z_\lambda] \text{ mit einem } \lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Weiter können jetzt noch Aussagen über die Vorzeichen der Ableitungen der Lösungen z_1 und z_0 an den Intervallgrenzen c und d hergeleitet werden. Wegen der Diskonjugiertheit von (L) in $[c,d[$ liegt nach Satz 4.2 (in Abschnitt 4.1) auch die Diskonjugiertheit von (L^+) in $[c,d[$ vor. Demnach ist $z_1 = u_2^+(.,c) > 0$ in $]c,d[$, $z_1(d) \geq 0$ und bei $z_1(d) = 0$ noch

$$z_1'(d) \leq 0.$$

Wegen der nach Satz 4.2 außerdem vorliegenden Diskonjugiertheit von (L^+) in $]c,d]$ ist auch noch $z_0 = u_2^+(.,d) > 0 = z_0(c)$ in $]c,d[$ und

$$z_0'(c) \geq 0.$$

Genauere Aussagen über die Ableitungen $z_1'(d)$ und $z_0'(c)$ können nun bei weiterer Fallunterscheidung für den betrachteten Fall β) (kein Doppelpunkt an den Stellen c und d) getroffen werden.

Im Falle $[u_2(.,c)] = [u_2(.,d)]$ liegt für die Kurvenparameter c und d die Eigenschaft (3.11) einer Doppeltangente ohne Doppelpunkt vor, sodass nach der in Abschnitt 3.1.7 angegebenen Charakterisierung 4) noch

$$z_1(d) = 0 = z_0(c)$$

und $z_1'(d) \neq 0$, $z_0'(c) \neq 0$ gilt und für die Ableitungen somit

$$z_1'(d) < 0 \text{ und } z_0'(c) > 0.$$

Im Falle $[u_2(.,c)] \neq [u_2(.,d)]$ liegt für die Kurvenparameter c und d kein Doppelpunkt (Fall 2, β) und keine Doppeltangente, also nicht die Eigenschaft (3.8) $u_2(d,c) = u_2(c,d) = 0$ vor. Da oben o. E. $u_2(d,c) = 0$ angenommen wurde und somit

$$z_0(c) = u_2^+(c,d) = u_2(d,c) = 0$$

ist, kann beim Nichtvorliegen von (3.8) nicht auch noch $z_1(d) = u_2^+(d,c) = u_2(c,d) = 0$ gelten, sodass $z_1(d) \neq 0$ ist. Da im vorliegenden Fall 2, β) die Eigenschaft (3.6) eines Doppelpunkts nicht vorliegt, ist außerdem $z_0'(c) = u_2^{+\prime}(c,d) \neq 0$. Mit der obigen Betrachtung folgt daher

$$z_1(d) > 0 \text{ und } z_0'(c) > 0.$$

Nach diesen Vorüberlegungen werden jetzt die oben bereits genannten Fälle i) und ii) behandelt.

i) Im Fall $y(c) \neq 0 = y(d)$ erhält man wegen der dadurch vorliegenden linearen Unabhängigkeit von y und $u_2(.,c)$, wegen $u_2(d,c) = 0$ und (2.25) ($j = 0$) den Durchschnittsunterraum

$$[y]^\perp \cap [z_1,z_0] = [y]^\perp \cap [u_2(.,c)]^\perp = [u_2^+(.,d)]$$

und insbesondere auch für dessen Teilmenge

$$[y]^\perp \cap \bigcup_{\lambda\in[0,1]} [z_\lambda] = [u_2^+(.,d)].$$

Daher ist hier für die Lösungen $z \in [y]^\perp$ die Bedingung (3.12) $[z] \neq [z_\lambda]\ \forall\ \lambda \in [0,1]$ gleichbedeutend mit

$$[z] \neq [u_2^+(.,d)].$$

Geometrisch heißt dies, dass der zu z gehörige Punkt Q auf der zu y gehörigen Geraden G liegt, die durch $P_0 = [\mathbf{y}(d)]$ und nicht durch $P_1 = [\mathbf{y}(c)]$ geht, und Q nicht mit dem Kurvenpunkt $P_0 = [\mathbf{y}(d)]$ übereinstimmt. Nach Satz 3.3, a, 2) (mit c, d vertauscht) folgt, dass z in $]c,d[$ eine Nullstelle hat.

ii) Im Fall $y(c) = 0$ kann mittels des unten noch folgenden Hilfssatzes 4.4, a, 1) (in Abschnitt 4.6) die Übereinstimmung

$$[y] = [u_2(.,c)]$$

geschlossen werden: Denn da im jetzt betrachteten Fall 2, β) kein Doppelpunkt und damit insbesondere auch kein Doppelpunkt ohne Doppeltangente vorliegt, also (3.10) für c und d ausgeschlossen ist, und $L \in D([c,d[) = C_I([c,d[) \cap C_{II}([c,d[) \subseteq K_I(]c,d[)$ gilt, würde aus der Annahme $[y] \neq [u_2(.,c)]$ nach dem Hilfssatz 4.4, a, 1) (mit $t_0 = c$ und kein Doppelpunkt für c, d) die Existenz einer Nullstelle von y

in $]c,d[$ folgen, im Widerspruch zur Voraussetzung. Die zu y gehörige Gerade G stimmt also mit der Tangente des Kurvenpunkts $[\mathbf{y}(c)]$ überein.
Damit gilt für die betrachtete Lösung z die Inzidenz

$$z \in [y]^{\perp} = [u_2(.,c)]^{\perp} = [z_1,z_0],$$

also nach der Vorüberlegung

$$[z] = [z_\lambda] \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Der zu z gehörige Punkt Q liegt auf der Geraden G, die durch die beiden Punkte $P_1 = [\mathbf{y}(c)]$ und $P_0 = [\mathbf{y}(d)]$ geht.
Aufgrund des Ausschlusses bestimmter Lösungen z durch die Bedingung (3.12) ist dann

$$[z] = [z_\lambda] \text{ mit einem } \lambda \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\cup \{\infty\}.$$

Geometrisch heißt dies, dass der zu z gehörige Punkt Q auf der Verbindungsgeraden G der Punkte P_1 und P_0 liegt, aber nicht auf der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte.
Aus den Werten von $z_\lambda^{(k)}(c)$ und $z_\lambda^{(k)}(d)$ ($k = 0, 1$) kann nun gefolgert werden, dass z_λ und damit auch z in $]c,d[$ eine Nullstelle hat: Für $z_1 := u_2^+(.,c)$, $z_0 := u_2^+(.,d)$ gilt

$$z_1(c) = z_1'(c) = 0,$$
$$z_0(d) = z_0'(d) = 0,$$
$$z_0(c) = u_2^+(c,d) = u_2(d,c) = 0$$

und damit

$$z_\lambda(c) = 0, \quad z_\lambda'(c) = (1-\lambda)\, z_0'(c), \qquad z_\lambda(d) = \lambda z_1(d), \quad z_\lambda'(d) = \lambda z_1'(d),$$
$$z_\infty(c) = 0, \quad z_\infty'(c) = -\, z_0'(c), \qquad z_\infty(d) = z_1(d), \quad z_\infty'(d) = z_1'(d).$$

Im Falle $[u_2(.,c)] = [u_2(.,d)]$ hat man nach der Vorüberlegung noch

$$z_1(d) = 0,\ z_1'(d) < 0,$$
$$z_0'(c) > 0,$$

also insgesamt

$$z_\lambda(c) = 0, \quad z_\lambda'(c) = (1 - \lambda)\, z_0'(c) < 0 \text{ für } \lambda > 1 \text{ bzw. } > 0 \text{ für } \lambda < 0,$$
$$z_\lambda(d) = 0, \quad z_\lambda'(d) = \lambda z_1'(d) < 0 \qquad \text{für } \lambda > 1 \text{ bzw. } > 0 \text{ für } \lambda < 0,$$
$$z_\infty(c) = 0, \quad z_\infty'(c) < 0,$$
$$z_\infty(d) = 0, \quad z_\infty'(d) < 0.$$

Für $\lambda > 1$ bzw. für $\lambda < 0$ besitzen die beiden Werte $(1 - \lambda)$ und λ verschiedene Vorzeichen. Außerdem haben die Ableitungen $z_0'(c) > 0$ und $z_1'(d) < 0$ verschiedene Vorzeichen. Demzufolge sind für die $\lambda \in]1,+\infty[\cup \{\infty\}$ die Stellen c und d Nullstellen von z_λ mit jeweils einem negativen Wert der Ableitung z_λ', sodass z_λ in $]c,d[$ eine Nullstelle hat. Für die $\lambda \in]-\infty,0[$ sind c und d Nullstellen von z_λ mit jeweils einem positiven Wert der Ableitung z_λ', sodass z_λ ebenfalls in $]c,d[$ eine Nullstelle hat. Für die $\lambda \in [0,1]$ dagegen sind die Werte $1 - \lambda$ und λ beide nichtnegativ mit $(1-\lambda,\lambda) \neq (0,0)$, sodass die Ableitungen $z_\lambda'(c)$ und $z_\lambda'(d)$ verschiedene Vorzeichen haben. Daher kann für diese λ keine Nullstelle von z_λ gefolgert werden.
Im Falle $[u_2(.,c)] \neq [u_2(.,d)]$ hat man nach der Vorüberlegung noch

$$z_1(d) > 0 \text{ und } z_0'(c) > 0,$$

also insgesamt

$$z_\lambda(c) = 0, \quad z_\lambda'(c) = (1-\lambda)\, z_0'(c) < 0 \text{ für } \lambda > 1 \text{ bzw. } > 0 \text{ für } \lambda < 0,$$
$$z_\lambda(d) = \lambda z_1(d) < 0 \qquad \text{für } \lambda > 1 \text{ bzw. } > 0 \text{ für } \lambda < 0,$$
$$z_\infty(c) = 0, \quad z_\infty'(c) < 0,$$
$$z_\infty(d) = z_1(d) > 0.$$

Für die betrachteten $\lambda \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\cup \{\infty\}$ hat aufgrund der Randbedingungen und der Stetigkeit die Lösung z_λ und damit auch z in $]c,d[$ eine Nullstelle.

Eine Nullstelle $x_0 \in]c,d[$ von z ist nur eine einfache Nullstelle, da sonst $z(x_0) = z'(x_0) = 0$, also $z = \mu u_2^+(.,x_0)$ ($\mu \neq 0$) und damit

$$0 = B[y,z] = \mu B[y, u_2^+(.,x_0)](x_0) = \mu y(x_0)$$

wäre, im Widerspruch zur Nullstellenfreiheit von y in $]c,d[$. Damit ist unter den Voraussetzungen von Satz 3.4, a) die Existenz einer einfachen Nullstelle von z in $]c,d[$ bewiesen. Umgekehrt folgt somit aus der Nullstellenfreiheit von z in $]c,d[$ die Existenz einer (einfachen) Nullstelle von y. Die Einfachheit der Nullstelle $t_0 \in]c,d[$ von y folgt dabei analog, da sonst $y = \mu u_2(.,t_0)$ $(\mu \neq 0)$ und

$$0 = B[y,z] = \mu B[u_2(.,t_0),z](t_0) = \mu z(t_0)$$

wäre, im Widerspruch zur Nullstellenfreiheit von z in $]c,d[$. □

Geometrisch gesehen wird in Satz 3.4, a) der Fall betrachtet, dass die Gerade G das Kurvenstück $C_{]c,d[}$ ohne die Kurvenenden $P_1 = [\mathbf{y}(c)]$ und $P_0 = [\mathbf{y}(d)]$ nicht trifft. Für bestimmte Punkte Q auf der Geraden G wird die Existenz einer Tangente an das nicht abgeschlossene $C_{]c,d[}$ nachgewiesen. Der speziellere Fall, dass G das abgeschlossene Kurvenstück $C_{[c,d]}$ samt seinen Kurvenenden nicht trifft, wird im Beweisteil 1) des Satzes 3.4 behandelt und noch einmal im nachfolgenden Zusatz (im Anschluss an Satz 3.5) betrachtet. Der andere Fall, dass G nur das Kurvenstück $C_{]c,d[}$ (ohne die Kurvenenden) nicht trifft, aber zumindest ein Kurvenende P_0 oder P_1 trifft, wird in Beweisteil 2) des Satzes 3.4 untersucht. Hierbei müssen mit der Bedingung (3.12) die Punkte Q auf der Verbindungsstrecke von P_1 und P_0 ausgeschlossen werden, da für diese keine Tangente an das Kurvenstück $C_{]c,d[}$ hergeleitet werden kann. Dass diese Punkte Q allein unter der Voraussetzung $d = \eta(c)$ tatsächlich keine Tangente an $C_{]c,d[}$ besitzen, wird zu Beginn des Beweises des nachfolgenden Satzes 3.5 hergeleitet und in der Abbildung 3.17, 2, β) dargestellt. Dass diese Punkte Q der Verbindungsstrecke von P_1 und P_0 aber eine Tangente an das abgeschlossene Kurvenstück $C_{[c,d]}$ und somit an den Enden des Kurvenstücks aufweisen, ergibt sich ebenfalls im Beweis von Satz 3.5.

Während in Satz 3.4, a) eine Gerade G ohne Treffpunkt mit Kurvenstück $C_{]c,d[}$ vorgegeben ist und für die Punkte Q auf der Geraden G, die nicht auch noch auf der abgeschlossenen Verbindungsstrecke von P_1 und P_0 liegen, die Existenz einer Tangente an dieses Kurvenstück $C_{]c,d[}$ aufgezeigt wird, geht man im Satz 3.5, a) von einem Punkt Q auf der Verbindungsstrecke von P_1 und P_0 aus und untersucht für eine beliebige durch Q verlaufende Gerade G die Existenz eines Treffpunktes mit dem Kurvenstück. Für den Punkt Q wird im Beweis gezeigt, dass von ihm aus keine Tangente an das Kurvenstück $C_{]c,d[}$, aber eine Tangente zu mindestens einem Kurvenende P_1 oder P_0 geht. Für die Gerade G wird gezeigt, dass stets ein Treffpunkt mit dem abgeschlossenen Kurvenstück $C_{[c,d]}$ vorliegt. Mit dem nicht abgeschlossenen Kurvenstück $C_{]c,d[}$ (ohne seine Kurvenenden) aber liegt ein Treffpunkt der Geraden G nur vor, wenn kein Kurvendoppelpunkt $P_1 = P_0$ vorliegt, der Punkt Q echt zwischen P_1 und P_0 liegt $(Q \neq P_1, P_0)$ und die Gerade G nicht mit einer der beiden Tangenten der Kurvenstückendpunkte P_1 und P_0 übereinstimmt. Eine geometrische Veranschaulichung liefert Abbildung 3.18.

Satz 3.5 Existenz einer einfachen Nullstelle einer Lösung im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ bei Nichtdiskonjugiertheit in $[c,d]$ und einer speziellen orthogonalen Lösung

Es seien y und z nichttriviale orthogonale Lösungen von S bzw. S^+, also

$$B[y,z] = 0,$$

die Differentialgleichung (L) nichtdiskonjugiert im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ und

$$d = \eta(c)$$

der erste konjugierte Punkt von c.

a) Falls z zu den speziellen Lösungen mit

$$[z] = [z_\lambda],\ \lambda \in [0,1], \qquad (z_\lambda := \lambda u_2^+(.,c) + (1-\lambda) u_2^+(.,d))$$

gehört, dann besitzt z keine Nullstelle im offenen Intervall $]c,d[$, aber eine Nullstelle an mindestens einer Intervallgrenze c oder d und y $(\in S_z)$ eine Nullstelle x_0 im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$. Falls diese Nullstelle x_0 von y im offenen Intervall $]c,d[$ liegt, ist sie eine einfache Nullstelle von y.

b) Falls y zu den speziellen Lösungen mit

$$[y] = [y_\lambda],\ \lambda \in [0,1], \qquad (y_\lambda := \lambda u_2(.,c) + (1\text{-}\lambda) u_2(.,d))$$

gehört, dann besitzt y keine Nullstelle im offenen Intervall $]c,d[$, aber eine Nullstelle an mindestens einer Intervallgrenze c oder d und z ($\in S_y^+$) eine Nullstelle t_0 im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$. Falls diese Nullstelle t_0 von z im offenen Intervall $]c,d[$ liegt, ist sie eine einfache Nullstelle von z.

a, α) a, β)

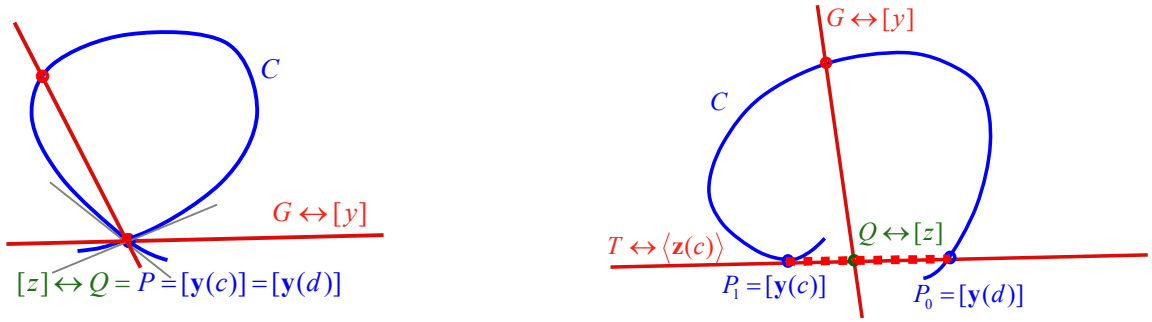


Abb. 3.18 a, α) Darstellung des Kurvenstücks $C_{[c,d]}$ mit dem Kurvendoppelpunkt $P = [\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)]$, des Punktes $Q = P$, der Geraden G durch $Q = P$ und ein Treffpunkt von G mit dem Kurvenstück

a, β) Darstellung des Kurvenstücks $C_{[c,d]}$, wobei die zum Kurvenpunkt $P_1 = [\mathbf{y}(c)]$ gehörige Tangente $T = \langle \mathbf{z}(c) \rangle$ den Kurvenpunkt $P_0 = [\mathbf{y}(d)]$ trifft, aber kein Doppelpunkt vorliegt, des Punktes Q auf der Verbindungstrecke von P_1 und P_0, der Geraden G durch Q und ein Treffpunkt von G mit dem Kurvenstück

Beweis des Satzes 3.5, a) mittels Satz 3.3, b, 1), 2): Wegen $d = \eta(c)$ ist das abgeschlossene Intervall $[c,d]$ das kleinste Nichtdiskonjugiertheitsintervall der Form $[c,t]$, $t > c$, und (L) diskonjugiert in $[c,d[$ und nach Satz 4.3 auch in $]c,d]$. Nach Satz 4.2 ist dann auch (L^+) diskonjugiert in $[c,d[$ und $]c,d]$ und demzufolge

$$u_2^+(.,c) > 0 \text{ und } u_2^+(.,d) > 0 \text{ in }]c,d[,$$

$$z_\lambda := \lambda u_2^+(.,c) + (1\text{-}\lambda) u_2^+(.,d) > 0 \text{ in }]c,d[\ \forall\ \lambda \in [0,1].$$

Falls $z \in S^+ \setminus \{o\}$ mit $[z] = [z_\lambda]$ für ein $\lambda \in [0,1]$ ist, so gilt auch

$$z = \rho z_\lambda \neq 0\ (\rho \neq 0) \text{ in }]c,d[.$$

Geometrisch bedeutet dies, dass die zu den Lösungen $z \in S^+ \setminus \{o\}$ mit $[z] = [z_\lambda]$, $\lambda \in [0,1]$, gehörigen Punkte Q jeweils keine Tangente an das Kurvenstück $C_{]c,d[}$ ohne die Kurvenenden besitzen.

Für den Beweis des Satzes ist zu zeigen, dass im Falle $[z] = [z_\lambda]$, $\lambda \in [0,1]$, jede Lösung $y \in S_z \setminus \{o\}$ in $[c,d]$ eine Nullstelle hat. Es sei jetzt also $[z] = [z_\lambda]$ mit einem $\lambda \in [0,1]$ und $y \in S_z \setminus \{o\}$. Es werden zwei Fälle unterschieden, nämlich dass für die Intervallgrenzen c und d entweder

α) ein Kurvendoppelpunkt oder
β) kein Kurvendoppelpunkt

vorliegt.

α) Falls für die Kurvenparameter c und d ein Doppelpunkt vorliegt, ist

$$u_2^+(.,d) = \mu u_2^+(.,c) \text{ mit } \mu > 0$$

und

$$[z] = [z_\lambda] = [\kappa u_2^+(.,c)] = [u_2^+(.,c)] = [u_2^+(.,d)],$$

da wegen $\mu > 0$ auch $\kappa := \lambda + (1\text{-}\lambda)\mu > 0\ \forall\ \lambda \in [0,1]$ ist. Für die Lösung z gilt insbesondere

$$z(c) = z(d) = 0,$$

sodass geometrisch gesehen der zugehörige Punkt $Q = [\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)]$ auf den Tangenten der Kurvenstückendpunkte $[\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)]$ liegt.

Für $y \in S_z = [z]^\perp = [\,u_2^+(.,c)\,]^\perp = [\,u_2^+(.,d)\,]^\perp$ gilt nach (2.25) ($j = 0$)

$$y(c) = y(d) = 0,$$

sodass y eine Nullstelle in $[c,d]$ aufweist.

β) Falls für die Kurvenparameter c und d kein Doppelpunkt vorliegt, also $z_1 = u_2^+(.,c)$ und $z_0 = u_2^+(.,d)$ linear unabhängig sind, und hier bei $d = \eta(c)$ o. E. (siehe dazu die Ausführungen in Teil 2, β) im Beweis des Satzes 3.4)

$$u_2^+(c,d) = u_2(d,c) = 0$$

gilt, erhält man wie im Beweisteil 2, β) des Satzes 3.4 mittels (2.25) ($j = 0$) die Inklusion

$$[z] = [z_\lambda] \subseteq [z_1,z_0] = [\,u_2^+(.,c), u_2^+(.,d)\,] = [u_2(.,c)]^\perp,$$

weiter mittels (2.25) den Wert

$$z(c) = 0$$

und gemäß der Definition von z_λ den Wert

$$z(d) = \rho z_\lambda(d) = \rho\lambda\, u_2^+(d,c)\,.$$

Die geometrische Interpretation von $z(c) = 0$ besagt, dass von dem zu z gehörigen Punkt Q zumindest eine Tangente zum Kurvenstückendpunkt $[\mathbf{y}(c)]$ geht. Bei der Bestimmung des Vorzeichens von $z(d)$ werden jetzt für $\lambda \in [0,1]$ die Fälle $\lambda = 1$, $\lambda = 0$ und $\lambda \in \,]0,1[$ getrennt behandelt.

Falls $\lambda = 1$, ist $[z] = [z_1] = [\,u_2^+(.,c)\,]$ und nach (2.25) ($j = 0$) $y(c) = 0$.

Falls $\lambda = 0$, also $[z] = [z_0] = [\,u_2^+(.,d)\,]$ ist, folgt analog $y(d) = 0$.

Es ist noch der Fall $\lambda \in \,]0,1[$ zu betrachten. Im Fall $[y] = [u_2(.,c)]$ gilt schon $y(c) = 0$ (und nach obiger o. E.-Fallbetrachtung $u_2(d,c) = 0$ auch $y(d) = 0$). Im Fall

$$[y] \neq [u_2(.,c)]$$

ist damit schon eine der Voraussetzungen von Satz 3.3, b, 1), 2) erfüllt. Zur Sicherung der weiteren Voraussetzungen dieses Satzes werden noch die Fälle

1) $u_2^+(d,c) = 0$ und

2) $u_2^+(d,c) \neq 0$

unterschieden.

Im Fall 1) $u_2^+(d,c) = 0$ liegt für die Parameter c und d die Eigenschaft (3.8) (Doppelpunkt oder Doppeltangente: $u_2^+(c,d) = u_2^+(d,c) = 0$) vor und, da im vorliegenden Fall β) nach Voraussetzung kein Doppelpunkt vorliegt, eben eine Doppeltangente:

$$[u_2(.,c)] = [u_2(.,d)].$$

Damit sind im Fall 1) die Voraussetzungen für die Anwendung von Satz 3.3, b, 1) erfüllt.

Im Fall 2) $u_2^+(d,c) \neq 0$ (folglich kein Doppelpunkt und keine Doppeltangente) ist wegen $\rho\lambda \neq 0$ die für Satz 3.3, b, 2) noch benötigte Voraussetzung

$$z(d) = \rho z_\lambda(d) = \rho\lambda\, u_2^+(d,c) \neq 0$$

gegeben.

Daher kann bei $\lambda \in \,]0,1[$ und $[y] \neq [u_2(.,c)]$ in beiden Fällen 1) und 2) nach diesem Satz 3.3, b) 1), 2) die Existenz einer Nullstelle von y sogar im offenen Intervall $]c,d[$ gefolgert werden:

$$y(t_0) = 0 \text{ für ein } t_0 \in \,]c,d[.$$

Insgesamt ist damit für die $z \in S^+$ mit $[z] = [z_\lambda]$, $\lambda \in [0,1]$, die Nullstellenfreiheit im offenen Intervall $]c,d[$, die Existenz einer Nullstelle an mindestens einer Intervallgrenze c oder d und für alle $y \in S_z$ die Existenz einer Nullstelle t_0 von y im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ gezeigt.

Wenn diese Nullstelle t_0 von y im offenen Intervall $]c,d[$ liegt, ist sie eine einfache Nullstelle: Denn bei einer zweifachen Nullstelle $t_0 \in\ ]c,d[$ von y folgt $y = \mu u_2(.,t_0)$ $(\mu \neq 0)$ und

$$0 = B[y,z] = \mu B[u_2(.,t_0),z](t_0) = \mu z(t_0),$$

im Widerspruch zur oben im Beweis begründeten Nullstellenfreiheit von z in $]c,d[$. □

Als Folgerung aus den Sätzen 3.5 und 3.4 erhält man den folgenden Zusatz, dessen Teil a) geometrisch gesehen den Fall betrachtet, dass eine vorgegebene Gerade G das abgeschlossene Kurvenstück $C_{[c,d]}$ nicht trifft. Jeder beliebige Punkt Q auf dieser Geraden besitzt dann eine Tangente an das Kurvenstück $C_{]c,d[}$ (ohne die Enden). Die Situation, dass Q auf der Verbindungsstrecke der Kurvenenden $P_1 = [\mathbf{y}(c)]$ und $P_0 = [\mathbf{y}(d)]$ liegt, kann dabei nicht auftreten. Eine Veranschaulichung dieser Situation wird in der Abbildung 3.16 gegeben.

Zusatz zur Existenz einer einfachen Nullstelle einer Lösung im offenen Intervall $]c,d[$ bei Nichtdiskonjugiertheit und Nullstellenfreiheit einer orthogonalen Lösung im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$

Es sei die Differentialgleichung (L) nichtdiskonjugiert im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$, es sei

$$d = \eta(c)$$

der erste konjugierte Punkt von c und es seien y und z nichttriviale orthogonale Lösungen von S bzw. S^+:

$$B[y,z] = 0.$$

a) Falls y nullstellenfrei im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ ist, so ist für z $(\in S_y^+)$ die Bedingung (3.12) von Satz 3.4 erfüllt und damit die Existenz einer (einfachen) Nullstelle von z im offenen Intervall $]c,d[$ gesichert.

b) Falls z nullstellenfrei im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ ist, so ist für y $(\in S_z)$ die Bedingung (3.13) von Satz 3.4 erfüllt und damit die Existenz einer (einfachen) Nullstelle von y im offenen Intervall $]c,d[$ gesichert.

Beweis des Zusatzes a): Ein Beweis für die Aussage a) des Zusatzes, also die Existenz einer Nullstelle von z in $]c,d[$, wurde oben schon im Teil 1) des Beweises von Satz 3.4, a) geführt, im den der Fall behandelt wird, dass die Lösung y im gesamten abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ nullstellenfrei ist.
Eine weitere Begründung dieser Aussage erhält man auch dadurch, dass nach Satz 3.5, a) bei Vorliegen einer im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ nullstellenfreien Lösung y für eine dazu orthogonale Lösung z nicht die Übereinstimmung $[z] = [z_\lambda]$ für ein $\lambda \in [0,1]$ gilt und somit die Bedingung (3.12) von Satz 3.4 erfüllt ist. Unter Verwendung der Nullstellenfreiheit von y insbesondere in $]c,d[$ erhält man dann mit Satz 3.4, a) auch die Existenz einer Nullstelle x_0 von z in $]c,d[$. Die Einfachheit dieser Nullstelle x_0 wird am Ende des Beweises von Satz 3.4 begründet. □

4 Eigenschaften der Klassen K_I und K_{II}

4.1 Diskonjugiertheit

Eine fundamentale Rolle bei den Untersuchungen der gegenseitigen Lage der Nullstellen zweier Lösungen und derer Ableitungen spielt der folgende Hilfssatz 4.1. Er kommt hier bei den Beweisen von Satz 3.3, Satz 4.1 und Hilfssatz 4.4 zum Einsatz. Er liefert mit Teil 1 eine Verstärkung der Aussage von Lemma 1 in Coppel (1971), S. 4 ($u(c) = u(d) = 0$, $v \neq 0$ in $[c,d]$) und mit Teil 2 eine Erweiterung von Lemma 2.13 in Barrett (1969), S. 445 ($u/v \longrightarrow 0$ bei $x \searrow c$ und bei $x \nearrow d$, $v \neq 0$ in $]c,d[$). Zu seinem Beweis vergleiche man auch die Beweise von Hilfssatz 2.1 in Abschnitt 2.7.4 und von Proposition 5 in Coppel (1971), S. 89. Letztere Aussage kann speziell für $n = 2$ folgendermaßen formuliert werden: Sind $y_1, y_2 \in C^1(J)$ und ist y_1 nullstellenfrei in J, so hat y_2 und auch jede nichttriviale Linearkombination $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ von y_1, y_2 höchstens eine (einfache) Nullstelle in J genau dann, wenn die Wronski-Determinante $W[y_1,y_2]$ der beiden Funktionen in J nullstellenfrei ist. Die Existenz einer Nullstelle der Wronski-Determinante ist also äquivalent zur Existenz einer nichttrivialen Linearkombination mit mindestens zwei Nullstellen. Zur Beweisrichtung „$\Rightarrow$“ wird gezeigt, dass es zu einer Nullstelle $x_0 \in J$ der Determinante $W[y_1,y_2]$ ein spezielles Zahlenpaar $(\alpha_1,\alpha_2) \neq (0,0)$ als Lösung des Gleichungssystems $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ gibt, sodass x_0 zweifache Nullstelle der zugehörigen nichttrivialen Linearkombination y von y_1, y_2 ist. Zur Beweisrichtung „$\Leftarrow$“ wird gezeigt, dass beim Auftreten von zwei Nullstellen einer nichttrivialen Linearkombination y von y_1, y_2 ($\alpha_2 \neq 0$) nach dem Satz von Rolle eine Nullstelle für die Ableitung $(y/y_1)'$ existiert. Wegen $(y/y_1)' = \alpha_2 W[y_1,y_2]/y_1^2$ existiert dann auch eine Nullstelle der Wronski-Determinante. Während beim Beweis von Hilfssatz 2.1 mit dem Satz von Rolle zwischen zwei benachbarten Nullstellen der Funktion u bzw. der Quotientenfunktion $h = u/v$ auf eine Nullstelle der Ableitung h' von h bzw. der Wronski-Determinante $W[u,v]$ geschlossen wird, kommt beim nachfolgenden Beweis von Hilfssatz 4.1 mit der expliziten Angabe des Vorzeichens des Koeffizienten λ in der Linearkombinaton $w = u - \lambda v$ der Extremalsatz von Weierstraß zur Anwendung, um zunächst auf eine Maximumstelle für die Quotientenfunktion $h = u/v$ im abgeschlossenen Intervall zu schließen. Weiter wird dann mit einem Satz von Fermat von der Maximumstelle auch noch auf eine Nullstelle der Ableitung h' und daraus auf eine zweifache Nullstelle der speziellen Linearkombination $w = u - \lambda v$ ($\lambda = \max\limits_{x\in[c,d]} h(x) > 0$) geschlossen.

Hilfssatz 4.1 Existenz einer Linearkombination zweier Funktionen, die nichtpositiv ist und eine zweifache Nullstelle besitzt

Die reellwertigen Funktionen u und v seien im offenen Intervall $]c,d[$, $c < d$, differenzierbar und es gelte

$$v > 0 \text{ in }]c,d[,$$
$$u(x_0) > 0 \text{ für ein } x_0 \in]c,d[.$$

1) Falls noch für die Quotientenfunktion $h := u/v$ an den Intervallgrenzen c und d jeweils der Grenzwert Null vorliegt, also

$$\lim_{x\to c}\frac{u(x)}{v(x)} = 0 = \lim_{x\to d}\frac{u(x)}{v(x)}$$

gilt, dann existiert ein reeller Parameter $\lambda > 0$, sodass für die Linearkombination

$$w := u - \lambda v$$

von u und v die Ungleichung $w \leq 0$ gilt und eine zweifache Nullstelle in $]c,d[$ vorliegt.

R. Pleier, *Nullstellenverteilung der Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung 3. Ordnung* (Distribution of the zeros of solutions of the ordinary linear differential equation of third order), D-92694 Etzenricht, 1979/2020

2) Falls noch u und v im halboffenen Intervall $]c,d]$ differenzierbar sind und an den Intervallgrenzen c und d die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\lim_{x\to c}\frac{u(x)}{v(x)} = 0, \qquad u(d) = v(d) = 0 \neq v'(d),$$

dann existiert ein reeller Parameter $\lambda > 0$, sodass für die Linearkombination

$$w := u - \lambda v$$

von u und v die Ungleichung $w \leq 0$ gilt und eine zweifache Nullstelle in $]c,d]$ vorliegt.
Eine analoge Aussage gilt auch nach Vertauschen der Rollen von c und d mit dem Intervall $[c,d[$ statt $]c,d]$.

Beweis: Die Quotientenfunktion

$$h := \frac{u}{v}$$

ist in $]c,d[$ differenzierbar und es gilt

$$\lim_{x\to c} h(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to d} h(x) = 0 \text{ bei 1)}$$

und nach der Regel von de l'Hospital und Bernoulli

$$\lim_{x\to d} h(x) = \lim_{x\to d}\frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{u'(d)}{v'(d)} \in \mathbb{R} \text{ bei 2).}$$

Da die reellwertige Quotientenfunktion $h = u/v$ auf dem abgeschlossenen und beschränkten (und damit kompakten) Intervall $[c,d]$ stetig (ergänzbar) ist, nimmt sie dort nach dem Extremalsatz[1] (Satz vom Minimum und Maximum) von Weierstraß (1861) ihr Supremum

$$\lambda := \sup\{h(x) : x \in [c,d]\}$$

an mindestens einer Stelle an. Es gibt also eine Stelle $\xi \in [c,d]$ mit $h(\xi) = \lambda$. Da

$$h(x_0) = u(x_0)/v(x_0) > 0 \text{ für ein } x_0 \in]c,d[$$

ist, gilt

$$\lambda = h(\xi) \geq h(x_0) > 0.$$

Weiter folgt im offenen Intervall aus $h = u/v \leq \lambda$ bzw. $u \leq \lambda v$ für die spezielle Linearkombination

$$w := u - \lambda v$$

die Ungleichung $w \leq 0$.

Falls die Maximumstelle $\xi \in]c,d[$ ist (z. B. unter der Voraussetzung 1 mit $h(c) = h(d) = 0$), folgt $\lambda = h(\xi) = u(\xi)/v(\xi)$ und

$$w(\xi) = u(\xi) - \lambda v(\xi) = 0,$$

Weiter folgt hier wegen der Differenzierbarkeit von h in $]c,d[$ nach einem auf Fermat[2] (1638) zurückgehenden Satz der Differentialrechnung für das lokale (relative) Extremum $\xi \in]c,d[$ die notwendige Bedingung

$$h'(\xi) = \lim_{x\to\xi}\frac{h(x) - h(\xi)}{x - \xi} = 0.$$

Damit ergibt sich aus $\lambda = h(\xi) = u(\xi)/v(\xi)$,

$$w' = u' - \lambda v' = u' - v'u(\xi)/v(\xi)$$

auch

---

[1] Der Extremalsatz oder Satz vom Minimum und Maximum ist benannt nach dem deutschen Mathematiker Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897). Diesen Satz findet man beispielsweise in den Analysis-Büchern von Deiser (2013), S. 204, Köhler (2006), S. 122, Hildebrandt (2006), S. 155, Mangoldt, Knopp (1971), S. 541, Erwe (1967), S. 115, Grauert u. Lieb (1967), S. 76.

[2] Zum Beweis dieses Satzes zur Ableitung bei einem lokalen Extremum einer Funktion betrachtet man das Vorzeichen des Differenzenquotienten beim linksseitigen und beim rechtsseitigen Grenzübergang. Pierre de Fermat (1607–1665) war ein französischer Mathematiker und Jurist.

$$w'(\xi) = u'(\xi) - v'(\xi)u(\xi)/v(\xi)$$
$$= h'(\xi)v(\xi) = 0,$$

sodass ξ eine zweifache Nullstelle von w ist.

Falls unter der Voraussetzung 2 möglicherweise die Maximumstelle $\xi = d$ ist, folgt aus $u(d) = v(d) = 0$ zunächst

$$w(d) = u(d) - \lambda v(d) = 0,$$

nach der Regel von de l'Hospital und Bernoulli

$$\lambda = h(d) = u'(d)/v'(d) \in \mathbb{R}$$

($\lambda = h(\xi) > 0$) und dann noch

$$w'(d) = u'(d) - \lambda v'(d) = 0,$$

sodass d eine zweifache Nullstelle von w ist. □

Mit dem Hilfssatz 4.1 lässt sich nun der folgende Satz 4.1 beweisen, der eine hinreichende Bedingung für die Diskonjugiertheit der Differentialgleichung im halboffenen Intervall bzw. im abgeschlossenen Intervall gibt. Eine geometrische Veranschaulichung der Aussagen a, 1) und b, 1) des Satzes mittels der Integralkurve C gibt die Abbildung 4.1. Zu Teil a) des Satzes siehe Hanan (1961), Th.3.6 für $L \in C_{\mathrm{I}}$ und $]c,\infty[$ statt $[c,d]$; Cor.3.7 für $L \in C_{\mathrm{I}}$, $v(c) = v(d) = 0$, $]c,d[$ statt $[c,d]$; Th.4.2 für $L \in C_{\mathrm{II}}$, $v(c) = v(d) = 0$, $]c,d[$ statt $[c,d]$.

Satz 4.1 Hinreichende Bedingung für die Diskonjugiertheit der Differentialgleichung im halboffenen bzw. abgeschlossenen Intervall

Es sei $c, d \in J$, $c < d$.

a) 1) Falls

$$u_2^+(.,c) > 0 \text{ in }]c,d], \text{ z. B. bei } L \in C_{\mathrm{I}}[c,d],$$

und v eine Lösung von (L) ist mit

$$v(c) = 0 \text{ und } v > 0 \text{ in }]c,d[,$$

dann hat jede von v linear unabhängige Lösung u von (L) höchstens zwei (mit ihren Vielfachheiten gezählte) Nullstellen in $[c,d]$. Insbesondere folgt, dass (L) diskonjugiert ist im halboffenen Intervall $[c,d[$.

Falls noch

$$v > 0 \text{ in }]c,d]$$

ist, folgt die Diskonjugiertheit von (L) im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$.

2) Falls

$$u_2^+(.,d) > 0 \text{ in } [c,d[, \text{ z. B. bei } L \in C_{\mathrm{II}}[c,d],$$

und v eine Lösung von (L) ist mit

$$v(d) = 0 \text{ und } v > 0 \text{ in }]c,d[,$$

dann hat jede von v linear unabhängige Lösung u von (L) höchstens zwei (mit ihren Vielfachheiten gezählte) Nullstellen in $[c,d]$. Insbesondere folgt, dass (L) diskonjugiert ist im halboffenen Intervall $]c,d]$.

Falls noch

$$v > 0 \text{ in } [c,d[$$

ist, folgt die Diskonjugiertheit von (L) im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$.

b) 1) Falls

$$u_2(.,c) > 0 \text{ in }]c,d], \text{ z. B. bei } L \in C_{\mathrm{II}}[c,d] \text{ bzw. } L^+ \in C_{\mathrm{I}}^+[c,d],$$

und z eine Lösung von (L^+) ist mit

$$z(c) = 0 \text{ und } z > 0 \text{ in }]c,d[,$$

dann hat jede von z linear unabhängige Lösung w von (L^+) höchstens zwei (mit ihren Vielfachheiten gezählte) Nullstellen in $[c,d]$. Insbesondere folgt, dass (L^+) diskonjugiert ist im halboffenen Intervall $[c,d[$.

Falls noch

$z > 0$ in $]c,d]$

ist, folgt die Diskonjugiertheit von (L^+) im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$.

2) Falls

$u_2(.,d) > 0$ in $[c,d[$, z. B. bei $L \in C_I[c,d]$ bzw. $L^+ \in C_{II}^+[c,d]$,

und z eine Lösung von (L^+) ist mit

$z(d) = 0$ und $z > 0$ in $]c,d[$,

dann hat jede von z linear unabhängige Lösung w von (L^+) höchstens zwei (mit ihren Vielfachheiten gezählte) Nullstellen in $[c,d]$. Insbesondere folgt, dass (L) diskonjugiert ist im halboffenen Intervall $]c,d]$.

Falls noch

$z > 0$ in $[c,d[$

ist, folgt die Diskonjugiertheit von (L) im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$.

a, 1) b, 1)

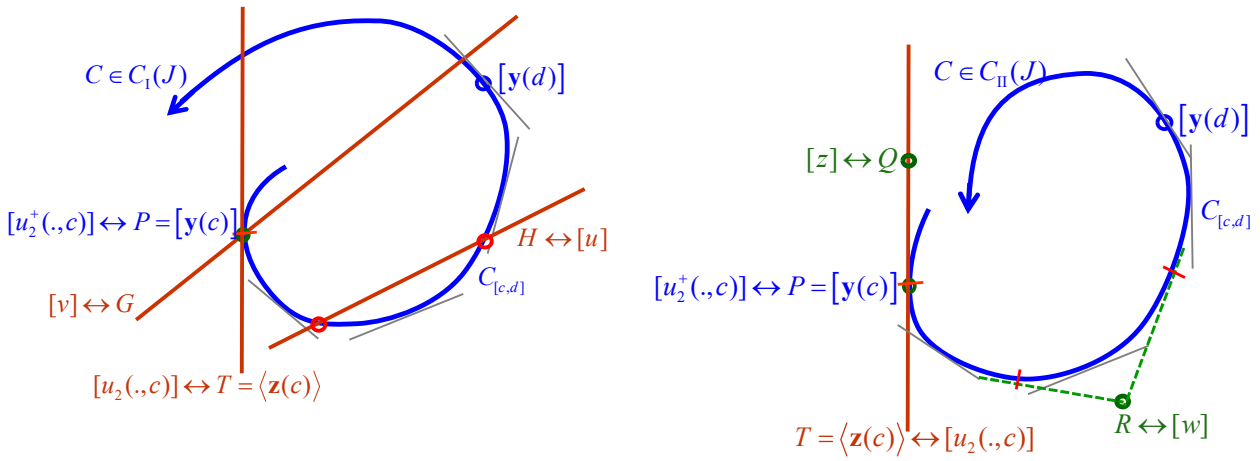


Abb. 4.1 a, 1) Das abgeschlossene Kurvenstücks $C_{[c,d]}$, der zur Lösung $u_2^+(.,c) \in S^+$ gehörige Kurvenpunkt $P = [\mathbf{y}(c)]$ ohne weitere Tangente an das Kurvenstück (außer $\langle \mathbf{z}(c) \rangle$), die zur Lösung $v \in S$ gehörige Gerade G durch den Kurvenpunkt $P = [\mathbf{y}(c)]$ und ohne weiteren Treffpunkt mit dem Kurvenstück, eine beliebige Gerade H mit höchstens zwei Treffpunkten mit dem Kurvenstück

b, 1) Das abgeschlossene Kurvenstücks $C_{[c,d]}$, die zur Lösung $u_2(.,c) \in S$ gehörige Tangente $T = \langle \mathbf{z}(c) \rangle$ des Kurvenpunkts $P = [\mathbf{y}(c)]$ ohne weiteren Treffpunkt mit dem Kurvenstück, der zur Lösung $z \in S^+$ gehörige Punkt Q auf der Tangente $T = \langle \mathbf{z}(c) \rangle$ und ohne weitere Tangente an das Kurvenstück, ein beliebiger Punkt R mit höchstens zwei Tangenten an das Kurvenstück

Beweis für a, 1): Es sei $u_2^+(.,c) > 0$ in $]c,d]$, v eine Lösung von (L) mit $v(c) = 0$ und $v > 0$ in $]c,d[$ und u eine von v linear unabhängige Lösung von (L) mit mindestens drei Nullstellen in $[c,d]$. Es seien x_1, x_2, x_3 ($c \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le d$) die drei kleinsten Nullstellen[3] von u in $[c,d]$. Für die Herleitung eines Widerspruchs aus dieser Annahme werden die beiden Fälle

I) $x_2 = x_3$ und

II) $x_2 < x_3$

unterschieden.

I) Falls $x_2 = x_3$ gilt, also in x_2 eine zweifache Nullstelle der nichttrivialen Lösung u vorliegt, ist x_1 eine einfache Nullstelle von u und $c \le x_1 < x_2$, $u'(x_1) \ne 0 = u(x_1) = u(x_2) = u'(x_2)$. Es sei nun o. E. $u < 0$ in $]x_1,x_2[$, damit

$u(c) \ge 0$ und $u = \gamma u_2(.,x_2)$

[3] In einer Fußnote von Abschnitt 4.5 wird begründet, dass eine nichttriviale Lösung u von (L) im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ nur endlich viele Nullstellen und damit keinen Häufungspunkt von Nullstellen besitzt.

mit einem $\gamma < 0$. Für die Stelle $x_2 \in]c,d]$ und die Lösung $u_2^+(.,c)$ folgt dann die Ungleichung

$$u_2^+(x_2,c) = u_2(c,x_2) = u(c)/\gamma \le 0,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $u_2^+(.,c) > 0$ in $]c,d]$.

II) Falls $x_2 < x_3$ und o. E. $u > 0$ in $]x_2,x_3[$ gilt, ist

$$u(c) \ge 0$$

sowohl bei einfachen Nullstellen x_1 und x_2 ($c \le x_1 < x_2$) als auch bei einer zweifachen Nullstelle ($c \le$) $x_1 = x_2$. Zur Bestimmung des Grenzwerts von $h = u/v$ an der Stelle x_2 werden nun noch die Unterfälle

i) $c < x_2$ und
ii) $c = x_1 = x_2$

untersucht.
i) Im Falle $c < x_2$ ($\le d$) gilt $u(x_2) = 0$ und aufgrund der Voraussetzung über v die Ungleichung $v(x_2) > 0$.
ii) Im Falle $c = x_1 = x_2$ ist $u(x_2) = u'(x_2) = 0$ und wegen der linearen Unabhängigkeit der Lösungen u und v von (L) dann $(v(x_2),v'(x_2)) \neq (0,0)$: Andernfalls wäre $v = \mu u_2(.,x_2)$, $u = \lambda u_2(.,x_2)$ mit reellen $\mu, \lambda \neq 0$ und dann $u = \lambda v/\mu$ im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Lösung u von v.
In beiden Unterfällen i) und ii) (im Fall $v(x_2) = 0$ nach der Regel von de l'Hospital und Bernoulli) ist

$$\lim_{x \to x_2} \frac{u(x)}{v(x)} = 0.$$

Zur Bestimmung des Grenzwerts von $h = u/v$ an der Stelle x_3 werden die Unterfälle

iii) $v(x_3) > 0$ (z. B. bei $c < x_3 < d$) und
iv) $v(x_3) = 0$ (nur möglich bei $x_3 = d$)

untersucht. Im Unterfall iv) $v(x_3) = 0$ und $x_3 = d$ gilt $v'(d) \neq 0$, da wegen $v(c) = 0 \neq u_2^+(d,c) = u_2(c,d)$ die beiden Lösungen v und $u_2(.,d)$ linear unabhängig sind. In den Unterfällen iii) und iv) erhält man jeweils

$$\lim_{x \to x_3} \frac{u(x)}{v(x)} = 0 \text{ bei iii)},$$

$$\lim_{x \to x_3} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(d)}{v'(d)} \in \mathbb{R} \text{ bei iv)}.$$

Da $u > 0$ und $v > 0$ in $]x_2,x_3[$ gilt, sind für die Lösungen u und v und die Stellen x_2 und x_3 anstelle von c und d die Voraussetzungen des Hilfssatzes 4.1, 1), 2) erfüllt. Demnach existieren hier $\lambda \in \mathbb{R}$, $\xi \in]x_2,x_3] \subseteq]c,d]$, $\rho < 0$, sodass

$$w := u - \lambda v = \rho u_2(.,\xi)$$

eine Lösung von (L) mit der zweifachen Nullstelle ξ ist. Für die Stelle $\xi \in]c,d]$ und die Lösung $u_2^+(.,c) \in S^+$ folgt daher die Ungleichung

$$u_2^+(\xi,c) = u_2(c,\xi) = w(c)/\rho = u(c)/\rho \le 0,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $u_2^+(.,c) > 0$ in $]c,d]$.
Da in den beiden Fällen I) $x_2 = x_3$ und II) $x_2 < x_3$ sich ein Widerspruch ergibt, existiert keine von v linear unabhängige Lösung u, die mindestens drei Nullstellen in $[c,d]$ besitzt.

Für die Aussage über die Diskonjugiertheit ist auch die Lösung v mit in die Betrachtung einzubeziehen. Die nichttriviale Lösung v selbst hat an der Stelle c höchstens eine zweifache Nullstelle. Falls v nullstellenfrei im offenen Intervall $]c,d[$ vorausgesetzt ist, besitzt v im halboffenen Intervall $[c,d[$ höchstens zwei Nullstellen. Falls v nullstellenfrei im halboffenen Intervall $]c,d]$ vorausgesetzt ist, besitzt v im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ höchstens zwei Nullstellen. Insgesamt hat jede nichttriviale Lösung von (L) höchstens zwei (mit ihren Vielfachheiten gezählte) Nullstellen im halboffenen Intervall $[c,d[$ (Diskonjugiertheit von (L) in $[c,d[$), wenn v nullstellenfrei im offenen Intervall $]c,d[$ ist. Weiter hat jede nichttriviale Lösung von (L) höchstens zwei (mit ihren Vielfachheiten gezählte)

Nullstellen im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ (Diskonjugiertheit von (L) in $[c,d]$), wenn v nullstellenfrei im halboffenen Intervall $]c,d]$ ist. □

Als Folgerung aus Satz 4.1, a) speziell mit der Lösung $v = u_2(.,c) \in S$ erhält man mit der Bedingung

(4.1) $\quad u_2^+(.,c) > 0 \wedge u_2(.,c) > 0$ in $]c,d]$

zunächst eine wichtige hinreichende Bedingung für die Diskonjugiertheit von (L) im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ ($L \in D[c,d]$).
Außerdem folgt für das abgeschlossene Intervall $[c,d]$ aus der Diskonjugiertheit von (L) (bzw. von (L^+)) die Klassenzugehörigkeit $L \in C_I \cap C_{II}$. Nach Abschnitt 2.5.3 ist diese äquivalent zur gleichzeitigen Zugehörigkeit $L \in C_I \cap C_{II}$ und $L^+ \in C_I^+ \cap C_{II}^+$. Umgekehrt folgt beim Intervall $[c,d]$ allein schon aus $L \in C_{II}$ und $L^+ \in C_{II}^+$ die obige Bedingung (4.1) und daraus auch die Diskonjugiertheit von (L). Die Bedingung (4.1) ist somit nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig und damit insgesamt charakteristisch für $L \in D[c,d]$.
Analog liefert Satz 4.1, b) und speziell $z = u_2^+(.,c) \in S^+$ ebenfalls mit der Bedingung (4.1)

$$u_2(.,c) > 0 \wedge u_2^+(.,c) > 0 \text{ in }]c,d]$$

eine wichtige charakteristische Bedingung für die Diskonjugiertheit von (L^+) im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ ($L^+ \in D^+[c,d]$).[4]
Entsprechende Aussagen gelten auch für den rechten Randpunkt d anstelle des linken Randpunkts c.
Aus den beiden obigen Charakterisierungen der Diskonjugiertheit mittels (4.1) ergibt sich für das abgeschlossene Intervall $[c,d]$ die Äquivalenz der Diskonjugiertheit von (L) mit der Diskonjugiertheit von (L^+). Außerdem sind nach diesen Überlegungen im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ die Klassenzugehörigkeiten $L \in C_I \cap C_{II}$ und $L^+ \in C_I^+ \cap C_{II}^+$ jeweils äquivalent zur Diskonjugiertheit von (L) und von (L^+).

In einem beliebigen Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ (mit den Randpunkten $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$) ist die Differentialgleichung (L) (bzw. (L^+)) genau dann diskonjugiert, wenn sie in jedem abgeschlossenen Teilintervall $[c,d] \subseteq J$ diskonjugiert ist. Weiter gilt die Klassenzugehörigkeit $L \in C_I(J)$, $L \in C_{II}(J)$, $L^+ \in C_I^+(J)$, $L^+ \in C_{II}^+(J)$ genau dann, wenn die jeweilige Klassenzugehörigkeit in jedem abgeschlossenen Teilintervall $[c,d] \subseteq J$ gegeben ist. Damit erhält man auch für ein beliebiges Intervall J die Äquivalenz der Diskonjugiertheit von (L) mit der Diskonjugiertheit von (L^+),

$$L \in D(J) \Leftrightarrow L^+ \in D^+(J),$$

und die Äquivalenz der Diskonjugiertheit von (L) bzw. von (L^+) zu den Klassenzugehörigkeiten $L \in C_I \cap C_{II}$ und $L^+ \in C_I^+ \cap C_{II}^+$:

$$L \in D(J) \Leftrightarrow L \in C_I(J) \cap C_{II}(J) \Leftrightarrow L^+ \in C_I^+(J) \cap C_{II}^+(J) \Leftrightarrow L^+ \in D^+(J).$$

Im Fall $a \in J$ ist die Differentialgleichung (L) bzw. (L^+) genau dann in J diskonjugiert, wenn sie in jedem abgeschlossenen Teilintervall $[a,d] \subseteq J$, $d \in J$, diskonjugiert ist, wenn also die folgende Bedingung gilt:

$$u_2^+(.,a) > 0 \wedge u_2(.,a) > 0 \text{ in } J \setminus \{a\}.$$

Im Fall $b \in J$ gilt entsprechend, dass (L) bzw. (L^+) genau dann in J diskonjugiert, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$u_2^+(.,b) > 0 \wedge u_2(.,b) > 0 \text{ in } J \setminus \{b\}.$$

---

[4] Bei der adjungierten Differentialgleichung (L^+) folgt aus der Diskonjugiertheit in J zunächst nur $u_2^+(x,t) \neq 0$ für $x \neq t$, $x, t \in J$. Da aber nach dem Zusatz zu Satz 2.4 in einer punktierten J-Umgebung von t die Lösung $u_2^+(.,t)$ positiv ist, gilt dies wegen der Stetigkeit der Lösung und dem Zwischenwertsatz (Nullstellensatz von Bolzano) auch für alle $x \neq t$. Damit folgt dann auch die Klassenzugehörigkeit $L^+ \in C_I^+ \cap C_{II}^+$.

Insgesamt ergibt sich der folgende Satz 4.2 zur Charakterisierung der Diskonjugiertheit in einem beliebigen Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ mittels der Klassen C_{I} und C_{II} und mittels der Bedingung (4.1). Zu seinen Aussagen 1) und 2) mit $J = [a,b[$, $p \in C^2(J)$, $q \in C^1(J)$ und damit $(\mathrm{L}^+) = (\mathrm{L}^*)$ siehe Azbelev, Caljuk (1964), Th.2 mit Cor.1 und Cor.2. Zur Aussage 1) α) ⇔ β) für $J =]a,\infty[$ siehe Švec (1965a), Th.1. Zur Aussage 1) α) ⇔ δ) für die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung siehe Coppel (1971), S. 99, Prop.10 und S. 104, Th.9. Zur Aussage 2) vergleiche man außerdem die entsprechenden Aussagen für die Differentialgleichungen (E_3) und (E_3^+) und damit insbesondere für (L_σ) und (L_σ^+) für $J = [a,b[$ bei Barrett (1969), Th.2.3, Th.2.4.

Satz 4.2 Charakterisierungen der Diskonjugiertheit der Differentialgleichung mittels der Klassen C_{I}, C_{II}, C_{I}^+, C_{II}^+ und der Positivität spezieller Lösungen

1) Für ein beliebiges Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ (mit den Randpunkten $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$) sind die folgenden Aussagen alle zueinander äquivalent:

α) $L \in D(J)$

β) $L \in C_{\mathrm{I}}(J) \cap C_{\mathrm{II}}(J)$

γ) $L^+ \in C_{\mathrm{I}}^+(J) \cap C_{\mathrm{II}}^+(J)$

δ) $L^+ \in D^+(J)$

2) Im Fall $a \in J$ ist $L \in D(J)$ äquivalent zur Bedingung

ε) $u_2^+(.,a) > 0 \wedge u_2(.,a) > 0$ in $J \setminus \{a\}$.

Im Fall $b \in J$ ist $L \in D(J)$ äquivalent zur Bedingung

φ) $u_2^+(.,b) > 0 \wedge u_2(.,b) > 0$ in $J \setminus \{b\}$.

Den nächsten Satz 4.3 über die Äquivalenz der Diskonjugiertheit für das offene Intervall und für die halboffenen Intervalle hat Coppel (1971), S. 102, Th.8, für die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung bewiesen.

Satz 4.3 Äquivalenz der Diskonjugiertheit im offenen Intervall mit der Diskonjugiertheit in den halboffenen Intervallen

Ist $c, d \in J$ und die Differentialgleichung

(L) diskonjugiert im offenen Intervall $]c,d[$,

dann ist auch

(L) diskonjugiert jeweils in den halboffenen Intervallen $[c,d[$ und $]c,d]$.

Beweis: O. E. wird die Aussage für das halboffene Intervall $J = [a,b[$ bzw. $J =]a,b]$ mit den Intervallgrenzen $a = \inf J$ und $b = \sup J$ (anstelle von $[c,d[$ bzw. $]c,d]$ mit $c, d \in J$) bewiesen, damit die genaue Intervallform des Endlichkeitsbereichs E (bzw. E_-) der durch die ersten rechten (bzw. linken) konjugierten Punkte definierte Funktion η (bzw. η_-) verwendet werden kann (siehe Abschnitt 4.6.3). Dabei wird die äquivalente Aussage bewiesen, dass aus der Nichtdiskonjugiertheit von (L) im halboffenen Intervall auch die Nichtdiskonjugiertheit im offenen Intervall folgt.

1) $J = [a,b[$: Ist (L) nichtdiskonjugiert im linksabgeschlossenen und rechtsoffenen Intervall $J = [a,b[$, so besitzt nach (4.17) der eigentliche Definitionsbereich (Endlichkeitsbereich) $E \neq \emptyset$ der Funktion η die Intervallform

$$E = [a,\beta[\quad \text{mit } a < \beta \leq b.$$

Für jedes $c \in E$ ist $\eta(c) \in J = [a,b[$, also $\eta(c) \in]c,b[$ und nach der Eigenschaft (4.7) $\eta(c) = z_+(c) = \min N_+(c)$ die Differentialgleichung (L) nichtdiskonjugiert in $[c,\eta(c)]$. Da $a < \beta$ ist, gibt es ein $c \in]a,\beta[$ mit Nichtdiskonjugiertheit von (L) in $[c,\eta(c)] \subseteq]a,b[$. Damit ist die Nichtdiskonjugiertheit von (L) im offenen Intervall $]a,b[$ nachgewiesen.

2) $J =]a,b]$: Ist (L) nichtdiskonjugiert in $J =]a,b]$, so besitzt nach (4.18) der eigentliche Definitionsbereich $E_- \neq \emptyset$ der Funktion η_- die Intervallform

$$E_- =]\alpha,b] \text{ mit } a \leq \alpha < b.$$

Für jedes $c \in E_-$ ist $\eta_-(c) \in]a,c[$ und nach der Eigenschaft (4.7) $\eta_-(c) = z_-(c) = \max N_-(c)$ die Differentialgleichung (L) nichtdiskonjugiert in $[\eta_-(c),c]$. Da $\alpha < b$ ist, gibt es ein $c \in]\alpha,b[$ mit Nichtdiskonjugiertheit von (L) in $[\eta_-(c),c] \subseteq]a,b[$. Damit ist die Nichtdiskonjugiertheit von (L) im offenen Intervall $]a,b[$ nachgewiesen. □

Zum Beweis des nächsten Satzes 4.4 über die Äquivalenz der Klassenzugehörigkeit im abgeschlossenen Intervall zur Klassenzugehörigkeit in einem umfassenderen Intervall wird der folgende Hilfssatz 4.2 verwendet.

Hilfssatz 4.2 Positivität von Lösungen in einem umfassenderen Intervall
Es sei $c, d \in J$ und $c < d$.

a) 1) Ist für die zur Stelle d gehörige Lösung $u_2(.,d)$ von (L) die Ungleichung

$$u_2(.,d) > 0 \text{ in } [c,d[$$

gültig, dann gibt es ein reelles $\varepsilon > 0$, sodass für jede Stelle $t \in [d-\varepsilon,d+\varepsilon] \cap J$ die zugehörige Lösung $u_2(.,t)$ die Ungleichung

$$u_2(.,t) > 0 \text{ in } [c-\varepsilon,t[\cap J$$

erfüllt.

2) Ist für die zur Stelle c gehörige Lösung $u_2(.,c)$ von (L) die Ungleichung

$$u_2(.,c) > 0 \text{ in }]c,d]$$

erfüllt, dann gibt es ein reelles $\varepsilon > 0$, sodass für jede Stelle $t \in [c-\varepsilon,c+\varepsilon] \cap J$ die zugehörige Lösung $u_2(.,t)$ die Ungleichung

$$u_2(.,t) > 0 \text{ in }]t,d+\varepsilon[\cap J$$

erfüllt.

b) Analoge Aussagen gelten auch für die Differentialgleichung (L^+) mit u_2^+ anstelle von u_2.

Beweis von a, 2): Nach dem Zusatz zu Satz 2.4 über die lokale Diskonjugiertheit existiert zu jedem $c \in J$ ein reelles $\delta > 0$, sodass die Differentialgleichung (L) diskonjugiert in $[c-\delta,c+\delta] \cap J$ ist. Da nach der Voraussetzung $u_2(.,c) > 0$ in $]c,d]$ und insbesondere in $[c+\delta,d]$ ist, ist somit die auf $J \times J$ definierte und stetige[5] Funktion $u_2(.,.) : J \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ positiv auf der abgeschlossenen und beschränkten Menge

$$K := [c+\delta,d] \times \{c\} \ (\subseteq J \times J \subseteq \mathbb{R}^2).$$

Da die Menge K nicht nur folgenkompakt[6] (Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft: Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_n \in K$ besitzt eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen ein Element $x_0 \in K$ konvergiert), sondern nach dem Überdeckungssatz[7] von Heine-Borel auch überdeckungskompakt (Heine-Borel-Überde-

[5] Die Lösung $y = y(x,x_0,y_0,y_0',y_0'')$ von (L) mit der unabhängigen Veränderlichen x und den Anfangswerten $x_0 \in J$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, $y''(x_0) = y_0''$ ist stetig abhängig vom Quintupel (x,x_0,y_0,y_0',y_0''), also insbesondere stetig in (x,x_0).

[6] Der Begriff ‚folgenkompakt' geht auf Fréchet (1906) zurück. Maurice René Fréchet (1878–1973) war ein französischer Mathematiker, der sich mit Funktionalanalysis befasste.

[7] Der Überdeckungssatz ist ein wichtiger Satz im Grenzgebiet von Topologie und Analysis. Er ist benannt nach dem deutschen Mathematiker Heinrich Eduard Heine (1821–1881) und dem französischen Mathematiker und Politiker Félix Édouard Justin Émile Borel (1871–1956). Er besagt, dass eine Menge K in $\mathbb{R}^n$ genau dann kompakt (abgeschlossen und beschränkt) ist, wenn sie die Heine-Borel-Überdeckungseigenschaft besitzt, d. h. wenn aus jeder offenen Überdeckung von K eine endliche Überdeckung von K auswählbar ist.

ckungseigenschaft) ist, gibt es wegen der Stetigkeit von $u_2(.,.)$ in $J \times J$ ein $\varepsilon \in]0,\delta[$, sodass $u_2(.,.)$ auch noch positiv ist auf der umfassenderen Menge[8]

$$([c+\delta-\varepsilon,d+\varepsilon] \times [c-\varepsilon,c+\varepsilon]) \cap (J \times J)$$

und insbesondere auf deren Teilmenge

$$([c+\delta,d+\varepsilon] \times [c-\varepsilon,c+\varepsilon]) \cap (J \times J).$$

Für jede Stelle $t \in [c-\varepsilon,c+\varepsilon] \cap J$ ist also die Lösung $u_2(.,t)$ von (L) positiv im Intervall $[c+\delta,d+\varepsilon] \cap J$. Aufgrund der Diskonjugiertheit von (L) in $[c-\delta,c+\delta] \cap J$ ist für diese Stellen $t \in [c-\varepsilon,c+\varepsilon] \cap J \subseteq [c-\delta,c+\delta] \cap J$ die Lösung $u_2(.,t)$ auch noch positiv in $]t,c+\delta]$ und somit insgesamt in $]t,d+\varepsilon[\cap J$. □

Satz 4.4 Äquivalenz der Klassenzugehörigkeit $L \in C_{\mathrm{I}}$, $L \in C_{\mathrm{II}}$, $L \in D$ im abgeschlossenen Intervall zur entsprechenden Klassenzugehörigkeit in einem umfassenderen Intervall

Es sei $c, d \in J$ und $c < d$.

1) Ist $L \in C_{\mathrm{I}}[c,d]$, dann gilt mit einem $\varepsilon > 0$ auch $L \in C_{\mathrm{I}}$ in $[c-\varepsilon,d+\varepsilon] \cap J$.

2) Ist $L \in C_{\mathrm{II}}[c,d]$, dann gilt mit einem $\varepsilon > 0$ auch $L \in C_{\mathrm{II}}$ in $[c-\varepsilon,d+\varepsilon] \cap J$.

3) Ist (L) in $[c,d]$ diskonjugiert, dann ist mit einem $\varepsilon > 0$ (L) auch diskonjugiert in $[c-\varepsilon,d+\varepsilon] \cap J$.

Die der Aussage 3) des Satzes entsprechende Aussage für die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung hat Coppel (1971), S. 93, L.7, mit einem indirekten Beweis begründet.

Beweis für 1): Wegen $L \in C_{\mathrm{I}}[c,d]$ gilt für alle Stellen $t \in]c,d]$ die Ungleichung

$$u_2(.,t) > 0 \text{ in } [c,t[.$$

Speziell für $t = d$ folgt aus der Ungleichung $u_2(.,d) > 0$ in $[c,d[$ mittels Hilfssatz 4.2, a, 1) mit einem $\varepsilon_1 > 0$ dann noch für alle Stellen $t \in [d-\varepsilon_1,d+\varepsilon_1]$ die Ungleichung

$$u_2(.,t) > 0 \text{ in } [c-\varepsilon_1,t[\cap J.$$

Insgesamt gilt dann für alle Stellen $t \in]c,d+\varepsilon_1] =]c,d] \cup]d,d+\varepsilon_1]$ die Ungleichung

$$u_2(.,t) > 0 \text{ in } [c,t[\cap J,$$

also $L \in C_{\mathrm{I}}[c, d+\varepsilon_1]$ und nach Abschnitt 2.5.3

$$L^+ \in C_{\mathrm{II}}^+[c,d+\varepsilon_1].$$

Daraus folgt nun analog mittels Hilfssatz 4.2, b, 2) mit einem $\varepsilon_2 > 0$ die Klassenzugehörigkeit

$$L^+ \in C_{\mathrm{II}}^+[c-\varepsilon_2,d+\varepsilon_1]$$

---

8 Hier im Beweis des Hilfssatzes kann man für die kompakte Menge $K := [c+\delta,d] \times \{c\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ($\delta > 0$) wegen $u_2(.,.) > 0$ auf K und der Stetigkeit von $u_2(.,.)$ auf $J \times J$ eine Überdeckung mit offenen Quadraten $Q_\gamma(x) =]x-\gamma,x+\gamma[\times]c-\gamma,c+\gamma[$ ($x \in [c+\delta,d]$) wählen, auf denen $u_2(.,.)$ noch positiv ist und bei denen aber $\gamma = \gamma(x) > 0$ noch von x abhängig ist. Nach der Auswahl einer endlichen Überdeckung $Q_{\gamma_s}(t_s)$ ($\gamma_s := \gamma(t_s)$, $t_0 = c+\delta < t_1 < \ldots < t_m = d$) erhält man mit dem von x unabhängigen $\mu := \min\{\gamma_s : s = 0,\ldots,m\} > 0$ und o. E. noch $\mu \le \delta$ durch die Quadrate $Q_\mu(x)$ ($t_0 \le x \le t_m$) wieder eine unendliche offene Überdeckung von K, jetzt aber mit gleich großen Quadraten. Für diese Quadrate $Q_\mu(x)$ ($t_0 \le x \le t_m$) liegt die Vereinigungsmenge $]t_0-\mu,t_m+\mu[\times]c-\mu,c+\mu[$ in der Vereinigungsmenge der endlichen Überdeckung $Q_{\gamma_s}(t_s)$ ($s = 0,\ldots,m$), sodass $u_2(.,.)$ auch auf allen $Q_\mu(x)$ positiv ist. Daraus kann wieder eine endliche Überdeckung $Q_\mu(x_k)$ ausgewählt werden ($x_0 = c+\delta < x_1 < \ldots < x_n = d$, $\Delta := \max\{x_k - x_{k-1} : k = 1,\ldots,n\} < 2\mu$). Durch die Wahl von ε mit $(0 <) \Delta/2 < \varepsilon < \mu$ ($\le \delta$) und somit $\Delta < 2\varepsilon$ kann nun auch mit den gleich großen abgeschlossenen Quadraten $\bar{Q}_\varepsilon(x_k) = [x_k-\varepsilon,x_k+\varepsilon] \times [c-\varepsilon,c+\varepsilon] \subseteq Q_\mu(x_k)$ eine Überdeckung angegeben werden, auf denen $u_2(.,.)$ positiv ist. Deren Vereinigungsmenge $[c+\delta-\varepsilon,d+\varepsilon] \times [c-\varepsilon,c+\varepsilon]$ enthält als Teilmenge auch die abgeschlossene Menge $[c+\delta,d] \times [c-\varepsilon,c+\varepsilon]$.

und mit $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ nach Abschnitt 2.5.3

$$L \in C_I[c-\varepsilon, d+\varepsilon].$$

Der Beweis für 3) ergibt sich aus 1), 2) und Satz 4.2, 1) α) ⇔ β). □

Während der obige Satz 4.2 die Diskonjugiertheit in einem beliebigen Intervall mittels der Klassen C_I, C_{II}, C_I^+, C_{II}^+ bzw. der Positivität spezieller Lösungen charakterisiert, gibt nun der folgende Satz 4.5 eine Charakterisierung der Diskonjugiertheit im abgeschlossenen Intervall mittels der Klassen K_I, K_{II}, K_I^+, K_{II}^+ und der Positivität spezieller Lösungen. Beispielsweise erhält man mittels Satz 4.2, 2, ε) eine hinreichende Bedingung für die Diskonjugiertheit in $[c,d]$ durch

$$L \in C_I[c,d] \text{ und } u_2(.,c) > 0 \text{ in }]c,d].$$

Diese Bedingung wird nun in Satz 4.5, a, 1) noch etwas abgeschwächt. Eine geometrische Begründung für Satz 4.5, a) findet man bei Birkhoff (1911), S. 120.

Satz 4.5 Charakterisierungen der Diskonjugiertheit im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ mittels der Klassen K_I, K_{II}, K_I^+, K_{II}^+ und der Positivität spezieller Lösungen

Es sei $c, d \in J$ und $c < d$.

a) Die Differentialgleichungen (L) und (L^+) sind genau dann in $[c,d]$ diskonjugiert, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1) $L \in K_I[c,d]$ und $u_2(.,c) > 0$ in $]c,d]$;

2) $L \in K_{II}[c,d]$ und $u_2(.,d) > 0$ in $[c,d[$.

b) Die Differentialgleichungen (L) und (L^+) sind genau dann in $[c,d]$ diskonjugiert, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1) $L^+ \in K_I^+[c,d]$ und $u_2^+(.,c) > 0$ in $]c,d]$;

2) $L^+ \in K_{II}^+[c,d]$ und $u_2^+(.,d) > 0$ in $[c,d[$.

Beweis für a, 1): Es ist zu zeigen, dass die angegebene Bedingung hinreichend für die Diskonjugiertheit in $[c,d]$ ist. Nimmt man an, dass

$$u_2(c,t) = u_2^+(t,c) = 0 \text{ für ein } t \in]c,d]$$

ist, dann ist wegen $L \in K_I[c,d]$ auch $u_2'(c,t) = 0$, also $[u_2(.,t)] = [u_2(.,c)]$ und wegen $u_2(t,t) = 0$ auch $u_2(t,c) = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $u_2^+(.,c) > 0$ in $]c,d]$. Da außerdem $u_2(.,c) > 0$ in $]c,d]$ vorausgesetzt ist, folgt nach Satz 4.2, 2, ε) die Diskonjugiertheit von (L) in $[c,d]$ und nach Satz 4.2, 1) α) ⇔ δ) dann auch die Diskonjugiertheit von (L^+) in $[c,d]$. □

4.2 Charakterisierung der nichtoszillatorischen Lösungen als die nullstellenfreien Lösungen

Neben Satz 2.2 (in Abschnitt 2.7.5 mit der Bedingung: S schwach oszillatorisch und $y \in S$ nichtoszillatorisch) geben der nachfolgende Hilfssatz 4.3 ($y \in S$ nichtnegativ und oszillatorisch) und der Satz 4.7, 2) ($L \in K_I]a,b[\cup K_{II}]a,b[$ und S oszillatorisch) jeweils eine weitere hinreichende Bedingung für die Existenz eines stark oszillatorischen zweidimensionalen Unterraums im dualen Raum S^+.

Hilfssatz 4.3 Die Existenz einer nichtnegativen oszillatorischen Lösung als hinreichende Bedingung für die Existenz eines stark oszillatorischen zweidimensionalen Unterraums im dualen Lösungsraum

Ist $y \in S \setminus \{o\}$ (bzw. $z \in S^+ \setminus \{o\}$) nichtnegativ und oszillatorisch in J, dann ist der zweidimensionale Unterraum S_y^+ von S^+ (bzw. S_z von S) stark oszillatorisch in J. Außerdem ist dann jeder zweidimensionale Unterraum von S^+ (bzw. von S) oszillatorisch in J.

Beweis: Falls es für eine Lösung $y \in S \setminus \{o\}$ eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise verschiedenenen $x_n \in]a,b[$ mit $y(x_n) = 0$ gibt, dann ist wegen $y \geq 0$ in J jedes x_n keine Vorzeichenwechselstelle von y, somit $y'(x_n) = 0$ und

$$y = \lambda_n \cdot u_2(.,x_n) \text{ mit } \lambda_n > 0.$$

Nach der Charakterisierung (2.25) für die Inzidenz der speziellen Lösung $u_2(.,x_0)$ mit zweidimensionalen Unterräumen S_z (bzw. für die Orthogonalität von $u_2(.,x_0)$ und z in Abschnitt 2.7.2) folgt $z(x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $z \in S_y^+$. Folglich ist S_y^+ ein stark oszillatorischer zweidimensionaler Unterraum von S^+.

Ist U^+ ein beliebiger zweidimensionaler Unterraum von S^+, dann ist nach Hilfssatz 2.2, 3) $U^+ = S_{y_0}^+ = [y_0]^\perp$ mit einer nichttrivialen Lösung $y_0 \in S$. Da der Durchschnitt der zweidimensionalen Unterräume S_y^+ und $S_{y_0}^+$ von S^+ nichtrivial ist und somit eine (nichttriviale) oszillatorische Lösung $z_0 \in S_y^+$ enthält, ist $U^+ = S_{y_0}^+$ oszillatorisch. □

Im Folgenden sei

N bzw. N^+ die Menge aller in J nichtoszillatorischen Lösungen von (L) bzw. (L^+)

und

M^0 bzw. M^{0+} die Menge aller nullstellenfreien Lösungen von (L) bzw. (L^+).

Satz 4.6 Hinreichende Bedingung für die Übereinstimmung der nichtoszillatorischen Lösungen mit den nullstellenfreien Lösungen

a) Falls $L \in K_{\mathrm{I}}]a,b[$ (bzw. $L \in K_{\mathrm{II}}]a,b[$) und (L) oszillatorisch in $J = [a,b[$ (bzw. $J =]a,b]$) ist, stimmt die Menge N der in J nichtoszillatorischen Lösungen von (L) überein mit der Menge M^0 der in J nullstellenfreien Lösungen von (L):
$$N = M^0.$$

b) Falls $L^+ \in K_{\mathrm{I}}^+]a,b[$ (bzw. $L^+ \in K_{\mathrm{II}}^+]a,b[$) und ($L^+$) oszillatorisch in $J = [a,b[$ (bzw. $J =]a,b]$) ist, stimmt die Menge N^+ der in J nichtoszillatorischen Lösungen von (L^+) überein mit der Menge M^{0+} der in J nullstellenfreien Lösungen von (L^+):
$$N^+ = M^{0+}.$$

Beweis für a): Es ist nur $N \subseteq M^0$ zu zeigen. Ist (L) oszillatorisch in $J = [a,b[$ und $y \in S$ nichtoszillatorisch in J, dann ist nach Satz 2.2 S_y^+ in J stark oszillatorisch. Nimmt man an, dass y in J eine Nullstelle besitzt, also $y(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in J$ ist, dann ist nach (2.25) $u_2^+(.,x_0) \in S_y^+$ und damit $u_2^+(.,x_0)$ oszillatorisch in J. Wegen $L \in K_{\mathrm{I}}]a,b[$ ist nach Abschnitt 2.5.3 $L^+ \in K_{\mathrm{II}}^+]a,b[$ und somit auch $u_2^+(.,x_0) \geq 0$ in $[x_0,b[$. Nach Hilfssatz 4.3 ist dann $S_{u_2^+(.,x_0)}$ stark oszillatorisch in $[x_0,b[$ und in $J = [a,b[$. Insbesondere folgt, dass $y \in S_{u_2^+(.,x_0)}$ oszillatorisch in J ist, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass y nichtoszillatorisch in J ist. Also ist $y \in M^0$. □

4.3 Oszillation von (L) und (L^+)

Der nachfolgende Satz 4.7 gibt jeweils hinreichende Bedingungen dafür, dass vorzeichenwechselfreie Lösungen von (L) und (L^+) existieren, stark oszillatorische zweidimensionale Unterräume von S und S^+ existieren und die Oszillation von (L) äquivalent zur Oszillation von (L^+) ist.

Satz 4.7 Hinreichende Bedingung für die Existenz von vorzeichenwechselfreien Lösungen, stark oszillatorischen zweidimensionalen Unterräumen und die Äquivalenz der Oszillation von (L) **und** (L^+)

1) Gilt $L \in K_I]a,b[\cup K_{II}]a,b[$, dann gibt es Lösungen $y_0 \in S \setminus \{o\}$ und $z_0 \in S^+ \setminus \{o\}$ mit
$y_0 \geq 0$, $z_0 \geq 0$ in J.

2) Gilt $L \in K_I]a,b[\cup K_{II}]a,b[$ und ist (L) oder (L^+) oszillatorisch in J, dann sind die beiden zweidimensionalen Unterräume $S^+_{y_0}$ ($\subseteq S^+$) und S_{z_0} ($\subseteq S$) ($y_0 \geq 0$, $z_0 \geq 0$ in J) in J stark oszillatorisch.

3) Gilt $L \in K_I]a,b[\cup K_{II}]a,b[$, dann ist die Differentialgleichung (L) genau dann in J oszillatorisch, wenn die Differentialgleichung (L^+) in J oszillatorisch ist.

Hinreichende Bedingungen an die Koeffizienten von (L) dafür, dass $L \in C_I \cup C_{II}$ und (L) oszillatorisch in J ist, geben Lazer (1966), Th.1.3, Th.3.1, und Jones (1976). Im Falle $L \in C_I(J) \cup C_{II}(J)$ gibt es sogar Lösungen $y_0 \in S$ und $z_0 \in S^+$ mit

$$y_0 > 0 \text{ und } z_0 > 0 \text{ in } J.$$

Falls außerdem noch (L) oder (L^+) in J oszillatorisch ist, erhält man dann für die Lösungsräume die direkten additiven Zerlegungen

$$S = [y_0] \oplus U \quad \text{und} \quad S^+ = [z_0] \oplus U^+$$

mit den in J stark oszillatorischen zweidimensionalen Unterräumen $U = S_{z_0}$ ($\subseteq S$) und $U^+ = S^+_{y_0}$ ($\subseteq S^+$).

Die Aussage 3) des Satzes 4.7 zur Äquivalenz der Oszillation von (L) mit der Oszillation von (L^+) hat Hanan (1961), Th.4.7, unter der stärkeren Voraussetzung $L \in C_I(J) \cup C_{II}(J)$ in $J = [a,\infty[$ mit Hilfe der konjugierten Punkte bewiesen. Dass die Aussage 3) des Satzes ohne die Voraussetzung $L \in K_I]a,b[\cup K_{II}]a,b[$ nicht richtig ist, zeigen etwa die Beispiele von Dolan (1970), S. 385, und Neuman (1972), Th.2.

Die Aussage 2) des Satzes 4.7 (mit der Voraussetzung $L \in K_I]a,b[\cup K_{II}]a,b[$ und S oszillatorisch) liefert neben Satz 2.2 (Voraussetzung S schwach oszillatorisch und $y \in S$ nichtoszillatorisch) und Hilfssatz 4.3 (Voraussetzung $y \in S$ nichtnegativ und oszillatorisch) eine weitere hinreichende Bedingung für die Existenz eines stark oszillatorischen zweidimensionalen Unterraums im dualen Raum S^+. Dass die Lösungsräume S und S^+ jeweils stets einen zweidimensionalen Unterraum besitzen, der nicht schwach oszillatorisch ist, hat Neuman (1974), Th.1, mit einer geometrisch-topologischen Methode und haben Dolan, Klaasen (1975a), Th.3, mittels der Theorie der konvexen Kegel im $\mathbb{R}^3$ gezeigt.

Beweis von Satz 4.7: 1) Es sei etwa $L \in K_I]a,b[$ (der Fall $L \in K_{II}]a,b[$ wird analog behandelt), $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $x_n \in J$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Lösungen

$$y_n = \gamma_n \cdot u_2(.,x_n) = \sum_{j=0}^{2} c_{j,n} u_j(.,x_0) \qquad (x_0 \in J,\ \gamma_n > 0,\ c_{j,n} \in \mathbb{R})$$

o. E. mit normierten Koordinaten auf $|(c_{0,n},c_{1,n},c_{2,n})| = (c_{0,n}^2+c_{1,n}^2+c_{2,n}^2)^{1/2} = 1$ (ggf. Division von y_n durch $|(c_{0,n},c_{1,n},c_{2,n})|$ mit Übergang von γ_n zu $\gamma_n/|(c_{0,n},c_{1,n},c_{2,n})|$). Da die Zahlenfolgen $(c_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$

R. Pleier, *Nullstellenverteilung der Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung 3. Ordnung* (Distribution of the zeros of solutions of the ordinary linear differential equation of third order), D-92694 Etzenricht, 1979/2020

($j = 0, 1,2$) beschränkt sind ($c_{j,n}^2 \leq 1$), kann man nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß o. E. annehmen, dass sie konvergieren (ggf. Übergang zu konvergenter Teilfolge):

$$\lim_{n\to\infty} c_{j,n} = c_j.$$

Wegen der Stetigkeit der euklidischen Norm $|.|$ im $\mathbb{R}^3$ gilt dann auch $|(c_0,c_1,c_2)| = 1$, sodass die Grenzfunktion

$$y_0 := \sum_{j=0}^{2} c_j u_j(.,x_0)$$

der Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nichttriviale Lösung von (L) ist mit

$$y_0^{(k)} = \sum_{j=0}^{2} c_j u_j^{(k)}(.,x_0) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{2} c_{jn} u_j^{(k)}(.,x_0) = \lim_{n\to\infty} y_n^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Wegen $L \in K_{\mathrm{I}}]a,b[$ ist $y_n \geq 0$ in $]a,x_n[$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und folglich $y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n \geq 0$ in J.

Die Existenz einer nichtnegativen Lösung $z_0 \in S^+ \setminus \{o\}$ beweist man analog, indem man die Äquivalenz von $L \in K_{\mathrm{I}}]a,b[$ und $L^+ \in K_{\mathrm{II}}^+]a,b[$ verwendet, eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \longrightarrow a$ und die Folge der Lösungen $z_n = \gamma_n \cdot u_2^+(.,x_n)$ wählt.

2) Es sei jetzt zusätzlich zur Voraussetzung von 1) noch (L) oszillatorisch in J. Falls die in 1) nachgewiesene nichtnegative Lösung y_0 nichtoszillatorisch und damit (L) schwach oszillatorisch ist, folgt nach Satz 2.2, dass $S_{y_0}^+$ in J stark oszillatorisch ist. Falls y_0 oszillatorisch ist, folgt die starke Oszillation von $S_{y_0}^+$ nach Hilfssatz 4.3. Analog folgt aus der Oszillation von (L⁺) die starke Oszillation von S_{z_0}.

3) Es sei $L \in K_{\mathrm{I}}]a,b[\cup K_{\mathrm{II}}]a,b[$. Falls (L) oszillatorisch ist, folgt nach 2) die starke Oszillation von $S_{y_0}^+$ und damit die Oszillation von (L⁺). Ebenso folgt aus der Oszillation von (L⁺) die starke Oszillation von S_{z_0} und die Oszillation von (L). Unter der angegebenen Voraussetzung ist also die Oszillation von (L) äquivalent zur Oszillation von (L⁺). □

4.4 Diskonjugiertheit an den Intervallgrenzen

Mittels des Sturmschen Trennungssatzes ergibt sich, dass die homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

(l) $\qquad v'' + pv' + qv = 0$

($p, q \in C(J)$) genau dann in J-Umgebungen von a und b diskonjugiert, wenn sie in J nichtoszillatorisch ist. Für die homogene lineare Differentialgleichung 3. Ordnung (L) gibt es jedoch Beispiele (siehe Dolan (1970), S. 385), die in $J = [a,\infty[$ nichtoszillatorisch, aber in jedem Teilintervall $[d,\infty[$, $d \geq a$, nichtdiskonjugiert sind.

Der folgende Satz 4.8 gibt nun mit der Klassenzugehörigkeit $L \in K_{\mathrm{I}}]a,b[\cup K_{\mathrm{II}}]a,b[$ eine hinreichende Bedingung, unter der die Nichtoszillation von (L) gleichbedeutend mit der Diskonjugiertheit an den Intervallgrenzen a und b ist. Es ist nur zu zeigen, dass aus der Nichtoszillation die Diskonjugiertheit an den Intervallgrenzen folgt. Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus Satz 4.7, nach welchem bei dieser Klassenzugehörigkeit die Nichtoszillation von (L) äquivalent zur Nichtoszillation von (L⁺) ist, und Satz 2.4 (aus Abschnitt 2.7.7), nach dem schon aus der Existenz einer nichtoszillatorischen Lösung $y \in S$ und eines nichtoszillatorischen zweidimensionalen Unterraums V^+ im dualen Raum S^+ die Diskonjugiertheit von (L) und (L⁺) an den Intervallgrenzen folgt.

Satz 4.8 Hinreichende Bedingung für die Äquivalenz der Nichtoszillation mit der Diskonjugiertheit an den Intervallgrenzen
Es sei $L \in K_I]a,b[\cup K_{II}]a,b[$. Falls (L) oder ($L^+$) nichtoszillatorisch in J ist, dann gibt es Stellen c, $d \in]a,b[$, sodass (L) und (L^+) diskonjugiert sind in $[a,c] \cap J$ und in $[d,b] \cap J$.

Folgerung: Hinreichende Bedingung für die Oszillation
Ist $L \in K_I]a,b[\cup K_{II}]a,b[$ und (L) in jedem Intervall $[d,b] \cap J$ nichtdiskonjugiert, dann sind (L) und (L^+) in $[a,b[$ oszillatorisch.

Zur Aussage des Satzes unter der stärkeren Voraussetzung $L \in C_I[a,\infty[$ siehe Švec (1965a), Th.2b, und mit speziellen Koeffizientenbedingungen Etgen, Shih (1973b), Th.2, Th.4, und (1973a), Th.5. Hinreichende Koeffizientenbedingungen für die in der Folgerung vorausgesetzte Nichtdiskonjugiertheit von (L) in jedem Intervall $[d,\infty[$, $d \geq a$, geben etwa Etgen, Shih (1973a), Th.3, Th.4, (1975), Th.1, Cor.

4.5 Existenz von nullstellenfreien Lösungen

Bei der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

(l) $$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (x \in J \subseteq \mathbb{R})$$

folgt aus der Existenz einer in $J \subseteq \mathbb{R}$ nullstellenfreien (reellwertigen) Lösung, was hier äquivalent zur Existenz eines Markov-Fundamentalsystems von (l) in J ist, die Diskonjugiertheit von (l) in J. Umgekehrt folgt aus der Diskonjugiertheit von (l) in J auch die Existenz einer in J nullstellenfreien Lösung nur für ein abgeschlossenes Intervall $J = [a,b]$ und ein offenes Intervall $J =]a,b[$, nicht jedoch für ein halboffenes Intervall. Einen Beweis hierfür findet man bei Coppel (1971), S. 5, Th.1. Für das halboffene Intervall $J = [0,\pi[$ gibt er als **Beispiel** die Differentialgleichung (l) $y'' + y = 0$ mit der allgemeinen Lösung $y(x) = A\sin(x - \alpha)$ ($A > 0$, $0 \leq \alpha < 2\pi$) an, für die jede nichttriviale Lösung genau eine Nullstelle in $J = [0,\pi[$ besitzt und somit keine nullstellenfreie Lösung existiert.

Bei der linearen Differentialgleichung 3. Ordnung (L) genügt für die Existenz einer in J nullstellenfreien (reellwertigen) Lösung statt der Diskonjugiertheit (welche nach Satz 4.2 äquivalent zu $L \in C_I(J) \cap C_{II}(J)$ ist) dagegen schon, dass $L \in C_I(J) \cup C_{II}(J)$ ist (für $L \in C_I[a,\infty[$ siehe etwa Švec (1965a), Th.3) oder dass $L \in K_I \cup K_{II}$ und (L) nichtoszillatorisch in J ist (siehe folgenden Satz 4.9 und Švec (1965a), Th.5, mit der Voraussetzung $L \in C_I[a,\infty[$). Zur Existenz einer in $J = [a,b]$ nullstellenfreien Lösung von (L) gibt Birkhoff (1911), S. 114, eine geometrische Begründung unter Voraussetzung der Spiralform der Integralkurve C.

Satz 4.9 Hinreichende Bedingung für die Existenz eines nullstellenfreien Fundamentalsystems
Ist $L \in K_I]a,b[\cup K_{II}]a,b[$ und (L) oder (L^+) nichtoszillatorisch in J, dann besitzen (L) und (L^+) jeweils ein Fundamentalsystem aus drei in J nullstellenfreien Lösungen.

Anmerkung: Da im abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ (L) stets nichtoszillatorisch[9] ist, folgt die Existenz eines in $[a,b]$ nullstellenfreien Fundamentalsystems allein schon aus der Voraussetzung $L \in K_I]a,b[\cup K_{II}]a,b[$.

[9] Begründung der Nichtoszillation im abgeschlossenen Intervall $[a,b]$: Zu einer Folge $x_n \in [a,b]$ von unendlich vielen verschiedenen Nullstellen einer Lösung $y \in S$ existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß ein Häufungspunkt $x_0 \in [a,b]$. O. E. sei schon die vorgegebene Folge gegen x_0 konvergent (ggf. Übergang zu Teilfolge). Nach dem Satz von Rolle gibt es dann auch gegen x_0 konvergente Folgen x_n' und x_n'' aus Nullstellen von y' und y''. Aufgrund der Stetigkeit

Beweis: Unter den Voraussetzungen des Satzes gibt es nach Satz 4.8 $c, d \in]a,b[$, sodass (L) und (L^+) diskonjugiert sind in $[a,c] \cap J$ und in $[d,b] \cap J$. Es wird nun der Fall $L \in K_I]a,b[$ behandelt, der Fall $L \in K_{II}]a,b[$ verläuft analog. Wählt man Stellen $x_1, x_2 \in [d,b[$ mit $x_1 < x_2$, dann haben die Lösungen

$$v_1 := u_2(.,x_1),\ v_2 := u_2(.,x_2) \in S$$

wegen der Diskonjugiertheit in $[d,b] \cap J$ jeweils keine weitere Nullstelle. Daher ist $v_1, v_2 \geq 0$ und

$$v_1 + v_2 > 0 \text{ in } [d,b] \cap J.$$

Wegen $L \in K_I]a,b[$ haben v_1 und v_2 in $]a,d[$ keine einfache Nullstelle, sodass $v_1, v_2 \geq 0$ auch in $]a,d[$ gilt. Insgesamt sind die Lösungen v_1 und v_2 also nichtnegativ in J.

Wegen $v_1(x_1) = 0 \neq v_2(x_1)$ sind v_1 und v_2 auch linear unabhängig. Für die dazu orthogonale Lösung

$$\zeta := \sigma W[v_1,v_2] \in [v_1,v_2]^\perp \subseteq S^+$$

($\sigma(x) = \exp\int p(x)dx$, siehe Anmerkung nach der Beziehung (2.5)) gilt nach der Charakterisierung (2.25) für die Inzidenz $v_j = u_2(.,x_j) \in S_\zeta = [\zeta]^\perp$ $(j = 1,2)$

$$\zeta(x_1) = \zeta(x_2) = 0.$$

Wegen der Diskonjugiertheit von (L^+) in $[x_1,x_2]$ ($\subseteq [d,b[$) sind x_1, x_2 einfache Nullstellen von ζ. Und da nach (2.3) und (2.4) von Abschnitt 2.5.3 mit $L \in K_I]a,b[$ auch $L^+ \in K_{II}^+[a,b[$ gilt, gibt es in $[a,x_1[\cap J$ für $\zeta \in S^+$ keine zweifache Nullstelle. Nach den in Abschnitt 2.6 angegebenen Formeln für

$$\begin{aligned} \zeta &= \sigma\cdot(v_1v_2' - v_1'v_2), \\ D^1[\zeta] &= \sigma\cdot(v_1v_2'' - v_1''v_2), \\ \zeta' &= D^1[\zeta] + p\zeta \end{aligned}$$

haben dann v_1 und v_2 keine gemeinsame Nullstelle x_0 in $[a,x_1[\cap J$, da diese eine zweifache Nullstelle von ζ wäre ($\zeta(x_0) = D^1[\zeta](x_0) = \zeta'(x_0) = 0$). Folglich gilt

$$v_1 + v_2 > 0 \text{ auch in } [a,x_1[\cap J.$$

Insgesamt ist dann die Lösung

$$y_1 := v_1 + v_2 > 0 \text{ in } J.$$

Wählt man noch $x_3 \in [d,b[$, dann ist die Lösung

$$v_3 := u_2(.,x_3)$$

wegen der Diskonjugiertheit in $[d,b] \cap J$ und wegen $L \in K_I]a,b[$ nichtnegativ in J (siehe obige Begründung der Nichtnegativität von v_1, v_2) und die Lösung

$$y_2 := y_1 + v_3 > 0 \text{ in } J.$$

Wegen $y_1(x_3) \neq 0 = v_3(x_3)$ sind y_1, v_3 und damit auch y_1, y_2 linear unabhängig.

Daher ist

$$z := \sigma W[y_1,y_2] \in S^+ \setminus \{o\} \text{ und } z \in S^+_{y_1} = [y_1]^\perp.$$

Wählt man nun noch $x_4 \in [d,b[$ mit $z(x_4) \neq 0$, dann ist (gemäß obiger Schlussweise für v_1, v_2 und v_3)

$$v_4 := u_2(.,x_4) \geq 0 \text{ in } J$$

und

$$y_3 := y_1 + v_4 > 0 \text{ in } J.$$

Weiter folgt mit (2.5)

$$\begin{aligned} \sigma W[y_1,y_2,y_3] &= B[y_3,z] = B[y_1,z] + B[v_4,z] \\ &= B[u_2(.,x_4),z](x_4) = z(x_4) \neq 0, \end{aligned}$$

sodass y_1, y_2, y_3 ein Fundamentalsystem aus drei in J nullstellenfreien Lösungen ist.

Analog beweist man unter derselben Voraussetzung die Existenz von drei linear unabhängigen in J nullstellenfreien Lösungen von (L^+). □

---

von y, y', y'' folgt $y(x_0) = y'(x_0) = y''(x_0) = 0$, sodass nach dem Existenz- und Einzigkeitssatz y die triviale Lösung $y \equiv 0$ ist. Es gibt also keine (nichttriviale) in $[a,b]$ oszillatorische Lösung von (L). Weiter folgt daraus, dass kein Punkt $x_0 \in J$ ein Häufungspunkt von Nullstellen einer nichttrivialen Lösung ist. Eine weitere Begründung für die letzte Aussage erfolgt mit Zusatz zu Satz 2.4, nach dem die Differentialgleichung in einer passenden Umgebung von x_0 diskonjugiert ist.

4.6 Analytischer Beweis der geometrischen Charakterisierung der Klasse $K_I \cup K_{II}$ durch die Spiralform der Integralkurve

Für die analytische Formulierung und den analytischen Beweis der geometrischen Charakterisierung der Klasse $K_I(J) \cup K_{II}(J)$ durch die Spiralform der Integralkurve C in Satz 4.10 werden noch der Hilfssatz 4.4, die Definitionen und Wechselbeziehungen einiger Hilfspunkte in J, Eigenschaften der durch die ersten konjugierten Punkte gegebenen Funktion η und die analytische Beschreibung der Spiralform der Integralkurve mit möglicher Selbstberührung bereitgestellt.

4.6.1 Ein Hilfssatz zur Existenz einer Nullstelle bestimmter Lösungen

Für Teil a) des Hilfssatzes 4.4 und für den in Abschnitt 4.6.5 folgenden Satz 4.10 gibt Birkhoff (1911), S. 120, eine geometrische Begründung. Eine geometrische Veranschaulichung des Hilfssatzes mittels der Integralkurve C gibt die Abbildung 4.2. Der Hilfssatz 4.4 gibt eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer Nullstelle bestimmter Lösungen im Innern eines Nichtdiskonjugiertheitsintervalls und kommt bei den Beweisen von Satz 3.4, Hilfssatz 4.6 und Satz 4.10 (hier siebenmal) zum Einsatz.

Hilfssatz 4.4 Hinreichende Bedingung für die Existenz einer Nullstelle bestimmter Lösungen im offenen Intervall $]c,d[$

Es sei $c, d, t_0 \in J$, $c < d$.

a) 1) Ist $t_0 < c$, $L \in K_I]t_0,d[$, $u_2(d,c) = 0$, $y \in S \setminus \{o\}$ mit
$$y(t_0) = 0$$
und im Fall eines Doppelpunkts (3.6) an den Stellen t_0, c noch
$$[y] \neq [u_2(.,c)],$$
dann hat y eine Nullstelle in $]c,d[$.
Die Behauptung gilt auch für $t_0 = c$ mit $y(c) = 0$ und $[y] \neq [u_2(.,c)]$, wenn für die Stellen c und d kein Doppelpunkt ohne Doppeltangente (3.10) vorliegt.

2) Ist $t_0 > d$, $L \in K_{II}]c,t_0[$, $u_2(c,d) = 0$, $y \in S \setminus \{o\}$ mit
$$y(t_0) = 0$$
und im Fall eines Doppelpunkts (3.6) an den Stellen d, t_0 noch
$$[y] \neq [u_2(.,d)],$$
dann hat y eine Nullstelle in $]c,d[$.
Die Behauptung gilt auch für $t_0 = d$ mit $y(d) = 0$ und $[y] \neq [u_2(.,d)]$, wenn für die Stellen c und d kein Doppelpunkt ohne Doppeltangente (3.10) vorliegt.

b) 1) Ist $t_0 > d$, $L \in K_I]c,t_0[$ $(\Leftrightarrow L^+ \in K_{II}^+]c,t_0[)$, $u_2^+(c,d) = 0$, $z \in S^+ \setminus \{o\}$ mit
$$z(t_0) = 0$$
und im Fall einer Doppeltangente (3.7) an den Stellen d, t_0 noch
$$[z] \neq [u_2^+(.,d)],$$
dann hat z eine Nullstelle in $]c,d[$.
Die Behauptung gilt auch für $t_0 = d$ mit $z(d) = 0$ und $[z] \neq [u_2^+(.,d)]$, wenn für die Stellen c und d keine Doppeltangente ohne Doppelpunkt (3.11) vorliegt.

2) Ist $t_0 < c$, $L \in K_{II}]t_0,d[$ $(\Leftrightarrow L^+ \in K_I^+]t_0,d[)$, $u_2^+(d,c) = 0$, $z \in S \setminus \{o\}$ mit
$$z(t_0) = 0$$
und im Fall einer Doppeltangente (3.7) an den Stellen t_0, c noch
$$[z] \neq [u_2^+(.,c)],$$

dann hat z eine Nullstelle in $]c,d[$.
Die Behauptung gilt auch für $t_0 = c$ mit $z(c) = 0$ und $[z] \neq [u_2^+(.,c)]$, wenn für die Stellen c und d keine Doppeltangente ohne Doppelpunkt (3.11) vorliegt.

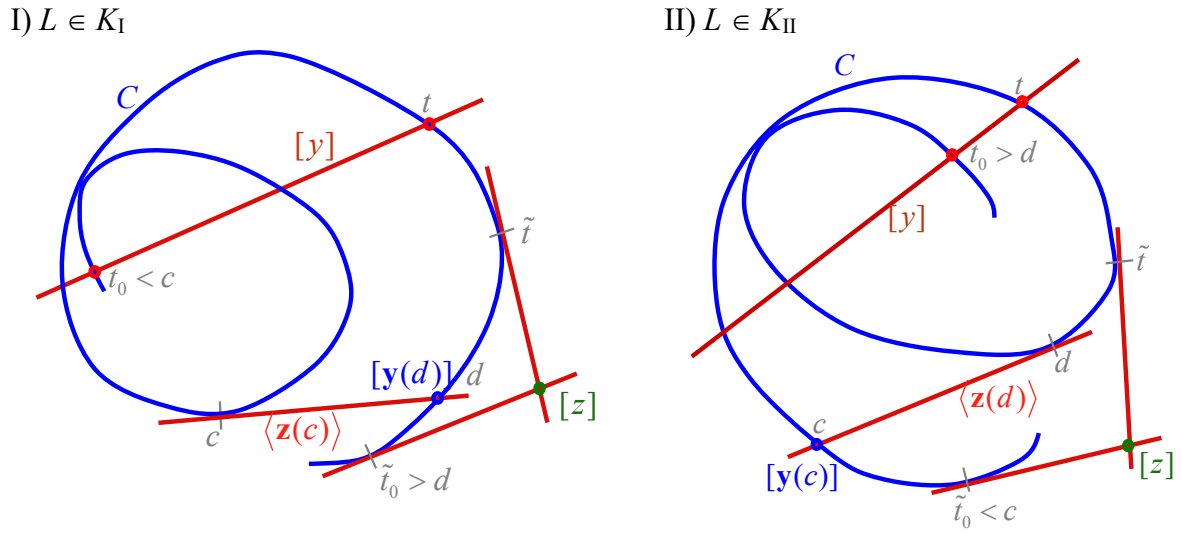


Abb. 4.2 Ein Kurvenstück der Integralkurve C mit Spiralform bei möglicher Selbstberührung, im Fall I $L \in K_I$ nach außen verlaufend und im Fall II $L \in K_{II}$ nach innen verlaufend. Im Fall I liege ein Treffpunkt $[\mathbf{y}(d)]$ der Tangente $\langle \mathbf{z}(c) \rangle$ vor, im Fall II liege der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(c)]$ auf der Tangente $\langle \mathbf{z}(d) \rangle$. Jede Gerade durch den Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(t_0)]$ trifft dann auch das Kurvenstück $C_{]c,d[}$ und jeder Punkt auf der Tangente $\langle \mathbf{z}(\tilde{t}_0) \rangle$ des Kurvenpunkts $[\mathbf{y}(\tilde{t}_0)]$ liegt dann auch auf einer Tangente an das Kurvenstück $C_{]c,d[}$

Beweis für a, 2): Zum Beweis werden die beiden Fälle

α) $t_0 = d$,
β) $t_0 > d$

unterschieden.

α) Es sei $t_0 = d$. Wegen $L \in K_{II}$ in $]c,t_0[=]c,d[$ ist nach (2.3) und (2.4) von Abschnitt 2.5.3 $L^+ \in K_I^+]c,d]$ und $L \in K_{II}[c,d[$. Es werden jetzt die beiden Unterfälle

i) $L \notin K_{II}[c,d]$ und
ii) $L \in K_{II}[c,d]$

unterschieden.

i) Falls $L \notin K_{II}[c,d]$ (bei $L \in K_{II}[c,d[$) ist, existiert ein $t \in [c,d[$, sodass die Lösung $u_2(.,t)$ in d eine einfache Nullstelle besitzt:

$$u_2(d,t) = 0 \neq u_2'(d,t).$$

Dabei kann der Fall $t = c$ nicht eintreten, da sonst $u_2(c,d) = u_2(d,c) = 0 \neq u_2'(d,c)$, also für c und d ein Doppelpunkt ohne Doppeltangente (3.10) vorliegt, was aber voraussetzungsgemäß ausgeschlossen ist. Also ist $t \in]c,d[$. Aus $u_2^+(t,d) = u_2(d,t) = 0$ und $L^+ \in K_I^+]c,d]$ folgt $[u_2^+(.,d)] = [u_2^+(.,t)]$ und wegen $y(d) = 0$ mit (2.25) $y \perp [u_2^+(.,d)] = [u_2^+(.,t)]$ und $y(t) = 0$.

ii) Fall $L \in K_{II}[c,d]$: Im Fall I $t_0 = d$ ist nach Voraussetzung

$$y(d) = 0,\ [y] \neq [u_2(.,d)] \text{ und somit } y'(d) \neq 0.$$

Weiter ist wegen $L \in K_{II}[c,d]$ die Stelle c höchstens eine einfache Nullstelle von y, also

$$y(c) \neq 0 \text{ oder } y(c) = 0 \neq y'(c).$$

Für die Lösung $u := u_2(.,d)$ gilt

$$u(c) = 0 = u(d) = u'(d).$$

Nimmt man nun an, dass y nullstellenfrei in $]c,d[$ ist, dann folgt mittels Hilfssatz 4.1, 2) (mit $u = u_2(.,d)$ und $v = y$, vertauschten Rollen von c und d, also $\lim\limits_{x\to c}\frac{u(x)}{v(x)} \in \mathbb{R}$ und $\lim\limits_{x\to d}\frac{u(x)}{v(x)} = 0$), dass es reelle λ, $\gamma \neq 0$ und eine Stelle $\xi \in [c,d[$ gibt mit

$$w := u_2(.,d) - \lambda y = \gamma u_2(.,\xi).$$

Für diese Lösung w ist $w(d) = 0$, $w'(d) = -\lambda y'(d) \neq 0$, $w(\xi) = w'(\xi) = 0$, was aber im Widerspruch zu $L \in K_{II}[c,d]$ steht. Also hat y eine Nullstelle in $]c,d[$.

β) Es sei $t_0 > d$. Wegen $L \in K_{II}]c,t_0[$ ist nach (2.3) und (2.4) von Abschnitt 2.5.3 $L^+ \in K_I^+]c,t_0]$, $L \in K_{II}[c,t_0[$ und damit auch $L \in K_{II}[c,d]$.

I) Im Fall $u_2^+(t,t_0) = 0$ für ein $t \in]c,d[$ gilt wegen $L^+ \in K_I^+]c,t_0]$ die Übereinstimmung $[u_2^+(.,t)] = [u_2^+(.,t_0)]$ und damit wegen $y(t_0) = 0$ nach (2.25) auch $y(t) = 0$.

II) Im Fall $u_2^+(.,t_0) \neq 0$ in $]c,d[$ werden noch die zwei Unterfälle

i) $[u_2^+(.,d)] = [u_2^+(.,t_0)]$ und

ii) $[u_2^+(.,d)] \neq [u_2^+(.,t_0)]$

unterschieden.

i) Ist $[u_2^+(.,d)] = [u_2^+(.,t_0)]$, also an den Stellen d und t_0 ein Doppelpunkt (3.6) $[\mathbf{y}(d)] = [\mathbf{y}(t_0)]$ von C vorliegend, dann ist wegen $y(t_0) = 0$ nach (2.25) auch $y(d) = 0$ und nach Voraussetzung $[y] \neq [u_2(.,d)]$. Wegen der Voraussetzung $L \in K_{II}]c,t_0[$ ist nach Abschnitt 2.5.3 $L \in K_{II}[c,t_0[$, wegen $t_0 > d$ dann $L \in K_{II}[c,d]$ und nach Abschnitt 3.1.10 (Eigenschaft c) für die Kurvenparameter c und d ein Doppelpunkt ohne Doppeltangente (3.10) ausgeschlossen. Daher folgt die Aussage, dass y eine Nullstelle in $]c,d[$ besitzt, nach Beweisteil α) „$t_0 = d$“, ii).

ii) Ist $[u_2^+(.,d)] \neq [u_2^+(.,t_0)]$, also für die Kurvenparameter d und t_0 ein Doppelpunkt (3.6) von C ausgeschlossen, dann gilt wegen $L \in K_{II}]c,t_0[$ nach (2.3) und (2.4) von Abschnitt 2.5.3 $L^+ \in K_I^+]c,t_0]$, daher die Ungleichung

$$u_2^+(d,t_0) \neq 0,$$

da sonst d eine einfache Nullstelle von $u_2^+(.,t_0)$ wäre, im Widerspruch zur Klassenzugehörigkeit. Die Lösung $u_2^+(.,t_0)$ ist also im vorliegenden Fall II, ii) auch noch im Randpunkt d von Null verschieden. Es wird jetzt außerdem gezeigt, dass die Lösung $u_2^+(.,t_0)$ im vorliegenden Fall II, ii) auch noch im Randpunkt c von Null verschieden ist:

$$u_2^+(c,t_0) \neq 0.$$

Zunächst folgt

$$[u_2^+(.,c)] \neq [u_2^+(.,t_0)],$$

d. h. dass auch für die Kurvenparameter c und t_0 kein Doppelpunkt (3.6) vorliegt, da sonst $u_2^+(.,t_0) = \lambda u_2^+(.,c)$ mit einem reellen λ und wegen $u_2(c,d) = 0$ auch $u_2^+(d,t_0) = \lambda u_2^+(d,c) = \lambda u_2(c,d) = 0$ wäre, im Widerspruch zur oben hergeleiteten Ungleichung. Demzufolge hat $u_2^+(.,t_0)$ zumindest keine zweifache Nullstelle in c.

Weiter ist nach Voraussetzung $u_2(c,d) = 0$. O. E. sei c die größte Nullstelle von $u_2(.,d)$ mit $c < d$, also

$$u_2(.,d) > 0 \text{ in }]c,d[.$$

Wegen $L \in K_{II}[c,d]$ ergibt sich dann nach Satz 4.5, a, 2) die Diskonjugiertheit von (L) und (L^+) in $[c,d]$.

Nimmt man nun an, dass $u_2^+(c,t_0) = 0$ ist, dann folgt mittels Hilfssatz 4.1, 1) (mit $u = u_2^+(.,c)$, $v = u_2^+(.,t_0)$, $u(c) = u'(c) = 0$, $v(c) = 0 \neq v'(c)$, $u(d) = 0 \neq v(d)$, $u(x_0) > 0$ für ein x_0 nahe bei c, o. E.

$v > 0$ in $]c,d]$, da sonst $v = -\,u_2^+(.,t_0)$ gewählt wird), dass es reelle λ, $\gamma \neq 0$ und eine Stelle $\xi \in\,]c,d[$ gibt mit

$$w := u_2^+(.,c) - \lambda u_2^+(.,t_0) = \gamma u_2^+(.,\xi)$$

und $w(c) = 0 = w(\xi) = w'(\xi)$, im Widerspruch zur Diskonjugiertheit in $[c,d]$. Also ist $u_2^+(c,t_0) \neq 0$ und im vorliegenden Fall II insgesamt

$$z_1 := u_2^+(.,t_0) \neq 0 \text{ in } [c,d].$$

Setzt man noch

$$z_2 := u_2^+(.,c) \quad \text{und}$$

$$y_3 := \frac{1}{\sigma} W[z_1, z_2]$$

($\sigma = \exp\int p dx$), dann ist $z_2(c) = 0$, $z_2(d) = u_2^+(d,c) = u_2(c,d) = 0$, also für $t = c$ und $t = d$ die Bedingung β, 1) des Satzes 3.2, b) erfüllt. Und da wegen der Diskonjugiertheit in $[c,d]$ auch noch $z_2 = u_2^+(.,c) > 0$ in $]c,d[$ ist, folgt nach Satz 3.2, b), dass die Anzahl der mit ihren Vielfachheiten gezählten Nullstellen der Produktfunktion $z_2 \cdot y_3$ und damit der Lösung y_3 in $]c,d[$ ungerade ist, also insbesondere ≥ 1 ist. Es gibt also ein $x_0 \in\,]c,d[$ mit $y_3(x_0) = 0$.

Im Falle $[y] = [y_3]$ folgt die Behauptung des Hilfssatzes 4.4 unmittelbar: $y(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in\,]c,d[$.

Im Falle $[y] \neq [y_3]$, also der linearen Unabhängigkeit von y und y_3, folgt die Behauptung mittels Hilfssatz 2.1 (in Abschnitt 2.7.4 über die Trennung der Nullstellen der Funktionen $u = y_3$ und $v = y$ mit nicht verschwindender Wronski-Determinante): Es ist nämlich

$$y_3(x_0) = 0 \text{ für ein } x_0 \in\,]c,d[,$$

wegen der Definition von y_3 nach Abschnitt 2.6 $B[y_3,z_2] = 0$ und $B[y_3,z_1] = 0$, nach Abschnitt 2.7.2

$$y_3(c) = B[y_3, u_2^+(.,c)](c) = B[y_3,z_2] = 0,$$

wegen $y(t_0) = 0$ nach (2.25)

$$y \perp u_2^+(.,t_0) = z_1,$$

wegen der linearen Unabhängigkeit von y und y_3 und Hilfssatz 2.2, 3)

$$[z_1]^\perp = [y_3,y],$$

$$[z_1] = [y_3,y]^\perp = [\sigma W[y_3,y]],$$

$z_1 = \mu\sigma W[y_3,y]$ mit $\mu \neq 0$, $W[y_3,y] = z_1/(\mu\sigma) \neq 0$ in $[c,d]$. Die Funktionen y_3 und y haben somit eine in $[c,x_0]$ nicht verschwindende Wronski-Determinante $W[y_3,y]$ und y_3 besitzt die Nullstellen c und x_0. Also gibt es nach Hilfssatz 2.1 für y eine Nullstelle in $]c,x_0[\subseteq\,]c,d[$.

Insgesamt ist damit in allen betrachteten Fällen α) i) und ii) und β) I) und II) i) und ii) für y die Existenz einer Nullstelle in $]c,d[$ nachgewiesen. □

4.6.2 Definition und Wechselbeziehungen von maximalen Intervallen bestimmter Klassenzugehörigkeiten

Für die analytische Formulierung und Begründung des noch folgenden Satzes 4.10 zur Charakterisierung der Klasse $K_I(J) \cup K_{II}(J)$ werden nun einige **Hilfspunkte** in J definiert, die speziell in den Punkten 1) bis 7) Endpunkte von maximalen Intervallen einer bestimmten Klassenzugehörigkeit der Differentialgleichung beschreiben. In Punkt 8) werden maximale Intervalle der Nullstellenfreiheit der Lösungen $u_2(.,c)$ und $u_2^+(.,c)$ definiert. In Punkt 9) wird auf die entsprechenden maximalen Intervalle der adjungierten Differentialgleichung hingewiesen. Anschließend werden Wechselbeziehungen zwischen diesen Hilfspunkten hergeleitet. Im darauffolgenden Abschnitt werden dann Aussagen über die durch die ersten rechten konjugierten Punkte gegebene Funktion η bewiesen.

Definition von Hilfspunkten als Endpunkte von maximalen Intervallen bestimmter Klassenzugehörigkeiten der Differentialgleichungen (L) **und** (L^+) **in** J

1) Für $c \in J$ sei

$$r_{12}(c) = \inf R_{12}(c) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

das (eigentliche oder uneigentliche) Infimum[10] der Menge R_{12}(c) aller $t \in J$, $t > c$, für welche die Lösung $u_2(.,t)$ eine Nullstelle $x \in [c,t[$ besitzt bzw. $L \notin C_I$ in $[c,t]$ ist (siehe Azbelev, Caljuk (1964), S. 233, 237):

$$r_{12}(c) = \inf \{t \in J : t > c,\ u_2(x,t) = 0 \text{ für ein } x = x(t) \in [c,t[\}$$
$$= \inf \{t \in J : t > c,\ L \notin C_I[c,t]\}.$$

Der Fall des uneigentlichen Infimums $r_{12}(c) = -\infty$ kann nicht auftreten, da bei nichtleerer Menge R_{12}(c) diese stets durch die untere Schranke c nach unten beschränkt ist und somit $r_{12}(c)$ in $[c,+\infty[\subseteq \mathbb{R}$ liegt.

Der Fall des uneigentlichen Infimums $r_{12}(c) = +\infty$ für die leere Menge $R_{12}(c) = \emptyset$ bedeutet, dass die Differentialgleichung (L) in $[c,b] \cap J$ zur Klasse C_I gehört.

Der Fall eines eigentlichen Infimums $r_{12}(c) \in \mathbb{R}$ bzw. $-\infty < r_{12}(c) < +\infty$ bedeutet $R_{12}(c) \neq \emptyset$ und nach dem Zusatz zu Satz 2.4 (Diskonjugiertheit in $[c-\delta,c+\delta]$ für ein $\delta > 0$)

$$r_{12}(c) \in [c+\delta,b] \cap J \text{ für ein } \delta > 0.$$

In diesem Fall ist die Stelle $r_{12}(c)$ auch das Supremum aller $d \in J$, $d > c$, mit $L \in C_I[c,d]$ und das halboffene Intervall $[c,r_{12}(c)[$ das maximale C_I-Intervall der Form $[c,d[$, $d \in\ ]c,b]$ (siehe Azbelev, Caljuk (1964), S. 233).

2) Für $c \in J$ sei

$$r_{21}(c) = \inf R_{21}(c) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

das Infimum der Menge $R_{21}(c)$ aller $t \in J$, $t > c$, welche jeweils eine Nullstelle einer Lösung $u_2(.,x)$ mit $x \in [c,t[$ sind bzw. für welche $L \notin C_{II}$ in $[c,t]$ ist (siehe Azbelev, Caljuk (1964), S. 233, 237):

$$r_{21}(c) = \inf \{t \in J : t > c,\ u_2(t,x) = 0 \text{ für ein } x \in [c,t[\}$$
$$= \inf \{t \in J : t > c,\ L \notin C_{II}[c,t]\}.$$

Der Fall $r_{21}(c) = +\infty$ bei leerer Menge $R_{21}(c) = \emptyset$ bedeutet, dass die Differentialgleichung (L) in $[c,b] \cap J$ zur Klasse C_{II} gehört.

Der Fall $r_{12}(c) \in \mathbb{R}$ bedeutet $R_{21}(c) \neq \emptyset$ und nach dem Zusatz zu Satz 2.4

$$r_{21}(c) \in [c+\delta,b] \cap J \text{ für ein } \delta > 0.$$

In diesem Fall ist die Stelle $r_{21}(c)$ auch das Supremum aller $d \in J$, $d > c$, mit $L \in C_{II}[c,d]$ und das halboffene Intervall $[c,r_{21}(c)[$ das maximale C_{II}-Intervall der Form $[c,d[$, $d \in\ ]c,b]$ (siehe Azbelev, Caljuk (1964), S. 233).

3) Für $c \in J$ sei

$$r_{22}(c) = \inf R_{22}(c) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

---

[10] Das Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen besagt, dass jede nach unten beschränkte nichtleere Menge M ein Infimum (eine größte untere Schranke, eine untere Grenze) inf M in $\mathbb{R}$ besitzt. Eine untere Schranke α von M ($\alpha \leq x\ \forall\ x \in M$) ist untere Grenze von M genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in M$ mit ($\alpha \leq$) $x < \alpha + \varepsilon$ gibt. Analog besitzt nach diesem Axiom jede nach oben beschränkte nichtleere Menge M ein Supremum (eine kleinste obere Schranke, eine obere Grenze) sup M in $\mathbb{R}$ (Erwe, 1967, S. 53). Friedhelm Erwe (1922–2021) war ein deutscher Mathematiker, der sich mit Funktionentheorie und Limitierungstheorie befasste. Kurzschreibweisen mit uneigentlichen Infima und Suprema $\pm\infty$:

inf $M = +\infty$ (uneigentliches Infimum, da nicht in $\mathbb{R}$ gelegen), falls M leer ist;

inf $M = -\infty$ (uneigentliches Infimum), falls M nicht nach unten beschränkt ist;

$-\infty <$ inf $M < +\infty$ (eigentliches Infimum), falls M nichtleer und nach unten beschränkt ist.

sup $M = -\infty$ (uneigentliches Supremum, da nicht in $\mathbb{R}$), falls $M = \emptyset$;

sup $M = +\infty$ (uneigentliches Supremum), falls M nicht nach oben beschränkt ist;

$-\infty <$ sup $M < +\infty$ (eigentliches Supremum), falls M nichtleer und nach oben beschränkt ist.

das Infimum der Menge $R_{22}(c)$ aller $t \in J$, $t > c$, für welche die Lösung $u_2(.,t)$ eine zweifache Nullstelle $x \in [c,t[$ besitzt (siehe Azbelev, Caljuk (1964), S. 233, 237):

$$r_{22}(c) = \inf \{t \in J : t > c,\ u_2(x,t) = u_2'(x,t) = 0 \text{ für ein } x \in [c,t[\}.$$

Der Fall $r_{22}(c) = +\infty$ für die leere Menge $R_{22}(c) = \emptyset$ bedeutet, dass die Differentialgleichung (L) in $[c,b] \cap J$ keine nichttriviale Lösung mit zwei doppelten Nullstellen besitzt.
Der Fall $r_{22}(c) \in \mathbb{R}$ bedeutet $R_{22}(c) \neq \emptyset$ und nach dem Zusatz zu Satz 2.4 (Diskonjugiertheit in $[c-\delta,c+\delta]$ für ein $\delta > 0$)

$$r_{22}(c) \in [c+\delta,b] \cap J \text{ für ein } \delta > 0.$$

In diesem Fall ist die Stelle $r_{22}(c)$ auch das Supremum aller $d \in J$, $d > c$, für die im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ keine zwei doppelten Nullstellen einer nichttrivialen Lösung von (L) auftreten. Weiter ist das halboffene Intervall $[c,r_{22}(c)[$ das maximale Intervall der Form $[c,d[$, $d \in\ ]c,b]$, in dem keine zwei doppelten Nullstellen einer nichttrivialen Lösung von (L) auftreten (siehe Azbelev, Caljuk (1964), S. 233).

4) Für $c \in J$ sei

$$k_{12}(c) = \inf K_{12}(c) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

das Infimum der Menge $K_{12}(c)$ aller $t \in J$, $t > c$, für welche die Lösung $u_2(.,t)$ eine (genau) einfache Nullstelle $x \in [c,t[$ besitzt bzw. $L \notin K_I$ in $[c,t]$ ist:

$$\begin{aligned} k_{12}(c) &= \inf \{t \in J : t > c,\ u_2(x,t) = 0 \neq u_2'(x,t) \text{ für ein } x \in [c,t[\} \\ &= \inf \{t \in J : t > c,\ L \notin K_I[c,t]\}. \end{aligned}$$

Der Fall $k_{12}(c) = +\infty$ für die leere Menge $K_{12}(c) = \emptyset$ bedeutet, dass die Differentialgleichung (L) in $[c,b] \cap J$ zur Klasse K_I gehört.
Der Fall $k_{12}(c) \in \mathbb{R}$ bedeutet $K_{12}(c) \neq \emptyset$ und nach dem Zusatz zu Satz 2.4

$$k_{12}(c) \in [c+\delta,b] \cap J \text{ für ein } \delta > 0.$$

In diesem Fall ist $k_{12}(c)$ auch das Supremum aller $d \in J$, $d > c$, mit $L \in K_I[c,d]$ und $[c,k_{12}(c)[$ das maximale K_I-Intervall der Form $[c,d[$, $d \in\ ]c,b]$.

5) Für $c \in J$ sei

$$k_{21}(c) = \inf K_{21}(c) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

das Infimum der Menge $K_{21}(c)$ aller $t \in J$, $t > c$, welche jeweils eine (genau) einfache Nullstelle einer Lösung $u_2(.,x)$ mit $x \in [c,t[$ sind bzw. für welche $L \notin K_{II}$ in $[c,t]$ ist:

$$\begin{aligned} k_{21}(c) &= \inf \{t \in J : t > c,\ u_2(t,x) = 0 \neq u_2'(t,x) \text{ für ein } x \in [c,t[\} \\ &= \inf \{t \in J : t > c,\ L \notin K_{II}[c,t]\}. \end{aligned}$$

Der Fall $k_{21}(c) = +\infty$ für die leere Menge $K_{21}(c) = \emptyset$ bedeutet, dass die Differentialgleichung (L) in $[c,b] \cap J$ zur Klasse K_{II} gehört.
Der Fall $k_{21}(c) \in \mathbb{R}$ bedeutet $K_{21}(c) \neq \emptyset$ und nach dem Zusatz zu Satz 2.4

$$k_{21}(c) \in [c+\delta,b] \cap J \text{ für ein } \delta > 0.$$

In diesem Fall ist $k_{21}(c)$ auch das Supremum aller $d \in J$, $d > c$, mit $L \in K_{II}[c,d]$ und $[c,k_{21}(c)[$ das maximale K_{II}-Intervall der Form $[c,d[$, $d \in\ ]c,b]$.

6) Für $c \in J$ sei

$$\eta(c) = \eta_+(c) = \inf N_+(c) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

das Infimum der Menge $N_+(c)$ aller $t \in J$, $t > c$, für welche (L) nichtdiskonjugiert in $[c,t]$ ist (siehe Barrett (1969), S. 441, für die Dgl. (E_3)):

$$\begin{aligned} \eta(c) &= \inf \{t \in J : t > c,\ \exists\, y \in S \setminus \{o\} \text{ mit mindestens 3 Nullstellen in } [c,t]\} \\ &= \inf \{t \in J : t > c,\ \text{(L) nichtdiskonjugiert in } [c,t]\}. \end{aligned}$$

Der Fall $\eta(c) = +\infty$ für die leere Menge $N_+(c) = \emptyset$ bedeutet, dass die Differentialgleichung (L) in $[c,b] \cap J$ diskonjugiert ist.
Der Fall $\eta(c) \in \mathbb{R}$, d. h. $\eta(c) \in J$, bedeutet $N_+(c) \neq \emptyset$ und nach dem Zusatz zu Satz 2.4

$$\eta(c) \in [c+\delta,b] \cap J \text{ für ein } \delta > 0.$$

In diesem Fall ist $\eta(c)$ auch das Supremum aller $d \in J$, $d > c$, für die (L) in $[c,d]$ diskonjugiert ist und $[c,\eta(c)[$ das maximale Diskonjugiertheitsintervall der Form $[c,d[$, $d \in]c,b]$. Es heißt $\eta(c)$ der **erste rechte konjugierte Punkt** von c.

7) In analoger Weise wird für $c \in J$ der **erste linke konjugierte Punkt** $\eta_-(c)$ definiert: Es sei
$$\eta_-(c) = \sup N_-(c) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$
das Supremum der Menge $N_-(c)$ aller $t \in J$, $t < c$, für welche (L) nichtdiskonjugiert in $[t,c]$ ist.
Der Fall $\eta_-(c) = -\infty$ für die leere Menge $N_-(c) = \emptyset$ bedeutet, dass die Differentialgleichung (L) in $[a,c] \cap J$ diskonjugiert ist.
Der Fall $\eta_-(c) \in \mathbb{R}$, d. h. $\eta_-(c) \in J$, bedeutet $N_-(c) \neq \emptyset$ und nach dem Zusatz zu Satz 2.4
$$\eta_-(c) \in [a,c-\delta] \cap J \text{ für ein } \delta > 0.$$
In diesem Fall ist $\eta_-(c)$ auch das Infimum aller $d \in J$, $d < c$, für die (L) in $[d,c]$ diskonjugiert ist und $]\eta_-(c),c]$ das maximale Diskonjugiertheitsintervall der Form $]d,c]$, $d \in [a,c[$.

8) Sei $c \in J$ und das Indexpaar $(i,j) \in \{(1,2), (2,1), (2,2)\}$. Falls es ein $d \in J$, $d > c$, gibt, sodass für eine nichttriviale Lösung y von (L) c eine mindestens i-fache und d eine mindestens j-fache Nullstelle ist, dann sei $z_{ij}(c)$ das kleinste derartige d (siehe Barrett (1969), S. 441, für die Dgl. (E_3)): Ist also $Z_{ij}(c)$ die Menge aller $d \in J$, $d > c$, für welche jeweils ein $y \in S \setminus \{o\}$ existiert mit c als zumindest i-facher und d als zumindest j-facher Nullstelle und ist $Z_{ij}(c) \neq \emptyset$, dann ist
$$\begin{aligned} z_{ij}(c) &:= \inf Z_{ij}(c) \\ &= \inf \{d \in J : d > c,\ c\ i\text{-fache und } d\ j\text{-fache Nullstelle eines } y \in S \setminus \{o\}\} \\ &= \min Z_{ij}(c) \in]c,b] \cap J \end{aligned}$$
(Beweis folgt).

Im Fall $Z_{ij}(c) = \emptyset$ wird $z_{ij}(c) = +\infty$ gesetzt.

9) Analog sind für die Differentialgleichung (L^+) die Größen $r_{ij}^+(c)$, $k_{ij}^+(c)$ und $z_{ij}^+(c)$ definiert.

Beweis zu 8): a) $z_{ij}(c) = \min Z_{ij}(c)$: Im Fall $Z_{ij}(c) \neq \emptyset$ liegen wegen der Diskonjugiertheit in $[c,c+\delta]$ (für ein $\delta > 0$) und wegen $i + j \geq 3$ die Punkte $d \in Z_{ij}(c)$ in $]c+\delta,b] \cap J$. Daher gilt
$$\alpha := \inf Z_{ij}(c) \in [c+\delta,b] \cap J.$$
Die $d \in Z_{ij}(c)$ sind im Fall $(i,j) = (2,1), (2,2)$ Nullstellen der Lösung $u_2(.,c)$ und im Fall $(i,j) = (1,2)$ Stellen $d > c$ mit $u_2(c,d) = 0$ und wegen (2.1) $u_2^+(d,c) = u_2(c,d)$ Nullstellen der Lösung $u_2^+(.,c)$. In einer Fußnote von Abschnitt 4.5 wird eine Begründung dafür gegeben, dass α kein Häufungspunkt der Nullstellen der Lösung $u_2(.,c)$ bzw. $u_2^+(.,c)$ ist. Somit ist das als Infimum definierte α das Minimum der Menge $Z_{ij}(c)$:
$$z_{ij}(c) = \min Z_{ij}(c).$$
Im Fall $(i,j) = (2,1)$ ist $z_{21}(c)$ die *kleinste Nullstelle* d $(d > c)$ der Lösung $u_2(.,c)$ bzw. die kleinste Stelle d $(d > c)$ mit $u_2^+(c,d) = u_2(d,c) = 0$. Außerdem ist $u_2(.,c) > 0$ in $]c,z_{21}(c)[$.
Im Fall $(i,j) = (1,2)$ ist $z_{12}(c)$ die kleinste Stelle $d > c$ mit $u_2(c,d) = 0$ bzw. wegen (2.1) $u_2^+(d,c) = u_2(c,d) = 0$ die *kleinste Nullstelle* $d > c$ der Lösung $u_2^+(.,c)$. Außerdem ist $u_2^+(.,c) > 0$ in $]c,z_{12}(c)[$.
Im Fall $(i,j) = (2,2)$ ist $z_{22}(c)$ die *kleinste doppelte Nullstelle* $d > c$ der Lösung $u_2(.,c)$ bzw. die kleinste Stelle $d > c$ mit $u_2(c,d) = u_2'(c,d) = 0$ und wegen (2.1) $u_2^+(d,c) = u_2(c,d) = 0$, $-u_1^+(d,c) = u_2'(c,d) = 0$ dann auch die kleinste gemeinsame Nullstelle $d > c$ von $u_2^+(.,c)$ und $u_1^+(.,c)$. Die Stelle $z_{22}(c)$ ist aber nicht notwendig eine doppelte Nullstelle von $u_2^+(.,c)$ und daher nicht notwendig gleich der kleinsten doppelten Nullstelle $z_{22}^+(c)$ von $u_2^+(.,c)$. Geometrisch gesehen liegt an den Stellen c und $d := z_{22}(c)$ nach (3.7) eine Doppeltangente vor, die aber nicht notwendig auch ein Doppelpunkt (3.6) sein muss.

b) $z_{ij}^+(c) = \min Z_{ij}^+(c)$: Analog zu a) ergibt sich im Fall $Z_{21}^+(c) \neq \emptyset$, dass $z_{21}^+(c)$ die kleinste Nullstelle $d > c$ der Lösung $u_2^+(.,c)$ bzw. die kleinste Stelle $d > c$ mit $u_2(c,d) = u_2^+(d,c) = 0$ ist. Außerdem ist $u_2^+(.,c) > 0$ in $]c, z_{21}^+(c)[$.

Weiter ist im Fall $Z_{12}^+(c) \neq \emptyset$ die Stelle $z_{12}^+(c)$ die kleinste Stelle $d > c$ mit $u_2^+(c,d) = 0$ bzw. die kleinste Nullstelle $d > c$ der Lösung $u_2(.,c)$. Außerdem ist $u_2(.,c) > 0$ in $]c, z_{12}^+(c)[$.

Ferner ist im Fall $Z_{22}^+(c) \neq \emptyset$ die Stelle $z_{22}^+(c)$ die kleinste doppelte Nullstelle $d > c$ der Lösung $u_2^+(.,c)$ bzw. die kleinste Stelle $d > c$ mit $u_2^+(c,d) = D^1[u_2^+](c,d) = 0$ und dann auch die kleinste gemeinsame Nullstelle von $u_2(.,c)$ und $u_1(.,c)$. Geometrisch gesehen liegt an den Stellen c und $d := z_{22}^+(c)$ nach (3.6) ein Doppelpunkt vor, der aber nicht notwendig auch eine Doppeltangente (3.7) sein muss.

Insgesamt ist für $i + j \geq 3$, also für die Indexpaare $(i,j) = (2,1), (1,2), (2,2)$, und die Menge

$$Z_{ij}^+(c) := \{d \in J : d > c,\ c\ i\text{-fache und } d\ j\text{-fache Nullstelle eines } z \in S^+ \setminus \{o\}\}$$

im Fall $Z_{ij}^+(c) \neq \emptyset$ somit

$$z_{ij}^+(c) := \inf Z_{ij}^+(c) = \min Z_{ij}^+(c). \qquad \square$$

Wechselbeziehungen für die Hilfspunkte

Aus der Definition der Größen $R_{ij}(c)$, $R_{ij}^+(c)$, $r_{ij}(c)$ und $r_{ij}^+(c)$ und unter der Verwendung der Beziehung (2.1) $u_2^+(t,x) = u_2(x,t)$ erhält man unmittelbar die Übereinstimmung der Mengen $R_{ij}^+(c) = R_{ji}(c)$ und der Infima

(4.2) $\quad r_{ij}^+(c) = r_{ji}(c)$ für $\{i,j\} = \{1,2\}$ (und nicht für $(i,j) = (2,2)$), $c \in J$.

Aus den Beschreibungen der Größen $z_{ij}(c)$ und $z_{ij}^+(c)$ im obigen Beweis zu 8) als kleinste Nullstellen der speziellen Lösungen $u_2(.,c)$ und $u_2^+(.,c)$ erhält man für $\{i,j\} = \{1,2\}$ bzw. $i + j = 3$, also für $(i,j) = (1,2)$ und $(i,j) = (2,1)$, die folgenden Übereinstimmungen: $Z_{ij}^+(c) = Z_{ji}(c)$ und

(4.3) $\quad z_{ij}^+(c) = z_{ji}(c)$ für $\{i,j\} = \{1,2\}$ (und nicht für $(i,j) = (2,2)$), $c \in J$.

Die Mengen $N_+(c)$, $R_{ij}(c)$, $K_{ij}(c)$ und $Z_{ij}(c)$ enthalten jeweils genau die Punkte $t \in J$ $(t \geq c)$, für welche es im Intervall $[c,t]$ eine bestimmte Nullstellenkonfiguration einer zu t gehörigen nichttrivialen Lösung $y \in S$ gibt: Bei $t \in N_+(c)$ gibt es drei Nullstellen x_1, x_2, t $(c \leq x_1 \leq x_2 \leq t)$ von y, bei $t \in R_{ij}(c)$ ist x $(c \leq x < t)$ eine mindestens i-fache und t eine mindestens j-fache Nullstelle von y, bei $t \in K_{ij}(c)$ ist x $(c \leq x < t)$ eine genau i-fache und t eine genau j-fache Nullstelle von y, bei $t \in Z_{ij}(c)$ ist $x = c$ eine mindestens i-fache und t eine mindestens j-fache Nullstelle von y. Aus den Inklusionen

$$\begin{aligned} R_{22}(c) &\subseteq R_{ij}(c) \subseteq N_+(c), \\ K_{ij}(c) &\subseteq R_{ij}(c), \\ Z_{22}(c) \subseteq Z_{ij}(c) &\subseteq R_{ij}(c) \end{aligned}$$

der Mengen ergeben sich für deren Infima die Ungleichungen

(4.4)
$$\begin{aligned} \eta(c) \leq\ & r_{ij}(c) \leq r_{22}(c), \\ & r_{ij}(c) \leq k_{ij}(c), \\ & r_{ij}(c) \leq z_{ij}(c) \leq z_{22}(c) \quad \text{für } \{i,j\} = \{1,2\},\ c \in J. \end{aligned}$$

Aus der Definition der Größen $K_{ij}(c)$, $K_{ij}^+(c)$, $k_{ij}(c)$ und $k_{ij}^+(c)$ $(\{i,j\} = \{1,2\})$ und den in Abschnitt 2.5.3 angegebenen Eigenschaften der Klassen K_I, K_{II}, K_I^+ und K_{II}^+ lassen sich für die zugehö-

rigen Infima die beiden folgenden Ungleichungen herleiten: Zu beliebigem $c \in J$ ist der K_I^+-Punkt $k_{12}^+(c)$ höchstens so groß wie der K_{II}-Punkt $k_{21}(c)$ und der K_I-Punkt $k_{12}(c)$ höchstens so groß wie der K_{II}^+-Punkt $k_{21}^+(c)$:

(4.5) $$k_{12}^+(c) \le k_{21}(c),$$
$$k_{12}(c) \le k_{21}^+(c) \quad \text{für } c \in J.$$

Beweis für $k_{12}^+(c) \le k_{21}(c)$: Mit $s := k_{12}^+(c)$ ist das halboffene Intervall $[c,s[$ das maximale K_I^+-Intervall der Form $[c,d[$, $d \in]c,b]$. Insbesondere gilt dann $L^+ \in K_I^+]c,s[$ und nach (2.3) und (2.4) von Abschnitt 2.5.3 $L \in K_{II}[c,s[$. Da $[c,k_{21}(c)[$ das maximale K_{II}-Intervall der Form $[c,d[$, $d \in]c,b]$, ist, folgt die Ungleichung $k_{21}(c) \ge s = k_{12}^+(c)$. □

Nach dem Zusatz zu Satz 2.4 ist für jedes $c \in J$ stets (L) diskonjugiert in $[c-\delta,c+\delta] \cap J$ mit einem $\delta = \delta(c) > 0$. Im Falle $N_+(c) \ne \emptyset$, $N_-(c) \ne \emptyset$ ist daher $N_-(c) \subseteq [a,c-\delta[\cap J$, $N_+(c) \subseteq]c+\delta,b] \cap J$ und somit

(4.6) $$\eta_-(c) < c < \eta(c).$$

Es sei $N_+(c) \ne \emptyset$ vorausgesetzt. Da $z_{21}(c)$ die kleinste Nullstelle t ($t > c$) von $u_2(.,c)$ und $z_{12}(c) = z_{21}^+(c)$ die kleinste Nullstelle t ($t > c$) von $u_2^+(.,c)$ ist, gelten mit deren Minimum

$$z_+(c) := \min \{z_{21}(c),z_{12}(c)\}$$

die Ungleichungen $u_2(.,c) > 0 \wedge u_2^+(.,c) > 0$ in $]c, z_+(c)[$ und es ist $z_+(c)$ eine Nullstelle von $u_2(.,c)$ oder eine Nullstelle von $u_2^+(.,c)$. Das Intervall $[c,z_+(c)[$ ist also das maximale Intervall mit gleichzeitiger Nullstellenfreiheit der Lösungen $u_2(.,c)$ und $u_2^+(.,c)$ in der Form $[c,d[$ ($d > c$). Da die beiden Ungleichungen nach Satz 4.2, 2, ε) zu $L \in D[c,z(c)[$ äquivalent sind und da wegen der Nullstelleneigenschaft von $z_+(c)$ die Differentialgleichung (L) im abgeschlossenen Intervall $[c,z_+(c)]$ nichtdiskonjugiert ist, ist das halboffene Intervall $[c,z_+(c)[$ das maximale Diskonjugiertheitsintervall der Form $[c,d[$ ($d > c$). Demzufolge ist $z_+(c) = \eta(c)$ (Barrett (1969), S. 441, Th.2.4). Da $z_+(c) \in N_+(c)$ ist, gilt $\eta(c) = z_+(c) = \min N_+(c)$.
Analog sei $N_-(c) \ne \emptyset$ vorausgesetzt und mit $z_-(c)$ die größte Nullstelle x ($x < c$) der Produktfunktion $u_2(.,c) \cdot u_2^+(.,c)$ bezeichnet:

$$z_-(c) := \max \{d \in J : d < c,\ u_2(d,c) = 0 \vee u_2^+(d,c) = 0\}.$$

Mit Satz 4.2, 2, φ) folgt dann $z_-(c) = \eta_-(c)$ und, da $z_-(c) \in N_-(c)$ ist, auch noch $\eta_-(c) = z_-(c) = \max N_-(c)$. Es gilt also

(4.7) $$\eta(c) = z_+(c) = \min \{z_{21}(c),z_{12}(c)\} = \min N_+(c);$$
$$\eta_-(c) = z_-(c) = \max N_-(c).$$

Mit dem Minimum

$$r(c) := r_+(c) := \min \{r_{21}(c),r_{12}(c)\}$$

der C_{II}-Stelle $r_{21}(c)$ und C_I-Stelle $r_{12}(c)$ ist das Intervall $[c,r(c)[$ das maximale $C_I \cap C_{II}$–Intervall der Form $[c,d[$ ($d > c$). Da nach Satz 4.2 im Intervall $[c,d[$ die Klassenzugehörigkeit $L \in C_I \cap C_{II}$ äquivalent zur Diskonjugiertheit von (L) ist, ist $[c,r(c)[$ das maximale Diskonjugiertheitsintervall der Form $[c,d[$ ($d > c$). Da außerdem $[c,\eta(c)[$ das maximale Diskonjugiertheitsintervall der Form $[c,d[$ ($d > c$) ist, folgt $r(c) = \eta(c)$ (Azbelev, Caljuk (1964), S. 237, Th.2). Es gilt also

(4.8) $\eta(c) = \min \{r_{21}(c), r_{12}(c)\}$.

Aus der Minimalitätseigenschaft (4.7) von $\eta(c)$ und den Ungleichungen (4.4) für die Hilfspunkte ergibt sich mit einer Fallunterscheidung noch die folgende Minimalitätseigenschaft von $\eta(c)$:

(4.9) $\eta(c) = \min \{z_{ij}(c), r_{ji}(c)\}$ für $\{i,j\} = \{1,2\}$, $c \in J$.

Beweis: a) Im Fall $z_{21}(c) \le z_{12}(c)$ folgt nach (4.7) $\eta(c) = z_{21}(c)$, nach (4.4) $\eta(c) = r_{21}(c) = z_{21}(c)$ und dann nach (4.7) $\eta(c) = \min \{r_{21}(c), z_{12}(c)\}$.
b) Analog folgt im Fall $z_{12}(c) \le z_{21}(c)$ zunächst $\eta(c) = r_{12}(c) = z_{12}(c)$ und dann $\eta(c) = \min \{z_{21}(c), r_{12}(c)\}$. □

Aus den in (4.4) angegebenen Ungleichungen $z_{ij}(c) \le z_{22}(c)$ und den entsprechenden Ungleichungen $z^+_{ij}(c) \le z^+_{22}(c)$ der adjungierten Differentialgleichung erhält man mit (4.3) auch

$$z^+_{ji}(c) = z_{ij}(c) \le z_{22}(c),$$
$$z_{ji}(c) = z^+_{ij}(c) \le z^+_{22}(c)$$

und insgesamt die folgenden Ungleichungen für die minimalen Nullstellen:

(4.10) $z_{21}(c),\ z^+_{21}(c) \le \min \{z_{22}(c), z^+_{22}(c)\}$ für $c \in J$.

Einen Zusammenhang zwischen den C_I- und C_{II}-Stellen $r_{ij}(c)$ und den minimalen Nullstellen $z_{ij}(x)$, $x \ge c$, liefert die folgende Beziehung (Barrett (1969), S. 445, L.2.12). Sie besagt, dass die als Infimum definierte Stelle $r_{ij}(c)$ als eine minimale Nullstelle $z_{ij}(\xi_{ij}) \in R_{ij}(c)$ gegeben wird.

(4.11)
$$\begin{aligned} r_{ij}(c) &= \min R_{ij}(c) \\ &= \inf \{z_{ij}(x) : x \ge c, x \in J\} \\ &= \min \{z_{ij}(x) : x \ge c, x \in J\} \\ &= z_{ij}(\xi_{ij}) \text{ mit einem } \xi_{ij} = \xi_{ij}(c) \in [c, r_{ij}(c)[\qquad (i + j \ge 3,\ c \in J). \end{aligned}$$

Beweis: a) Beweis von $r_{ij}(c) = \min R_{ij}(c)$: Unter der Voraussetzung $R_{ij}(c) \ne \emptyset$ ist

$$\tau := \tau_{ij} := r_{ij}(c) \in\ ]c,b] \cap J.$$

Nach dem Zusatz zu Satz 2.4 gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass die Differentialgleichung (L) in $[\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon] \cap J$ diskonjugiert ist. Wegen $\tau > c$ kann noch o. E. ε mit $\tau - \varepsilon > c$ gewählt werden. Wegen der Definition von $\tau = \inf R_{ij}(c)$ als Infimum gibt es zu jedem $\varepsilon_n := \varepsilon/n$ ($n \in \mathbb{N}$) eine Stelle

$$t_n \in [\tau, \tau+\varepsilon_n[\ \cap R_{ij}(c)$$

und dazu noch eine Stelle

$$x_n = x_n(t_n) \in [c, t_n[,$$

sodass x_n i-fache und t_n j-fache Nullstelle eines $y = y_n \in S \setminus \{o\}$ ist. Wegen $i + j \ge 3$, $t_n \in [\tau, \tau+\varepsilon_n] \subseteq [\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon]$ und der Diskonjugiertheit von (L) in $[\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon]$ ist

$$x_n \in [c, t_n[\setminus [\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon] = [c, \tau-\varepsilon[\subseteq [c, \tau-\varepsilon].$$

Da die Zahlenfolge $\tau+\varepsilon_n$ gegen τ konvergiert, konvergiert auch die Folge t_n gegen τ:

$$t_n \longrightarrow \tau = r_{ij}(c) \text{ bei } n \longrightarrow \infty.$$

Da die Zahlenfolge x_n im abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[c, \tau-\varepsilon]$ liegt, kann man nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß o. E. (ggf. nach Übergang zu konvergenter Teilfolge) annehmen, dass die Folge x_n gegen ein $\xi = \xi_{ij} = \xi_{ij}(c) \in [c, \tau-\varepsilon]$ konvergiert:

$$x_n \longrightarrow \xi \in [c, \tau-\varepsilon] \text{ bei } n \longrightarrow \infty.$$

Wegen der stetigen Abhängigkeit der Lösungen $u_2(.,.)$ und $u^+_1(.,.)$ von der unabhängigen Variablen und dem Anfangswert kann gezeigt werden, dass ξ eine i-fache und τ eine j-fache Nullstelle einer Lösung $y \in S \setminus \{o\}$ ist: Im Fall $(i,j) = (1,2)$ folgt aus $u_2(x_n, t_n) = 0$ beim Grenzübergang $n \longrightarrow \infty$

$$u_2(\xi, \tau) = 0,$$

also

$$\tau \in R_{12}(c) \text{ und } \tau = \min R_{12}(c).$$

Im Fall $(i,j) = (2,1)$ folgt aus $u_2(t_n,x_n) = 0$ die Gleichung $u_2(\tau,\xi) = 0$. Im Fall $(i,j) = (2,2)$ folgen aus $u_2(t_n,x_n) = 0$, $-u_1^+(x_n,t_n) = u_2'(t_n,x_n) = 0$ die Gleichungen

$$u_2(\tau,\xi) = 0,\ -u_1^+(\tau,\xi) = u_2'(\tau,\xi) = 0.$$

Insgesamt folgt in allen Fällen $(i,j) = (1,2), (2,1), (2,2)$

$$r_{ij}(c) \in R_{ij}(c) \text{ und}$$
$$r_{ij}(c) = \min R_{ij}(c).$$

b) Beweis von $r_{ij}(c) = z_{ij}(\xi_{ij})$ mit $\xi_{ij} \in [c,r_{ij}(c)[$: Während in der Menge $R_{ij}(c)$ die Stellen $t \in J$ erfasst sind, die j-fache Nullstelle einer (von t abhängigen) Lösung $y \in S \setminus \{o\}$ sind und zu denen jeweils noch eine i-fache Nullstelle $x \in [c,t[$ derselben Lösung y existiert, werden in der in (4.11) betrachteten Menge

$$M_{ij}(c) := \{z_{ij}(x) : x \geq c,\ x \in J\}$$

$(i + j \geq 3)$ nur die speziellen $t = z_{ij}(x) \in J$ aufgeführt, welche die *kleinste* mindestens j-fache Nullstelle $t > x$ einer Lösung $u_2(.,x)$ bzw. $u_2^+(.,x)$ $(x \geq c)$ sind: Ein $t = z_{21}(x) \in M_{21}(c)$ ist die kleinste Nullstelle $t > x$ von $u_2(.,x)$, ein $t = z_{22}(x) \in M_{22}(c)$ ist die kleinste doppelte Nullstelle $t > x$ von $u_2(.,x)$, ein $t = z_{21}^+(x) = z_{12}(x) \in M_{12}(c)$ ist die kleinste Nullstelle $t > x$ von $u_2^+(.,x)$ $(x \geq c)$. Für das Infimum

$$m_{ij}(c) := \inf M_{ij}(c)$$

ist zu zeigen: $m_{ij}(c) = r_{ij}(c)$ und $m_{ij}(c) = z_{ij}(\xi_{ij}) \in M_{ij}(c)$ mit einem $\xi_{ij} \in [c,r_{ij}(c)[$.
Aus der Inklusion $M_{ij}(c) \subseteq R_{ij}(c)$ folgt für die Infima schon die Ungleichung

$$m_{ij}(c) \geq r_{ij}(c),$$

sodass nur noch $m_{ij}(c) \leq r_{ij}(c)$ zu zeigen ist.
Es ist $\tau := r_{ij}(c) = \inf R_{ij}(c) = \min R_{ij}(c)$ das kleinste t der Menge $R_{ij}(c)$, für deren Elemente t mit den zugehörigen Stellen $x = x(t)$ eine bestimmte Nullstellenkonfiguration einer Lösung $y \in S \setminus \{o\}$ auftritt, nämlich dass x i-fache und t j-fache Nullstelle von y ist. Demzufolge ist insbesondere zur fest gedachten Stelle $\xi = \xi_{ij} \in [c,\tau[$ (von Teil a des Beweises) die Stelle τ die kleinste Stelle $t > \xi$ mit dieser bestimmten Nullstellenkonfiguration für ξ und t. Gemäß obiger Definition 8) für $z_{ij}(c)$ gilt also

$$\tau = z_{ij}(\xi) \in M_{ij}(c).$$

Daher ist

$$m_{ij}(c) = \inf M_{ij}(c) \leq z_{ij}(\xi) = \tau = r_{ij}(c) \leq m_{ij}(c),$$

also

$$r_{ij}(c) = m_{ij}(c) = z_{ij}(\xi) = \min M_{ij}(c). \qquad \square$$

Mit dem gleichen Beweisschema wie bei der r_{ij}-Eigenschaft (4.11) kann man die K_I- und K_{II}-Stellen $k_{12}(c)$ und $k_{21}(c)$ als Elemente von $R_{12}(c)$ bzw. $R_{21}(c)$ nachweisen, aber im Allgemeinen nicht als Elemente von $K_{12}(c)$ bzw. $K_{21}(c)$. Wie an der Integralkurve ersichtlich ist, können dabei der Fall $k_{12}(c) \in K_{12}(c)$, wenn die Tangente zu $k_{12}(c)$ das vorhergehende Kurvenstück schneidet (siehe Abb. 3.15, a, 2 und a, 1), und der Fall $k_{12}(c) \notin K_{12}(c)$, wenn die Tangente zu $k_{12}(c)$ das vorhergehende Kurvenstück berührt (siehe Abb. 3.15, b, 1 und Abb. 3.7, c, 1), auftreten. Ebenso können der Fall $k_{21}(c) \in K_{21}(c)$, wenn eine Tangente des vorhergehenden Kurvenstücks die Kurve im Punkt zu $k_{21}(c)$ schneidet (siehe Abb. 3.15, b, 2 und a, 1), und der Fall $k_{21}(c) \notin K_{21}(c)$, wenn eine vorhergehende Tangente die Kurve im Punkt zu $k_{21}(c)$ berührt (siehe Abb. 3.15, b, 1 und Abb. 3.7, c, 1), auftreten. Man erhält damit folgende k_{ij}-Eigenschaft.

(4.12) $k_{ij}(c) \in R_{ij}(c)$ für $(i,j) = (1,2), (2,1)$, $c \in J$, d. h.
für $(i,j) = (1,2)$: $u_2(\zeta_{12},k_{12}(c)) = 0$ für ein $\zeta_{12} = \zeta_{12}(c) \in [c,k_{12}(c)[$,
für $(i,j) = (2,1)$: $u_2(k_{21}(c),\zeta_{21}) = 0$ für ein $\zeta_{21} = \zeta_{21}(c) \in [c,k_{21}(c)[$.

Die Lage der $r_{ij}(c)$ in Abhängigkeit von der Lage der minimalen Nullstellen $z_{21}(c)$ und $z_{21}^{+}(c)$

Es werden nun noch die drei möglichen Fälle für die gegenseitige Lage der minimalen Nullstellen $z_{21}(c)$, $z_{12}(c) = z_{21}^{+}(c) \in J$ von $u_2(.,c)$ bzw. $u_2^{+}(.,c)$ unter der Voraussetzung $Z_{ij}(c) \neq \emptyset$ für $i+j=3$ näher untersucht und dabei die Lage der C_I- und C_{II}-Stellen $r_{ij}(c)$ bestimmt:

1) $z_{21}(c) = z_{21}^{+}(c)$;

2) $z_{21}(c) < z_{21}^{+}(c)$;

3) $z_{21}(c) > z_{21}^{+}(c)$.

Im Fall 1) $z_{21}(c) = z_{21}^{+}(c)$ ist nach (4.7)

$$d := \eta(c) = r_{21}(c) = z_{21}(c) = r_{12}(c) = z_{12}(c),$$

sodass (3.8) $u_2(d,c) = 0 = u_2(c,d)$ gilt, also geometrisch gesehen für die Integralkurve C an den Stellen c und d ein Doppelpunkt (3.6) oder eine Doppeltangente (3.7) vorliegt (Beweis in Abschnitt 3.1.7). Eine grafische Darstellung dieser beiden Unterfälle und des zusätzlichen Falls eines Doppelpunkts mit Doppeltangente wird mit der Integralkurve C in der nachfolgenden Abbildung 4.3 gegeben.

Beim Auftreten eines Doppelpunkts (3.6) ist $[u_2^{+}(.,c)] = [u_2^{+}(.,d)]$, also d eine zweifache Nullstelle von $u_2^{+}(.,c)$. Da $d = z_{21}^{+}(c)$ im vorliegenden Fall 1) die kleinste Nullstelle $t > c$ von $u_2^{+}(.,c)$ ist, ist d im Unterfall (3.6) auch die kleinste zweifache Nullstelle $t > c$ von $u_2^{+}(.,c)$: $d = z_{22}^{+}(c)$. Aufgrund der Ungleichung (4.10) ist $d = z_{21}^{+}(c) \leq \min\{z_{22}(c), z_{22}^{+}(c)\}$ und somit hier

$$d = z_{22}^{+}(c) = \min\{z_{22}(c), z_{22}^{+}(c)\}.$$

Analog ist beim Auftreten einer Doppeltangente (3.7) $[u_2(.,c)] = [u_2(.,d)]$ die Stelle d eine zweifache Nullstelle von $u_2(.,c)$. Da im Fall 1) $d = z_{21}(c)$ die kleinste Nullstelle $t > c$ von $u_2(.,c)$ ist, ist d im Unterfall (3.7) auch die kleinste zweifache Nullstelle $t > c$ von $u_2(.,c)$: $d = z_{22}(c)$. Aufgrund der Ungleichung (4.10) ist $d = z_{21}(c) \leq \min\{z_{22}(c), z_{22}^{+}(c)\}$ und somit hier

$$d = z_{22}(c) = \min\{z_{22}(c), z_{22}^{+}(c)\}.$$

Insgesamt ist im Fall 1) für beide Unterfälle (3.6) und (3.7) die Übereinstimmung $\eta(c) = \min\{z_{22}(c), z_{22}^{+}(c)\}\}$ bewiesen. Es gilt also

(4.13) $$z_{21}(c) = z_{21}^{+}(c) \;\Rightarrow\; \eta(c) = r_{21}(c) = z_{21}(c) = r_{12}(c) = z_{12}(c),$$
$$\eta(c) = \min\{z_{22}(c), z_{22}^{+}(c)\} \qquad \text{für } c \in J.$$

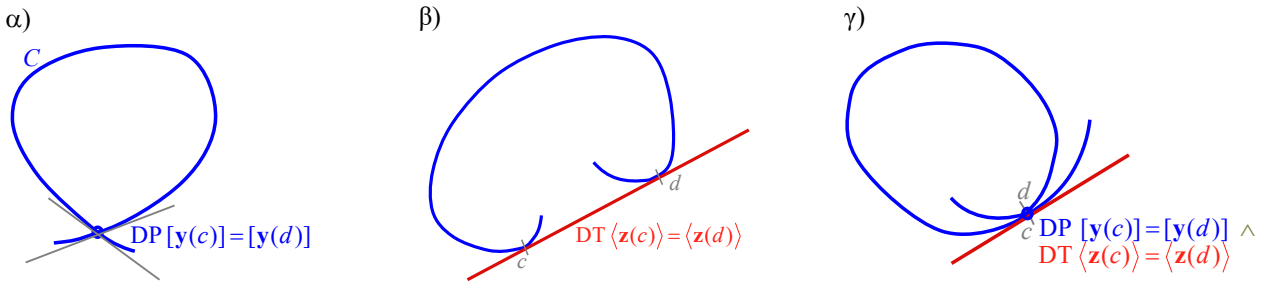


Abb. 4.3 Darstellung der im Fall 1) auftretenden Unterfälle: α) $[\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)]$ Doppelpunkt (DP), β) $\langle \mathbf{z}(c) \rangle = \langle \mathbf{z}(d) \rangle$ Doppeltangente (DT) und γ) Doppelpunkt mit Doppeltangente der Integralkurve C

Im Fall 2) $z_{21}(c) < z_{21}^{+}(c)$ ist nach (4.7), (4.4) und (4.3)

$$d := \eta(c) = r_{21}(c) = z_{21}(c) \le r_{12}(c) \le z_{12}(c) \text{ und}$$
$$d = \eta(c) < z_{21}^{+}(c) = z_{12}(c) \le z_{22}(c).$$

Nachfolgend wird nun die Lage von $r_{12}(c)$ im Intervall $[z_{21}(c), z_{21}^{+}(c)]$ näher bestimmt und gezeigt, dass $r_{12}(c)$ im zugehörigen offenen Intervall liegt. Dazu werden nachfolgend die beiden Ungleichungen

i) $r_{12}(c) < z_{12}(c)$ und
ii) $r_{12}(c) > z_{21}(c)$

bewiesen.

Zum Beweis der Ungleichung i) wird Satz 3.3, b, 2) zur Nullstellenverteilung von zwei orthogonalgonalen Lösungen angewandt: Wegen $d = z_{21}(c) < z_{21}^{+}(c) \le z_{22}(c)$ ist

$$u_2(d,c) = 0,$$
$$u_2(c,z_{12}(c)) = 0,$$
$$u_2(.,c) > 0 \text{ in }]c,d[,$$
$$u_2^{+}(.,c) > 0 \text{ in }]c,z_{21}^{+}(c)[\supseteq]c,d].$$

Da $d = z_{21}(c)$ die kleinste Nullstelle von $u_2(.,c)$ in $]c,b] \cap J$ und $d < z_{22}(c)$ ist, ist d nur eine einfache Nullstelle von $u_2(.,c)$ und somit $[u_2(.,c)] \neq [u_2(.,d)]$.

Geometrisch gesehen schneidet die Tangente $\langle \mathbf{z}(c) \rangle$ des Kurvenpunkts $[\mathbf{y}(c)]$ die Integralkurve C im Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(d)]$, wobei aber keine Doppeltangente $\langle \mathbf{z}(c) \rangle = \langle \mathbf{z}(d) \rangle$ vorliegt. Die Tangente $\langle \mathbf{z}(c) \rangle$ trifft C aber in keinem der Kurvenpunkte $[\mathbf{y}(x)]$, $x \in]c,d[$. Außerdem liegt der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(c)]$ auf keiner der Tangenten $\langle \mathbf{z}(x) \rangle$, $x \in]c,z_{21}^{+}(c)[$, aber auf der zum Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(z_{12}(c))]$ gehörigen Tangente $\langle \mathbf{z}(z_{12}(c)) \rangle$.

Für die Lösungen

$$y := u_2(.,z_{12}(c)) = u_2(.,z_{21}^{+}(c)),$$
$$z := u_2^{+}(.,c)$$

gilt dann $y(c) = 0$ und nach (2.25)

$$y \perp z.$$

Weiter ist

$$z(c) = 0 \neq z(d) \text{ und}$$
$$z > 0 \text{ in }]c,d].$$

Es werden jetzt die beiden Unterfälle

α) $[y] = [u_2(.,c)]$,
β) $[y] \neq [u_2(.,c)]$

unterschieden. Die Tangente $\langle \mathbf{z}(z_{12}(c)) \rangle$ stimmt im Fall α) mit der Tangente $\langle \mathbf{z}(c) \rangle$ überein und ist im Fall β) von $\langle \mathbf{z}(c) \rangle$ verschieden. Eine grafische Darstellung der beiden Unterfälle wird mit der Integralkurve C in der nachfolgenden Abbildung 4.4 gegeben. Im Fall α) ist die einfache Nullstelle d von $u_2(.,c)$ auch eine einfache Nullstelle von y. Im Fall β) kann mit Satz 3.3, b, 2) auf eine einfache Nullstelle von y im offenen Intervall $]c,d[$ geschlossen werden. Insgesamt gibt es in beiden Fällen α) und β) im halboffenen Intervall $]c,d]$ eine einfache Nullstelle von $y = u_2(.,z_{12}(c))$. Demnach folgt $L \notin K_I$ in $]c,z_{12}(c)]$, dann nach (2.4) von Abschnitt 2.5.3 $L \notin K_I$ im offenen Intervall $]c,z_{12}(c)[$ und auch im größeren halboffenen Intervall $[c,z_{12}(c)[$. Daher ist $k_{12}(c) < z_{12}(c)$, nach (4.4) $r_{12}(c) \le k_{12}(c) < z_{12}(c)$ und somit i) $r_{12}(c) < z_{12}(c)$.

Zum Beweis der Ungleichung ii) $r_{12}(c) > z_{21}(c) = d$ wird hier gezeigt, dass $L^{+} \in C_{II}^{+}$ bzw. $L \in C_I$ im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ gilt, sodass dann $[c,d]$ im maximalen C_I-Intervall $[c,r_{12}(c)[$ der Form

$[c,t[$ $(t > c)$ liegt und demzufolge die Ungleichung $z_{21}(c) = \eta(c) = d < r_{12}(c)$ gilt. Zunächst ist die Differentialgleichung (L) bzw. (L^+) wegen $d = \eta(c)$ diskonjugiert in $[c,d[$ und im kleineren offenen Intervall $]c,d[$, dann nach Satz 4.3 diskonjugiert auch in $]c,d]$. Insbesondere ist nach Satz 4.2 $L^+ \in C_{II}^+$ in $]c,d]$. Da wegen $d < z_{21}^+(c)$ außerdem die Ungleichung $u_2^+(.,c) > 0$ in $]c,d] \subseteq]c, z_{21}^+(c)[$ gilt, ist insgesamt $L^+ \in C_{II}^+$ in $[c,d]$ und damit die Ungleichung ii) $r_{12}(c) > d$ bewiesen.

Weiter ist nach (4.11) $r_{12}(c) = z_{12}(\xi)$ mit einem $\xi = \xi_{12} \in [c,r_{12}(c)[$. Wegen der bereits bewiesenen Ungleichung $r_{12}(c) < z_{12}(c)$ ist $\xi \neq c$. Aus $L \in C_I \subseteq K_I$ in $[c,r_{12}(c)[$ folgt nach (2.4) von Abschnitt 2.5.3 auch $L \in K_I$ in $]c,r_{12}(c)]$. Demnach ist $\xi \in]c,r_{12}(c)[$ keine einfache Nullstelle von $u_2(.,r_{12}(c))$, sondern zweifache Nullstelle und daher $r_{12}(c) = z_{12}(\xi) = z_{22}(\xi)$. Man erhält also die Aussage (Barrett (1969), S. 446, Th.2.7)

(4.14) $$z_{21}(c) < z_{21}^+(c) \;\Rightarrow \eta(c) = r_{21}(c) = z_{21}(c),$$
$$r_{12}(c) \in]z_{21}(c), z_{21}^+(c)[,$$
$$r_{12}(c) = z_{22}(\xi) \text{ mit einem } \xi \in]c,r_{12}(c)[\qquad (c \in J).$$

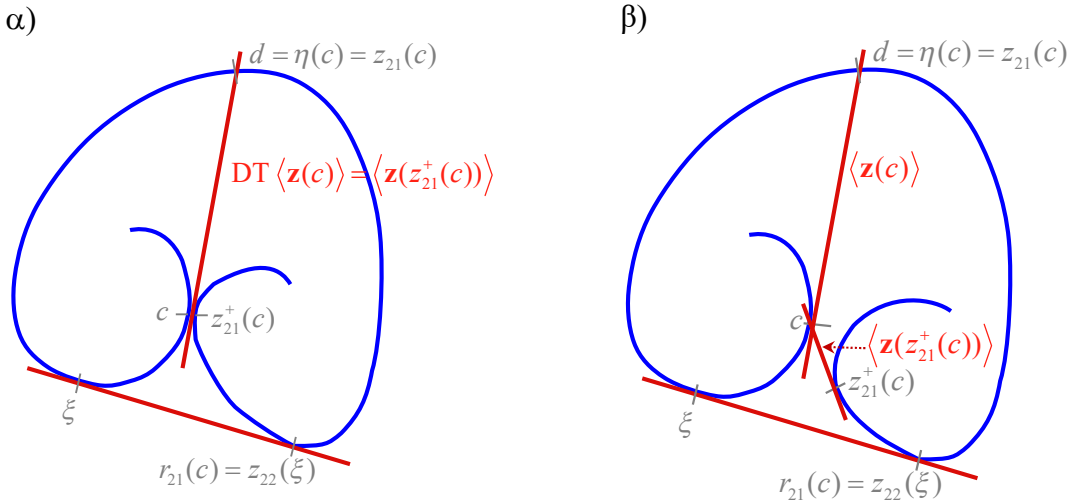


Abb. 4.4 Darstellung der im Fall 2) auftretenden Unterfälle: α) $\langle \mathbf{z}(c) \rangle = \langle \mathbf{z}(z_{21}^+(c)) \rangle$ Doppeltangente (DT), β) $\langle \mathbf{z}(c) \rangle \neq \langle \mathbf{z}(z_{21}^+(c)) \rangle$ keine Doppeltangente der Integralkurve C

Im Fall 3) $z_{21}(c) > z_{21}^+(c)$ ergeben sich analog zu Fall 2) die Beziehungen

$$d := \eta(c) = r_{12}(c) = z_{12}(c) \le r_{21}(c) \le z_{21}(c),$$
$$d = \eta(c) < z_{21}(c) = z_{12}^+(c) \le z_{22}^+(c).$$

und die genauere Lage von $r_{21}(c)$ mit der Inzidenz $r_{21}(c) \in]z_{12}(c),z_{21}(c)[$:

Zum Beweis der Ungleichung i) $r_{21}(c) < z_{21}(c)$ wird Satz 3.3, a, 2) zur Nullstellenverteilung von zwei orthogonalen Lösungen angewandt: Wegen $d = z_{12}(c) = z_{21}^+(c) < z_{21}(c) \le z_{22}(c)$ ist

$$u_2^+(d,c) = 0,$$
$$u_2(z_{12}(c),c) = u_2^+(c, z_{12}^+(c)) = 0,$$
$$u_2^+(.,c) > 0 \text{ in }]c,d[,$$
$$u_2(.,c) > 0 \text{ in }]c,z_{21}(c)[\supseteq]c,d].$$

Da $d = z_{12}(c) = z_{21}^+(c)$ die kleinste Nullstelle von $u_2^+(.,c)$ in $]c,b] \cap J$ und $d < z_{22}^+(c)$ ist, ist d nur eine einfache Nullstelle von $u_2^+(.,c)$ und somit $[u_2^+(.,c)] \neq [u_2^+(.,d)]$.

Geometrisch gesehen liegt der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(c)]$ auf der Tangente $\langle \mathbf{z}(d) \rangle$, wobei aber für die Stelle c und d kein Doppelpunkt $[\mathbf{y}(c)] = [\mathbf{y}(d)]$ vorliegt. Der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(c)]$ liegt aber auf keiner der Tangenten $\langle \mathbf{z}(x) \rangle$, $x \in \,]c,d[$, des zum offenen Intervall $]c,d[$ gehörigen Kurvenstücks $C_{]c,d[}$. Außerdem trifft die Tangente $\langle \mathbf{z}(c) \rangle$ keinen der Kurvenpunkte $[\mathbf{y}(x)], x \in \,]c, z_{21}(c)[$, aber den Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(z_{21}(c))]$.

Für die Lösungen

$$z := u_2^+(.,z_{12}^+(c)),$$
$$y := u_2(.,c)$$

gilt dann $z(c) = 0$ und nach (2.25)

$$z \perp y.$$

Weiter ist

$$y(c) = 0 \neq y(d) \text{ und}$$
$$y > 0 \text{ in }]c,d].$$

Es werden jetzt die beiden Unterfälle

$$\alpha)\ \ [z] = [\,u_2^+(.,c)\,],$$
$$\beta)\ \ [z] \neq [\,u_2^+(.,c)\,]$$

unterschieden. Der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(z_{21}(c))]$ stimmt im Fall α) mit dem Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(c)]$ überein und ist im Fall β) von $[\mathbf{y}(c)]$ verschieden. Eine grafische Darstellung der beiden Unterfälle wird mit der Integralkurve C in der nachfolgenden Abbildung 4.5 gegeben. Im Fall α) ist die einfache Nullstelle d von $u_2^+(.,c)$ auch eine einfache Nullstelle von z. Im Fall β) kann mit Satz 3.3, a, 2) auf eine einfache Nullstelle von z im offenen Intervall $]c,d[$ geschlossen werden. Insgesamt gibt es in beiden Fällen α) und β) im halboffenen Intervall $]c,d]$ eine einfache Nullstelle von $z = u_2^+(.,z_{12}^+(c))$. Demnach folgt $L^+ \notin K_I^+$ in $]c, z_{12}^+(c)\,]$, dann nach Abschnitt 2.5.3 $L^+ \notin K_I^+$ bzw. $L \notin K_{II}$ im offenen Intervall $]c, z_{12}^+(c)\,[$ und $L \notin K_{II}$ auch im größeren halboffenen Intervall $[c, z_{12}^+(c)[$. Daher ist $k_{21}(c) < z_{12}^+(c) = z_{21}(c)$, nach (4.4) $r_{21}(c) \leq k_{21}(c) < z_{21}(c)$ und somit i) $r_{21}(c) < z_{21}(c)$.

Zum Beweis der Ungleichung ii) $r_{21}(c) > z_{12}(c) = d$ wird hier gezeigt, dass $L \in C_{II}$ im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ gilt, sodass dann $[c,d]$ im maximalen C_{II}-Intervall $[c,r_{21}(c)[$ der Form $[c,t[$ $(t > c)$ liegt und demzufolge die Ungleichung $z_{12}(c) = \eta(c) = d < r_{21}(c)$ gilt. Zunächst ist die Differentialgleichung (L) wegen $d = \eta(c)$ diskonjugiert in $[c,d[$ und im kleineren offenen Intervall $]c,d[$, dann nach Satz 4.3 diskonjugiert auch in $]c,d]$. Insbesondere ist nach Satz 4.2 $L \in C_{II}$ in $]c,d]$. Da wegen $d < z_{21}(c)$ außerdem die Ungleichung $u_2(.,c) > 0$ in $]c,z_{21}(c)[\supseteq]c,d]$ gilt, ist insgesamt $L \in C_{II}$ in $[c,d]$ und damit die Ungleichung ii) $r_{21}(c) > d$ bewiesen.

Weiter ist nach (4.11) $r_{21}(c) = z_{21}(\xi) = z_{21}^+(\xi)$ mit einem $\xi = \xi_{21} \in [c,r_{21}(c)[$. Wegen der bereits bewiesenen Ungleichung $r_{21}(c) < z_{21}(c)$ ist $\xi \neq c$. Aus $L \in C_{II}[c,r_{21}(c)[$ bzw. $L^+ \in C_I^+ \subseteq K_I^+$ in $[c,r_{21}(c)[$ folgt nach (2.4) von Abschnitt 2.5.3 auch $L^+ \in K_I^+$ in $]c,r_{21}(c)]$. Demnach ist $\xi \in \,]c,r_{21}(c)[$ keine einfache Nullstelle von $u_2^+(.,r_{21}(c))$, sondern zweifache Nullstelle und daher $r_{21}(c) = z_{21}^+(\xi) = z_{22}^+(\xi)$. Man erhält also die Aussage (Barrett (1969), S. 446, Th.2.8)

(4.15) $$z_{21}(c) > z_{21}^+(c) \ \Rightarrow\ \eta(c) = r_{12}(c) = z_{12}(c),$$
$$r_{21}(c) = r_{12}^+(c) \in \,]\,z_{21}^+(c)\,,z_{21}(c)[,$$
$$r_{21}(c) = z_{22}^+(\xi) \ \text{ mit einem } \xi \in \,]c, r_{12}^+(c)\,[\qquad (c \in J).$$

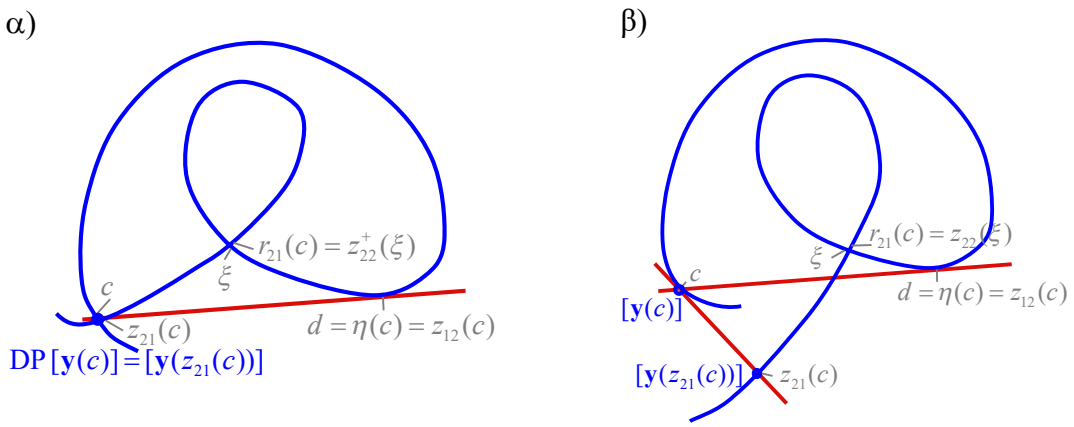


Abb. 4.5 Darstellung der im Fall 3) auftretenden Unterfälle: α) $[\mathbf{y}(c)] = \left[\mathbf{y}(z_{21}(c))\right]$ Doppelpunkt (DP), β) $[\mathbf{y}(c)] \neq \left[\mathbf{y}(z_{21}(c))\right]$ kein Doppelpunkt der Integralkurve C

Aus den Ergebnissen (4.14) und (4.15) in der Beschreibung der Fälle 2) und 3) bei der Lage der minimalen Nullstellen $z_{21}(c)$ und $z_{21}^{+}(c)$ ergibt sich aus $r_{21}(c) = r_{12}(c)$, dass die Fälle 2) und 3) nicht vorliegen können und somit der Fall 1) $z_{21}(c) = z_{12}(c)$ folgt. Es gilt also

(4.16) $\qquad r_{21}(c) = r_{12}(c) \;\Leftrightarrow\; z_{21}(c) = z_{12}(c) \qquad (c \in J).$

4.6.3 Eigenschaften der Funktionen η und η_-

Es werden nun Eigenschaften der durch die ersten rechten konjugierten Punkte gegebenen Funktion η und der durch die ersten linken konjugierten Punkte gegebenen Funktion η_- hergeleitet. Mit dem Endlichkeitsbereich (eigentlichen Definitionsbereich, englisch: domain)

$$E := \operatorname{dom} \eta := \{x \in J : \eta(x) < \infty\}$$

der numerischen Funktion $\eta(.) : J \longrightarrow J \cup \{+\infty\}$ der ersten rechten konjugierten Punkte wird die auf E eingeschränkte reellwertige Funktion

$$\eta : x \in E \mapsto \eta(x) \in J$$

betrachtet. Weiter sei

$$W := \operatorname{im} \eta := \eta(E) = \{\eta(x) : x \in E\}$$

das Bild (der Wertebereich, englisch: image) von η.
Analog sei der Endlichkeitsbereich

$$E_- := \{x \in J : \eta_-(x) > -\infty\}$$

der Funktion $\eta_-(.) : J \longrightarrow J \cup \{-\infty\}$ und der Wertebereich

$$W_- := \eta_-(E_-) = \{\eta_-(x) : x \in E_-\}$$

der zugehörigen auf E_- eingeschränkten reellwertigen Funktion

$$\eta_- : x \in E_- \mapsto \eta_-(x) \in J$$

definiert.
Es ist E die Menge aller $c \in J$, für welche im Intervall $[c,b] \cap J$ die Nichtdiskonjugiertheit von (L) vorliegt. Weiter ist E_- die Menge aller $c \in J$, für welche im Intervall $[a,c] \cap J$ die Nichtdiskonjugiertheit vorliegt. Die Differentialgleichung (L) ist genau dann in ganz J diskonjugiert, wenn für jedes $c \in J$ und jedes $t \in J$ mit $t > c$ die Differentialgleichung in $[c,t]$ diskonjugiert ist, also $N_+(c) = \emptyset$, $\eta(c) = \infty$ gilt und insgesamt $E = \emptyset$ und $W = \emptyset$ ist. Analog ist (L) genau dann in J diskonjugiert, wenn $E_- = \emptyset$ und $W_- = \emptyset$:

$$\text{(L) diskonjugiert in } J \quad \Leftrightarrow E = \emptyset$$
$$\Leftrightarrow E_- = \emptyset.$$

Für die weiteren Betrachtungen sei jetzt also (L) in J nichtdiskonjugiert und somit $E \neq \emptyset$, $W \neq \emptyset$, $E_- \neq \emptyset$, $W_- \neq \emptyset$. Es werden nachfolgend einige wichtige Eigenschaften dieser reellwertigen Funktionen

η und η_- bewiesen. Die bei Coppel (1971), S. 100–102, Th.6, L.13, Th.7, angegebenen Beweise für die entsprechenden Aussagen bei der Differentialgleichung n-ter Ordnung liefern hier bei $n = 3$ eine vereinfachte Darstellung.

(4.17) **Eigenschaften der Funktion η**

Es sei die Differentialgleichung (L) nichtdiskonjugiert in J. Die Funktion

$$\eta : x \in E \mapsto \eta(x) \in J$$

ist dann

streng monoton steigend,
stetig und besitzt
η_- als Umkehrfunktion.

Im Fall $b \notin J$ ist der Definitionsbereich

$$E = J \cap [a,\beta[$$

ein rechtsoffenes Intervall mit rechtem Randpunkt $\beta = \sup E$, linkem Randpunkt a und

$$a < \beta \leq b.$$

Im Fall $b \in J$ ist

$$E = J \cap [a,\beta]$$

ein rechtsabgeschlossenes Intervall mit rechtem Randpunkt $\beta = \eta_-(b) \in J$, linkem Randpunkt a und

$$a \leq \beta < b.$$

(4.18) **Eigenschaften der Funktion η_-**

Es sei die Differentialgleichung (L) nichtdiskonjugiert in J. Die Funktion

$$\eta_- : x \in E_- \mapsto \eta_-(x) \in J$$

ist dann

streng monoton steigend,
stetig und besitzt
η als Umkehrfunktion.

Im Fall $a \notin J$ ist der Definitionsbereich

$$E_- = J \cap]\alpha,b[$$

ein linksoffenes Intervall mit linkem Randpunkt $\alpha = \inf E_-$, rechtem Randpunkt b und

$$a \leq \alpha < b.$$

Im Fall $a \in J$ ist

$$E_- = J \cap [\alpha,b[$$

ein linksabgeschlossenes Intervall mit linkem Randpunkt $\alpha = \eta(a) \in J$, rechtem Randpunkt b und

$$a < \alpha \leq b.$$

(4.19) **Eigenschaften der Definitionsbereiche E und E_-**

$$E = \eta_-(E_-),$$
$$E_- = \eta(E).$$

Beweis: Es sei (L) in J nichtdiskonjugiert, somit $E \neq \emptyset$, $E_- \neq \emptyset$ und

$$\beta := \sup E > -\infty,$$
$$\alpha := \inf E_- < +\infty.$$

Wegen $E, E_- \subseteq J \subseteq [a,b]$ ist noch $\beta, \alpha \in [a,b]$.

1) **E ist ein Intervall mit linkem Endpunkt a und E_- ist ein Intervall mit rechtem Endpunkt b**

Für $c \in E$, $c' \in J$ mit $c' \leq c$ gilt die Inklusion $N_+(c') \supseteq N_+(c)$, die Ungleichung

$$\eta(c') = \inf N_+(c') \leq \inf N_+(c) = \eta(c) < \infty$$

und die Inzidenz $c' \in E$.

Für $c \in E_-$, $c'' \in J$ mit $c'' \geq c$ gilt analog $N_-(c'') \supseteq N_-(c)$,

$$\eta_-(c'') = \sup N_-(c'') \geq \sup N_-(c) = \eta_-(c) > -\infty$$

und $c'' \in E_-$.
Damit ist mit $c \in E$ auch

$$[a,c] \cap J \subseteq E,$$

wobei $a \in E$ genau dann gilt, wenn $a \in J$ ist.
Weiter ist mit $c \in E_-$ auch

$$[c,b] \cap J \subseteq E_-,$$

wobei $b \in E_-$ genau dann gilt, wenn $b \in J$ ist.
Nachgewiesen ist damit insbesondere auch die Intervalleigenschaft[11] der Mengen E, $E_- \subseteq J$ und dass a der linke Endpunkt (Randpunkt) von E und b der rechte Endpunkt von E_- ist. Die genaue Intervallform mit der Angabe auch des anderen Endpunktes wird in den Beweisteilen 8) und 9) bewiesen.

2) **Monotonie von η und η_-**
Nach Beweisteil 1) folgt insbesondere für c, $c' \in E$ mit $c' \leq c$ die Ungleichung $\eta(c') \leq \eta(c)$, sodass die Funktion η (schwach) monoton steigend ist.
Weiter folgt für c, $c'' \in E_-$ mit $c \leq c''$ die Ungleichung $\eta_-(c) \leq \eta_-(c'')$, sodass die Funktion η_- (schwach) monoton steigend ist.

3) **Strenge Monotonie von η und η_-**
a) Für c_1, $c_2 \in E$ mit $c_1 \leq c_2$ gilt wegen der Monotonie von η für die Funktionswerte die Ungleichung $\eta(c_1) \leq \eta(c_2)$. Zum Nachweis der strengen Monotonie von η ist aus der Gleichheit $\eta(c_1) = \eta(c_2)$ der Funktionswerte auch die Gleichheit $c_1 = c_2$ der Argumente zu folgern. Zunächst folgt aus

$$\eta(c_1) = \eta(c_2) =: d$$

wegen der Monotonie von η

$$\eta(x) = d \quad \forall\, x \in [c_1,c_2].$$

Für jedes $x \in [c_1,c_2]$ ist nach (4.7) die Stelle $d = \eta(x) = z_+(x)$ die kleinste Nullstelle t ($t > x$) von $u_2(.,x)$ oder die kleinste Nullstelle t ($t > x$) von $u_2^+(.,x)$. Demzufolge ist

$$u_2^+(x,d) = u_2(d,x) = 0 \text{ oder}$$
$$u_2(x,d) = u_2^+(d,x) = 0,$$

also x eine Nullstelle von $u_2^+(.,d)$ oder von $u_2(.,d)$. Da die Nullstellen der nichttrivialen Lösungen $u_2^+(.,d)$ und $u_2(.,d)$ im abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[c_1,c_2]$ keinen Häufungspunkt besitzen (siehe Fußnote in Abschnitt 4.5 zur Anmerkung bei Satz 4.9), kann das Intervall $[c_1,c_2]$ keinen Häufungspunkt aufweisen. Es ist somit $[c_1,c_2]$ ein sog. ausgeartetes Intervall, das nur aus einem Punkt besteht: $c_1 = c_2$. Damit ist die Funktion η streng monoton steigend.

b) Für d_1, $d_2 \in E_-$ mit $d_1 \leq d_2$ gilt wegen der Monotonie von η_- für die Funktionswerte die Ungleichung $\eta_-(d_1) \leq \eta_-(d_2)$. Zum Nachweis der strengen Monotonie von η_- ist aus $\eta_-(d_1) = \eta_-(d_2)$ auch $d_1 = d_2$ zu folgern. Zunächst folgt aus

$$\eta_-(d_1) = \eta_-(d_2) =: c$$

wegen der Monotonie von η_-

$$\eta_-(x) = c \quad \forall\, x \in [d_1,d_2].$$

Für jedes $x \in [d_1,d_2]$ ist nach (4.7) die Stelle $c = \eta_-(x) = z_-(x)$ die größte Nullstelle t ($t < x$) von $u_2(.,x)$ oder die größte Nullstelle t ($t < x$) von $u_2^+(.,x)$. Demzufolge ist

$$u_2^+(x,c) = u_2(c,x) = 0 \text{ oder}$$
$$u_2(x,c) = u_2^+(c,x) = 0,$$

also x eine Nullstelle von $u_2^+(.,c)$ oder von $u_2(.,c)$. Da die Nullstellen der nichttrivialen Lösungen $u_2^+(.,c)$ und $u_2(.,c)$ im abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[d_1,d_2]$ keinen Häufungspunkt be-

[11] Eine Teilmenge I von $\mathbb{R}$ ist ein Intervall genau dann, wenn mit Punkten $x, y \in I$ auch deren Verbindungsstrecke $[x,y] = \{t \in I : x \leq t \leq y\}$ (Zusammenhangseigenschaft bezüglich der totalen Ordnung $\leq$ von $\mathbb{R}$) in I liegt. Literatur: Lexikon der Mathematik, Bd. 3 (2001), S. 19.

sitzen (siehe Fußnote in Abschnitt 4.5), kann das Intervall $[d_1,d_2]$ keinen Häufungspunkt aufweisen. Es ist somit $[d_1,d_2]$ ein sog. ausgeartetes Intervall, das nur aus einem Punkt besteht: $d_1 = d_2$. Damit ist η_- streng monoton steigend.

4) η_- **ist die Umkehrfunktion von** η

Es sei $d \in W = \eta(E)$ beliebig gewählt. Wegen der Injektivität der streng momotonen Funktion η gibt es genau ein Urbild $c \in E$ mit dem Bild $d = \eta(c)$. Nach (4.7) $d = \eta(c) = z_+(c) = \min N_+(c)$ ist (L) nichtdiskonjugiert in $[c,d]$. Demnach gilt auch $c \in N_-(d)$,

$$s := \eta_-(d) = \sup N_-(d) \geq c,$$

$\eta_-(d) > -\infty$ und $d \in E_-$. Damit ist schon $\eta(E) \subseteq E_-$ gezeigt. Neben der eben begründeten Ungleichung $s \geq c$ soll jetzt auch noch $s \leq c$ und damit insgesamt $\eta_-(d) = s = c$ gezeigt werden.

Nach (4.7) ist $s = \eta_-(d) = z_-(d) = \max N_-(d)$ die größte Nullstelle t ($t < d$) von $u_2(.,d)$ oder die größte Nullstelle t ($t < d$) von $u_2^+(.,d)$. Daher ist (L) nichtdiskonjugiert in $[s,d]$, $d \in N_+(s)$ und

$$\eta(s) = \inf N_+(s) \leq d = \eta(c).$$

Wegen der strengen Monotonie von η folgt $s \leq c$ und dann insgesamt $\eta_-(d) = s = c$ mit dem c, für welches $\eta(c) = d$ ist. Damit ist η_- auf $W = \eta(E)$ die Umkehrfunktion von η: $\eta_-(\eta(c)) = c \;\forall\; c \in E$.

5) η **ist die Umkehrfunktion von** η_-

Es sei $c \in W_- = \eta_-(E_-)$ beliebig gewählt. Wegen der Injektivität der streng monotonen Funktion η_- gibt es genau ein Urbild $d \in E_-$ mit dem η_--Bild $c = \eta_-(d)$. Nach (4.7) $c = \eta_-(d) = z_-(d) = \max N_-(d)$ ist (L) nichtdiskonjugiert in $[c,d]$. Demnach gilt auch $d \in N_+(c)$,

$$s := \eta(c) = \inf N_+(c) \leq d,$$

$\eta(c) < \infty$ und $c \in E$. Damit ist schon $\eta_-(E_-) \subseteq E$ gezeigt. Neben der eben begründeten Ungleichung $s \leq d$ soll jetzt auch noch $s \geq d$ und damit insgesamt $\eta(c) = s = d$ gezeigt werden.

Nach (4.7) ist $s = \eta(c) = z_+(c) = \min N_+(c)$ die kleinste Nullstelle t ($t > c$) von $u_2(.,c)$ oder die kleinste Nullstelle t ($t > c$) von $u_2^+(.,c)$. Daher ist (L) nichtdiskonjugiert in $[c,s]$, $c \in N_-(s)$ und

$$\eta_-(s) = \max N_-(s) \geq c = \eta_-(d).$$

Wegen der strengen Monotonie von η_- folgt $s \geq d$ und dann insgesamt $\eta(c) = s = d$ mit dem c, für welches $\eta_-(d) = c$ ist. Damit ist η auf $W_- = \eta_-(E_-)$ die Umkehrfunktion von η_-: $\eta(\eta_-(d)) = d \;\forall\; d \in E_-$.

6) **Für die Definitionsbereiche und Wertebereiche gilt** $E_- = \eta(E)$ **und** $E = \eta_-(E_-)$

a) $E_- \supseteq \eta(E)$ und $E \subseteq \eta_-(E_-)$: Da η_- auf $W = \eta(E)$ die Umkehrfunktion von η ist, gilt für jedes $c \in E$ mit $d := \eta(c) \in \eta(E)$ zunächst

$$\eta_-(d) = \eta_-(\eta(c)) = c \in E \subseteq J.$$

Damit ist $\eta_-(d) > -\infty$ und $\eta(c) = d \in E_-$, womit schon

$$\eta(E) \subseteq E_-$$

gezeigt ist. Wegen dem bereits gezeigten $d \in E_-$ ist weiter $c = \eta_-(d) \in \eta_-(E_-)$ und damit

$$E \subseteq \eta_-(E_-).$$

b) $E_- \subseteq \eta(E)$ und $E \supseteq \eta_-(E_-)$: Da η auf $W_- = \eta_-(E_-)$ die Umkehrfunktion von η_- ist, gilt für jedes $d \in E_-$ mit $c := \eta_-(d) \in \eta_-(E_-)$ zunächst

$$\eta(c) = \eta(\eta_-(d)) = d \in E_- \subseteq J.$$

Damit ist $\eta(c) < \infty$, $c \in E$ und $d = \eta(c) \in \eta(E)$, womit schon

$$E_- \subseteq \eta(E)$$

gezeigt ist. Wegen dem bereits gezeigten $\eta(c) < \infty$ ist weiter $\eta_-(d) = c \in E$ und damit

$$\eta_-(E_-) \subseteq E.$$

c) Aus den Inklusionen a) und b) erhält man dann die Übereinstimmungen $E_- = \eta(E)$ und $E = \eta_-(E_-)$.

7) **Stetigkeit von** η **und** η_-

Nach den Beweisteilen 3) und 1) ist die Funktion η definiert und streng monoton auf dem Intervall E. Nach 6) und 4) besitzt η auf dem η-Bild $\eta(E) = E_-$ die Umkehrfunktion $\eta^{-1} = \eta_-$. Nach dem unten noch folgenden Hilfssatz 4.5 (Satz von der Stetigkeit der Umkehrfunktion) ist somit die Umkehrfunktion $\eta^{-1} = \eta_-$ von η stetig auf E_-.

Analog ist die Funktion η_- definiert und streng monoton auf dem Intervall E_-. Auf dem η_--Bild $\eta_-(E_-) = E$ besitzt sie die Umkehrfunktion $\eta_-^{-1} = \eta$. Nach Hilfssatz 4.5 ist somit die Umkehrfunktion $\eta_-^{-1} = \eta$ von η_- stetig auf E.

8) **Die genaue Intervallform von** E

Da die Differentialgleichung (L) als nichtdiskonjugiert in J vorausgesetzt ist, gilt $\emptyset \neq E \subseteq J$. Für

$$\beta := \sup E$$

gilt daher $\beta > -\infty$ und $\beta \in [a,b]$. Aufgrund der Definition von β als Supremum von E gibt es zu jedem $c' \in J$ mit $c' < \beta$ ein $c \in E$ mit $c' < c \leq \beta$. Nach Beweisteil 1) ist dann auch $c' \in E$ und $[a,c'] \cap J \subseteq E$. Daher gilt die Inklusion

$$[a,\beta[\cap J \subseteq E.$$

Für jedes $c \in J$ mit $c > \beta = \sup E$ ist $c \notin E$. Damit ist

$$]\beta,b] \cap E = \emptyset.$$

Für die Untersuchung, ob $\beta \notin E$ oder $\beta \in E$ gilt, werden die beiden Fälle

i) $b \notin J$,

ii) $b \in J$

unterschieden. Zunächst ist zu beachten, dass bei Vorliegen von $\beta \in E$ zunächst $\beta = \max E$ und wegen der Monotonie von η (Beweisteil 2) auch $\eta(\beta) = \max \eta(E) = \max E_-$ ist (Beweisteil 6). Da nach Beweisteil 1) das Intervall E_- den rechten Randpunkt b besitzt, folgt notwendig $b = \eta(\beta) \in E_- \subseteq J$, also $b \in J$.

Im Fall i) $b \notin J$ ist demzufolge $\beta \notin E$ und

$$E = [a,\beta[\cap J.$$

Der Definitionsbereich E von η ist ein rechtsoffenes Intervall mit rechtem Randpunkt β und linkem Randpunkt a.

Dabei können hier die beiden Unterfälle $\beta = b$ und $\beta < b$ eintreten: Im Unterfall $\beta = b$ gilt für jedes $c \in J$ die Inzidenz $c \in E$ bzw. die Relation $N_+(c) \neq \emptyset$, sodass in jedem Teilintervall $[c,b[$ $(c \in J)$ die Nichtdiskonjugiertheit von (L) vorliegt. Im Unterfall $\beta < b$ liegt wegen $\beta \notin E$ und $N_+(\beta) = \emptyset$ die Diskonjugiertheit im Teilintervall $[\beta,b[$ vor.

Der Fall $\beta = a$ kann nicht eintreten, da dann $E = [a,\beta[\cap J = \emptyset$ wäre, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass (L) in J nichtdiskonjugiert ist. Insgesamt ergeben sich im Fall i) für β die Ungleichungen $a < \beta \leq b$.

Im Fall ii) $b \in J$ ist nach obiger Vorüberlegung die Lage $\beta \in E$ zunächst nicht ausgeschlossen und es kann tatsächlich $\beta \in E$ gezeigt werden: Wegen der Nichtdiskonjugiertheit von (L) in J ist im Fall ii) $N_-(b) \neq \emptyset$, also $b \in E_-$ und

$$d := \eta_-(b) \in J.$$

Nach dem Zusatz zu Satz 2.4 ist (L) diskonjugiert in $[b\text{-}\delta,b]$ für ein $\delta > 0$, nach (4.7) ist (L) nichtdiskonjugiert in $[d,b]$, somit $d < b\text{-}\delta < b$ und

$$d < b.$$

Nach der Definition von $\eta_-(b)$ ist (L) diskonjugiert in $]d,b]$. Damit ist für jedes $c \in J$ mit $c > d$ die Differentialgleichung (L) diskonjugiert in $[c,b] \subseteq]d,b]$, also $N_+(c) = \emptyset$, $\eta(c) = \infty$ und $c \notin E$. Hinsichtlich der Lage von E gilt also

$$]d,b] \cap E = \emptyset.$$

Da nach Beweisteil 5) η die Umkehrfunktion von η_- auf $\eta_-(E_-)$ ist, gilt $\eta(d) = \eta(\eta_-(b)) = b \in J$ und $d \in E$. Nach Beweisteil 1) ist dann

$$[a,d] \cap J \subseteq E.$$

Insgesamt ist daher im Fall ii)

$$E = [a,d] \cap J = [a,\beta] \cap J$$

mit $\beta = \sup E = \max E = d \in E$, also $\beta \in E$. Der Definitionsbereich E von η ist ein rechtsabgeschlossenes Intervall mit rechtem Randpunkt $\beta = \eta_-(b)$ und linkem Randpunkt a.

Der Fall $\beta = a$ kann hier wegen $\beta = d = \eta_-(b) \in J$ nur im Fall $a \in J$ eintreten. Es sind dann $E = \{a\}$ und $E_- = \eta(E) = \{b\}$ ($\eta(a) = \eta(\beta) = \eta(\eta_-(b)) = b$) ausgeartete Intervalle, die je aus nur einem Punkt bestehen. Beispiele für diesen Spezialfall sind mittels der Integralkurve C in der Abbildung 3.7 angegeben. Insgesamt ergeben sich im Fall ii) für $\beta = d = \eta_-(b)$ die Ungleichungen $a \le \beta < b$.

9) **Die genaue Intervallform von** E_-

Da (L) als nichtdiskonjugiert in J vorausgesetzt ist, ist $\emptyset \ne E_- \subseteq J$. Für

$$\alpha := \inf E_-$$

gilt damit $\alpha < +\infty$ und $\alpha \in [a,b]$. Aufgrund der Definition von α als Infimum von E_- gibt es zu jedem $c'' \in J$ mit $c'' > \alpha$ ein $c \in E_-$ mit $\alpha \le c < c''$. Nach Beweisteil 1) ist dann auch $c'' \in E_-$ und $[c'',b] \cap J \subseteq E_-$. Daher gilt die Inklusion

$$]\alpha,b] \cap J \subseteq E_-.$$

Für jedes $c \in J$ mit $c < \alpha = \inf E_-$ ist $c \notin E_-$. Damit ist

$$[a,\alpha[\cap E = \emptyset.$$

Für die Untersuchung, ob $\alpha \notin E_-$ oder $\alpha \in E_-$ gilt, werden die beiden Fälle

i) $a \notin J$,

ii) $a \in J$.

unterschieden. Zunächst ist zu beachten, dass bei Vorliegen von $\alpha \in E_-$ zunächst $\alpha = \min E_-$ und wegen der Monotonie von η (Beweisteil 2) auch $\eta_-(\alpha) = \min \eta_-(E_-) = \min E$ ist (Beweisteil 6). Da nach Beweisteil 1) das Intervall E den linken Randpunkt a besitzt, folgt notwendig $a = \eta_-(\alpha) \in E \subseteq J$, also $a \in J$.

Im Fall i) $a \notin J$ ist demzufolge $\alpha \notin E_-$ und

$$E_- =]\alpha,b] \cap J.$$

Der Definitionsbereich E_- von η_- ist ein linksoffenes Intervall mit linkem Randpunkt α und rechtem Randpunkt b.

Dabei können hier die beiden Unterfälle $\alpha = a$ und $\alpha > a$ eintreten: Im Unterfall $\alpha = a$ gilt für jedes $c \in J$ die Inzidenz $c \in E_$, sodass in jedem Teilintervall $]a,c]$ ($c \in J$) die Nichtdiskonjugiertheit von (L) vorliegt. Im Unterfall $\alpha > a$ liegt wegen $\alpha \notin E_-$ und $N_-(\alpha) = \emptyset$ die Diskonjugiertheit im Teilintervall $]a,\alpha]$ vor.

Der Fall $\alpha = b$ kann nicht eintreten, da dann $E_- =]\alpha,b] \cap J = \emptyset$ wäre, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass (L) in J nichtdiskonjugiert ist. Insgesamt ergeben sich im Fall i) für α die Ungleichungen $a \le \alpha < b$.

Im Fall ii) $a \in J$ ist nach obiger Vorüberlegung die Lage $\alpha \in E_-$ zunächst nicht ausgeschlossen und es kann tatsächlich $\alpha \in E_-$ gezeigt werden: Wegen der Nichtdiskonjugiertheit von (L) in J ist im Fall ii) $N_+(a) \ne \emptyset$, also $a \in E$ und

$$d := \eta(a) \in J.$$

Nach dem Zusatz zu Satz 2.4 ist (L) diskonjugiert in $[a,a+\delta]$ für ein $\delta > 0$, nach (4.7) ist (L) nichtdiskonjugiert in $[a,d]$, somit $a < a+\delta < d$ und

$$a < d.$$

Nach der Definition von $\eta(a)$ ist (L) diskonjugiert in $[a,d[$. Damit ist für jedes $c \in J$ mit $c < d$ die Differentialgleichung (L) diskonjugiert in $[a,c] \subseteq [a,d[$, also $N_-(c) = \emptyset$, $\eta_-(c) = -\infty$ und $c \notin E_-$. Hinsichtlich der Lage von E_- gilt also

$$[a,d[\cap E_- = \emptyset.$$

Da nach Beweisteil 5) η_- die Umkehrfunktion von η auf $\eta(E)$ ist, gilt $\eta_-(d) = \eta_-(\eta(a)) = a \in J$ und $d \in E_-$. Nach Beweisteil 1) ist dann

$$[d,b] \cap J \subseteq E_-.$$

Insgesamt ist daher im Fall ii)

$$E_- = [d,b] \cap J = [\alpha,b] \cap J$$

mit $\alpha = \inf E_- = \min E_- = d \in E_-$, also $\alpha \in E_-$. Der Definitionsbereich E_- von η_- ist ein linksabgeschlossenes Intervall mit linkem Randpunkt $\alpha = \eta(a)$ und rechtem Randpunkt b.

Der Fall $\alpha = b$ kann hier wegen $\alpha = d = \eta(a) \in J$ nur im Fall $b \in J$ eintreten. Es sind dann $E_- = \{b\}$ und $E = \eta_-(E_-) = \{a\}$ ($\eta_-(b) = \eta_-(\alpha) = \eta_-(\eta(a)) = a$) ausgeartete Intervalle, die je aus nur einem Punkt bestehen. Beispiele für diesen Spezialfall sind mittels der Integralkurve C in Abbildung 3.7 angegeben. Insgesamt ergeben sich im Fall ii) für $\alpha = d = \eta(a)$ die Ungleichungen $a < \alpha \leq b$. □

Der nachfolgende Hilfssatz wird im vorhergehenden Beweis in Teil 7) verwendet.

Hilfssatz 4.5 Satz von der Stetigkeit der Umkehrfunktion zu einer streng monotonen Funktion auf einem Intervall

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und die Funktion

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

streng monoton steigend. Die auf dem f-Bild $I' = f(I)$ von f definierte Umkehrfunktion

$$f^{-1} : I' \longrightarrow I$$

ist dann streng monoton steigend und stetig.

Beweis des Hilfssatzes:[12] Anzumerken ist, dass hier für die Funktion f nicht die Stetigkeit vorausgesetzt wird. Es gibt nämlich Beispiele, bei denen f streng monoton steigend und stetig ist, aber die Umkehrfunktion f^{-1} nicht stetig ist: Die streng monoton steigende Funktion f kann Sprungstellen $x_0 \in I$ aufweisen, bei denen für f ein unzusammenhängender Definitionsbereich I (und somit kein Intervall), aber bei $y_0 = f(x_0)$ ein zusammenhängender Wertebereich $I' = f(I)$ vorliegt. Dies liefert für die Umkehrfunktion f^{-1} bei y_0 einen zusammenhängenden Definitionsbereich I' und bei $x_0 = f^{-1}(y_0)$ einen unzusammenhängenden Wertebereich $I = f^{-1}(I')$, also eine Unstetigkeitsstelle. Ein derartiges Beispiel findet man bei Deiser (2013), S. 194. Dies führt zu der Voraussetzung, dass der Definitionsbereich von f ein Intervall ist.

Der Beweis der Stetigkeit der Umkehrfunktion f^{-1} erfolgt mit der Epsilon-Delta-Charakterisierung der Stetigkeit. Zunächst folgt aus der strengen Monotonie von f die Injektivität von f und damit die Existenz der Umkehrfunktion $f^{-1} : I' \longrightarrow I$ mit $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in I$.

Strenge Monotonie von f^{-1}: Zu beliebigen $y_1, y_2 \in I' = f(I)$ mit $y_1 < y_2$ gibt es $x_1, x_2 \in I$ mit

$$f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2).$$

Da f monoton steigend ist, würde aus der Ungleichung $x_1 \geq x_2$ die Ungleichung $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$ folgen, im Widerspruch zur Voraussetzung über y_1, y_2. Wegen der Trichotomie der Ordnung $>$ der reellen Zahlen folgt daher

$$f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2),$$

Demnach ist f^{-1} streng monoton steigend.

Stetigkeit von f^{-1}: Für ein beliebiges

$$y_0 = f(x_0) \in f(I) = I'$$

und das zugehörige f-Urbild $x_0 \in I$ von y_0 werden die drei Fälle unterschieden:

i) x_0 ist innerer Punkt von I,
ii) x_0 ist der linke Randpunkt von I: $x_0 = \inf I$,
iii) x_0 ist der rechte Randpunkt von I: $x_0 = \sup I$.

Neben dem linken und dem rechten Randpunkt von I kann kein weiterer Randpunkt x_0 von I mit x_1, $x_2 \in I$ und $x_1 < x_0 < x_2$ auftreten, da wegen der Intervalleigenschaft dann $[x_1,x_2] \subseteq I$, x_0 innerer Punkt und somit x_0 kein Randpunkt von I wäre.

Im Fall i) gibt es zum inneren Punkt x_0 von I ein $\varepsilon > 0$, sodass auch die Umgebung $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ von x_0 in I liegt. Für den Nachweis der Stetigkeit von f^{-1} kann dann auch ein beliebig kleineres $\varepsilon > 0$

[12] Den Beweis für den Satz von der Stetigkeit der Umkehrfunktion und ein motivierendes Beispiel findet man bei Deiser (2013), S. 193f. Mit der Stetigkeit von f als zusätzlicher Voraussetzung wird der Satz bewiesen bei Erwe (1967), Bd. 1, S. 117, Satz 11, Grauert, Lieb (1967), Bd. I, S. 107, Satz 6.3, Hildebrandt (2006), Bd. 1, S. 147, 153, Köhler (2006), S. 125, Satz 10.11.

gewählt werden. Zu den Punkten $x_1 := x_0 - \varepsilon$, $x_2 := x_0 + \varepsilon \in I$ und den zugehörigen Funktionswerten $y_1 := f(x_1)$, $y_2 := f(x_2) \in I'$ wählt man $\delta := \min\{y_0 - y_1, y_2 - y_0\}$. Damit gelten die Ungleichungen

$$y_1 \le y_0 - \delta < y_0 + \delta \le y_2$$

und für beliebiges $y \in]y_0 - \delta, y_0 + \delta[$ zunächst $y_1 < y < y_2$ und wegen der strengen Monotonie von f^{-1} die Ungleichungen

$$x_0 - \varepsilon = x_1 = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_2 = x_0 + \varepsilon,$$

also $f^{-1}(y) \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$. Daher ist f^{-1} in y_0 stetig. Aus der Intervalleigenschaft des f^{-1}-Bilds $I = f^{-1}(I')$ und der strengen Monotonie von f^{-1} folgt somit die Stetigkeit von f^{-1} in x_0.

Im Fall ii) wird noch vorausgesetzt, dass I kein ausgeartetes Intervall ist, also $I \neq \{x_0\}$ ist. Für ein ausgeartetes Intervall I, das nur aus einem Punkt besteht, ist der Satz trivialerweise gültig. Da I ein nichtausgeartetes (echtes) Intervall ist, das mindestens zwei Punkte enthält, und x_0 der linke Randpunkt von I ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $x_2 := x_0 + \varepsilon \in I$ und dann auch $[x_0, x_2] \subseteq I$ gilt: Hier wird verwendet, dass der Definitionsbereich I von f ein Intervall und damit bezüglich der totalen Ordnung $\le$ zusammenhängend ist (Intervalleigenschaft). Mit den Punkten x_0, $x_2 := x_0 + \varepsilon \in I$ liegt somit auch das abgeschlossene Intervall $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ in I. Für den Nachweis der Stetigkeit von f^{-1} gilt dies dann auch noch für jedes beliebig kleinere $\varepsilon > 0$. Wegen $x_0 = \min I$ und der Monotonie von f ist

$$y_0 = f(x_0) = \min f(I) = \min I'.$$

Mit $y_2 := f(x_2) = f(x_0 + \varepsilon) \in I'$ und $\delta := y_2 - y_0$ gilt für jedes $y \in I'$ mit $y \in]y_0 - \delta, y_0 + \delta[$ zunächst $y \ge y_0$ und dann noch

$$y_0 \le y < y_0 + \delta = y_2.$$

Wegen der strengen Monotonie von f^{-1} folgen die Ungleichungen

$$x_0 = f^{-1}(y_0) \le f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_2 = x_0 + \varepsilon,$$

also $f^{-1}(y) \in [x_0, x_0 + \varepsilon[\subseteq]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$. Daher ist f^{-1} stetig in y_0.

Der Fall iii) lässt sich analog zu ii) beweisen. □

Die Differenzierbarkeit der Funktion η

Zur Untersuchung der Differenzierbarkeit der Funktion η wird ihr Definitionsbereich E in Teilmengen zerlegt. Für die durch

$$H(x) := u_2(\eta(x), x),$$
$$H^+(x) := u_2^+(\eta(x), x)$$

in E definierten und (als Zusammensetzung von stetigen Funktionen wieder) stetigen Funktionen H und H^+ gilt nach der Minimalitätseigenschaft (4.7) von $\eta(x)$

$$H \ge 0, \quad H^+ \ge 0, \quad H \cdot H^+ \equiv 0 \quad \text{in } E.$$

Der Definitionsbereich E von η lässt sich damit disjunkt zerlegen in

$$E = A \cup D$$

mit

$$\begin{aligned} A &= \{x \in E : (H(x) \cdot H^+(x) = 0)\ H(x) + H^+(x) > 0\} \\ &= \{x \in E : \text{Für } \{x, \eta(x)\} \text{ gilt nicht (3.8)}\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} D &= \{x \in E : H(x) = 0 = H^+(x)\} \\ &= \{x \in E : \text{Für } \{x, \eta(x)\} \text{ gilt (3.8) } u_2(\eta(x), x) = u_2(x, \eta(x)) = 0\} \\ &= \{x \in E : \eta(x) = z_{21}(x) = z_{21}^+(x)\}. \end{aligned}$$

Die Menge A der $x \in E$, für die $\eta(x)$ entweder nur Nullstelle von $u_2(., x)$ oder nur Nullstelle von $u_2^+(., x)$ ist, lässt sich weiter disjunkt zerlegen in

$$A = A_1 \cup A_2$$

mit

$$A_1 = \{x \in E : H^+(x) > 0 = H(x)\} = \{x \in E : H^+(x) > 0\}$$
$$= \{x \in E : \eta(x) = z_{21}(x) < z_{21}^+(x)\},$$
$$A_2 = \{x \in E : H(x) > 0 = H^+(x)\} = \{x \in E : H(x) > 0\}$$
$$= \{x \in E : \eta(x) = z_{21}^+(x) < z_{21}(x)\}.$$

Dabei enthält A_1 alle $x \in E$, für die $\eta(x)$ nur Nullstelle von $u_2(.,x)$ und nicht Nullstelle von $u_2^+(.,x)$ ist, bzw. (nach (4.7)) alle $x \in E$ mit

$$\eta(x) = z_{21}(x) < z_{21}^+(x).$$

Die Menge A_2 enthält alle $x \in E$, für die $\eta(x)$ nur Nullstelle von $u_2^+(.,x)$ und nicht Nullstelle von $u_2(.,x)$ ist, bzw. alle $x \in E$ mit

$$\eta(x) = z_{21}^+(c) < z_{21}(x).$$

Geometrisch gesehen enthält die Menge A_1 die Kurvenparameter x, für welche der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(\eta(x))]$ auf der Tangente $\langle \mathbf{z}(x) \rangle$ liegt, aber der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x)]$ nicht auf der Tangente $\langle \mathbf{z}(\eta(x)) \rangle$ liegt. Die Menge A_2 enthält die Kurvenparameter x, für welche der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x)]$ auf der Tangente $\langle \mathbf{z}(\eta(x)) \rangle$ liegt, aber der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(\eta(x))]$ nicht auf der Tangente $\langle \mathbf{z}(x) \rangle$ liegt. Die Menge A enthält die Kurvenparameter x, für welche entweder nur der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(\eta(x))]$ auf der Tangente $\langle \mathbf{z}(x) \rangle$ liegt oder nur der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x)]$ auf der Tangente $\langle \mathbf{z}(\eta(x)) \rangle$, aber nicht beides eintritt. Für das Kurvenparameterpaar $\{x,\eta(x)\}$ liegt also nicht die Eigenschaft (3.8) für das Auftreten eines Doppelpunkts oder einer Doppeltangente der Integralkurve C vor (Begründung in Abschnitt 3.1.7).

Die Menge D der $x \in E$, für die $\eta(x)$ sowohl Nullstelle von $u_2(.,x)$ als auch Nullstelle von $u_2^+(.,x)$ ist, also der $x \in E$ mit

$$\eta(x) = z_{21}(x) = z_{21}^+(x),$$

lässt sich weiter disjunkt zerlegen in

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$$

mit

$$D_1 = \{x \in E\text{: Für } \{x,\eta(x)\} \text{ gilt (3.10): } [u_2^+(.,x)] = [u_2^+(.,\eta(x))],\ [u_2(.,x)] \neq [u_2(.,\eta(x))]\}$$
$$= \{x \in E\text{: } u_2(\eta(x),x) = u_2(x,\eta(x)) = u_1(x,\eta(x)) = 0 \neq u_1^+(x,\eta(x))\},$$
$$D_2 = \{x \in E\text{: Für } \{x,\eta(x)\} \text{ gilt (3.11): } [u_2(.,x)] = [u_2(.,\eta(x))],\ [u_2^+(.,x)] \neq [u_2^+(.,\eta(x))]\}$$
$$= \{x \in E\text{: } u_2(\eta(x),x) = u_2(x,\eta(x)) = u_1^+(x,\eta(x)) = 0 \neq u_1(x,\eta(x)\},$$
$$D_3 = \{x \in E\text{: Für } \{x,\eta(x)\} \text{ gilt (3.9): } [u_2^+(.,x)] = [u_2^+(.,\eta(x))],\ [u_2(.,x)] = [u_2(.,\eta(x))]\}$$
$$= \{x \in E\text{: } u_2(\eta(x),x) = u_2(x,\eta(x)) = 0 = u_1^+(x,\eta(x)) = u_1(x,\eta(x)\}.$$

Bei $x \in D$ liegt für $\{x,\eta(x)\}$ die Eigenschaft (3.8) vor, also ein Doppelpunkt oder eine Doppeltangente der Integralkurve C. Dabei enthält die Menge D_1 alle $x \in E$, für welche die Stellen x und $\eta(x)$ auf C einen Doppelpunkt und keine Doppeltangente liefern, die Menge D_2 alle $x \in E$, für welche die Stellen x und $\eta(x)$ auf C eine Doppeltangente und keinen Doppelpunkt liefern, und die Menge D_3 alle $x \in E$, für welche die Stellen x und $\eta(x)$ auf C sowohl einen Doppelpunkt als auch eine Doppeltangente liefern. In der Abbildung 4.6 werden die hier beschriebenen verschiedenen Punkte x von E als Kurvenparameter der Integralkurve C dargestellt.

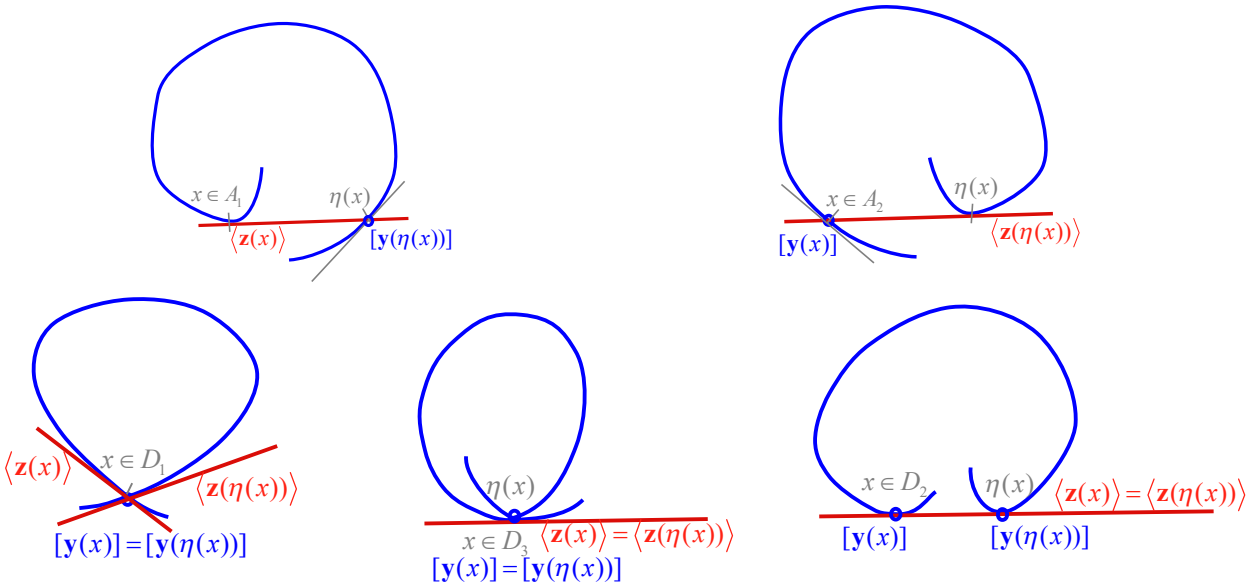


Abb. 4.6 Veranschaulichung der verschiedenen Punkte x der Menge $E = A_1 \cup A_2 \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3$ als Kurvenparameter der Integralkurve C

Wegen der Stetigkeit der Funktionen $H(x)$, $H^+(x)$,

$$G(x) := u_1(x,\eta(x)),$$
$$G^+(x) := u_1^+(x,\eta(x))$$

(man beachte hier die umgekehrte Reihenfolge von x und $\eta(x)$ als bei $H(x)$, $H^+(x)$) in E folgt, dass die Teilmengen

$$A_1 = \{H^+ > 0\},$$
$$A_2 = \{H > 0\},$$
$$A = \{H + H^+ > 0\}$$

jeweils offen in E und die Teilmengen

$$D = \{H = 0 = H^+\},$$
$$D_3 = \{H = 0 = H^+,\ G = 0 = G^+\}$$

jeweils abgeschlossen in E (bezüglich der Spurtopologie oder Relativtopologie des Intervalls $E \subseteq \mathbb{R}$) sind. Für die Teilmengen

$$D_1 = \{H = H^+ = G = 0 \neq G^+\},$$
$$D_2 = \{H = H^+ = G^+ = 0 \neq G\}$$

kann keine Aussage hinsichtlich offen bzw. abgeschlossen in E getroffen werden.

Der folgende Hilfssatz 4.6 über das Vorzeichen der Funktionswerte $u_1(\eta(x),x)$, $u_1(x,\eta(x))$, $u_1^+(\eta(x),x)$, $u_1^+(x,\eta(x))$ wird mittels Hilfssatz 4.4 bewiesen. Er wird dann bei der Anwendung des Satzes über implizite Funktionen zur Untersuchung der Differenzierbarkeit von η verwendet. Eine übersichtliche Darstellung der Vorzeichen gibt die Tabelle 4.1.

Hilfssatz 4.6 Das Vorzeichen der Funktionswerte $u_1(\eta(x),x)$, $u_1(x,\eta(x))$, $u_1^+(\eta(x),x)$, $u_1^+(x,\eta(x))$

a) **Das Vorzeichen von** $u_1(\eta(x),x)$ **und** $u_1(x,\eta(x))$

1) Für $x \in A_1 \cup D_2 \cup D_3$ hat $u_1(.,x)$ genau eine (einfache) Nullstelle in $]x,\eta(x)[$.
   Für $x \in A_1 \cup D_2$ ist
   $$u_1(\eta(x),x) < 0,$$
   für $x \in D_1 \cup D_3$ ist
   $$u_1(\eta(x),x) = 0.$$
2) Für $x \in A_2 \cup D_2 \cup D_3$ hat $u_1(.,\eta(x))$ genau eine (einfache) Nullstelle in $]x,\eta(x)[$.

Für $x \in A_2 \cup D_2$ ist

$$u_1(x,\eta(x)) > 0,$$

für $x \in D_1 \cup D_3$ ist

$$u_1(x,\eta(x)) = 0.$$

b) **Das Vorzeichen von** $u_1^+(\eta(x),x)$ **und** $u_1^+(x,\eta(x))$

1) Für $x \in A_2 \cup D_1 \cup D_3$ hat $u_1^+(.,x)$ genau eine (einfache) Nullstelle in $]x,\eta(x)[$.

Für $x \in A_2 \cup D_1$ ist

$$u_1^+(\eta(x),x) < 0,$$

für $x \in D_2 \cup D_3$ ist

$$u_1^+(\eta(x),x) = 0.$$

2) Für $x \in A_1 \cup D_1 \cup D_3$ hat $u_1^+(.,\eta(x))$ genau eine (einfache) Nullstelle in $]x,\eta(x)[$.

Für $x \in A_1 \cup D_1$ ist

$$u_1^+(x,\eta(x)) > 0,$$

für $x \in D_2 \cup D_3$ ist

$$u_1^+(x,\eta(x)) = 0$$

Tab. 4.1 Das Vorzeichen der Funktionswerte der Funktionen $u_1(.,.)$ und $u_1^+(.,.)$ an den Stellen $(x,\eta(x))$ und $(\eta(x),x)$ für $x \in E$

sgn	$x \in A_1$	$x \in A_2$	$x \in D_1$	$x \in D_2$	$x \in D_3$
$u_1(\eta(x),x)$	$\ominus$		0	$\ominus$	0
$G(x) = u_1(x,\eta(x))$		$\oplus$	0	$\oplus$	0
$u_1^+(\eta(x),x)$		$\ominus$	$\ominus$	0	0
$G^+(x) = u_1^+(x,\eta(x))$	$\oplus$		$\oplus$	0	0

Beweis für a, 1): Für ein fest gedachtes $x \in A_1 \cup D_2 \cup D_3$ ist

$$u_2(\eta(x),x) = H(x) = 0$$

und wegen $x \notin D_1$ liegt für das Kurvenparameterpaar $\{x,\eta(x)\}$ nicht (3.10), also kein Doppelpunkt ohne Doppeltangente von C vor. Wegen der Diskonjugiertheit von (L) in $[x,\eta(x)[$ gilt insbesondere auch $L \in K_I]x,\eta(x)[$. Für die Lösung

$$y := u_1(.,x)$$

ist $y(x) = 0$ und $[y] \neq [u_2(.,x)]$. Damit sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 4.4, a, 1) ($t_0 = c$) erfüllt, sodass y eine Nullstelle in $]x,\eta(x)[$ besitzt. Wegen der Diskonjugiertheit in $[x,\eta(x)[$ ist diese Nullstelle ξ die einzige Nullstelle von y in $]x,\eta(x)[$ und nur eine einfache Nullstelle.
Da ξ Vorzeichenwechselstelle von $y := u_1(.,x)$ ist, gilt $y > 0$ in $]x,\xi[$, $y < 0$ in $]\xi,\eta(x)[$ und wegen der Stetigkeit von y noch

$$y(\eta(x)) \leq 0.$$

Für $x \in A_1$ liegt für $\{x,\eta(x)\}$ die Eigenschaft (3.8) eines Doppelpunkts oder einer Doppeltangente *nicht* vor. Bei der schon vorliegenden Gültigkeit von $0 = H(x) = u_2(\eta(x),x) = u_2^+(x,\eta(x))$ ist daher insbesondere zur Vermeidung eines Doppelpunkts

$$u_1(\eta(x),x) = -\, D^1[u_2^+](x,\eta(x)) \neq 0$$

und insgesamt $y(\eta(x)) = u_1(\eta(x),x) < 0$.
Für $x \in D_2$ liefert das Kurvenparameterpaar $\{x,\eta(x)\}$ die Eigenschaft (3.11), also eine Doppeltangente ohne Doppelpunkt, sodass wegen $u_2^+(x,\eta(x)) = u_2(\eta(x),x) = H(x) = 0$ zur Vermeidung eines Doppelpunkts

$$u_1(\eta(x),x) = -\ D^1[u_2^+](x,\eta(x)) \neq 0$$

gilt und insgesamt $y(\eta(x)) = u_1(\eta(x),x) < 0$ ist.

Für $x \in D_3$ liegt für $\{x,\eta(x)\}$ die Eigenschaft (3.9) eines Doppelpunkts mit einer Doppeltangente vor, also insbesondere ein Doppelpunkt $[u_2^+(.,x)] = [u_2^+(.,\eta(x))]$.

Für $x \in D_1$ weist $\{x,\eta(x)\}$ die Eigenschaft (3.10), also einen Doppelpunkt ohne Doppeltangente auf. Demzufolge ergibt sich für $x \in D_3 \cup D_1$ mit (2.1)

$$u_1(\eta(x),x) = -\ D^1[u_2^+](x,\eta(x)) = 0.$$

Die anderen Teile des Hilfssatzes werden analog bewiesen. □

Hinsichtlich der Differenzierbarkeit der Funktion η werden nun die folgenden Feststellungen bewiesen.

(4.20) **Zweimal stetige Differenzierbarkeit von η in A**

Es gilt

$$\eta \in C^2(A) \text{ und } \eta' > 0 \text{ in } A$$

und im Fall $p \in C^1(J)$ sogar

$$\eta \in C^3(A).$$

Für $x \in A_1$ gilt

$$\eta'(x) = -\ u_1(\eta(x),x)/u_1^+(x,\eta(x)) > 0,$$

für $x \in A_2$ gilt

$$\eta'(x) = -\ u_1^+(\eta(x),x)/u_1(x,\eta(x)) > 0.$$

(4.21) **Linksseitige und rechtseitige Differenzierbarkeit von η in $D_1 \cup D_2$**

Jedes $x_0 \in D_1 \cup D_2$ ist ein isolierter Punkt von D und Häufungspunkt von A:

Zu jedem $x_0 \in D_1$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$]x_0 - \delta,x_0[\ \cap E \subseteq A_2 \text{ und}$$
$$]x_0,x_0 + \delta[\ \cap E \subseteq A_1.$$

Zu jedem $x_0 \in D_2$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$]x_0 - \delta,x_0[\ \cap E \subseteq A_1 \text{ und}$$
$$]x_0,x_0 + \delta[\ \cap E \subseteq A_2.$$

Falls $x_0 \in D_1 \cup D_2$ kein linker Randpunkt des Intervalls E und somit $]x_0-\delta,x_0[\ \subseteq E$ für ein $\delta > 0$ ist, erhält man die linksseitige Ableitung[13] $\eta_l'(x_0)$ mit

$$\eta_l'(x_0) := \lim_{x \nearrow x_0} \frac{\eta(x)-\eta(x_0)}{x-x_0} = +\infty,$$

Falls $x_0 \in D_1 \cup D_2$ kein rechter Randpunkt des Intervalls E und somit $]x_0,x_0+\delta[\ \subseteq E$ für ein $\delta > 0$ ist, erhält man die rechtsseitige Ableitung $\eta_r'(x_0)$ mit

$$\eta_r'(x_0) := \lim_{x \searrow x_0} \frac{\eta(x)-\eta(x_0)}{x-x_0} = 0.$$

Falls $x_0 \in D_1 \cup D_2$ innerer Punkt des Intervalls E und somit $]x_0-\delta,x_0+\delta[\ \subseteq E$ für ein $\delta > 0$ ist, so ist η linksseitig und rechtsseitig differenzierbar, aber nicht differenzierbar.

(4.22) **Dreimal stetige Differenzierbarkeit von η in einem nicht ausgearteten Intervall $[c_1,c_2] \subseteq D_3$**

Ist $[c_1,c_2] \subseteq D_3$ ($c_1 < c_2$), so gilt

[13] Die Bezeichnung der einseitigen Differenzierbarkeit wird hier auch für den Fall verwendet, dass der einseitige Grenzwert des Differenzenquotienten unendlich ist.

$\eta \in C^3(]c_1,c_2[)$, $\eta' > 0$ in $]c_1,c_2[$.

Für $x \in]c_1,c_2[$ ist

$$\eta'(x) = D^2[u_2^+](x,\eta(x)) / u_1'(\eta(x),x) > 0,$$

$$\eta''(x) = \Big(u_0'(\eta(x),x)\eta'(x)u_1'(\eta(x),x) - D^2[u_2^+](x,\eta(x)) \cdot \big(u_1''(\eta(x),x)\eta'(x) + D^2[u_1^+](x,\eta(x))\big)\Big) / \big(u_1'(\eta(x),x)\big)^2 .$$

Beweis: Die Aussagen über die Differenzierbarkeit der Funktion η werden mit dem Satz[14] von der impliziten Funktion bewiesen. Dabei verwendet man eine Funktion $F(t,x)$, mit der die Funktion η in einer Teilmenge von E der Gleichung $F(\eta(x),x) = 0$ genügt. Bei gesicherter einziger lokaler Auflösbarkeit der Gleichung $F(t,x) = 0$ nach einer sogenannten impliziten Funktion $t = g(x)$ können dann die Eigenschaften der Funktion $g(x)$, wie z. B. die Differenzierbarkeit, auf $\eta(x)$ übertragen werden.
Bei diesem Satz geht man also (hier im Spezialfall $t, x \in \mathbb{R}$) aus von einer Gleichung

$$F(t,x) = 0,$$

durch die zunächst eine Punktmenge im Definitionsbereich der Funktion $F(t,x)$ beschrieben wird. Es wird nach einer hinreichenden Bedingung gesucht, wann diese Gleichung eindeutig nach der Variablen t aufgelöst werden kann, also die Punktmenge im Ganzen oder in Teilen auch durch das Bild einer Funktion

$$t = g(x)$$

gegeben wird. Vorausgesetzt werden dazu offene Mengen $V, U \subseteq \mathbb{R}$, sodass

F stetig und nach t stetig partiell differenzierbar auf $V \times U$

ist und für einen festen Punkt $(t_0,x_0) \in V \times U$

$$F(t_0,x_0) = 0 \neq \frac{\partial F}{\partial t}(t_0,x_0)$$

gilt. Nach diesem Satz gibt es dann offene Umgebungen $V_1 \subseteq V$ von t_0 und $U_1 \subseteq U$ von x_0, sodass

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) \neq 0 \ \forall\ (t,x) \in V_1 \times U_1$$

ist und genau eine Funktion

$$g : U_1 \longrightarrow V_1$$

existiert mit

$$g(x_0) = t_0 \ \wedge$$
$$F(g(x),x) = 0 \ \forall\ x \in U_1.$$

Weiter ist die Funktion $g(x)$ stetig in der Umgebung U_1 von x_0. Die Gleichung $F(t,x) = 0$ ist also in einer Umgebung U_1 von x_0 eindeutig nach t auflösbar, wenn die Funktionswerte auf eine beliebig klein vorgebbare Umgebung V_1 von t_0 begrenzt werden. Damit wird durch die Gleichung eine sog. implizite (unentwickelte, nicht explizite) Funktion $g(x)$ definiert. Die Einzigkeit der Funktion $g(x)$ und deren Stetigkeit ergeben sich aus der konstruktiven Forderung im Beweis des Satzes, dass man die Variable t auf eine beliebig klein vorgebbare Umgebung V_1 von t_0 einschränkt. Man sagt, dass die nachgewiesene lokale implizite Funktion sich durch stetige Fortsetzung aus dem Anfangswert $g(x_0) = t_0$ ergibt.
Falls zusätzlich vorausgesetzt ist, dass F auf $V \times U$ auch noch nach x stetig partiell differenzierbar ist, so ist nach diesem Satz die implizite Funktion $g(x)$ auch stetig differenzierbar auf U_1. Durch Diffe-

[14] Den Satz von der impliziten Funktion samt Beweis findet man beispielsweise in den Analysis-Lehrbüchern von Erwe, Bd. I (1962), S. 322–333, Grauert und Fischer, Bd. II (1968), S. 92–96, und Mangoldt und Knopp, Bd. II (1974), S. 358–378. Andere Beweise verwenden ein Anfangswertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung oder ein Fixpunktproblem, das mittels des Newton-Verfahrens für die Gleichung $F(t,x) = 0$ formuliert wird. Hans Grauert (1930–2011) war einer der bedeutendsten deutschen Mathematiker der Nachkriegszeit. Sein Spezialgebiet war die Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher.

rentiation der Gleichung $F(g(x),x) \equiv 0$ nach x erhält man nach der Kettenregel[15] für die Differentiation zusammengesetzter Funktionen mehrerer Veränderlicher für die Funktion $g(x)$ und ihre Ableitung $g'(x)$ die Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(g(x),x)}{\frac{\partial F}{\partial t}(g(x),x)} \quad \forall x \in U_1.$$

Für die Anwendung des Satzes von der impliziten Funktion verwendet Guggenheimer (1972), S. 247, Prop.5 (für $p \equiv 0$, $r > 0$) die auf $J \times J$ definierte Funktion

$$F(t,x) := u_2(t,x) \cdot u_2^+(t,x) = u_2^+(x,t) \cdot u_2(x,t).$$

Diese besitzt die stetigen partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) &= u_2'(t,x)\,u_2^+(t,x) + u_2(t,x)\,u_2^{+\,\prime}(t,x)\\ &= -\,u_1^+(x,t)\,u_2^+(t,x) + u_2(t,x)\left(-u_1(x,t) + p(t)u_2^+(t,x)\right),\\ \frac{\partial F}{\partial x}(t,x) &= u_2^{+\,\prime}(x,t)\cdot u_2(x,t) + u_2^+(x,t)\cdot u_2'(x,t)\\ &= \left(-u_1(t,x) + p(x)u_2^+(x,t)\right)\cdot u_2(x,t) - u_2^+(x,t)\cdot u_1^+(t,x).\end{aligned}$$

Für $x \in A_1$ ist $H^+(x) > 0 = H(x)$, nach Hilfssatz 4.6, b, 2) $u_1^+(x,\eta(x)) > 0$ und daher

$$\frac{\partial F}{\partial t}(\eta(x),x) = -\,u_1^+(x,\eta(x))H^+(x) < 0.$$

Für $x \in A_2$ ist $H(x) > 0 = H^+(x)$, nach Hilfssatz 4.6, a, 2) $u_1(x,\eta(x)) > 0$ und daher

$$\frac{\partial F}{\partial t}(\eta(x),x) = -\,H(x)u_1(x,\eta(x)) < 0.$$

Für $x \in A = A_1 \cup A_2$ ist daher $F(\eta(x),x) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial t}(\eta(x),x) \neq 0$, sodass es nach dem Satz von der impliziten Funktion für jedes $x \in A$ in einer J-Umgebung U_1 von x genau eine Funktion g gibt mit

$$g(x) = \eta(x) \wedge$$
$$F(g(x'),x') = 0 \;\forall\, x' \in U_1.$$

Da außerdem

$$F(\eta(x),x) = u_2(\eta(x),x)\cdot u_2^+(\eta(x),x) = H(x)H^+(x) = 0 \;\forall\, x \in E$$

gilt, stimmt wegen der Einzigkeit der Funktion g in der E-Umgebung $U_1 \cap E$ von x die Funktion η mit dieser stetig differenzierbaren Funktion g überein. Demzufolge ist auch η in dieser E-Umgebung stetig differenzierbar und insgesamt

$$\eta \in C^1(A).$$

Indem nun anstelle der von Guggenheimer verwendeten Funktion $F(t,x)$ für $x \in A_1$ und $x \in A_2$ unterschiedliche Funktionen $F(t,x)$ gewählt werden, können weitere Aussagen zur Differenzierbarkeit von η in A bewiesen werden.

Beweis für A_1: Da A_1 bzw. A_2 offen in E ist, erfüllt $\eta(x)$ in einer ganz in A_1 bzw. A_2 liegenden E-Umgebung der betrachteten Stelle x_0 eine Gleichung $F(\eta(x),x) = 0$ mit geeigneter Funktion $F(t,x)$ und stimmt daher dort mit der implizit definierten Funktion $g(x)$ überein. Die Differenzierbarkeit von $\eta(x)$ wird dann von der lokalen Funktion $g(x)$ übernommen. Für die Aussagen bezüglich der Punkte $x_0 \in A_1$ bzw. $x_0 \in A_2$ werden jetzt verschiedene Funktionen $F(t,x)$ für die Anwendung des Satzes von

[15] Die Kettenregel für die Differentiation zusammengesetzter Funktionen mehrerer Veränderlicher findet man beispielsweise in den Analysis-Lehrbüchern von Erwe, Bd. I (1962), S. 309f., Grauert und Fischer, Bd. II (1968), S. 54, 80, Mangoldt und Knopp, Bd. II (1974), S. 343, Köhler (2006), S. 362f, Deiser (2014), S. 291.

der impliziten Funktion verwendet. Zum Beweis der Aussagen über η in der Menge A_1 wählt man die auf $J \times J$ definierte Funktion

$$F(t,x) := u_2(t,x) = u_2^+(x,t).$$

Diese ist stetig und stetig partiell differenzierbar mit den ersten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = u_2'(t,x) = -\,u_1^+(x,t),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = u_2^+{}'(x,t) = -u_1(t,x) + p(x)u_2^+(x,t).$$

Für $x_0 \in A_1 \subseteq E \subseteq J$ und $t_0 := \eta(x_0) \in \eta(E) = E_- \subseteq J$ gilt

$$F(t_0,x_0) = u_2(\eta(x_0),x_0) = H(x_0) = 0$$

und mit Verwendung von Hilfssatz 4.6, b, 2) und a, 1) noch

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t_0,x_0) = -\,u_1^+(x_0,\eta(x_0)) < 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t_0,x_0) = -u_1(\eta(x_0),x_0) > 0.$$

Geometrisch gesehen wird hier bei $x_0 \in A_1$ nur verwendet, dass auf der Integralkurve C der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(\eta(x_0))]$ auf der Tangente $\langle \mathbf{z}(x_0) \rangle$ des Kurvenpunkts $[\mathbf{y}(x_0)]$ liegt, aber die beiden Tangenten $\langle \mathbf{z}(x_0) \rangle$ und $\langle \mathbf{z}(\eta(x_0)) \rangle$ voneinander verschieden sind: $u_2(\eta(x_0),x_0) = 0 \wedge -u_1^+(x_0,\eta(x_0)) = u_2'(\eta(x_0),x_0) \neq 0$. Von der Tatsache, dass auch noch die Kurvenpunkte $[\mathbf{y}(x_0)]$ und $[\mathbf{y}(\eta(x_0))]$ voneinander verschieden sind, wird kein Gebrauch gemacht ($u_2^+(x_0,\eta(x_0)) = 0 \neq u_2^+{}'(x_0,\eta(x_0)) = -u_1(\eta(x_0),x_0)$).

Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitung $\frac{\partial F}{\partial t}$ gibt es offene J-Umgebungen V von t_0 und U von x_0, sodass die partielle Ableitung auch noch negativ auf $V \times U$ ist:

$$\frac{\partial F}{\partial t} < 0 \text{ auf } V \times U.$$

Nach dem Satz von der impliziten Funktion gibt es dann offene J-Umgebungen $V_1 \subseteq V$ von t_0 und $U_1 \subseteq U$ von x_0, sodass genau eine Funktion

$$g : U_1 \longrightarrow V_1$$

existiert mit

$$g(x_0) = t_0 \wedge$$
$$F(g(x),x) = 0 \;\forall\, x \in U_1.$$

Weiter ist in der J-Umgebung U_1 von x_0 die Funktion $g(x)$ stetig differenzierbar und es gilt dort (wegen $u_2^+(x,g(x)) = F(g(x),x) = 0$, $u_2^+{}'(x,g(x)) = -u_1(g(x),x) + p(x)u_2^+(x,g(x)) = -u_1(g(x),x)$)

$$g'(x) = -\,\frac{\partial F}{\partial x}(g(x),x) \Big/ \frac{\partial F}{\partial t}(g(x),x)$$
$$= -\,\frac{u_1(g(x),x)}{u_1^+(x,g(x))}.$$

Daraus ergibt sich durch weitere Differentiation und unter Verwendung von (2.1) $u_1(t,x) = -D^1[u_2^+](x,t)$, $u_1^+(x,t) = -\,u_2'(t,x)$,

$$\frac{d}{dx}u_1(g(x),x) = -\,\frac{d}{dx}D^1[u_2^+](x,g(x)) = g'(x)\frac{\partial}{\partial g}\,u_1(g(x),x) - \frac{\partial}{\partial x}D^1[u_2^+](x,g(x))$$
$$= u_1'(g(x),x)g'(x) - (D^1[u_2^+])'(x,g(x))$$
$$= u_1'(g(x),x)g'(x) - D^2[u_2^+](x,g(x)) + q(x)u_2^+(x,g(x))$$
$$= u_1'(g(x),x)g'(x) - D^2[u_2^+](x,g(x)),$$

$$\frac{d}{dx}u_1^+(x,g(x)) = -\frac{d}{dx}u_2'(g(x),x)$$
$$= u_1^+'(x,g(x)) - u_2''(g(x),x)g'(x)$$

für g in U_1 die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$g''(x) = -\frac{1}{(u_1^+(x,g(x)))^2}\Big(\Big[u_1'(g(x),x)g'(x) - D^2[u_2^+](x,g(x))\Big]u_1^+(x,g(x))$$
$$-u_1(g(x),x)\Big[u_1^+'(x,g(x)) - u_2''(g(x),x)g'(x)\Big]\Big)$$

und damit $g \in C^2(U_1)$. Falls zusätzlich $p \in C^1(J)$ ist, sind auch die in der Gleichung für $g''(x)$ auftretenden Terme

$$u_1^+'(x,g(x)) = D^1[u_1^+](x,g(x)) + p(x)u_1^+(x,g(x))$$
$$= + u_1'(g(x),x) - p(x)u_2'(g(x),x),$$

$D^1[u_1^+](x,g(x)) = + u_1'(g(x),x)$, $u_1^+(x,g(x)) = - u_2'(g(x),x)$, $u_2''(g(x),x) = + u_0^+(x,g(x))$,

$u_1(g(x),x) = - D^1[u_2^+](x,g(x))$, $D^2[u_2^+](x,g(x)) = + u_0(g(x),x)$ in U_1 stetig differenzierbar und damit sogar $g \in C^3(U_1)$.

Da A_1 offen in E ist, kann die E-Umgebung $U_1' := U_1 \cap E$ von x_0 hinreichend klein gewählt werden, sodass sie ganz in A_1 liegt. Da dann nach der Beschreibung der Menge A_1

$F(\eta(x),x) = u_2(\eta(x),x) = H(x) = 0 \;\forall\, x \in U_1'$ und

$\eta(x_0) = t_0$ (definitionsgemäß)

gilt, stimmt wegen der Einzigkeit der Funktion g mit dieser Eigenschaft in dieser E-Umgebung U_1' die Funktion η mit der zweimal stetig differenzierbaren Funktion g überein. Demzufolge ist auch η in U_1' zweimal stetig differenzierbar und insgesamt $\eta \in C^2(A_1)$. Im Falle $p \in C^1(J)$ ist sogar $\eta \in C^3(A_1)$. Mit Hilfssatz 4.6, a, 1) und b, 2) ergibt sich

$$\eta'(x) = -\frac{u_1(\eta(x),x)}{u_1^+(x,\eta(x))} > 0 \text{ für } x \in A_1.$$

Beweis für A_2: Zum Beweis der Aussagen über η in der Menge A_2 wählt man die auf $J \times J$ definierte Funktion

$$F(t,x) := u_2^+(t,x) = u_2(x,t).$$

Diese ist stetig und stetig partiell differenzierbar mit den ersten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = u_2^+'(t,x) = -u_1(x,t) + p(t)u_2^+(t,x),$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = u_2'(x,t) = -u_1^+(t,x).$$

Für $x_0 \in A_2 \subseteq E \subseteq J$ und $t_0 := \eta(x_0) \in \eta(E) = E_- \subseteq J$ gilt

$$F(t_0,x_0) = u_2^+(\eta(x_0),x_0) = H^+(x_0) = 0$$

und nach Hilfssatz 4.6, a, 2) und b, 1)

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t_0,x_0) = -u_1(x_0,\eta(x_0)) + p(\eta(x_0))u_2^+(\eta(x_0),x_0)$$
$$= -u_1(x_0,\eta(x_0)) < 0.$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}(t_0,x_0) = -u_1^+(\eta(x_0),x_0) > 0.$$

Geometrisch gesehen wird hier bei $x_0 \in A_2$ nur verwendet, dass auf der Integralkurve C der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x_0)]$ auf der Tangente $\langle \mathbf{z}(\eta(x_0)) \rangle$ des Kurvenpunkts $[\mathbf{y}(\eta(x_0))]$ liegt, aber die beiden Kurvenpunkte $[\mathbf{y}(x_0)]$ und $[\mathbf{y}(\eta(x_0))]$ voneinander verschieden sind: $u_2(x_0,\eta(x_0)) = u_2^+(\eta(x_0),x_0) = 0 \;\wedge$

$u_2^+{}'(\eta(x_0),x_0) \neq 0$. Von der Tatsache, dass auch noch die Tangenten $\langle \mathbf{z}(x_0) \rangle$ und $\langle \mathbf{z}(\eta(x_0)) \rangle$ voneinander verschieden sind, wird kein Gebrauch gemacht ($u_2(x_0,\eta(x_0)) = 0 \neq u_2'(x_0,\eta(x_0))$).

Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitung $\frac{\partial F}{\partial t}$ gibt es offene J-Umgebungen V von t_0 und U von x_0, sodass die partielle Ableitung auch noch negativ auf $V \times U$ ist. Nach dem Satz von der impliziten Funktion gibt es dann offene J-Umgebungen $V_1 \subseteq V$ von t_0 und $U_1 \subseteq U$ von x_0, sodass genau eine Funktion

$$g : U_1 \longrightarrow V_1$$

existiert mit

$$g(x_0) = t_0 \wedge$$
$$F(g(x),x) = 0 \ \forall\, x \in U_1.$$

Weiter ist in der J-Umgebung U_1 von x_0 die Funktion $g(x)$ stetig differenzierbar und es gilt dort

$$g'(x) = -\frac{\partial F}{\partial x}(g(x),x) \Big/ \frac{\partial F}{\partial t}(g(x),x)$$
$$= -\frac{u_1^+(g(x),x)}{u_1(x,g(x))}.$$

Durch weitere Differentiation erhält man für g in U_1 die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$g''(x) = -\frac{1}{(u_1(x,g(x)))^2}\Big(\Big[u_1^+{}'(g(x),x)g'(x) - u_2''(x,g(x))\Big]u_1(x,g(x))$$
$$-u_1^+(g(x),x)\Big[u_1'(x,g(x)) - (D^1[u_2^+])'(g(x),x)g'(x)\Big]\Big)$$
$$= -\frac{1}{(u_1(x,g(x)))^2}\Big(\Big[\Big(D^1[u_1^+](g(x),x) + p(g(x))u_1^+(g(x),x)\Big)g'(x) - u_0^+(g(x),x)\Big]u_1(x,g(x))$$
$$-u_1^+(g(x),x)\Big[D^1[u_1^+](g(x),x) - D^2[u_2^+](g(x),x)g'(x)\Big]\Big)$$

und damit $g \in C^2(U_1)$. Falls zusätzlich $p \in C^1(J)$ ist, gilt sogar $g \in C^3(U_1)$.

Da A_2 offen in E ist, kann die E-Umgebung $U_1' := U_1 \cap E$ von x_0 hinreichend klein gewählt werden, sodass sie ganz in A_2 liegt. Da dann

$$F(\eta(x),x) = u_2^+(\eta(x),x) = H^+(x) = 0 \ \forall\, x \in U_1' \text{ und}$$
$$\eta(x_0) = t_0 \text{ (definitionsgemäß)}$$

gilt, stimmt wegen der Einzigkeit der Funktion g mit dieser Eigenschaft in dieser E-Umgebung U_1'die Funktion η mit der zweimal stetig differenzierbaren Funktion g überein. Demzufolge ist auch η in U_1' zweimal stetig differenzierbar und insgesamt $\eta \in C^2(A_2)$. Im Falle $p \in C^1(J)$ ist sogar $\eta \in C^3(A_2)$. Mit Hilfssatz 4.6, b, 1) und a, 2) ergibt sich

$$\eta'(x) = -\frac{u_1^+(\eta(x),x)}{u_1(x,\eta(x))} > 0 \text{ für } x \in A_2.$$

Für $A = A_1 \cup A_2$ erhält man insgesamt $\eta' > 0$ auf A, $\eta \in C^2(A)$ und im Falle $p \in C^1(J)$ sogar $\eta \in C^3(A)$.

Beweis für D_1: Da D_1 nicht offen in E ist, gibt es zu $x_0 \in D_1$ keine ganz in D_1 liegende Umgebung von x_0. Es wird jetzt $\eta(x)$ nicht durch eine einheitliche Gleichung $F(\eta(x),x) = 0$ untersucht, sondern ein anderer Beweisweg eingeschlagen, bei dem gezeigt wird, dass es Intervalle mit rechtem Randpunkt x_0 bzw. linkem Randpunkt x_0 gibt, die jeweils ganz in A_2 bzw. A_1 liegen. Damit kann dann die einseitige Differenzierbarkeit bewiesen werden.

Linksseitige Differenzierbarkeit in $x_0 \in D_1$: Für $x_0 \in D_1$ und den zugehörigen Wert $t_0 := \eta(x_0)$ liefert das Kurvenparameterpaar $\{x_0,t_0\}$ auf der Integralkurve C einen Doppelpunkt ohne Doppeltangente. Wie bei den obigen Betrachtungen zum Fall $x_0 \in A_1$ liegt also auch hier der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(\eta(x_0))]$ auf der Tangente $\langle \mathbf{z}(x_0) \rangle$ des Kurvenpunkts $[\mathbf{y}(x_0)]$, wobei aber die beiden Tangenten

$\langle \mathbf{z}(x_0) \rangle$ und $\langle \mathbf{z}(\eta(x_0)) \rangle$ voneinander verschieden sind: $u_2(\eta(x_0),x_0) = 0 \wedge u_2'(\eta(x_0),x_0) \neq 0$. Um für $x_0 \in D_1$ die linksseitige Differenzierbarkeit von η nachzuweisen, wird jetzt die Inklusion

$$]x_0 - \delta,x_0[\cap E \subseteq A_2.$$

für ein $\delta > 0$ gezeigt. Um dazu für die $x \in]x_0 - \delta,x_0[\cap E$ die charakterische Bedingung $\eta(x) = z_{21}^+(x) < z_{21}(x)$ bzw. $u_2(\eta(x),x) \neq 0$ zu begründen, wird hier $u_2(t,x) \neq 0$ für die x einer J-Umgebung U_1 von x_0 und die $t \in]t_0 - \varepsilon,t_0[\cap J$ bewiesen. Dazu wählt man für die Anwendung des Satzes von der impliziten Funktion wie oben bei $x_0 \in A_1$ die Funktion

$$F(t,x) := u_2(t,x) = u_2^+(x,t)$$

mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = - u_1^+(x,t),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = -u_1(t,x) + p(x)u_2^+(x,t).$$

Für $x_0 \in D_1$, $t_0 := \eta(x_0)$ gilt

$$F(t_0,x_0) = u_2(\eta(x_0),x_0) = H(x_0) = 0$$

und mit Verwendung von Hilfssatz 4.6, b, 2) und a, 2)

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t_0,x_0) = - u_1^+(x_0,\eta(x_0)) < 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t_0,x_0) = -u_1(\eta(x_0),x_0) = 0.$$

Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitung $\frac{\partial F}{\partial t}$ gibt es offene J-Umgebungen V von t_0 und U von x_0, sodass die partielle Ableitung auch noch negativ auf $V \times U$ ist. Für die oben nach dem Satz von der impliziten Funktion erhaltenen offenen J-Umgebungen $V_1 \subseteq V$ von t_0 und $U_1 \subseteq U$ von x_0 und die Funktion $g : U_1 \longrightarrow V_1$ gilt $g \in C^2(U_1)$,

$$g(x_0) = t_0 := \eta(x_0) \wedge$$
$$F(g(x),x) = 0 \ \forall\, x \in U_1.$$

Im Unterschied zu $x_0 \in A_1$ erhält man aber hier für $x_0 \in D_1$, da bei $\{x_0,\eta(x_0)\}$ ein Doppelpunkt (ohne Doppeltangente) vorliegt und daher $u_1(\eta(x_0),x_0) = - D^1[u_2^+](x_0,\eta(x_0)) = 0$ gilt, für die Ableitung

$$g'(x_0) = - \frac{u_1(\eta(x_0),x_0)}{u_1^+(x_0,\eta(x_0))} = 0.$$

Da bei dem speziellen Doppelpunkt $[u_2^+(.,x_0)] = [u_2^+(.,\eta(x_0))]$ der Fall $\eta(x_0) = z_{21}^+(x_0) = z_{21}(x_0)$ mit $u_2^+(.,x_0) > 0$ in $]x_0,\eta(x_0)[$ vorliegt und damit die Übereinstimmung $u_2^+(.,\eta(x_0)) = \lambda \cdot u_2^+(.,x_0)$ mit einem $\lambda > 0$ gilt, ist $D^2[u_2^+](x_0,\eta(x_0)) = \lambda \cdot D^2[u_2^+](x_0,x_0) = \lambda > 0$. Außerdem ist nach Hilfssatz 4.6, b, 2) $u_1^+(x_0,\eta(x_0)) > 0$. Demzufolge gilt für die zweite Ableitung

$$g''(x_0) = \frac{D^2[u_2^+](x_0,\eta(x_0))}{u_1^+(x_0,\eta(x_0))} > 0.$$

O. E. sei jetzt V_1 eine J-ε-Umgebung von t_0 und U_1 eine J-δ-Umgebung von x_0, also

$$V_1 =]t_0 - \varepsilon,t_0 + \varepsilon[\cap J,$$
$$U_1 =]x_0 - \delta,x_0 + \delta[\cap J$$

mit hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ bzw. $\delta > 0$: Zuerst kann nämlich ε klein genug gewählt werden, dass

$$]t_0 - \varepsilon,t_0 + \varepsilon[\cap J \subseteq V_1$$

gilt, und wegen der Stetigkeit von g dann δ klein genug gewählt werden, dass

$$]x_0 - \delta,x_0 + \delta[\cap J \subseteq U_1 \wedge$$
$$g(]x_0 - \delta,x_0 + \delta[\cap J) \subseteq]t_0 - \varepsilon,t_0 + \varepsilon[\cap J \subseteq V_1$$

ist. Aufgrund der Werte $g(x_0) = t_0$, $g'(x_0) = 0$, $g''(x_0) > 0$ und der Stetigkeit von g'' kann weiter δ klein genug gewählt werden, dass $g''(x) > 0$ und damit

$$g(x) \geq t_0 \text{ für alle } x \in U_1$$

gilt. Wegen der Einzigkeit der Funktion g ist für jedes $x \in U_1$ der Funktionswert $g(x)$ die einzige Nullstelle von $F(.,x) = u_2(.,x)$ in V_1, also $u_2(t,x) = F(t,x) \neq 0$ insbesondere für $t \in V_1$ mit $t < t_0$ ($\leq g(x)$). Es gilt also

$$u_2(t,x) \neq 0 \text{ für alle } x \in U_1,\ t \in\ ]t_0 - \varepsilon, t_0[\ \cap J.$$

Wegen der Stetigkeit und strengen Monotonie von η sei nun noch o. E. δ klein genug gewählt, dass

$$\eta(]x_0 - \delta, x_0[\ \cap E) \subseteq\ ]t_0 - \varepsilon, t_0[\ \cap J.$$

Für $x \in\ ]x_0 - \delta, x_0[\ \cap E$ ($\subseteq U_1$) liegt also der Funktionswert $t = \eta(x)$ in $]t_0 - \varepsilon, t_0[\ \cap J$, sodass

$$u_2(\eta(x),x) \neq 0$$

ist, daher nach der Minimalitätseigenschaft (4.7)

$$\eta(x) = z_{21}^{+}(x) < z_{21}(x),$$

$H^{+}(x) = u_2^{+}(\eta(x),x) = 0 < u_2(\eta(x),x) = H(x)$ und somit $x \in A_2$ gilt. Insgesamt ist also

$$]x_0 - \delta, x_0[\ \cap E \subseteq A_2.$$

Falls $x_0 \in D_1$ kein linker Randpunkt des Intervalls E und somit $]x_0 - \delta, x_0[\ \subseteq A_2$ für ein $\delta > 0$ ist, erhält man mit der obigen Formel für η' in A_2 die linksseitige Differenzierbarkeit von η in $x_0 \in D_1$: Nach dem Mittelwertsatz[16] der Differentialrechnung gibt es nämlich zu jedem $x \in\ ]x_0 - \delta, x_0[\ \subseteq A_2$ ein $\xi = \xi(x) \in\ ]x, x_0[\ \subseteq A_2$ mit

$$\frac{\eta(x) - \eta(x_0)}{x - x_0} = \eta'(\xi) = -\frac{u_1^{+}(\eta(\xi),\xi)}{u_1(\xi,\eta(\xi))} > 0\,.$$

Dieser Differenzenquotient besitzt beim linksseitigen Grenzübergang $x \nearrow x_0$ und $\xi \nearrow x_0$ wegen der Stetigkeit von η, $u_1^{+}(.,.)$ und $u_1(.,.)$ und wegen $u_1^{+}(\eta(x_0),x_0) < 0$, $u_1(x_0,\eta(x_0)) = 0$ für $x_0 \in D_1$ (nach Hilfssatz 4.6, b, 1 und a, 2) den uneigentlichen Grenzwert $+\infty$. Demnach ist die linksseitige Ableitung von η an der Stelle $x_0 \in D_1$ gleich $+\infty$:

$$\eta_l'(x_0) := \lim_{x \nearrow x_0} \frac{\eta(x) - \eta(x_0)}{x - x_0} = +\infty \quad \text{für } x_0 \in D_1.$$

Rechtsseitige Differenzierbarkeit in $x_0 \in D_1$: Wie bei den obigen Betrachtungen zum Fall $x_0 \in A_2$ liegt auch hier der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x_0)]$ auf der Tangente $\langle \mathbf{z}(\eta(x_0)) \rangle$ des Kurvenpunkts $[\mathbf{y}(\eta(x_0))]$ liegt, wobei aber die beiden Kurvenpunkte $[\mathbf{y}(x_0)]$ und $[\mathbf{y}(\eta(x_0))]$ voneinander verschieden sind: $u_2(x_0,\eta(x_0)) = u_2^{+}(\eta(x_0),x_0) = 0 \wedge u_2^{+}{}'(\eta(x_0),x_0) \neq 0$. Um noch die rechtsseitige Differenzierbarkeit von η an der Stelle $x_0 \in D_1$ nachzuweisen, wird jetzt die Inklusion

$$]x_0, x_0 + \delta'[\ \cap E \subseteq A_1$$

für ein $\delta' > 0$ gezeigt. Um dazu für die $x \in\ ]x_0, x_0 + \delta'[\ \cap E$ die charakterische Bedingung $\eta(x) = z_{21}(x) < z_{21}^{+}(x)$ bzw. $u_2^{+}(\eta(x),x) \neq 0$ zu begründen, wird hier $u_2^{+}(t,x) \neq 0$ für die $x \in\ ]x_0, x_0 + \delta'[\ \cap E$ und die $t \in V_1$ einer J-Umgebung V_1 von $t_0 = \eta(x_0)$ bewiesen. Dazu wählt man für die Anwendung des Satzes von der impliziten Funktion wie oben bei $x_0 \in A_2$ die Funktion

$$F(t,x) := u_2^{+}(t,x) = u_2(x,t).$$

mit den ersten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = u_2^{+}{}'(t,x) = -u_1(x,t) + p(t)u_2^{+}(t,x),$$

[16] Den Mittelwertsatz der Differentialrechnung findet man beispielsweise in den Analysis-Büchern von Erwe Bd. I (1967), S. 140, Grauert und Lieb Bd. I (1967), S. 97, Mangoldt und Knopp Bd. II (1974), S. 76, Deiser (2013), S. 301.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = u_2'(x,t) = -\, u_1^+(t,x).$$

Für $x_0 \in D_1$ und $t_0 := \eta(x_0) \in J$ gilt

$$F(t_0,x_0) = u_2^+(\eta(x_0),x_0) = H^+(x_0) = 0$$

und nach Hilfssatz 4.6, a, 1 und b, 1) jetzt

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t_0,x_0) = -\, u_1(x_0,\eta(x_0)) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t_0,x_0) = -\, u_1^+(\eta(x_0),x_0) > 0.$$

Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitung $\frac{\partial F}{\partial x}$ gibt es offene J-Umgebungen V von t_0 und U von x_0, sodass die partielle Ableitung nach x auch noch positiv auf $V \times U$ ist. Die Gleichung $F(t,x) = 0$ kann jetzt nicht nach $t = g(x)$, jedoch nach $x = h(t)$ aufgelöst werden. Nach dem Satz von der impliziten Funktion gibt es offene J-Umgebungen $U_1 \subseteq U$ von x_0 und $V_1 \subseteq V$ von t_0, sodass genau eine Funktion

$$h : V_1 \longrightarrow U_1$$

existiert mit

$$h(t_0) = x_0 \wedge$$

$$u_2^+(t,h(t)) = F(t,h(t)) = 0 \;\forall\, t \in V_1.$$

Weiter ist in der J-Umgebung V_1 von t_0 die Funktion $h(t)$ stetig und stetig differenzierbar und es gilt dort

$$h'(t) = -\,\frac{\partial F}{\partial t}(t,h(t)) \Big/ \frac{\partial F}{\partial x}(t,h(t))$$

$$= -\,\frac{u_1(h(t),t)}{u_1^+(t,h(t))}.$$

Für $t = t_0 = \eta(x_0)$ und $h(t) = h(t_0) = x_0$ erhält man mit den oben für die partiellen Ableitungen bereits angegebenen Werten

$$h'(t_0) = -\,\frac{u_1(x_0,t_0)}{u_1^+(t_0,x_0)} = 0.$$

Aus der Differentialgleichung für $h(t)$ ergibt sich $h \in C^2(V_1)$ und für die zweite Ableitung

$$h''(t) = -\,\frac{1}{(u_1^+(t,h(t)))^2}\Big(\big[u_1'(h(t),t)h'(t) - (D^1[u_2^+])'(t,h(t))\big]u_1^+(t,h(t))$$
$$- u_1(h(t),t)\big[u_1^+{}'(t,h(t)) - u_2''(h(t),t)h'(t)\big]\Big).$$

Für $t = t_0$ ist

$$h''(t_0) = +\,\frac{(D^1[u_2^+])'(t_0,x_0)}{u_1^+(t_0,x_0)} = \frac{D^2[u_2^+](t_0,x_0)}{u_1^+(t_0,x_0)}.$$

Da bei dem speziellen Doppelpunkt $[u_2^+(.,x_0)] = [u_2^+(.,\eta(x_0))]$ für $x_0 \in D_1$ der Fall $t_0 = \eta(x_0) = z_{21}^+(x_0) = z_{21}(x_0)$ mit $u_2^+(.,x_0) > 0$ in $]x_0,t_0[$ vorliegt und damit die Übereinstimmung $u_2^+(.,x_0) = \lambda \cdot u_2^+(.,t_0)$ mit einem $\lambda > 0$ gilt, ist $D^2[u_2^+](t_0,x_0) = \lambda \cdot D^2[u_2^+](t_0,t_0) = \lambda > 0$. Außerdem ist nach Hilfssatz 4.6, b, 1) $u_1^+(t_0,x_0) = u_1^+(\eta(x_0),x_0) < 0$. Demzufolge gilt für die zweite Ableitung

$$h''(t_0) < 0.$$

O. E. sei jetzt U_1 eine J-ε-Umgebung von x_0 und V_1 eine J-δ-Umgebung von t_0, also

$$U_1 =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\, \cap J,$$
$$V_1 =]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\, \cap J$$

mit hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ bzw. $\delta > 0$: Zuerst kann nämlich ε klein genug gewählt werden, dass

$$]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap J \subseteq U_1$$

gilt, und wegen der Stetigkeit von h dann δ klein genug gewählt werden, dass

$$]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\cap J \subseteq V_1 \wedge$$
$$h(]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\cap J) \subseteq]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap J \subseteq U_1$$

ist. Aufgrund der Werte $h(t_0) = x_0$, $h'(t_0) = 0$, $h''(t_0) < 0$ und der Stetigkeit von h'' kann weiter δ klein genug gewählt werden, dass $h''(t) < 0$ und damit

$$h(t) \leq x_0 \text{ für alle } t \in V_1$$

gilt. Wegen der Einzigkeit der Funktion h mit den angegebenen Eigenschaften ist für jedes $t \in V_1$ der Funktionswert $h(t)$ die einzige Nullstelle von $F(t,.) = u_2^+(t,.)$ in V_1, also $u_2^+(t,x) = F(t,x) \neq 0$ insbesondere für $x \in U_1$ mit $x > x_0$ ($\geq h(t)$). Es gilt also

$$u_2^+(t,x) \neq 0 \text{ für alle } t \in V_1,\ x \in]x_0, x_0 + \varepsilon[\cap J.$$

Wegen der Stetigkeit von η sei nun ein δ' mit $0 < \delta' \leq \varepsilon$ gewählt, dass

$$\eta(]x_0, x_0 + \delta'[\cap E) \subseteq V_1.$$

Für $x \in]x_0, x_0 + \delta'[\cap E \subseteq]x_0, x_0 + \varepsilon[\cap J$ liegt also der Funktionswert $t = \eta(x)$ in V_1, sodass

$$u_2^+(\eta(x), x) \neq 0$$

ist, daher nach der Minimalitätseigenschaft (4.7)

$$\eta(x) = z_{21}(x) < z_{21}^+(x),$$

$H(x) = u_2(\eta(x), x) = 0 < u_2^+(\eta(x), x) = H^+(x)$ und somit $x \in A_1$ gilt. Insgesamt ist mit einem $\delta' > 0$ also

$$]x_0, x_0 + \delta'[\cap E \subseteq A_1.$$

Falls $x_0 \in D_1$ kein rechter Randpunkt des Intervalls E und somit $]x_0, x_0 + \delta[\subseteq A_1$ für ein $\delta' > 0$ ist, erhält man mit der obigen Formel für η' in A_1 die rechtsseitige Differenzierbarkeit von η in $x_0 \in D_1$: Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es nämlich zu jedem $x \in]x_0, x_0 + \delta'[\subseteq A_1$ ein $\xi = \xi(x) \in]x_0, x[\subseteq A_1$ mit

$$\frac{\eta(x) - \eta(x_0)}{x - x_0} = \eta'(\xi) = -\frac{u_1(\eta(\xi), \xi)}{u_1^+(\xi, \eta(\xi))} > 0.$$

Dieser Differenzenquotient besitzt beim rechtsseitigen Grenzübergang $x \searrow x_0$ und $\xi \searrow x_0$ wegen der Stetigkeit von η, $u_1(.,.)$, $u_1^+(.,.)$ und wegen $u_1(\eta(x_0), x_0) = 0$, $u_1^+(x_0, \eta(x_0)) > 0$ für $x_0 \in D_1$ (nach Hilfssatz 4.6, a, 1 und b, 2) den Grenzwert Null. Demnach ist die rechtsseitige Ableitung von η an der Stelle $x_0 \in D_1$ gleich Null:

$$\eta_r'(x_0) := \lim_{x \searrow x_0} \frac{\eta(x) - \eta(x_0)}{x - x_0} = 0 \text{ für } x_0 \in D_1.$$

Beweis für D_2: Für $x_0 \in D_2$ und den zugehörigen Wert $t_0 := \eta(x_0)$ liefert das Kurvenparameterpaar $\{x_0, t_0\}$ auf der Integralkurve C eine Doppeltangente ohne Doppelpunkt. Wie bei den obigen Betrachtungen zum Fall $x_0 \in A_2$ liegt also auch hier der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x_0)]$ auf der Tangente $\langle \mathbf{z}(\eta(x_0)) \rangle$ des Kurvenpunkts $[\mathbf{y}(\eta(x_0))]$, wobei aber die beiden Kurvenpunkte $[\mathbf{y}(x_0)]$ und $[\mathbf{y}(\eta(x_0))]$ voneinander verschieden sind: $u_2(x_0, \eta(x_0)) = u_2^+(\eta(x_0), x_0) = 0 \wedge u_2^{+\prime}(\eta(x_0), x_0) \neq 0$.

Linksseitige Differenzierbarkeit in $x_0 \in D_2$: Um für $x_0 \in D_2$ die linksseitige Differenzierbarkeit von η nachzuweisen, wird jetzt die Inklusion

$$]x_0 - \delta, x_0[\cap E \subseteq A_1.$$

für ein $\delta > 0$ gezeigt. Um dazu für die $x \in]x_0 - \delta, x_0[\cap E$ die charakterische Bedingung $\eta(x) = z_{21}(x) < z_{21}^+(x)$ bzw. $u_2^+(\eta(x), x)$ zu begründen, wird hier $u_2^+(t,x) \neq 0$ für die x einer J-Umgebung U_1 von x_0

und die $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0[\cap J$ bewiesen. Wie oben beim Nachweis der Differenzierbarkeit von η in $x_0 \in A_2$ oder der rechtsseitigen Differenzierbarkeit von η in $x_0 \in D_1$ wählt man dazu für die Anwendung des Satzes von der impliziten Funktion die Funktion

$$F(t,x) := u_2^+(t,x) = u_2(x,t).$$

mit den ersten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = u_2^+{}'(t,x) = -u_1(x,t) + p(t)u_2^+(t,x),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = u_2{}'(x,t) = -\, u_1^+(t,x).$$

Für $x_0 \in D_2$, $t_0 := \eta(x_0)$ gilt

$$F(t_0,x_0) = u_2^+(\eta(x_0),x_0) = H^+(x_0) = 0$$

und nach Hilfssatz 4.6, a, 1 und b, 1) jetzt

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t_0,x_0) = -\, u_1(x_0,\eta(x_0)) < 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t_0,x_0) = -\, u_1^+(\eta(x_0),x_0) = 0,$$

sodass die Gleichung $F(t,x) = 0$ nach dem Satz von der impliziten Funktion nach $t = g(x)$ auflösbar ist. Es gilt also offene J-Umgebungen $V_1 \subseteq V$ von t_0 und $U_1 \subseteq U$ von x_0 und genau eine Funktion $g : U_1 \longrightarrow V_1$ mit

$$g(x_0) = t_0 := \eta(x_0) \;\wedge$$
$$F(g(x),x) = 0 \;\forall\, x \in U_1.$$

Weiter gilt $g \in C^2(U_1)$. Im Unterschied zu $x_0 \in A_2$ erhält man aber hier für $x_0 \in D_2$, da bei $\{x_0,\eta(x_0)\}$ eine Doppeltangente (ohne Doppelpunkt) vorliegt, für die Ableitung

$$g'(x_0) = -\,\frac{u_1^+(\eta(x_0),x_0)}{u_1(x_0,\eta(x_0))} = 0.$$

Da bei der speziellen Doppeltangente $[u_2(.,x_0)] = [u_2(.,\eta(x_0))]$ der Fall $\eta(x_0) = z_{21}(x_0) = z_{21}^+(x_0)$ mit $u_2(.,x_0) > 0$ in $]x_0,\eta(x_0)[$ vorliegt und damit die Übereinstimmung $u_2(.,\eta(x_0)) = \mu \cdot u_2(.,x_0)$ mit einem $\mu > 0$ gilt, ist $u_0^+(\eta(x_0),x_0) = u_2''(x_0,\eta(x_0)) = \mu \cdot u_2''(x_0,x_0) = \mu > 0$. Außerdem ist nach Hilfssatz 4.6, a, 2) $u_1(x_0,\eta(x_0)) > 0$. Demzufolge gilt für die zweite Ableitung

$$g''(x_0) = -\,\frac{1}{(u_1(x_0,\eta(x_0)))^2}\Big(\Big[u_1^+{}'(\eta(x_0),x_0)g'(x_0) - u_2''(x_0,\eta(x_0))\Big]u_1(x_0,\eta(x_0))$$
$$-\,u_1^+(\eta(x_0),x_0)\Big[u_1{}'(x_0,\eta(x_0)) - (D^1[u_2^+])'(\eta(x_0),x_0)\eta'(x_0)\Big]\Big)$$
$$= -\,\frac{-u_2''(x_0,\eta(x_0))}{u_1(x_0,\eta(x_0))} = +\,\frac{u_0^+(\eta(x_0),x_0)}{u_1(x_0,\eta(x_0))} > 0.$$

O. E. seien $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ hinreichend klein (Begründung wie oben für $x_0 \in A_2$), sodass

$$V_1 =]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\cap J,$$
$$U_1 =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap J$$

gewählt werden können, wobei noch $g(U_1) \subseteq V_1$, $g'' > 0$ in U_1 und damit

$$g(x) \geq t_0 \;\;\forall\, x \in U_1$$

gilt und außerdem

$$\eta(]x_0 - \delta, x_0[\cap E) \subseteq]t_0 - \varepsilon, t_0[\cap J$$

erfüllt ist. Wegen der Einzigkeit der Funktion g ist für jedes $x \in U_1$ der Funktionswert $g(x)$ die einzige Nullstelle von $F(.,x) = u_2^+(.,x)$ in V_1, also $u_2^+(t,x) = F(t,x) \neq 0$ insbesondere für $t \in V_1$ mit $t < t_0$ ($\leq g(x)$). Es gilt also

$$u_2^+(t,x) \neq 0 \text{ für alle } x \in U_1,\ t \in\ ]t_0 - \varepsilon, t_0[\ \cap J.$$

Für die $x \in\ ]x_0 - \delta, x_0[\ \cap E\ (\subseteq U_1)$ liegt also der Funktionswert $t = \eta(x)$ in $]t_0 - \varepsilon, t_0[\ \cap J$, sodass

$$u_2^+(\eta(x),x) \neq 0$$

ist, daher nach der Minimalitätseigenschaft (4.7)

$$\eta(x) = z_{21}(x) < z_{21}^+(x),$$

$H^+(x) = u_2^+(\eta(x),x) > 0 = u_2(\eta(x),x) = H(x)$ und somit $x \in A_1$ gilt. Insgesamt ist also

$$]x_0 - \delta, x_0[\ \cap E \subseteq A_1.$$

Falls $x_0 \in D_2$ kein linker Randpunkt des Intervalls E und somit $]x_0 - \delta, x_0[\ \subseteq A_1$ für ein $\delta > 0$ ist, erhält man mit der obigen Formel für η' in A_1 die linksseitige Differenzierbarkeit von η in $x_0 \in D_2$: Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es nämlich zu jedem $x \in\ ]x_0 - \delta, x_0[\ \subseteq A_1$ ein $\xi = \xi(x) \in\ ]x, x_0[\ \subseteq A_1$ mit

$$\frac{\eta(x) - \eta(x_0)}{x - x_0} = \eta'(\xi) = -\frac{u_1(\eta(\xi),\xi)}{u_1^+(\xi,\eta(\xi))} > 0.$$

Dieser Differenzenquotient besitzt beim linksseitigen Grenzübergang $x \nearrow x_0$ und $\xi \nearrow x_0$ wegen der Stetigkeit von η, $u_1(.,.)$ und $u_1^+(.,.)$ und wegen $u_1(\eta(x_0),x_0) < 0$, $u_1^+(x_0,\eta(x_0)) = 0$ für $x_0 \in D_2$ (nach Hilfssatz 4.6, a, 1 und b, 2) den uneigentlichen Grenzwert $+\infty$. Demnach ist die linksseitige Ableitung von η an der Stelle $x_0 \in D_2$ gleich $+\infty$:

$$\eta_l'(x_0) := \lim_{x \nearrow x_0} \frac{\eta(x) - \eta(x_0)}{x - x_0} = +\infty \quad \text{für } x_0 \in D_2.$$

Rechtsseitige Differenzierbarkeit in $x_0 \in D_2$: Um noch die rechtsseitige Differenzierbarkeit von η an der Stelle $x_0 \in D_2$ nachzuweisen, wird jetzt die Inklusion

$$]x_0, x_0 + \delta'[\ \cap E \subseteq A_2$$

für ein $\delta' > 0$ gezeigt. Um dazu für die $x \in\ ]x_0, x_0 + \delta'[\ \cap E$ die charakterische Bedingung $H(x) = u_2(\eta(x),x) \neq 0$ zu begründen, wird hier $u_2(t,x) \neq 0$ für die $x \in\ ]x_0, x_0 + \delta'[\ \cap E$ und die $t \in V_1$ einer J-Umgebung V_1 von $t_0 = \eta(x_0)$ bewiesen. Dazu wählt man für die Anwendung des Satzes von der impliziten Funktion wie oben beim Nachweis der Differenzierbarkeit von η in $x_0 \in A_1$ oder der linksseitigen Differenzierbarkeit von η in $x_0 \in D_1$ die Funktion

$$F(t,x) := u_2(t,x) = u_2^+(x,t).$$

mit den ersten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = -u_1^+(x,t),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = -u_1(t,x) + p(x)u_2^+(x,t).$$

Für $x_0 \in D_2$ und $t_0 := \eta(x_0) \in J$ gilt

$$F(t_0,x_0) = u_2(\eta(x_0),x_0) = H(x_0) = 0$$

und nach Hilfssatz 4.6, b, 2 und a, 1)

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t_0,x_0) = -u_1^+(x_0,\eta(x_0)) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t_0,x_0) = -u_1(\eta(x_0),x_0) > 0,$$

sodass die Gleichung $F(t,x) = 0$ nach $x = h(t)$ aufgelöst werden kann. Nach dem Satz von der impliziten Funktion gibt es J-Umgebungen $U_1 \subseteq U$ von x_0 und $V_1 \subseteq V$ von t_0, sodass genau eine Funktion

$$h : V_1 \longrightarrow U_1$$

existiert mit

$$h(t_0) = x_0 \wedge$$
$$u_2(t,h(t)) = F(t,h(t)) = 0 \ \forall\, t \in V_1.$$

Weiter ist in der J-Umgebung V_1 von t_0 die Funktion $h(t)$ stetig und stetig differenzierbar und es gilt dort

$$h'(t) = -\frac{\partial F}{\partial t}(t,h(t)) \Big/ \frac{\partial F}{\partial x}(t,h(t))$$
$$= -\frac{u_1^+(h(t),t)}{u_1(t,h(t))}.$$

Für $t = t_0 = \eta(x_0)$ und $h(t) = h(t_0) = x_0$ erhält man mit den oben für die partiellen Ableitungen bereits angegebenen Werten

$$h'(t_0) = -\frac{u_1^+(x_0,t_0)}{u_1(t_0,x_0)} = 0.$$

Aus der Differentialgleichung für $h(t)$ ergibt sich $h \in C^2(V_1)$ und für die zweite Ableitung

$$h''(t) = -\frac{1}{(u_1(t,h(t)))^2}\Big(\Big[u_1^+{}'(h(t),t)h'(t) - u_2''(t,h(t))\Big]u_1(t,h(t))$$
$$- u_1^+(h(t),t)\Big[u_1'(t,h(t)) - (D^1[u_2^+])'(h(t),t)h'(t)\Big]\Big).$$

Für $t = t_0$ ist

$$h''(t_0) = +\frac{u_2''(t_0,x_0)}{u_1(t_0,x_0)}.$$

Nach Hilfssatz 4.6, b, 1) gilt $u_1(t_0,x_0) = u_1(\eta(x_0),x_0) < 0$ für $x_0 \in D_2$. Da hier bei der speziellen Doppeltangente $[u_2(.,x_0)] = [u_2(.,\eta(x_0))]$ wegen $u_2(.,x_0) > 0$ in $]x_0,\eta(x_0)[$ die Übereinstimmung $u_2(.,x_0) = \lambda u_2(.,\eta(x_0)) =$ mit einem $\lambda > 0$ vorliegt, ist $u_2''(\eta(x_0),x_0) = \lambda \cdot u_2''(\eta(x_0),\eta(x_0)) = \lambda > 0$. Demzufolge gilt für die zweite Ableitung

$$h''(t_0) < 0.$$

O. E. seien $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ hinreichend klein (Begründung wie oben für $x_0 \in A_2$), sodass

$$U_1 =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap J$$
$$V_1 =]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\cap J,$$

gewählt werden können, wobei noch $h(V_1) \subseteq U_1$, $h'' < 0$ in V_1 und damit

$$h(t) \geq x_0 \ \ \forall\, t \in V_1$$

gilt. Wegen der Einzigkeit der Funktion h ist für jedes $t \in V_1$ der Funktionswert $x = h(t)$ die einzige Nullstelle von $F(t,.) = u_2(t,.)$ in V_1, also $u_2(t,x) = F(t,x) \neq 0$ insbesondere für die $x \in U_1$ mit $x < x_0$ ($\geq h(t)$). Es gilt also

$$u_2(t,x) \neq 0 \text{ für alle } t \in V_1,\ x \in]x_0, x_0 + \varepsilon[\cap J.$$

Wegen der Stetigkeit von η gibt es noch ein δ' mit $0 < \delta' \leq \varepsilon$, dass

$$\eta(]x_0, x_0 + \delta'[\cap E) \subseteq V_1$$

gilt. Für $x \in]x_0, x_0 + \delta'[\cap E \subseteq]x_0, x_0 + \varepsilon[\cap J$ liegt dann der Funktionswert $t = \eta(x)$ in V_1, sodass

$$u_2(\eta(x),x) \neq 0$$

ist, daher nach der Minimalitätseigenschaft (4.7)

$$\eta(x) = z_{21}^+(x) < z_{21}(x),$$

$H(x) = u_2(\eta(x),x) > 0 = u_2^+(\eta(x),x) = H^+(x)$ und somit $x \in A_2$ gilt. Insgesamt ist mit einem $\delta' > 0$ also

$$]x_0,x_0 + \delta'[\cap E \subseteq A_2.$$

Falls $x_0 \in D_2$ kein rechter Randpunkt des Intervalls E und somit $]x_0,x_0 + \delta[\subseteq A_2$ für ein $\delta' > 0$ ist, erhält man mit der obigen Formel für η' in A_2 die rechtsseitige Differenzierbarkeit von η in $x_0 \in D_2$: Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es nämlich zu jedem $x \in]x_0,x_0 + \delta'[\subseteq A_2$ ein $\xi = \xi(x) \in]x_0,x[\subseteq A_2$ mit

$$\frac{\eta(x) - \eta(x_0)}{x - x_0} = \eta'(\xi) = -\frac{u_1^+(\eta(\xi),\xi)}{u_1(\xi,\eta(\xi))} > 0.$$

Dieser Differenzenquotient besitzt beim rechtsseitigen Grenzübergang $x \searrow x_0$ und $\xi \searrow x_0$ wegen der Stetigkeit von η, $u_1^+(.,.)$, $u_1(.,.)$ und wegen $u_1^+(\eta(x_0),x_0) = 0$, $u_1(x_0,\eta(x_0)) < 0$ für $x_0 \in D_2$ (nach Hilfssatz 4.6, b, 1 und a, 1) den Grenzwert Null. Demnach ist die rechtsseitige Ableitung von η an der Stelle $x_0 \in D_2$ gleich Null:

$$\eta_r'(x_0) := \lim_{x \searrow x_0} \frac{\eta(x) - \eta(x_0)}{x - x_0} = 0 \quad \text{für } x_0 \in D_2.$$

Beweis für das Selbstberührungsintervall $]c_1,c_2[\subseteq D_3$: Für jedes $x_0 \in D_3$ und den zugehörigen Wert $t_0 := \eta(x_0)$ liefert das Kurvenparameterpaar $\{x_0,t_0\}$ auf der Integralkurve C einen Doppelpunkt mit einer Doppeltangente. Eine grafische Darstellung der Integralkurve C für ein Selbstberührungsintervall $]c_1,c_2[$ geben die Abbildungen 4.7 und 4.9. Aus dem Vorliegen des Doppelpunkts $[u_2^+(.,x_0)] = [u_2^+(.,\eta(x_0))]$ ergibt sich (siehe auch Hilfssatz 4.6, a, 1)

$$u_1(\eta(x_0),x_0) = -D^1[u_2^+](\eta(x_0),x_0) = 0.$$

Außerdem gelten hier wegen $\eta(x) = z_{21}^+(c) = z_{21}(x)$ die Ungleichungen $u_2^+(.,x_0) > 0$ und $u_2^+(.,\eta(x_0)) > 0$ in $]x_0,\eta(x_0)[$, also $u_2^+(.,\eta(x_0)) = \lambda u_2^+(.,x_0)$ mit einem $\lambda > 0$ und damit

$$D^2[u_2^+](x_0,\eta(x_0)) = \lambda D^2[u_2^+](x_0,x_0) = \lambda > 0.$$

Aus dem Vorliegen der Doppeltangente $[u_2(.,x_0)] = [u_2(.,\eta(x_0))]$ und der linearen Unabhängigkeit der Lösungen $u_1(.,x_0)$ und $u_2(.,x_0)$ folgt

$$[u_1(.,x_0)] \neq [u_2(.,x_0)] = [u_2(.,\eta(x_0))]$$

und wegen $u_1(\eta(x_0),x_0) = 0$ dann $u_1'(\eta(x_0),x_0) \neq 0$. Da nach Hilfssatz 4.6, a) $u_1(.,x_0)$ nur eine einfache Nullstelle ξ in $]x_0,\eta(x_0)[$ aufweist, $u_1(.,x_0) < 0$ in $]\xi,\eta(x_0)[$ und $u_1(\eta(x_0),x_0) = 0$ ist, gilt

$$u_1'(\eta(x_0),x_0) > 0.$$

Zum Nachweis der Differenzierbarkeit von η in $]c_1,c_2[$ mittels des Satzes von der impliziten Funktion wählt man nun die Funktion

$$F(t,x) := u_1(t,x) = -D^1[u_2^+](x,t)$$

mit den ersten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = u_1'(t,x) = D^1[u_1^+](x,t)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = -(D^1[u_2^+])'(x,t) = -\left(D^2[u_2^+](x,t) - q(x)u_2^+(x,t)\right).$$

Für $x_0 \in]c_1,c_2[\subseteq D_3$ ($\subseteq E \subseteq J$) und $t_0 := \eta(x_0) \in J$ gilt

$$F(t_0,x_0) = u_1(\eta(x_0),x_0) = 0$$

und nach obiger Begründung

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t_0,x_0) = u_1'(\eta(x_0),x_0) > 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t_0,x_0) = -D^2[u_2^+](x_0,\eta(x_0)) < 0.$$

Die Gleichung $F(t,x) = 0$ ist nach dem Satz von der impliziten Funktion nach $t = g(x)$ auflösbar ist. Es gibt also offene J-Umgebungen V_1 von t_0 und $U_1 \subseteq]c_1,c_2[$ von x_0 und genau eine Funktion $g : U_1 \longrightarrow V_1$ mit

$$g(x_0) = t_0 := \eta(x_0) \ \wedge$$
$$F(g(x),x) = 0 \ \forall\, x \in U_1.$$

Weiter ist $g \in C^1(U_1)$. Für die erste Ableitung g' gilt in U_1

$$g'(x) = -\frac{\partial F}{\partial x}(g(x),x) \Big/ \frac{\partial F}{\partial t}(g(x),x)$$
$$= \frac{D^2[u_2^+](x,g(x)) - q(x)u_2^+(x,g(x))}{u_1'(g(x),x)}.$$

Da η in $U_1 \subseteq]c_1,c_2[$ ebenfalls die Gleichung $F(\eta(x),x) = u_1(\eta(x),x) = 0$ und die Anfangswertbedingung $\eta(x_0) = t_0$ (per definitionem) erfüllt, stimmt wegen der Einzigkeit der Funktion g diese mit η in U_1 überein. Da $x_0 \in]c_1,c_2[$ beliebig war, ist η auf ganz $]c_1,c_2[$ stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$\eta'(x) = \frac{D^2[u_2^+](x,\eta(x)) - q(x)u_2^+(x,\eta(x))}{u_1'(\eta(x),x)}$$
$$= \frac{D^2[u_2^+](x,\eta(x))}{u_1'(\eta(x),x)} > 0.$$

Zur Berechnung der Gleichung für die zweite Ableitung $\eta''(x)$ wird jetzt anstelle der Gleichung für $g'(x)$ die vereinfachte Gleichung für $\eta'(x)$ verwendet. Bei den Umformungen verwendet man

$$D^2[u_2^+](x,\eta(x)) = u_0(\eta(x),x),$$
$$u_1'(\eta(x_0),x_0) = D^1[u_1^+](x,\eta(x)),$$
$$(D^2[u_2^+])'(x,\eta(x)) = r(x)u_2^+(x,\eta(x)) = 0,$$
$$u_1^+(x,\eta(x)) = -u_2'(\eta(x),x) = 0 \text{ (wg. DT)},$$
$$(D^1[u_1^+])'(x,\eta(x)) = D^2[u_1^+](x,\eta(x)) - q(x)u_1^+(x,\eta(x)) = D^2[u_1^+](x,\eta(x)).$$

Damit erhält man für die zweite Ableitung

$$\eta''(x) = \frac{1}{(u_1'(\eta(x),x))^2}\Big(\Big[(D^2[u_2^+])'(x,\eta(x)) - u_0'(\eta(x),x)\eta'(x)\Big]u_1'(\eta(x),x)$$
$$- D^2[u_2^+](x,\eta(x))\Big[u_1''(\eta(x),x)\eta'(x) + (D^1[u_1^+])'(x,\eta(x))\Big]\Big)$$
$$= \frac{1}{(u_1'(\eta(x),x))^2}\Big(u_0'(\eta(x),x)\eta'(x)u_1'(\eta(x),x)$$
$$- D^2[u_2^+](x,\eta(x))\Big[u_1''(\eta(x),x)\eta'(x) + D^2[u_1^+](x,\eta(x))\Big]\Big).$$

Da die rechte Seite nach x stetig differenzierbar ist, ist η auf $]c_1,c_2[$ insgesamt dreimal stetig differenzierbar. □

Für jedes $x_0 \in A$ gibt es eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0) =]x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon[$, deren Durchschnitt mit E ganz in A liegt:

$$]x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon[\cap E \subseteq A.$$

Für jedes $x_0 \in D_1 \cup D_2$ gibt es eine punktierte ε-Umgebung $\dot{U}_\varepsilon(x_0) =]x_0-\varepsilon,x_0[\cup]x_0,x_0+\varepsilon[$, deren Durchschnitt mit E ganz in A liegt:

$$(]x_0-\varepsilon,x_0[\cup]x_0,x_0+\varepsilon[) \cap E \subseteq A.$$

Demzufolge ist jedes $x_0 \in D_1 \cup D_2$ ein Häufungspunkt bezüglich A und ein isolierter Punkt von D.

Ein Häufungspunkt $x_1 \in E$ bezüglich $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ liegt also nicht in A und nicht in $D_1 \cup D_2$ und liegt somit notwendig in $E \setminus (A \cup D_1 \cup D_2) = D_3$. Das nachfolgende Beispiel zeigt, dass ein Punkt $x_1 \in E$ gleichzeitig ein Häufungspunkt bezüglich D_3 und ein Häufungspunkt bezüglich A sein kann.
Die Differenzierbarkeit von η wird in (4.20) für $x_0 \in A = A_1 \cup A_2$, in (4.21) für $x_0 \in D_1 \cup D_2$ und in (4.22) für den Fall untersucht, dass x_0 ein E-innerer Punkt von D_3 ist (bezüglich der Relativtopologie auf dem Intervall E). Eine grafische Darstellung dieser letzten Situation geben die Abbildungen 4.7 und 4.10.
Falls nun $x_0 \in D_3$ und kein E-innerer Punkt von D_3 ist, dann enthält jede punktierte E-Umgebung $\dot{U}(x_0)$ von x_0 einen Punkt $x \in E \setminus D_3 = A \cup D_1 \cup D_2$. Damit ist x_0 Häufungspunkt von A oder Häufungspunkt von $D_1 \cup D_2$. Im zweiten Fall enthält jede punktierte E-Umgebung $\dot{U}(x_0)$ von x_0 einen Punkt $x' \in D_1 \cup D_2$. Da x' nach (4.21) Häufungspunkt von A ist, enthält $\dot{U}(x_0)$ auch ein $x'' \in A$. Demnach ist im zweiten Fall x_0 Häufungspunkt von $D_1 \cup D_2$ und Häufungspunkt von A. Dabei kann, wie das nachfolgende Beispiel zeigt, x_0 auch noch Häufungspunkt von D_3 sein und, wie die Abbildung 3.10 zeigt, x_0 auch isolierter Punkt von D_3 sein.

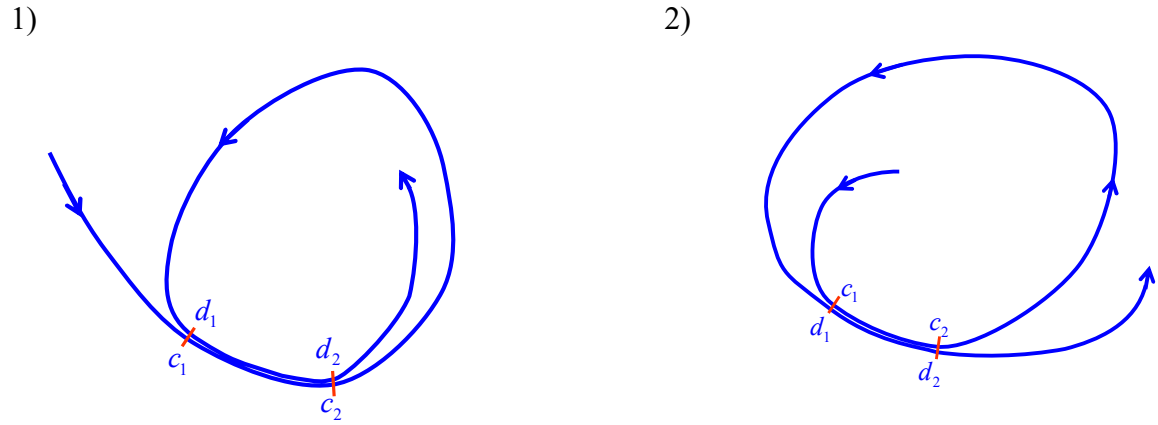


Abb. 4.7 Eine Integralkurve C mit Selbstberührung längs eines Kurvenstücks ohne Selbstdurchsetzung 1) nach innen fortlaufend und 2) nach außen fortlaufend

Beispiel: Ein Punkt $x_0 \in E$ als Häufungspunkt bezüglich A und bezüglich D

Für die $x \in J = [-2\pi, \frac{\pi}{2}]$ sei das folgende Tripel der Funktionen definiert:

$$y_1(x) = \cos x,$$
$$y_2(x) = \sin x + \Delta(x),$$
$$y_3(x) = 1$$

mit dem auf J definierten Abweichungsterm

$$\Delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [-2\pi, 0[, \\ f(\cos x) & \text{für } x \in [0, \frac{\pi}{2}], \end{cases}$$

der auf [0,1] definierten Abweichungsfunktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0, \\ a_j \cdot \left(1 - \cos h_j(t)\right)^2 & \text{für } t \in \left[\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}\right], j \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$b_j = 2\pi j(j+1)$, $a_j = 1/(8b_j^2)$, $h_j(t) = b_j t - 2\pi j$. Eine Darstellung des Funktionsgraphen des Abweichungsterms $\Delta(x)$ in $[0,\pi/2]$ gibt die Abbildung 4.8.

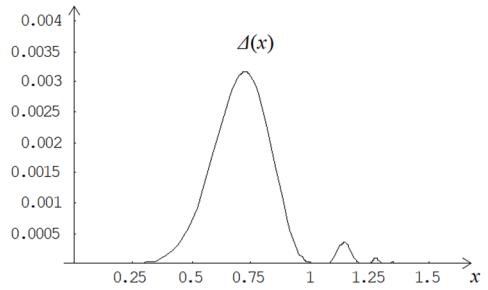


Abb. 4.8 Der Graph des Abweichungsterms $\Delta(x)$ über dem Intervall $[0,\pi/2]$ (erstellt mit Mathematica)

Für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ist

$$\Delta'(x) = -f'(\cos x)\sin x,$$
$$\Delta''(x) = -f''(\cos x)\sin^2 x - f'(\cos x)\cos x.$$

Für das Funktionentripel $\mathbf{y} = (y_1,y_2,y_3) \in C^3(J)$ ist die Wronski-Determinante in J gegeben durch

$$\begin{aligned} W[\mathbf{y}] &= W[y_1,y_2,y_3] = W[y_1',y_2'] \\ &= y_1'y_2'' - y_1''y_2' \\ &= -\sin x\,(-\sin x + \Delta''(x)) + \cos x\,(\cos x + \Delta'(x)) \\ &= 1 - \sin x\,\Delta''(x) + \cos x\,\Delta'(x), \end{aligned}$$

also

$$W[\mathbf{y}] = 1 \qquad \text{für } x \in [-2\pi,0[,$$
$$W[\mathbf{y}] = 1 - f''(\cos x)\sin^3 x > 0 \qquad \text{für } x \in [0,\frac{\pi}{2}]:$$

Für $t \in [0,1]$ bzw. $t \in \left[\frac{1}{j+1},\frac{1}{j}\right]$ ist nämlich

$$f(t) = f_j(t) = a_j\cdot(1 - \cos(h_j(t)))^2,$$

$$f'(t) = 2a_jb_j(\sin h_j(t) - \frac{1}{2}\sin 2h_j(t)),$$
$$\begin{aligned} f''(t) &= 2a_jb_j^2(\cos h_j(t) - \cos 2h_j(t)) \\ &= 4a_jb_j^2 \sin\frac{3h_j(t)}{2}\sin\frac{h_j(t)}{2}, \end{aligned}$$
$$|f''(t)| \le 4b_j^2a_j = \frac{4b_j^2}{8b_j^2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Da die Wronski-Determinante $W[\mathbf{y}] \neq 0$ in J ist, ist $\mathbf{y}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$L[y] \equiv W[y_1,y_2,y_3,y]/W[\mathbf{y}] = 0$$

(Berechnung der Koeffizienten p, q, r in Abschnitt 3.1.4). Mit Hilfe der Integralkurve C in der euklidischen y_1y_2-Ebene wird nun begründet, dass der Kurvenparameter-Punkt $x_0 = -\frac{3\pi}{2} \in J$ ein Häufungspunkt bezüglich D und bezüglich A ist: Hinsichtlich dem Auftreten von Doppelpunkten sind nur die beiden Kurvenstücke C_{T_1} und C_{T_5} von C zu vergleichen, die zum ersten Kurvenparameter-Intervall $T_1 = [-2\pi,-3\pi/2]$ und zum letzten Kurvenparameter-Intervall $T_5 = [0,\pi/2]$ gehören und beide im ersten Quadranten der y_1y_2-Ebene liegen (siehe Abbildung 4.9). Wegen $\Delta \ge 0$ liegt das letzte Kurvenstück C_{T_5} oberhalb des ersten Kurvenstücks C_{T_1}, wobei Selbstberührungen auftreten können. Die Selbstberührungen treten genau für die Kurvenparameter-Paare $\{c_j,d_j\}$ auf, die durch die Nullstellen

$$d_j = \arccos t_j \in [0,\pi/2[$$

von Δ ($\cos d_j = t_j = 1/j \in]0,1]$, $j \in \mathbb{N}$) und die zugehörigen Stellen

$$c_j = d_j - 2\pi \in [-2\pi,-3\pi/2]$$

gegeben werden: Da $h_j(t_j) = 2\pi j(j+1)/j - 2\pi j = 2\pi$ und $h_j(t_{j+1}) = 2\pi j(j+1)/(j+1) - 2\pi j = 0$ ist, gilt $\cos h_j(t_j) = \cos h_j(t_{j+1}) = 1$, daher

$$\Delta(d_j) = f(\cos d_j) = f_j(t_j) = a_j\cdot(1 - \cos h_j(t_j))^2 = 0$$

und analog $\Delta(d_{j+1}) = 0$. Zu den Nullstellen d_j von Δ und den zugehörigen Parametern c_j gehören also die Doppelpunkte

$$[\mathbf{y}(d_j)] = [\mathbf{y}(c_j)] \quad \text{für } j \in \mathbb{N}.$$

Wegen $\Delta \geq 0$ sind die Nullstellen d_j von Δ keine Vorzeichenwechselstellen und die Doppelpunkte $\{c_j,d_j\}$ auch Selbstberührungspunkte von C. Daher gilt $c_j \in D_3$.

Für die Kurvenparameter x in den Intervallen $]d_j,d_{j+1}[\subseteq [0,\pi/2[$ zwischen den Δ-Nullstellen gilt $\Delta > 0$, sodass zu diesen $x \in]d_j,d_{j+1}[$ und den zugehörigen $x' = x - 2\pi$ keine Doppelpunkte der Kurve C auftreten. Die zugehörigen Intervalle $]c_j,c_{j+1}[\subseteq [-2\pi,-3\pi/2[$ liegen also in $A \cup D_2$. Wählt man nun ein beliebiges $x' = x_j' \in]c_j,c_{j+1}[$, so gibt es dazu eine ganz in $]c_j,c_{j+1}[$ liegende offene ε-Umgebung $U\varepsilon(x') =]x'-\varepsilon,x'+\varepsilon[$. Die zugehörige punktierte Umgebung $U\varepsilon(x') \setminus \{x'\}$ enthält sowohl im Fall $x' \in A$ (A offen in E) als auch im Fall $x' \in D_2$ (nach (4.21)) ein $p_j \in A$.

Da die $c_j \in D_3$ und $p_j \in A$ bei $j \longrightarrow \infty$ gegen $x_0 = -\dfrac{3\pi}{2}$ konvergieren, ist x_0 sowohl Häufungspunkt bezüglich D_3 bzw. D als auch Häufungspunkt bezüglich A. Die nachfolgende Abbildung 4.9 gibt eine Darstellung der Integralkurve C mit Selbstberührungspunkten im ersten Quadranten der y_1y_2-Ebene. Dabei kann jedoch für C die Abweichung des Endstücks vom Anfangsstück im ersten Quadranten in der Darstellung der gesamten Kurve C zeichnerisch nicht veranschaulicht werden, da die relative Abweichung $\rho(x) := \Delta(x)/\sin x$ (≥ 0) der beiden Kurvenstücke für die Zeichnung zu klein ist: So ist $\rho(x)$ für die x im Intervall $[0,1]$ kleiner als 0,005 und in $[1,\pi/2]$ sogar kleiner als 0,0004.[17] △

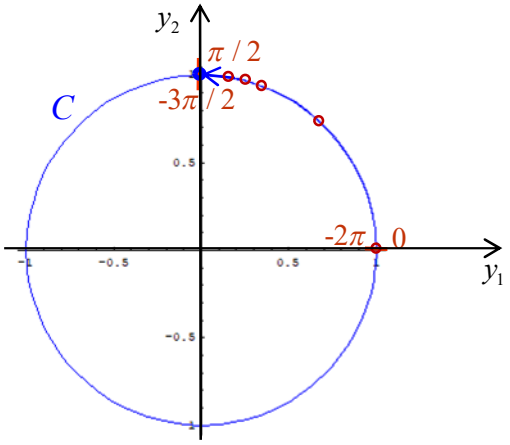


Abb. 4.9 Die Integralkurve C des Beispiels in der y_1y_2-Ebene mit dem Kurvenparameter $x_0 = -3\pi/2$ als Häufungspunkt bezüglich D_3 und A

4.6.4 Analytische Definition der Klasse $K(J)$ zur Beschreibung der Spiralform der Integralkurve C

Der nächste Satz 4.10 bedeutet geometrisch, dass für die Differentialgleichung (L) eine der Klassen $K_I(J)$ oder $K_{II}(J)$, bei denen gemäß Abschnitt 3.1.9 für die Tangenten der Integralkurve C (echte) Schnittpunkte mit dem vorhergehenden bzw. dem nachfolgenden Kurvenstück ausgeschlossen werden, genau dann vorliegt, wenn die Klasse $K(J)$ auftritt, bei der C keinen Selbstschneidungspunkt (Doppelpunkt ohne Doppeltangente) im gesamten Intervall J, keine Doppeltangente ohne Doppel-

[17] Die Abweichung $\rho(x)$ kann abgeschätzt werden mit Hilfe des Graphen der Funktion, der beispielsweise mit Mathematica erstellt werden kann und in Abbildung 4.8 dargestellt ist.

punkt im *offenen* Intervall $]a,b[$ besitzt und keine gleichsinnige Selbstdurchsetzung aufweist, also keine gleichsinnige Berührung längs eines Kurvenstücks aufweist, bei der das nachfolgende Kurvenstück bezüglich dem vorhergehenden Kurvenstück die Seite wechselt. Es dürfen jedoch Kurvenpunkte oder Kurvenstücke auftreten, in denen C sich selbst berührt, aber nicht durchsetzt. Ausgeschlossen werden also die mit der nachfolgenden Bedingung (4.23) analytisch beschriebenen und in der Abbildung 4.10 geometrisch dargestellten zwei Fälle einer gleichsinnigen Berührung der Integralkurve mit sich selbst, bei der ein Wechsel von einer nach innen fortlaufenden Spiralform zu einer nach außen fortlaufenden Spiralform bzw. umgekehrt ein Wechsel von einer nach außen fortlaufenden Spiralform zu einer nach innen fortlaufenden Spiralform erfolgt. Somit liegt eine Spiralform mit möglicher Selbstberührung vor und zwar entweder in der nach außen fortlaufenden Form oder in der nach innen fortlaufenden Form.

Wie in Abschnitt 3.1.10 schon erwähnt wurde, kann bei einem abgeschlossenen Intervall $J = [a,b]$ bei der Klassenzugehörigkeit $L \in K_I(J) \cup K_{II}(J)$ an den Kurvenenden schon eine Doppeltangente ohne Doppelpunkt auftreten (siehe Abbildung 3.11, a, b). Daher wird bei der nachfolgenden Definition von $K(J)$ zwar ein Doppelpunkt ohne Doppeltangente im gesamten Intervall J, aber eine *Doppeltangente ohne Doppelpunkt nur im offenen Intervall* $]a,b[$ *ausgeschlossen*. Hinsichtlich der Bezeichnung dieser Eigenschaft wird bei Birkhoff (1911), S. 113, anstelle der Klassenzugehörigkeit $L \in K(J)$ der Differentialgleichung (L) das Intervall J als ein reguläres Intervall bezeichnet.

Definition der Klasse $K(J)$ für die Differentialgleichung (L) durch die Beschreibung der Spiralform mit möglicher Selbstberührung für die Integralkurve C

Die Differentialgleichung (L) gehört im Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ zur Klasse $K(J)$ ($L \in K(J)$) oder das Intervall J heißt ein für (L) reguläres Intervall genau dann, wenn es

keine Stellen $c, d \in J$ mit (3.10) Doppelpunkt ohne Doppeltangente,
keine Stellen $c, d \in]a,b[$ mit (3.11) Doppeltangente ohne Doppelpunkt und
keine Stellen $c_1, c_2 \in]a,b[$ ($c_1 \le c_2$) mit einem nachfolgend beschriebenen Selbstdurchsetzungsintervall $[c_1,c_2]$ gibt:

(4.23) Für jedes $x \in [c_1,c_2]$ liegt für $(x,\eta(x))$ die Eigenschaft (3.9) Doppelpunkt und Doppeltangente (**Selbstberührung**) vor und zu diesem Selbstberührungsintervall $[c_1,c_2]$ ist noch eine der beiden Arten einer Selbstdurchsetzung der Kurve C erfüllt:

1) **Selbstdurchsetzung von innen nach außen**: Zu jedem reellen $\varepsilon > 0$ gibt es Stellen

$$\xi_1 \in]c_1-\varepsilon,c_2[, \qquad \tau_1 \in]\eta(c_1)-\varepsilon,\eta(c_1)[\cap J,$$

sodass ξ_1 eine einfache Nullstelle von $u_2(.,\tau_1)$ ist, und Stellen

$$\xi_2 \in]c_2,c_2+\varepsilon[, \qquad \tau_2 \in]\eta(c_2),\eta(c_2)+\varepsilon[\cap J,$$

sodass τ_2 eine einfache Nullstelle von $u_2(.,\xi_2)$ ist;

2) **Selbstdurchsetzung von außen nach innen**: Zu jedem reellen $\varepsilon > 0$ gibt es Stellen

$$\xi_1 \in]c_1-\varepsilon,c_2[, \qquad \tau_1 \in]\eta(c_1)-\varepsilon,\eta(c_1)[,$$

sodass τ_1 eine einfache Nullstelle von $u_2(.,\xi_1)$ ist, und Stellen

$$\xi_2 \in]c_2,c_2+\varepsilon[, \qquad \tau_2 \in]\eta(c_2),\eta(c_2)+\varepsilon[,$$

sodass ξ_2 eine einfache Nullstelle von $u_2(.,\tau_2)$ ist.

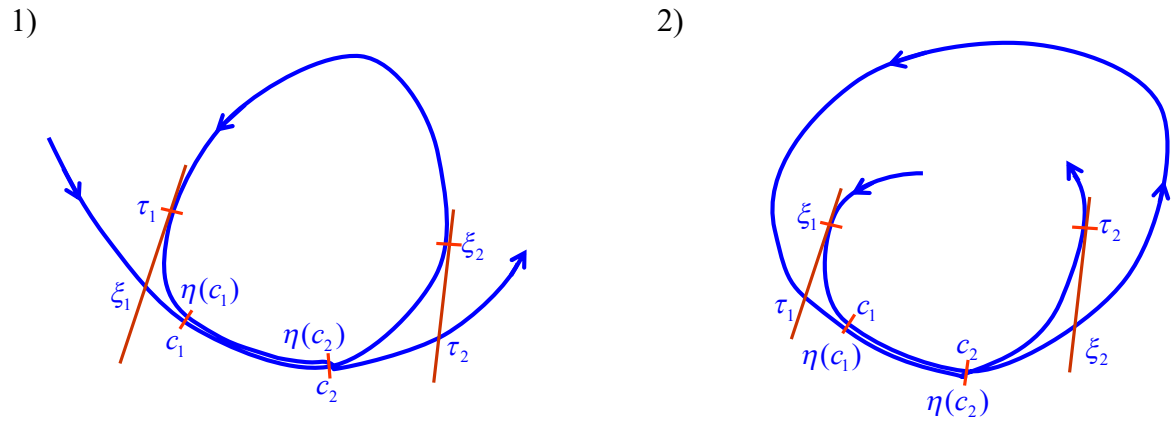


Abb. 4.10 Eine Integralkurve C mit Selbstberührung längs eines Kurvenstücks und einer Selbstdurchsetzung 1) von innen nach außen und 2) von außen nach innen

4.6.5 Übereinstimmung der Klasse $K(J)$ mit der Klasse $K_I(J) \cup K_{II}(J)$

Satz 4.10 Übereinstimmung der Klasse $K_I(J) \cup K_{II}(J)$ mit der Klasse $K(J)$

$$K_I(J) \cup K_{II}(J) = K(J)$$

Beweis: 1) $K_I(J) \cup K_{II}(J) \subseteq K(J)$: In Abschnitt 3.1.10 wurde bereits begründet, dass im Falle $L \in K_I(J) \cup K_{II}(J)$ im gesamten Intervall J kein Doppelpunkt ohne Doppeltangente (Eigenschaft (3.10)) auftritt. Weiter wurde dort gezeigt, dass im Fall $L \in K_I(J)$ nur für das rechtsoffene Intervall $[a,b[$ die Klassenzugehörigkeit $L^+ \in K_{II}^+[a,b[$ folgt und dort eine Doppeltangente ohne Doppelpunkt (Eigenschaft (3.11)) ausgeschlossen werden kann. Am rechten Intervallende $b \in J$ kann aber eine Doppeltangente ohne Doppelpunkt auftreten (siehe Abbildung 3.11, a). Analog kann im Fall $L \in K_{II}(J)$ nur für das linksoffene Intervall $]a,b]$ eine Doppeltangente ohne Doppelpunkt ausgeschlossen werden und am Intervallanfang $a \in J$ eine Doppeltangente ohne Doppelpunkt auftreten (siehe Abbildung 3.11, b). Insgesamt kann bei $L \in K_I(J) \cup K_{II}(J)$ nur im *offenen Intervall* $]a,b[$ eine *Doppeltangente ohne Doppelpunkt ausgeschlossen* werden, aber an den Kurvenenden eine Doppeltangente ohne Doppelpunkt auftreten. Außerdem gibt es im Fall $L \in K_I(J)$ keine ξ_1, $\tau_1 \in J$ ($\xi_1 < \tau_1$), sodass ξ_1 einfache Nullstelle von $u_2(.,\tau_1)$ ist, und im Fall $L \in K_{II}(J)$ keine ξ_2, $\tau_2 \in J$ ($\xi_2 < \tau_2$), sodass τ_2 einfache Nullstelle von $u_2(.,\xi_2)$ ist. Insgesamt ist im Fall $L \in K_I(J) \cup K_{II}(J)$ für ein Kurvenstück $C_{[c_1,c_2]}$ die Bedingung (4.23), 1) nicht erfüllbar. Analog kann im Fall $L \in K_I(J) \cup K_{II}(J)$ kein Kurvenstück $C_{[c_1,c_2]}$ mit der Bedingung (4.23), 2) auftreten. Demzufolge gehört die Differentialgleichung (L) zur oben definierten Klasse $K(J)$ bzw. besitzt die Integralkurve C eine Spiralform mit möglicher Selbstberührung.

2) $K(J) \subseteq K_I(J) \cup K_{II}(J)$: Es wird die äquivalente Aussage gezeigt, dass im Falle $L \notin K_I(J) \cup K_{II}(J)$ auch $L \notin K(J)$ gilt. Falls $L \notin K_I(J)$ und $L \notin K_{II}(J)$ gilt, gibt es x_1, t_1, x_2, $t_2 \in J$ mit

$x_1 < t_1$, $x_2 > t_2$, sodass

x_j eine einfache Nullstelle von $u_2(.,t_j)$

ist: $u_2(x_j,t_j) = 0 \neq u_2'(x_j,t_j)$ ($j = 1, 2$). O. B. d. A. sei

$u_2(.,t_2) > 0$ in $]t_2,x_2[$

und damit

$x_2 = z_{21}(t_2)$:

Man kann nämlich x_2' als die kleinste einfache Nullstelle von $u_2(.,t_2)$ in $]t_2,x_2]$ wählen. Falls nun noch eine Nullstelle von $u_2(.,t_2)$ in $]t_2,x_2'[$ existiert, wählt man t_2' als die größte (zweifache) Nullstelle von $u_2(.,t_2)$ in $]t_2,x_2'[$.[18] Wegen der Minimalitätseigenschaft von x_2' ist dann t_2' zweifache Nullstelle von

[18] In einer Fußnote von Abschnitt 4.5 wird begründet, dass eine nichttriviale Lösung u von (L) im abgeschlossenen Intervall $[c,d]$ nur endlich viele Nullstellen besitzt.

$u_2(.,t_2)$. Mit einem reellen $\lambda \neq 0$ ist $u_2(.,t_2') = \lambda u_2(.,t_2) \neq 0$ in $]t_2',x_2'[$, x_2' einfache Nullstelle und t_2' zweifache Nullstelle von $u_2(.,t_2')$. Aufgrund ihrer Anfangsbedingungen ist die Lösung $u_2(.,t_2') > 0$ in $]t_2',x_2'[$, sodass man wieder x_2, t_2 anstelle von x_2', t_2' schreiben kann. Eine grafische Darstellung der Nullstellen x_j, t_j der Lösungen $u_2(.,t_j)$ ($j = 1,2$) gibt die Abbildung 4.11.
Hinsichtlich der Lage der C_I-Stelle $r_{12}(t_2)$ ($> t_2$) zur einfachen Nullstelle x_2 und der Lage der K_I-Stelle $k_{12}(t_2)$ ($\geq r_{12}(t_2) > t_2$) wird dann die folgende **Fallunterscheidung** vorgenommen:

a) $r_{12}(t_2) = x_2$;
b) $r_{12}(t_2) < x_2$;
c) $r_{12}(t_2) > x_2$:
   α) $k_{12}(t_2) < \infty$,
   β) $k_{12}(t_2) = \infty$.

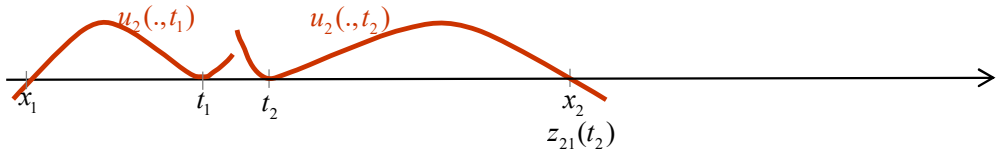


Abb. 4.11 Die Nullstellen x_j, t_j ($j = 1,2$) der Lösungen $u_2(.,t_j)$ im Intervall J

Fall a): Es sei $r_{12}(t_2) = x_2 = z_{21}(t_2)$.
Da nach der Vorbetrachtung $z_{21}(t_2) = x_2$ und im Fall a) auch $r_{12}(t_2) = x_2$ gilt, ist nach der Minimalitätseigenschaft (4.9) von η

$$\eta(t_2) = \min\{z_{21}(t_2), r_{12}(t_2)\} = x_2.$$

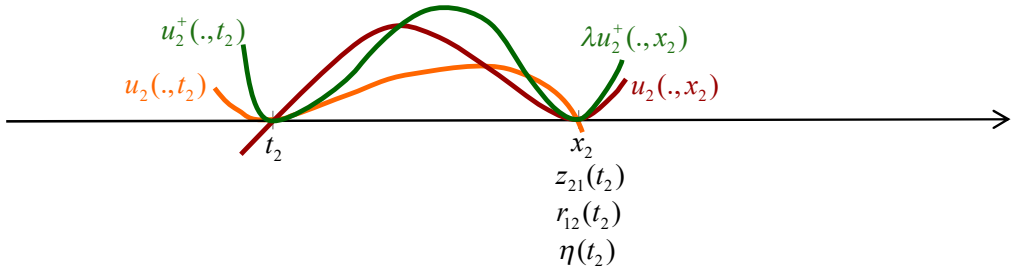


Abb. 4.12 Die Lage der Hilfspunkte im Intervall J für Fall a)

Nach dem Zusammenhang (4.11) zwischen den $r_{ij}(c)$ und den $z_{ij}(x)$ ($x \geq c$) gibt ein $\xi \in [t_2, r_{12}(t_2)[$ mit $r_{12}(t_2) = z_{12}(\xi)$ und folglich

$$u_2(\xi, r_{12}(t_2)) = 0.$$

Da nach Satz 4.3 (L) auch in $]t_2,x_2]$ diskonjugiert ist, folgt $\xi = t_2$. Es gilt also

$$u_2(t_2,x_2) = 0$$

und nach der Voraussetzung über x_2 und t_2 außerdem $u_2(x_2,t_2) = 0 \neq u_2'(x_2,t_2)$. Insgesamt liegt die Bedingung (3.10) $u_2(t_2,x_2) = u_2(x_2,t_2) = 0 \neq u_2'(x_2,t_2)$ für einen Doppelpunkt ohne Doppeltangente von C vor, sodass $t_2 \in D_1$ und $L \notin K(J)$ gilt. Eine grafische Darstellung dieses Falls a) mittels der Lage der Hilfspunkte und der Integralkurve C geben die Abbildungen 4.12 und 4.13.

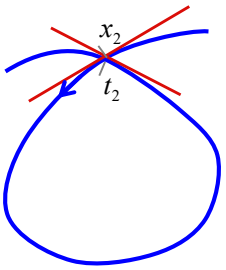


Abb. 4.13 Im Fall a) besitzt die Integralkurve C beim Kurvenparameterpaar $\{t_2,x_2\}$ einen Doppelpunkt ohne Doppeltangente.

Fall b): Es sei $r_{12}(t_2) < x_2 = z_{21}(t_2)$.
In diesem Fall b) ist nach der Minimalitätseigenschaft (4.9) von η

$$\eta(t_2) = \min\{r_{12}(t_2), z_{21}(t_2)\} = r_{12}(t_2) < z_{21}(t_2) = x_2$$

und nach der Minimalitätseigenschaft (4.7)

$$\eta(t_2) = \min\{z_{12}(t_2), z_{21}(t_2)\} = z_{12}(t_2) = z_{21}^{+}(t_2),$$

also $\eta(t_2) = r_{12}(t_2) = z_{12}(t_2) = z_{21}^{+}(t_2)$ und $\eta(t_2) < z_{21}(t_2) = z_{12}^{+}(t_2) \le z_{22}^{+}(t_2)$. Eine grafische Darstellung der Hilfspunkte in J gibt die Abbildung 4.14. Die Lösung

$$w := u_2^{+}(.,t_2)$$

besitzt also die Nullstelle $r_{12}(t_2)$, die wegen $r_{12}(t_2) < z_{22}^{+}(t_2)$ nur eine einfache Nullstelle von $w = u_2^{+}(.,t_2)$ ist.

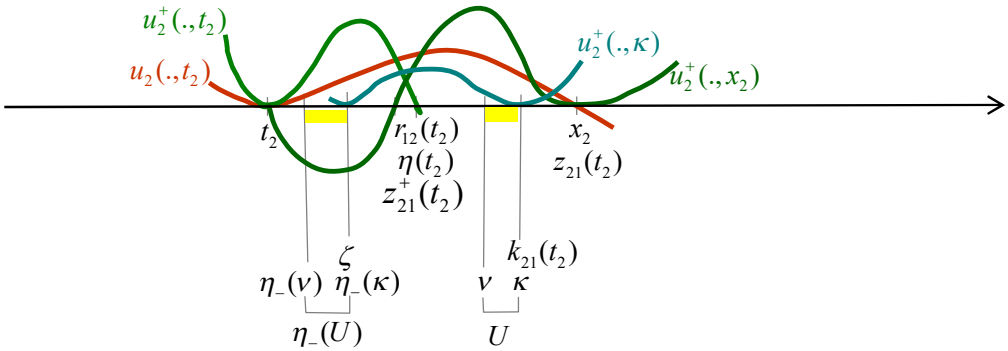


Abb. 4.14 Die Lage der Hilfspunkte im Intervall J für Fall b)

Als Nächstes soll nun für die Lösung

$$z := u_2^{+}(.,x_2)$$

die Existenz einer einfachen Nullstelle ξ in $]t_2,r_{12}(t_2)]$ nachgewiesen werden. Dazu werden die beiden Fälle

i) $[w] = [z]$,
ii) $[w] \neq [z]$

unterschieden. Im Fall i) ($\{t_2,x_2\}$ Doppelpunkt) besitzt z die einfache w-Nullstelle $r_{12}(t_2)$. Im Fall ii) ($\{t_2,x_2\}$ kein Doppelpunkt) wird die Existenz einer Nullstelle ξ von z im offenen Intervall $]t_2,r_{12}(t_2)[$ mittels Satz 3.3, a, 2) (mit $c = t_2$, $d = r_{12}(t_2)$) begründet. Zum Nachweis der Voraussetzungen des Satzes erfolgen noch einige Vorüberlegungen.
Wegen $]t_2,r_{12}(t_2)] \subseteq]t_2,z_{21}(t_2)[$ ist

$$y := u_2(.,t_2) > 0 \text{ in }]t_2,r_{12}(t_2)].$$

und insbesondere $y(t_2) = 0$, $y(r_{12}(t_2)) \neq 0$. Außerdem gilt die Relation

$$B[y,z] = y(x_2) = 0$$

und im Fall ii) für z noch $[z] \neq [u_2^+(.,t_2)]$. Nach Satz 3.3, a, 2) besitzt daher z eine einfache Nullstelle $\xi \in]t_2,r_{12}(t_2)[$. Demnach hat in den beiden Fällen i) und ii) die Lösung z eine einfache Nullstelle $\xi \in]t_2,r_{12}(t_2)]$. Demzufolge ist

$$L^+ \notin K_I^+]t_2,x_2].$$

Weiter gilt wegen $x_2 \in K_{21}(t_2)$ für das Infimum

$$\kappa := k_{21}(t_2) = \inf K_{21}(t_2) \in]t_2,x_2].$$

Nach der k_{ij}-Eigenschaft (4.12) $\kappa = k_{21}(t_2) \in R_{21}(t_2)$ gibt es ein

$$\zeta \in [t_2,\kappa[\text{ mit } u_2^+(\zeta,\kappa) = u_2(\kappa,\zeta) = 0.$$

O. E. sei nun ζ die größe Nullstelle von $u_2^+(.,\kappa)$ in $[t_2,\kappa[$ und daher $u_2^+(.,\kappa) > 0$ in $]\zeta,\kappa[$.

Nach der Definition von $\kappa = k_{21}(t_2)$ ($> t_2$) ist $L \in K_{II}[t_2,\kappa[$ und nach (2.4) von Abschnitt 2.5.3 auch $L^+ \in K_I^+]t_2,\kappa]$. Da oben bereits $L^+ \notin K_I^+]t_2,x_2]$ bewiesen wurde, folgt

$$\kappa < x_2$$

und daraus $u_2(\kappa,t_2) > 0$. Zusammen mit $u_2(\kappa,\zeta) = 0$ ergibt sich $\zeta \neq t_2$ und

$$\zeta \in]t_2,\kappa[.$$

Wegen $u_2^+(\zeta,\kappa) = 0$ mit $\zeta \in]t_2,\kappa[$ und $L^+ \in K_I^+]t_2,\kappa]$ folgt schließlich, dass ζ eine zweifache Nullstelle von $u_2^+(.,\kappa)$ ist, also

$$[u_2^+(.,\zeta)] = [u_2^+(.,\kappa)]$$

gilt und das Kurvenparameterpaar $\{\zeta,\kappa\}$ einen Doppelpunkt liefert. Es sind nun die beiden Fälle zu betrachten:

I) $\{\zeta,\kappa\}$ Doppelpunkt ohne Doppeltangente,
II) $\{\zeta,\kappa\}$ Doppelpunkt mit Doppeltangente.

Im Fall I liefert das Kurvenparameterpaar $\{\zeta,\kappa\}$ für die Integralkurve die Eigenschaft (3.10) (Doppelpunkt ohne Doppeltangente), sodass nach obiger Definition $L \notin K(J)$ ist. Dieser Fall wird in der Abbildung 4.15, I) dargestellt.

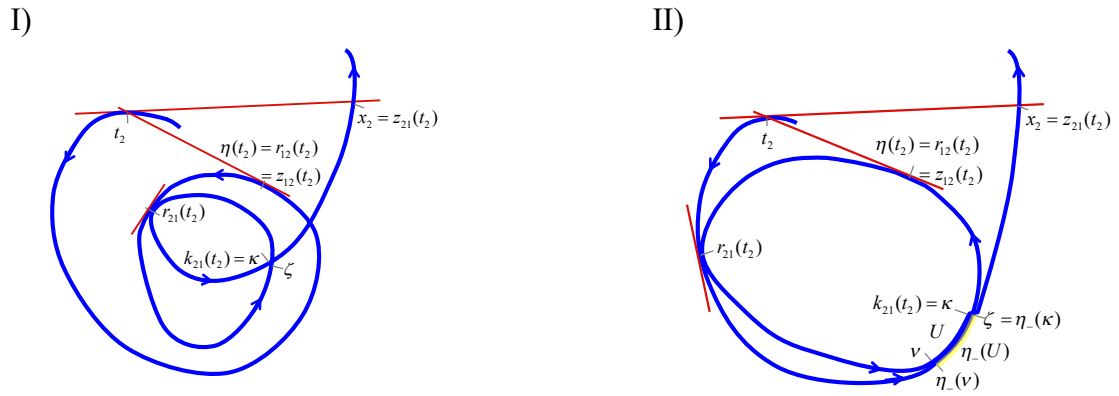


Abb. 4.15 Im Fall b) besitzt die Integralkurve C beim Kurvenparameterpaar $\{\zeta,\kappa\}$ I) einen Doppelpunkt ohne Doppeltangente bzw. II) einen Doppelpunkt mit Doppeltangente und Selbstdurchsetzung von innen nach außen.

Es ist jetzt also noch der Fall II, dass $\{\zeta,\kappa\}$ die Eigenschaft (3.9) (Doppelpunkt mit Doppeltangente, Selbstberührung von C) aufweist, ausführlicher zu betrachten. Dieser Fall wird in der Abbildung 4.15, II) dargestellt. Dazu verwendet man das Infimum v der Menge

$$U := \{s \in [t_2,\kappa] : \forall\, t \in [s,\kappa] \text{ ist } u_2^+(x,t) = 0 \text{ für ein } x = x(t) \in [t_2,t[\} \subseteq [t_2,\kappa].$$

Wegen $u_2^+(\zeta,\kappa) = 0$ mit $\zeta \in]t_2,\kappa[$ ist $\kappa \in U$, $U \neq \emptyset$ und $\nu = \inf U \in [t_2,\kappa]$. Mit einem $s \in U$ ist auch $[s,\kappa] \subseteq U$, sodass U ein Intervall[19] mit rechtem Randpunkt κ ist. Geometrisch bedeutet die Inzidenz $s \in U$ zunächst, dass für jeden Kurvenparameter t des Intervalls $[s,\kappa]$ der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(t)]$ auf einer Tangente $\langle \mathbf{z}(x) \rangle$ des zum vorhergehenden Intervall $[t_2,t[$ gehörigen Kurvenstücks liegt.

Aus der Annahme $\nu < r_{12}(t_2)$ würde die Existenz eines $s \in]\nu,r_{12}(t_2)[\cap U$ folgen, sodass $u_2^+(.,s)$ eine Nullstelle $x = x(s) \in [t_2,s[\subseteq [t_2,r_{12}(t_2)[$ besitzt, im Widerspruch zur Diskonjugiertheit von (L^+) in $[t_2,r_{12}(t_2)[= [t_2,\eta(t_2)[$. Daher ist $\nu \geq r_{12}(t_2)$ und

$$\nu \in [r_{12}(t_2),\kappa].$$

Unter Verwendung der Stetigkeit von $u_2^+(.,.)$ in $J \times J$ und der Diskonjugiertheit von (L^+) in einer Umgebung von ν kann man wie im Beweisteil a) von (4.11) (jetzt mit $u_2^+(.,.)$ statt $u_2(.,.)$) schließen, dass

$$u_2^+(x(\nu),\nu) = 0 \text{ für ein } x(\nu) \in [t_2,\nu[$$

gilt, somit $\nu \in U$, $\nu = \min U$ und

$$U = [\nu,\kappa]$$

ist. Für jedes $t \in U = [\nu,\kappa]$ sei nun o. E. $x(t)$ die größte Nullstelle[20] x von $u_2^+(.,t)$ in $[t_2,t[$, sodass $x(t)$ eindeutig bestimmt ist und

$$u_2^+(.,t) > 0 \text{ in }]x(t),t[$$

gilt. Für $t \in [\nu,\kappa[$ folgt aus $u_2(t,x(t)) = u_2^+(x(t),t) = 0$ $(x(t) \in [t_2,t[)$ und $L \in K_{II}[t_2,\kappa[$, dass

$$[u_2(.,x(t))] = [u_2(.,t)]$$

ist. Außerdem gilt für $t \in [\nu,\kappa[\subseteq [r_{12}(t_2),\kappa[\subseteq]t_2,x_2[$ wegen $u_2(t,x(t)) = 0 \neq u_2(t,t_2)$ die Ungleichung

$$x(t) > t_2$$

und dann wegen $u_2^+(x(t),t) = 0$ und $L^+ \in K_I^+]t_2,\kappa]$ auch

$$[u_2^+(.,x(t))] = [u_2^+(.,t)].$$

Damit liefert für jedes $t \in [\nu,\kappa[$ das Paar $\{x(t),t\}$ einen Doppelpunkt mit Doppeltangente. Speziell für $t = \kappa$ ist im Fall II schon vorausgesetzt, dass die Parameter $x(\kappa) = \zeta$ und $t = \kappa$ für C einen Doppelpunkt mit Doppeltangente liefern. Insgesamt hat sich also für jedes $t \in [\nu,\kappa]$ aus der geometrischen Eigenschaft, dass der zu t gehörige Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(t)]$ auf einer Tangente $\langle \mathbf{z}(x(t)) \rangle$ des vorhergehenden Kurvenstücks zu $[t_2,t[$ liegt, ergeben, dass für das zugehörige Kurvenparameterpaar $\{x(t),t\}$ die Kurveneigenschaft (3.9), also ein Doppelpunkt mit Doppeltangente, vorliegt.

Weiter gilt für jedes $t \in [\nu,\kappa]$ mit einem reellen $\lambda = \lambda(t) > 0$ die Ungleichung

$$u_2^+(.,x(t)) = \lambda u_2^+(.,t) > 0 \text{ in }]x(t),t[$$

und die Klassenzugehörigkeit

$$L^+ \in K_I^+ \text{ in } [x(t),t] \subseteq]t_2,\kappa]$$

(für $t = \kappa$ wurde $x(\kappa) = \zeta \in]t_2,\kappa[$ und $L^+ \in K_I^+]t_2,\kappa]$ bereits oben begründet), sodass nach Satz 4.5, b, 1) (mit $c = x(t)$, $d = t' < t$) die Diskonjugiertheit von (L) und (L^+) im abgeschlossenen Intervall $[x(t),t']$ für jedes $t' \in [x(t),t[$ und damit im halboffenen Intervall $[x(t),t[$ folgt. Wegen $u_2^+(x(t),t) = 0$ ist außerdem (L^+) und (L) nichtdiskonjugiert in $[x(t),t]$ und daher

$$x(t) = \eta_-(t) \text{ für jedes } t \in [\nu,\kappa].$$

Speziell für $t = \kappa$ gilt also

---

[19] Die Charakterisierung einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ als ein Intervall wird in einer Fußnote von Abschnitt 4.6.3 zum Beweis von (4.17) angegeben.

[20] In einer Fußnote von Abschnitt 4.5 wird begründet, dass eine nichttriviale Lösung in einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[c,d] \subseteq J$ nur endlich viele Nullstellen besitzt.

$$\zeta = x(\kappa) = \eta_-(\kappa).$$

Nach dem oben für $x(t)$ ($t \in U = [\nu,\kappa]$) Bewiesenen liegt daher für alle $x \in \eta_-(U) = [\eta_-(\nu),\eta_-(\kappa)]$ für die zugehörigen Kurvenparameterpaare

$$\{x,\eta(x)\} = \{x(t),t\} \text{ die Kurveneigenschaft (3.9)}$$

vor, also die Selbstberührung der Kurve C längs des x-Parameterintervalls $\eta_-(U) = [\eta_-(\nu),\eta_-(\kappa)]$:

$$[\eta_-(\nu),\eta_-(\kappa)] \subseteq D_3.$$

Es wird jetzt noch gezeigt, dass bei diesem Selbstberührungsintervall $[\eta_-(\nu),\eta_-(\kappa)]$ der Kurve C eine Selbstdurchsetzung von innen nach außen gemäß der Bedingung (4.23), 1) mit $c_1 = \eta_-(\nu)$, $c_2 = \eta_-(\kappa)$ auftritt.

Dazu wird als Erstes bewiesen, dass es zu jedem reellen $\varepsilon > 0$ Stellen

$$x' \in \,]\eta_-(\nu)\text{-}\varepsilon,\eta_-(\nu)[,\;\; t' \in \,]\nu\text{-}\varepsilon,\nu[$$

gibt, sodass x' eine einfache Nullstelle von $u_2(.,t')$ ist. Es sei also $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben und (wegen $\eta_-(\nu) = x(\nu) > t_2$, da oben $x(t) > t_2 \;\forall\; t \in [\nu,\kappa[$ bewiesen wurde) o. E.

$$t_2 < \eta_-(\nu) - \varepsilon.$$

Wegen der Stetigkeit und der strengen Monotonie von η_- in $\eta(E)$ gibt es ein $\delta \in \,]0,\varepsilon]$ mit

$$\eta_-(]\nu\text{-}\delta,\nu[) \subseteq \,]\eta_-(\nu)\text{-}\varepsilon,\eta_-(\nu)[.$$

Aufgrund der Definition von ν als inf U gibt es ein

$$t' \in \,]\nu\text{-}\delta,\nu[\text{ mit } u_2^+(.,t') > 0 \text{ in } [t_2,t'[:$$

Denn andernfalls wäre $u_2^+(x(t),t) = 0$ mit einem $x(t) \in [t_2,t[$ zunächst für jedes $t \in \,]\nu\text{-}\delta,\nu[$ und dann insgesamt für alle $t \in \,]\nu\text{-}\delta,\nu[\cup [\nu,\kappa] = \,]\nu\text{-}\delta,\kappa]$ erfüllt und $\inf U \le \nu - \delta < \nu$, im Widerspruch zur Definition von ν.

Da $\eta_-(\nu) \in [t_2,\nu[$, also $\eta_-(\nu) < \nu$ ist, sei noch o. E. für weitere Folgerungen

$$t' \in \,]\eta_-(\nu),\nu[.$$

Für das zugehörige $x' := \eta_-(t')$ folgt dann wegen der Extrabedingungen $t_2 < \eta_-(\nu) - \varepsilon$ und $t' > \eta_-(\nu)$ die Inzidenz

$$x' = \eta_-(t') \in \,]\eta_-(\nu)\text{-}\varepsilon,\eta_-(\nu)[\subseteq \,]t_2,t'[$$

und mit $t' = \eta(\eta_-(t')) = \eta(x')$ die Ungleichung

$$H(x') = u_2(\eta(x'),x') = u_2^+(x',t') > 0,$$

also $x' \in A_2$. Nach der Minimalitätseigenschaft (4.7) ist dann $\eta(x') = z_{21}^+(x') < z_{21}(x')$ und $u_2(x',\eta(x')) = u_2^+(\eta(x'),x') = 0$. Dabei ist die Nullstelle x' von $u_2(.,\eta(x'))$ keine zweifache Nullstelle, da sonst $[u_2(.,\eta(x'))] = [u_2(.,x')]$, $\eta(x')$ zweifache Nullstelle von $u_2(.,x')$ und $\eta(x') = z_{21}(x') = z_{22}(x')$, im Widerspruch zu $\eta(x') < z_{21}(x')$.

Daher ist

$$x' \in \,]\eta_-(\nu)\text{-}\varepsilon,\eta_-(\nu)[\text{ eine einfache Nullstelle von } u_2(.,t'),$$
$$t' \in \,]\nu\text{-}\delta,\nu[\subseteq \,]\nu\text{-}\varepsilon,\nu[,$$

und die erste Bedingung von (4.23), 1) mit $c_1 = \eta_-(\nu)$ und $\eta(c_1) = \nu$ einer Selbstdurchsetzung von innen nach außen erfüllt.

Als Zweites wird jetzt bewiesen, dass es zu jedem reellen $\varepsilon > 0$ Stellen

$$x' \in \,]\eta_-(\kappa),\eta_-(\kappa)\text{+}\varepsilon[,\;\; t' \in \,]\kappa,\kappa\text{+}\varepsilon[$$

gibt, sodass t' eine einfache Nullstelle von $u_2(.,x')$ ist.

Dazu wird vorneweg

$$\kappa = k_{21}(\zeta)$$

mit der oben nachgewiesenen Nullstelle $\zeta \in \,]t_2,\kappa[$ von $u_2^+(.,\kappa)$ gezeigt: Wegen $t_2 < \zeta$ ist $\kappa = k_{21}(t_2) \le k_{21}(\zeta)$. Nimmt man an, dass $\beta := k_{21}(\zeta) > \kappa$ ist, dann gibt es wegen der Definition von $\kappa = k_{21}(t_2)$ als Infimum von $K_{21}(t_2)$ Stellen $t \in [\kappa,\beta[\cap K_{21}(t_2)$ und $x \in [t_2,t[$, sodass

$$t \text{ eine einfache Nullstelle von } y := u_2(.,x)$$

ist. O. E. sei dabei t so nahe bei κ, dass (nach dem Zusatz zu Satz 2.4) (L) in $[\kappa,t]$ diskonjugiert ist. Demzufolge ist $x \notin [\kappa,t]$ und $x \in [t_2,\kappa[$. Weiter ist dann $[y] \neq [u_2(.,\kappa)]$, da andernfalls y die einfache Nullstelle t und die zweifache Nullstelle κ in $[\kappa,t]$ besitzt, was aber im Widerspruch zur Diskonjugiertheit in $[\kappa,t]$ steht. Mittels Hilfssatz 4.4, a, 2) mit $c = \zeta$, $d = \kappa$, $t_0 = t \geq \kappa$ kann dann die Existenz einer

Nullstelle ξ von y in $]\zeta,\kappa[$

gefolgert werden: Es sind dafür die Voraussetzungen erfüllt, da aufgrund der Definition von $\beta = k_{21}(\zeta)$ die Klassenzugehörigkeit $L \in K_{II}$ in $[\zeta,\beta[\supseteq]\zeta,t[$ gilt und für y die Eigenschaften $y(t) = 0$ und (wie oben begründet wurde) $[y] \neq [u_2(.,\kappa)]$ vorliegen. Die letzte Eigenschaft wird für den Fall eines möglichen Doppelpunkts $\{\kappa,t\}$ benötigt. Für den Fall $t = \kappa$ ist die Voraussetzung, dass für $\{\zeta,\kappa\}$ kein Doppelpunkt ohne Doppeltangente vorliegen soll, erfüllt, da im vorliegenden Fall II $\{\zeta,\kappa\}$ ein Doppelpunkt mit Doppeltangente ist. Weiter ist insbesondere $u_2(\zeta,\kappa) = 0$, da im vorliegenden Fall II $\{\zeta,\kappa\}$ sogar ein Doppelpunkt mit Doppeltangente ist.

Wegen $L \in K_{II}[\zeta,\beta[$ und $t \in [\kappa,\beta[\subseteq]\zeta,\beta[$ folgt für die zweifache y-Nullstelle $x \notin [\zeta,\beta[$ und daher

$$x \in [t_2,\kappa[\setminus [\zeta,\beta[= [t_2,\zeta[.$$

Falls nun die y-Nullstelle $\xi \in]\zeta,\kappa[$ eine einfache Nullstelle ist, bekommt man zusammen mit der zweifachen y-Nullstelle $x \in [t_2,\zeta[$ einen Widerspruch zu $L \in K_{II}[t_2,\kappa[$. Falls $\xi \in]\zeta,\kappa[$ eine zweifache Nullstelle von y ist, bekommt man zusammen mit der einfachen y-Nullstelle $t \in [\kappa,\beta[\subseteq [\zeta,\beta[$ einen Widerspruch zu $L \in K_{II}[\zeta,\beta[$. Insgesamt ist damit $\kappa = \beta = k_{21}(\zeta)$ mit einem $\zeta \in]t_2,\kappa[$ bewiesen.

Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben und wegen $\zeta < \kappa$ noch o. E. $\zeta + \varepsilon < \kappa$, dann gibt es wegen der oben bewiesenen Übereinstimmung $\eta_-(\kappa) = \zeta$, der Stetigkeit und strengen Monotonie von η_- ein $\delta \in]0,\varepsilon]$ mit

$$\eta_-([\kappa,\kappa+\delta[) \subseteq [\zeta,\zeta+\varepsilon[.$$

Wegen $\kappa = k_{21}(\zeta) = \inf K_{21}(\zeta)$ gibt es $t' \in [\kappa,\kappa+\delta[\cap K_{21}(\zeta)$ und $x' \in [\zeta,t'[$, sodass

$$t' \text{ eine einfache Nullstelle von } u_2(.,x')$$

ist. Wegen der Inzidenz $\eta_-(t') \in [\zeta,\zeta+\varepsilon[$ und der Extrawahl von ε ist

$$\eta_-(t') < \zeta + \varepsilon < \kappa,$$

wegen der Diskonjugiertheit in $]\eta_-(t'),t']$ und wegen $x' \in [\zeta,t'[$ ist $x' \leq \eta_-(t')$, also

$$\eta_-(\kappa) = \zeta \leq x' \leq \eta_-(t') < \zeta + \varepsilon = \eta_-(\kappa) + \varepsilon.$$

Da im vorliegenden Fall II für $\{\kappa,\zeta\}$ insbesondere eine Doppeltangente vorliegt, also $u_2(.,\kappa) = \lambda u_2(.,\zeta)$ mit einem reellen $\lambda \neq 0$ ist, folgt

$$x' \neq \zeta,$$

da sonst bei $x' = \zeta$

$$u_2(t',\kappa) = \lambda u_2(t',\zeta) = \lambda u_2(t',x') = 0$$

gilt, im Widerspruch zur Diskonjugiertheit in $]\eta_-(t'),t'] \supseteq [\kappa,t']$. Es gilt $x' \in]\zeta,t'[$ und

$$\eta_-(\kappa) = \zeta < x' < \zeta + \varepsilon = \eta_-(\kappa) + \varepsilon.$$

Weiter gilt

$$t' \neq \kappa,$$

da sonst bei $t' = \kappa$ und beim vorliegenden Doppelpunkt $\{\zeta,\kappa\}$

$$u_2^+(x',\zeta) = \lambda u_2^+(x',\kappa) = \lambda u_2^+(x',t') = \lambda u_2(t',x') = 0$$

gilt und $x' \in]\zeta,t'[=]\zeta,\kappa[$ Nullstelle von $u_2^+(.,\zeta)$ ist, was im Widerspruch zur Diskonjugiertheit in $[\zeta,\kappa[= [\eta_-(\kappa),\kappa[$ steht, die nach Satz 4.3 aus der Diskonjugiertheit in $]\eta_-(\kappa),\kappa]$ folgt.

Damit ist

$$t' \in]\kappa,\kappa+\delta[\subseteq]\kappa,\kappa+\varepsilon[\text{ eine einfache Nullstelle von } u_2(.,x'),$$
$$x' \in]\zeta,\zeta+\varepsilon[=]\eta_-(\kappa),\eta_-(\kappa)+\varepsilon[,$$

und mit $c_2 = \zeta = \eta_-(\kappa)$ und $\eta(c_2) = \kappa$ die zweite Bedingung der Selbstdurchsetzungsart (4.23), 1) erfüllt. Insgesamt ist also die erste und zweite Bedingung von (4.23), 1) der Selbstdurchsetzung von innen nach außen erfüllt und damit $L \notin K(J)$ gezeigt.

Fall c, α): Es sei $r_{12}(t_2) > x_2 = z_{21}(t_2)$ und $\varphi := k_{12}(t_2) \in J$.
Im vorliegenden Fall c) $r_{12}(t_2) > z_{21}(t_2)$ ist nach der η-Minimalitätseigenschaft (4.9) und den Ungleichungen (4.4)

$$\eta(t_2) = \min\{z_{21}(t_2), r_{12}(t_2)\} = z_{21}(t_2) < r_{12}(t_2) \le z_{12}(t_2) \le z_{22}(t_2),$$
$$\eta(t_2) = r_{21}(t_2) = z_{21}(t_2) = x_2,$$
$$\eta(t_2) < r_{12}(t_2) \le k_{12}(t_2) = \varphi.$$

Eine grafische Darstellung der Hilfspunkte in J gibt die Abbildung 4.16.

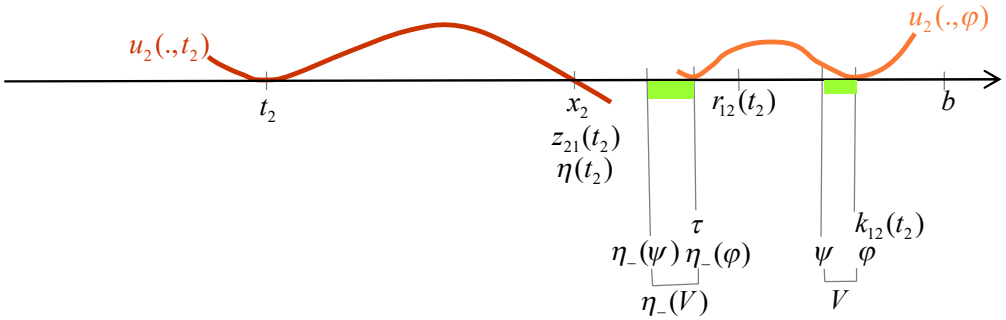


Abb. 4.16 Die Lage der Hilfspunkte im Intervall J für Fall c, α)

Nach der k_{ij}-Eigenschaft (4.12) $\varphi = k_{12}(t_2) \in R_{12}(t_2)$ gibt es ein

$$\tau \in [t_2,\varphi[\text{ mit } u_2(\tau,\varphi) = 0.$$

Da $v := u_2(.,\varphi)$ nur endlich viele Nullstellen[21] in $[t_2,\varphi[$ besitzt und t_2 kein Häufungspunkt von v-Nullstellen ist, sei nun o. E. τ die größe Nullstelle von v in $[t_2,\varphi[$ und daher $v > 0$ in $]\tau,\varphi[$.

Aus der Annahme $\tau = t_2$ folgt $v(t_2) = 0$ und $v > 0$ in $]t_2,\varphi[$ und dann wegen $L \in C_I$ in $[t_2,r_{12}(t_2)[\supseteq [t_2,d]$ nach Satz 4.1, a, 1) mit $c = t_2$ und beliebigem $d \in]t_2,r_{12}(t_2)[$, dass (L) diskonjugiert ist in jedem Intervall $[t_2,d]$ ($d \in]t_2,r_{12}(t_2)[$) und damit in $[t_2,r_{12}(t_2)[$. Dies steht aber im Widerspruch zu $\eta(t_2) < r_{12}(t_2)$. Also ist

$$\tau \in]t_2,\varphi[.$$

Aufgrund der Definition von $\varphi = k_{12}(t_2) = \inf K_{12}(t_2)$ ist im Fall $\varphi = k_{12}(t_2) \in J$ für jedes $\varepsilon > 0$ der Durchschnitt $K_{12}(t_2) \cap [\varphi,\varphi+\varepsilon[$ nichtleer. Demzufolge ergibt sich aus der Annahme $\varphi = b$ (und damit $b \in J$), dass $K_{12}(t_2) \cap [b,b+\varepsilon[= K_{12}(t_2) \cap \{b\}$ nichtleer, also $b \in K_{12}(t_2)$ ist. Daher besitzt

$$y := u_2(.,b) \text{ eine einfache Nullstelle } \xi \in [t_2,b[.$$

Aus $b = k_{12}(t_2)$, $L \in K_I[t_2,b[$ folgt nach der K_I-Eigenschaft (2.4) $L \in K_I]t_2,b]$, sodass y in $]t_2,b[$ keine einfache Nullstelle hat und folglich $\xi = t_2$ ist. Wegen $L \in K_I$ in $[t_2,b[$ folgt dann, dass y in $]t_2,b[$ auch keine zweifache Nullstelle hat. Daher ist $y = u_2(.,b) > 0$, im Widerspruch zu $u_2(\tau,b) = 0$ mit $\tau \in]t_2,b[$. Also ist $\varphi < b$. Die Stellen τ und φ sind also innere Punkte von J:

$$\tau, \varphi \in]t_2,b[\subseteq]a,b[.$$

Es gilt $L \in K_I$ in $[t_2,\varphi[$ und nach (2.4) in $]t_2,\varphi]$, sodass ξ eine zweifache Nullstelle von $v = u_2(.,\varphi)$ ist und das Kurvenparameterpaar $\{\tau,\varphi\}$ eine Doppeltangente (Eigenschaft (3.7)) liefert. Es sind nun die beiden Fälle zu betrachten:

I) $\{\tau,\varphi\}$ Doppeltangente ohne Doppelpunkt,
II) $\{\tau,\varphi\}$ Doppelpunkt mit Doppeltangente.

[21] Die Begründung erfolgt in einer Fußnote von Abschnitt 4.5.

Im Fall I liefert das Kurvenparameterpaar $\{\tau,\varphi\}$ für die Integralkurve die Eigenschaft (3.11) (Doppeltangente ohne Doppelpunkt), sodass wegen $\tau, \varphi \in \,]a,b[$ nach obiger Definition $L \notin K(J)$ ist. Dieser Fall wird in der Abbildung 4.17, I) dargestellt.

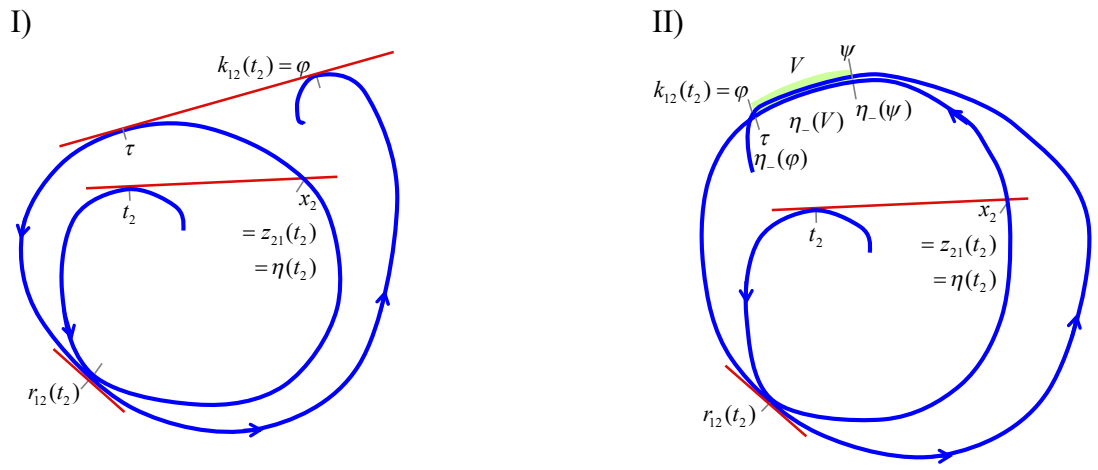


Abb. 4.17 Im Fall c, α) besitzt die Integralkurve C beim Kurvenparameterpaar $\{\tau,\varphi\}$ I) eine Doppeltangente ohne Doppelpunkt bzw. II) einen Doppelpunkt mit Doppeltangente und mit Selbstdurchsetzung von außen nach innen.

Es ist jetzt also noch der Fall II, dass $\{\tau,\varphi\}$ die Eigenschaft (3.9) (Doppelpunkt mit Doppeltangente, Selbstberührung von C) aufweist, ausführlicher zu betrachten. Dieser Fall wird in der Abbildung 4.17, II) dargestellt. Dazu verwendet man das Infimum ψ der Menge

$$V := \{s \in [t_2,\varphi] : \forall\, t \in [s,\varphi] \text{ ist } u_2(x,t) = 0 \text{ für ein } x = x(t) \in [t_2,t[\} \subseteq [t_2,\varphi].$$

Wegen $u_2(\tau,\varphi) = 0$ mit $\tau \in \,]t_2,\varphi[$ ist $\varphi \in V$, $V \neq \emptyset$ und $\psi = \inf V \in [t_2,\varphi]$. Mit einem $s \in V$ ist auch $[s,\varphi] \subseteq V$, sodass V ein Intervall mit rechtem Randpunkt φ ist. Geometrisch bedeutet die Inzidenz $s \in V$ zunächst, dass für jeden Kurvenparameter t des Intervalls $[s,\varphi]$ die Tangente $\langle \mathbf{z}(t) \rangle$ das zum vorhergehenden Intervall $[t_2,t[$ gehörige Kurvenstück in einem Punkt $[\mathbf{y}(x)]$ trifft.
Aus der Annahme $\psi < r_{12}(t_2)$ würde die Existenz eines $s \in \,]\psi,r_{12}(t_2)[\, \cap V$ folgen, sodass $u_2(.,s)$ eine Nullstelle $x = x(s) \in [t_2,s[\, \subseteq [t_2,r_{12}(t_2)[$ besitzt, im Widerspruch zu $L \in C_I$ in $[t_2,r_{12}(t_2)[$. Daher ist $\psi \geq r_{12}(t_2)$ und

$$\psi \in [r_{12}(t_2),\varphi].$$

Unter Verwendung der Stetigkeit von $u_2(.,.)$ in $J \times J$ und der Diskonjugiertheit von (L) in einer Umgebung von ψ kann man wie im Beweisteil a) von (4.11) schließen, dass

$$u_2(x(\psi),\psi) = 0 \text{ für ein } x(\psi) \in [t_2,\psi[$$

gilt, somit $\psi \in V$, $\psi = \min V$ und

$$V = [\psi,\varphi]$$

ist. Für jedes $t \in V = [\psi,\varphi]$ sei nun o. E. $x(t)$ die größte Nullstelle[22] x von $u_2(.,t)$ in $[t_2,t[$, sodass $x(t)$ eindeutig bestimmt ist und

$$u_2(.,t) > 0 \text{ in }]x(t),t[$$

gilt. Für $t \in [\psi,\varphi[$ folgt aus $u_2(x(t),t) = 0$ ($x(t) \in [t_2,t[$) und $L \in K_I[t_2,\varphi[$, dass

$$[u_2(.,x(t))] = [u_2(.,t)]$$

[22] In einer Fußnote von Abschnitt 4.5 wird begründet, dass eine nichttriviale Lösung in einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[c,d] \subseteq J$ nur endlich viele Nullstellen besitzt.

ist. Außerdem gilt für $t \in [\psi,\varphi[$ wegen $u_2^+(t,x(t)) = u_2(x(t),t) = 0$ ($x(t) \in [t_2,t[$), $\gamma := k_{21}^+(t_2) \geq k_{12}(t_2) = \varphi$ (nach (4.5)) und $L^+ \in K_{II}^+$ in $[t_2,\gamma[\supseteq [t_2,\varphi[$ auch

$$[u_2^+(.,x(t))] = [u_2^+(.,t)].$$

Damit liefert für jedes $t \in [\psi,\varphi[$ das Paar $\{x(t),t\}$ einen Doppelpunkt mit Doppeltangente. Speziell für $t = \varphi$ ist im Fall II schon vorausgesetzt, dass die Parameter $x(\varphi) = \tau$ und $t = \varphi$ für C einen Doppelpunkt mit Doppeltangente liefern. Insgesamt hat sich also für jedes $t \in [\psi,\varphi]$ aus der geometrischen Eigenschaft, dass die Tangente $\langle \mathbf{z}(t) \rangle$ das zum vorhergehenden Intervall $[t_2,t[$ gehörige Kurvenstück trifft, ergeben, dass für das zugehörige Kurvenparameterpaar $\{x(t),t\}$ die Kurveneigenschaft (3.9), also ein Doppelpunkt mit Doppeltangente, vorliegt.

Weiter gilt für jedes $t \in [\psi,\varphi]$ mit einem reellen $\lambda = \lambda(t) > 0$ die Ungleichung

$$u_2(.,x(t)) = \lambda u_2(.,t) > 0 \text{ in }]x(t),t[,$$

die Klassenzugehörigkeit $L \in K_I[t_2,\varphi[$ und nach (2.4)

$$L \in K_I \text{ in }]t_2,\varphi] \supseteq [x(t),t],$$

sodass nach Satz 4.5, a, 1) (mit $c = x(t)$, $d = t' < t$) die Diskonjugiertheit von (L) im abgeschlossenen Intervall $[x(t),t']$ für jedes $t' \in [x(t),t[$ und damit im halboffenen Intervall $[x(t),t[$ folgt. Wegen $u_2(x(t),t) = 0$ ist außerdem (L) nichtdiskonjugiert in $[x(t),t]$ und daher

$$x(t) = \eta_-(t) \text{ für jedes } t \in [\psi,\varphi].$$

Speziell für $t = \varphi$ gilt also

$$\tau = x(\varphi) = \eta_-(\varphi).$$

Nach dem oben für $x(t)$ ($t \in V = [\psi,\varphi]$) Bewiesenen liegt daher für alle $x \in \eta_-(V) = [\eta_-(\psi),\eta_-(\varphi)]$ für die zugehörigen Kurvenparameterpaare

$$\{x,\eta(x)\} = \{x(t),t\} \text{ die Kurveneigenschaft (3.9)}$$

vor, also die Selbstberührung der Kurve C längs des x-Parameterintervalls $\eta_-(V) = [\eta_-(\psi),\eta_-(\varphi)]$:

$$[\eta_-(\psi),\eta_-(\varphi)] \subseteq D_3.$$

Es ist noch zu zeigen, dass bei diesem Selbstberührungsintervall $[\eta_-(\psi),\eta_-(\varphi)]$ der Kurve C eine Selbstdurchsetzung von außen nach innen gemäß der Bedingung (4.23), 2) mit $c_1 = \eta_-(\psi)$, $c_2 = \eta_-(\varphi)$ auftritt.

Als Erstes wird analog zu Beweisteil b) für die C-Selbstdurchsetzung jetzt aber von außen nach innen gemäß der Bedingung (4.23), 2) mit $c_1 = \eta_-(\psi)$, $c_2 = \eta_-(\varphi)$ bewiesen, dass es zu jedem reellen $\varepsilon > 0$ Stellen

$$x' \in]\eta_-(\psi)-\varepsilon,\eta_-(\psi)[, \quad t' \in]\psi-\varepsilon,\psi[$$

gibt, sodass t' eine einfache Nullstelle von $u_2(.,x')$ ist.

Vorneweg wird für eine passende Wahl von $\varepsilon > 0$ noch

$$t_2 < x(\psi) = \eta_-(\psi)$$

gezeigt: Da $\{x(\psi),\psi\}$ einen Doppelpunkt mit Doppeltangente aufweist, gilt insbesondere $[u_2(.,x(\psi))] = [u_2(.,\psi)]$. Damit folgt aus der Annahme $x(\psi) = t_2$ die Übereinstimmung $[u_2(.,t_2)] = [u_2(.,x(\psi))] = [u_2(.,\psi)]$, sodass mit $u_2(.,t_2)$ auch die Lösung $u_2(.,\psi)$ die einfache Nullstelle x_2 besitzt, wobei $t_2 < x_2 < r_{12}(t_2) \leq \psi$, also $x_2 \in]t_2,\psi[$ gilt. Dies liefert aber einen Widerspruch, da $L \in K_I$ in $[t_2,\varphi[$ und nach (2.4) auch in $]t_2,\varphi] \supseteq]t_2,\psi]$ ist. Also gilt $\eta_-(\psi) > t_2$.

Es sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben und o. E. (wegen $t_2 < \eta_-(\psi)$) noch

$$t_2 < \eta_-(\psi) - \varepsilon.$$

Wegen der Stetigkeit und der strengen Monotonie von η_- in $\eta(E)$ gibt es ein $\delta \in]0,\varepsilon]$ mit

$$\eta_-(]\psi-\delta,\psi[) \subseteq]\eta_-(\psi)-\varepsilon,\eta_-(\psi)[.$$

Aufgrund der Definition von ψ als inf V gibt es ein

$$t' \in \,]\psi\text{-}\delta,\psi[\text{ mit } u_2(.,t') > 0 \text{ in } [t_2,t'[:$$

Denn andernfalls wäre $u_2(x(t),t) = 0$ mit einem $x(t) \in [t_2,t[$ zunächst für jedes $t \in \,]\psi\text{-}\delta,\psi[$ und dann insgesamt für alle $t \in \,]\psi\text{-}\delta,\psi[\cup [\psi,\varphi] = \,]\psi\text{-}\delta,\varphi[$ erfüllt und inf $V \le \psi - \delta < \psi$, im Widerspruch zur Definition von $\psi = \inf V$.

Da $\eta_-(\psi) \in \,]t_2,\psi[$, also $\eta_-(\psi) < \psi$ ist, sei noch o. E.

$$t' \in \,]\eta_-(\psi),\psi[.$$

Für das zugehörige $x' := \eta_-(t')$ folgt dann wegen der Extrabedingungen $t_2 < \eta_-(\psi)\text{-}\varepsilon$ und $t' > \eta_-(\psi)$ die Inzidenz

$$x' = \eta_-(t') \in \,]\eta_-(\psi)\text{-}\varepsilon,\eta_-(\psi)[\subseteq \,]t_2,t'[$$

und mit $t' = \eta(\eta_-(t')) = \eta(x')$ die Ungleichung

$$H^+(x') = u_2^+(\eta(x'),x') = u_2(x',\eta(x')) = u_2(\eta_-(t'),t') > 0,$$

also $x' \in A_1$. Nach der Minimalitätseigenschaft (4.7) ist dann $\eta(x') = z_{21}(x') < z_{21}^+(x')$ und $u_2(\eta(x'),x') = 0$. Dabei ist die Nullstelle $t' = \eta(x')$ von $u_2(.,x')$ keine zweifache Nullstelle, da sonst $\eta(x') = z_{21}(x') = z_{22}(x')$ und nach (4.10) $z_{21}^+(x') \le \min\{z_{22}(x'), z_{22}^+(x')\} = z_{22}(x') = \eta(x')$ wäre, im Widerspruch zu $\eta(x') < z_{21}^+(x')$. Daher ist

$$t' \in \,]\psi\text{-}\delta,\psi[\subseteq \,]\psi\text{-}\varepsilon,\psi[\text{ eine einfache Nullstelle von } u_2(.,x'),$$
$$x' \in \,]\eta_-(\psi)\text{-}\varepsilon,\eta_-(\psi)[,$$

und die erste Bedingung von (4.23), 2) mit $c_1 = \eta_-(\psi)$ und $\eta(c_1) = \psi$ einer Selbstdurchsetzung von außen nach innen erfüllt.

Als Zweites wird jetzt bewiesen, dass es zu jedem reellen $\varepsilon > 0$ Stellen

$$x' \in [\eta_-(\varphi),\eta\text{-}(\varphi)+\varepsilon[,\ \ t' \in \,]\varphi,\varphi+\varepsilon[$$

gibt, sodass x' eine einfache Nullstelle von $u_2(.,t')$ ist.

Vorneweg wird dazu bewiesen, dass φ auch noch mit anderen Hilfspunkten übereinstimmt:

$$\varphi = k_{21}^+(t_2) = k_{21}^+(\tau) = k_{12}(\tau).$$

Da nach (4.5) stets $\varphi := k_{12}(t_2) \le k_{21}^+(t_2) =: \gamma$ gilt, ist nur noch der Fall $\gamma > \varphi$ auszuschließen. Dafür wiederum wird jetzt zuerst

$$L \in K_I[t_2,\varphi]$$

gezeigt: Aus der Annahme $L \notin K_I[t_2,\varphi]$ folgt wegen $L \in K_I[t_2,\varphi[$, dass die Lösung

$$v := u_2(.,\varphi) \text{ eine einfache Nullstelle } \xi \in [t_2,\varphi[$$

hat und dann wegen der Diskonjugiertheit in $]\eta_-(\varphi),\varphi] = \,]\tau,\varphi]$ die Inzidenz $\xi \in [t_2,\tau]$. Und da für $\{\tau,\varphi\}$ ein Doppelpunkt mit Doppeltangente vorliegt, also insbesondere $[u_2(.,\tau)] = [u_2(.,\varphi)]$ gilt, ist ξ auch eine einfache Nullstelle von $u_2(.,\varphi)$ und $\xi \in [t_2,\tau[$, im Widerspruch zu $L \in K_I$ in $[t_2,\varphi[\supseteq [t_2,\tau]$. Damit ist $L \in K_I[t_2,\varphi]$ bewiesen.

Nimmt man nun $\gamma > \varphi$ an, dann $L \notin K_I[t_2,\gamma[$. Weiter ist $L^+ \in K_{II}^+[t_2,\gamma[$ und nach Abschnitt 2.5.3 $L \in K_I]t_2,\gamma[$. Demzufolge ist

$$t_2 \text{ eine einfache Nullstelle einer Lösung } y := u_2(.,t) \text{ für ein } t \in \,]t_2,\gamma[.$$

Wegen der oben bewiesenen Klassenzugehörigkeit $L \in K_I[t_2,\varphi]$ ist $t > \varphi$ und $t \in \,]\varphi,\gamma[$. Mit Hilfssatz 4.4, a, 1) erhält man nun für

$$y \text{ noch eine weitere Nullstelle } \xi \in \,]\tau,\varphi[.$$

Hierfür sind mit $c = \tau$, $d = \varphi$, $t_0 = t_2 < \tau$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt: Es ist $y(t_2) = 0$ und $L \in K_I$ in $[t_2,\varphi] \supseteq \,]t_2,\varphi[$. Die Bedingung $u_2(\tau,\varphi) = 0$ ist erfüllt, da $\{\tau,\varphi\}$ sogar ein Doppelpunkt mit Doppeltangente ist. Weiter ist $[y] \ne [u_2(.,\tau)]$, da andernfalls bei $[y] = [u_2(.,\tau)]$ auch die Lösung $u_2(.,\tau)$ die einfache Nullstelle t_2 besitzt, im Widerspruch zu $L \in K_I$ in $[t_2,\varphi] \supseteq [t_2,\tau]$.

Falls nun ξ zweifache Nullstelle von y ist, hat man mit den Nullstellen t_2 und $\xi \in \,]\tau,\varphi[$ einen Widerspruch zu $L \in K_I$ in $[t_2,\varphi[$. Falls ξ einfache Nullstelle von y ist, hat man mit den Nullstellen $\xi \in \,]\tau,\varphi[$

und $t \in]\varphi,\gamma[$ einen Widerspruch zur oben begründeten Klassenzugehörigkeit $L \in K_I$ in $]t_2,\gamma[$. Insgesamt ist damit $\gamma = \varphi$ bewiesen, also

$$k_{21}^{+}(t_2) = \gamma = \varphi = k_{12}(t_2).$$

Weiter wird vorab

$$\varphi = k_{21}^{+}(\tau)$$

mit der oben nachgewiesenen Nullstelle $\tau \in]t_2,\varphi[$ von $u_2(.,\varphi)$ gezeigt: Wegen $t_2 < \tau$ ist

$$\varphi = k_{21}^{+}(t_2) \le k_{21}^{+}(\tau) =: \alpha.$$

Nimmt man an, dass $\alpha > \varphi$ ist, dann gibt es wegen der Eigenschaft $\varphi = k_{21}^{+}(t_2) = \inf K_{21}^{+}(t_2)$ Stellen $t \in [\varphi,\alpha[\cap K_{21}^{+}(t_2)$ und $x = x(t) \in [t_2,t[$, sodass

$$t \text{ eine einfache Nullstelle von } z := u_2^{+}(.,x)$$

ist. O. E. sei dabei t so nahe bei φ, dass (nach dem Zusatz zu Satz 2.4) (L^+) in $[\varphi,t]$ diskonjugiert ist. Demzufolge ist $x \notin [\varphi,t]$ und $x \in [t_2,\varphi[$. Außerdem folgt wegen $\alpha = k_{21}^{+}(\tau)$, der Klassenzugehörigkeit $L^+ \in K_{II}^{+}[\tau,\alpha[$ und der Lage der einfachen z-Nullstelle $t \in [\varphi,\alpha[\subseteq]\tau,\alpha[$ für die zweifache z-Nullstelle $x \notin [\tau,\alpha[$ und daher

$$x \in [t_2,\varphi[\setminus [\tau,\alpha[= [t_2,\tau[.$$

Mittels Hilfssatz 4.4, b, 1) mit $c = \tau$, $d = \varphi$, $t_0 = t \ge \varphi$ kann dann die Existenz einer

$$\text{Nullstelle } \xi \text{ von } z \text{ in }]\tau,\varphi[$$

gefolgert werden: Es sind dafür die Voraussetzungen erfüllt, da aufgrund der Definition von $\alpha = k_{21}^{+}(\tau)$ die Klassenzugehörigkeit $L^+ \in K_{II}^{+}$ in $[\tau,\alpha[\supseteq]\tau,t[$ gilt und für z die Eigenschaften $z(t) = 0$ und $[z] \ne [u_2^{+}(.,\varphi)]$ vorliegen. Letztere liegt vor, da andernfalls die Lösung z die einfache z-Nullstelle t und die zweifache Nullstelle φ von $u_2^{+}(.,\varphi)$ in $[\varphi,t]$ besitzt, was aber im Widerspruch zur Diskonjugiertheit in $[\varphi,t]$ steht. Diese zweite z-Eigenschaft wird für den Fall einer möglichen Doppeltangente $\{\varphi,t\}$ benötigt. Für den Fall $t = \varphi$ ist die Voraussetzung, dass für $\{\tau,\varphi\}$ keine Doppeltangente ohne Doppelpunkt vorliegt, erfüllt, da hier im betrachteten Fall II $\{\tau,\varphi\}$ ein Doppelpunkt mit Doppeltangente ist. Weiter ist wegen Fall II insbesondere $u_2^{+}(\tau,\varphi) = 0$ gültig.

Falls nun die z-Nullstelle $\xi \in]\tau,\varphi[\subseteq [t_2,\varphi[$ eine einfache Nullstelle ist, bekommt man zusammen mit der zweifachen z-Nullstelle $x \in [t_2,\tau[\subseteq [t_2,\varphi[$ einen Widerspruch zu $L^+ \in K_{II}^{+}[t_2,\varphi[$. Falls die z-Nullstelle $\xi \in]\tau,\varphi[\subseteq]\tau,\alpha[$ eine zweifache Nullstelle ist, bekommt man zusammen mit der einfachen z-Nullstelle $t \in [\varphi,\alpha[\subseteq]\tau,\alpha[$ wegen $\alpha = k_{21}^{+}(\tau)$ einen Widerspruch zu $L^+ \in K_{II}^{+}[\tau,\alpha[$. Insgesamt ist damit $\alpha > \varphi$ widerlegt und $\varphi = k_{21}^{+}(\tau)$ bewiesen.

Schließlich ergibt sich vorneweg aus den beiden Ergebnissen $\varphi = k_{21}^{+}(t_2)$ und $\varphi = k_{21}^{+}(\tau)$ noch

$$\varphi = k_{12}(\tau):$$

Wegen $t_2 < \tau$ ist nämlich $K_{12}(t_2) \supseteq K_{12}(\tau)$ und $k_{12}(t_2) \le k_{12}(\tau)$ und nach (4.5) $k_{12}(\tau) \le k_{21}^{+}(\tau)$, sodass

$$\varphi = k_{12}(t_2) \le k_{12}(\tau) \le k_{21}^{+}(\tau) = \varphi$$

und damit $\varphi = k_{12}(\tau)$ folgt.

Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben und wegen $\tau < \varphi$ noch o. E. $\tau + \varepsilon < \varphi$, dann gibt es wegen der oben bewiesenen Übereinstimmung $\eta_-(\varphi) = \tau$, der Stetigkeit und strengen Monotonie von η_- ein $\delta \in]0,\varepsilon]$ mit

$$\eta_-(]\varphi,\varphi+\delta[) \subseteq]\tau,\tau+\varepsilon[.$$

Wegen $\varphi = k_{12}(\tau) = \inf K_{12}(\tau)$ gibt es ein $t' \in [\varphi,\varphi+\delta[\cap K_{12}(\tau)$ und dazu ein $x' = x'(t') \in [\tau,t'[$, sodass

$$x' \text{ eine einfache Nullstelle von } u_2(.,t')$$

ist. Wegen der Inzidenz $\eta_-(t') \in [\tau,\tau+\varepsilon[$ und der Wahl von ε ist

$$\eta_-(t') < \tau + \varepsilon < \varphi,$$

wegen der Diskonjugiertheit in $]\eta_-(t'),t']$ ist $x' \le \eta_-(t')$, also

$$\eta_-(\varphi) = \tau \le x' \le \eta_-(t') < \tau + \varepsilon = \eta_-(\varphi) + \varepsilon.$$

Da im vorliegenden Fall II für $\{\tau,\varphi\}$ ein Doppelpunkt mit Doppeltangente vorliegt, ist insbesondere $u_2(.,\varphi) = \lambda u_2(.,\tau)$ mit einem reellen $\lambda \neq 0$. Damit folgt noch

$$t' \neq \varphi,$$

da sonst bei $t' = \varphi$ die Lösung $u_2(.,\varphi) = u_2(.,t')$ die einfache Nullstelle x' in $[\tau,t'[= [\tau,\varphi[\subseteq]t_2,\varphi[$ besitzt, im Widerspruch zur Klassenzugehörigkeit $L \in K_I]t_2,\varphi]$, die nach (2.4) aus $L \in K_I[t_2,\varphi[$ folgt. Es ist also

$$t' \in]\varphi,\varphi+\delta[\subseteq]\varphi,\varphi+\varepsilon[.$$

Da für $\{\tau,\varphi\}$ ein Doppelpunkt vorliegt, ist $u_2^+(.,\varphi) = \lambda u_2^+(.,\tau)$ mit einem reellen $\lambda \neq 0$. Damit folgt

$$x' \neq \tau,$$

da sonst bei $x' = \tau$ die Lösung $u_2^+(.,\varphi) = \lambda u_2^+(.,\tau) = \lambda u_2^+(.,x')$ die Nullstelle t' und die zweifache Nullstelle $\varphi \in]\tau+\varepsilon,t'[\subseteq]\tau,t'[=]\eta_-(t'),t'[$ besitzt, was im Widerspruch zur Diskonjugiertheit in $]\eta_-(t'),t'[$ steht. Es ist also

$$x' \in]\tau,\tau+\varepsilon[.$$

Damit ist

$$x' \in]\tau,\tau+\varepsilon[= [\eta_-(\varphi),\eta_-(\varphi)+\varepsilon[\text{ eine einfache Nullstelle von } u_2(.,t'),$$
$$t' \in]\varphi,\varphi+\varepsilon[,$$

und mit $c_2 = \eta_-(\varphi)$ und $\eta(c_2) = \varphi$ die zweite Bedingung der Selbstdurchsetzungsart (4.23), 2) erfüllt. Insgesamt ist also die erste und zweite Bedingung von (4.23), 2) der Selbstdurchsetzung von innen nach außen erfüllt und damit $L \notin K(J)$ gezeigt.

Fall c, β): Es sei $z_{21}(t_2) = x_2 < r_{12}(t_2)$ und $k_{12}(t_2) = \infty$.
Im vorliegenden Fall c) $r_{12}(t_2) > z_{21}(t_2)$ ist nach (4.9) und (4.4)

$$\eta(t_2) = \min\{z_{21}(t_2),r_{12}(t_2)\} = z_{21}(t_2) < r_{12}(t_2) \le z_{12}(t_2) \le z_{22}(t_2),$$
$$\eta(t_2) = r_{21}(t_2) = z_{21}(t_2) = x_2.$$

Wegen $k_{12}(t_2) = \infty$ ist jetzt aber

$$L \in K_I[t_2,b] \cap J$$

und somit

$$x_1 < t_2.$$

Eine grafische Darstellung der Hilfspunkte in J gibt die Abbildung 4.18.

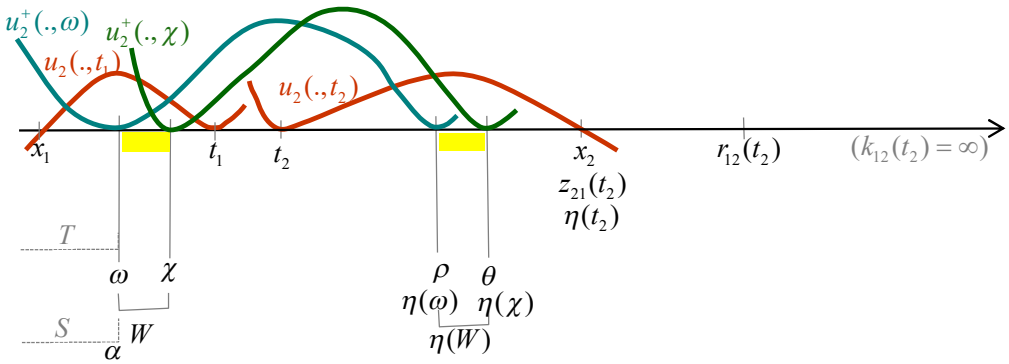


Abb. 4.18 Die Lage der Hilfspunkte im Intervall J für Fall c, β)

Es sei jetzt ω das Supremum der Menge

$$T := \{x \in J : x \text{ ist einfache Nullstelle von } u_2(.,t) \text{ für ein } t = t(x) \in]x,b] \cap J\}$$

Aufgrund der Voraussetzung über x_1 ist $x_1 \in T$ und damit

$$\omega := \sup T \geq x_1.$$

Weiter ist aufgrund der Voraussetzungen $L \in K_I[t_2,b] \cap J$, sodass für jedes $x \in T$ die Relation $x \notin [t_2,b] \cap J$ gilt und für T die Inklusion

$$T \subseteq [a,t_2[\cap J.$$

Daraus folgt $\omega \leq t_2$ und insgesamt

$$\omega \in [x_1,t_2].$$

Für jedes $x > \omega$ gilt $x \notin T$, sodass x keine einfache Nullstelle eines $u_2(.,t)$, $t \in J$ mit $t > x$, ist. Daher erhält man mit ω die Klassenzugehörigkeit

$$L \in K_I]\omega,b] \cap J$$

und nach (2.3) und (2.4)

$$L^+ \in K_{II}^+[\omega,b[.$$

Da im vorliegenden Fall c) $x_2 < r_{12}(t_2)$ gilt, ist

$$L \in C_I \text{ in } [t_2,r_{12}(t_2)[\supseteq [t_2,x_2].$$

Nach Satz 4.4, 1) ist dann mit einem reellen $\varepsilon > 0$ auch $L \in C_I[t_2-\varepsilon,x_2+\varepsilon]$, nach (2.3)

$$L^+ \in C_{II}^+[t_2-\varepsilon,x_2+\varepsilon]$$

und dann insbesondere für jedes $\xi \in [t_2-\varepsilon,t_2]$ $u_2^+(.,\xi) > 0$ in $]\xi,x_2]$. Darüberhinaus soll jetzt für die angegebenen $\xi \in [t_2-\varepsilon,t_2]$ die Ungleichung

$$u_2^+(.,\xi) > 0 \text{ in }]\xi,b] \cap J$$

bewiesen werden. Für einen Widerspruchsbeweis nimmt man an, dass $u_2^+(.,\xi)$ eine Nullstelle $t = t(\xi) \in]x_2,b] \cap J$ besitzt. Es sind dann die Voraussetzungen für Hilfssatz 4.4, b, 1) mit $c = t_2$, $d = x_2$, $t_0 = t > x_2$ erfüllt: Es ist nämlich $L \in K_I$ in $]\omega,b] \cap J \supseteq]t_2,t]$, $u_2^+(t_2,x_2) = u_2(x_2,t_2) = 0$, $z(t) = 0$ für $z := u_2^+(.,\xi)$ und wegen $z(x_2) = u_2^+(x_2,\xi) \neq 0$ auch $[z] \neq [u_2^+(.,x_2)]$. Damit folgt, dass z eine Nullstelle im offenen Intervall $]\xi,x_2[$ besitzt, im Widerspruch zu $z = u_2^+(.,\xi) > 0$ in $]\xi,x_2]$. Also ist die Nullstellenfreiheit von $u_2^+(.,\xi)$ rechts von ξ bewiesen.

Da oben bereits $L^+ \in K_{II}^+$ in $[\omega,b[\supseteq [t_2,b[$ begründet wurde, gilt auch für die $\xi \in [t_2,b[$ diese Ungleichung $u_2^+(.,\xi) > 0$ in $]\xi,b] \cap J$. Insgesamt ist dann die Ungleichung $u_2^+(.,\xi) > 0$ in $]\xi,b] \cap J$ für jedes $\xi \in [t_2-\varepsilon,t_2] \cup [t_2,b[= [t_2-\varepsilon,b[$ erfüllt und die Klassenzugehörigkeit

$$L^+ \in K_{II}^+[t_2-\varepsilon,b] \cap J$$

gegeben. Nach (2.3) und (2.4) gilt dann noch die Klassenzugehörigkeit

$$L \in K_I]t_2-\varepsilon,b] \cap J,$$

für jedes $x \in]t_2-\varepsilon,b] \cap J$ die Relation $x \notin T$, für die Menge T die Inklusion

$$T \subseteq [a,t_2-\varepsilon] \cap J$$

und für $\omega = \sup T$ die Ungleichung $\omega \leq t_2-\varepsilon < t_2$, also

$$\omega \in [x_1,t_2[.$$

Analog zum Beweisschema des Beweisteils a) von (4.11) soll nun bewiesen werden, dass es zu ω ein

$$\rho \in]\omega,x_2] \text{ mit } u_2^+(\rho,\omega) = 0$$

gibt. Es sei $\varepsilon' > 0$ gemäß Zusatz zu Satz 2.4 passend gewählt, dass (L) und (L^+) in $[\omega-\varepsilon',\omega+\varepsilon']$ diskonjugiert ist. Wegen der Definition von $\omega = \sup T$ gibt es zu jedem $\varepsilon_n = \varepsilon'/n$ ($n \in \mathbb{N}$) ein

$$\xi_n \in]\omega-\varepsilon_n,\omega] \cap T$$

und dann dazu ein

$$\rho_n = \rho_n(\xi_n) \in]\xi_n,b] \cap J,$$

sodass ξ_n eine einfache Nullstelle von $u_2(.,\rho_n)$ ist. Insbesondere ist auch

$$u_2^+(\rho_n,\xi_n) = u_2(\xi_n,\rho_n) = 0.$$

O. E. sei dabei ρ_n die kleinste Nullstelle[23] von

$$z_n := u_2^+(.,\xi_n)$$

in $]\xi_n,b] \cap J$ und damit

$$z_n > 0 \text{ in }]\xi_n,\rho_n[.$$

Zum Nachweis der Beschränktheit der Folge ρ_n wird jetzt

$$\rho_n \leq x_2$$

und damit $\rho_n \in\ ]\omega\text{-}\varepsilon',x_2]$ gezeigt. Für einen Widerspruchsbeweis nimmt man an, dass $\rho_n > x_2$ ist, und erschließt dann mittels Hilfssatz 4.4, b, 1) mit $c = t_2$, $d = x_2$, $t_0 = \rho_n > x_2$ einen Widerspruch. Die Voraussetzungen des Hilfssatzes sind erfüllt: $L \in K_I$ in $]t_2,\rho_n[\ \subseteq\ ]t_2\text{-}\varepsilon,b] \cap J$, $u_2^+(t_2,x_2) = u_2(x_2,t_2) = 0$, $z_n(\rho_n) = 0$ für $z_n := u_2^+(.,\xi_n)$ und wegen $\xi_n \leq \omega < t_2 < x_2 < \rho_n$, $z_n(x_2) \neq 0 = u_2^+(x_2,x_2)$ auch $[z_n] \neq [u_2^+(.,x_2)]$. Demzufolge besitzt z_n eine Nullstelle ξ in $]t_2,x_2[\ \subseteq\ ]\xi_n,\rho_n[$, im Widerspruch zur Nullstellenfreiheit von z_n in $]\xi_n,\rho_n[$. Also ist $\rho_n \leq x_2$. Da die zweifache Nullstelle ξ_n von z_n schon in $]\omega\text{-}\varepsilon',\omega]$ liegt und die Diskonjugiertheit in $[\omega\text{-}\varepsilon',\omega+\varepsilon']$ vorliegt, kann die weitere Nullstelle ρ_n von z_n nicht auch noch in $[\omega\text{-}\varepsilon',\omega+\varepsilon']$ liegen. Es ist also $\rho_n \in (]\xi_n,b] \cap J) \setminus [\omega\text{-}\varepsilon',\omega+\varepsilon'] =]\omega+\varepsilon',b] \cap J$ und insgesamt

$$\rho_n \in\ ]\omega+\varepsilon',x_2].$$

Wegen der Stetigkeit von $u_2^+(.,.)$ in $J \times J$, der Konvergenz $\xi_n \longrightarrow \omega$, der Beschränktheit der Folge $\rho_n \in\ ]\omega+\varepsilon,x_2]$ und dann o. E. der Konvergenz $\rho_n \longrightarrow \rho \in [\omega+\varepsilon,x_2] \subseteq\ ]\omega,x_2]$ folgt

$$u_2^+(\rho,\omega) = 0 \text{ für ein } \rho \in\ ]\omega,x_2].$$

O. E. sei ρ die kleinste Nullstelle von $u_2^+(.,\omega)$ in $]\omega,x_2]$ und damit

$$u_2^+(.,\omega) > 0 \text{ in }]\omega,\rho[.$$

Wegen $L^+ \in K_{II}^+[\omega,b[$ ist ρ keine einfache Nullstelle von $u_2^+(.,\omega)$ und daher

$$[u_2^+(.,\omega)] = [u_2^+(.,\rho)],$$

also $\{\omega,\rho\}$ ein Kurvenparameterpaar eines Doppelpunkts (Eigenschaft (3.6)) von C. Es sind nun die beiden Fälle zu betrachten:

I) $\{\omega,\rho\}$ Doppelpunkt ohne Doppeltangente,

II) $\{\omega,\rho\}$ Doppelpunkt mit Doppeltangente.

Im Fall I liefern die Kurvenparameter ω, $\rho \in J$ für die Integralkurve C die Eigenschaft (3.11) (Doppelpunkt ohne Doppeltangente), sodass nach obiger Definition $L \notin K(J)$ ist. Dieser Fall wird in der Abbildung 4.19, I) dargestellt.

---

[23] In einer Fußnote von Abschnitt 4.5 wird begründet, dass hier der feste Punkt $\xi_n \in J$ kein Häufungspunkt von Nullstellen der Lösung z_n ist.

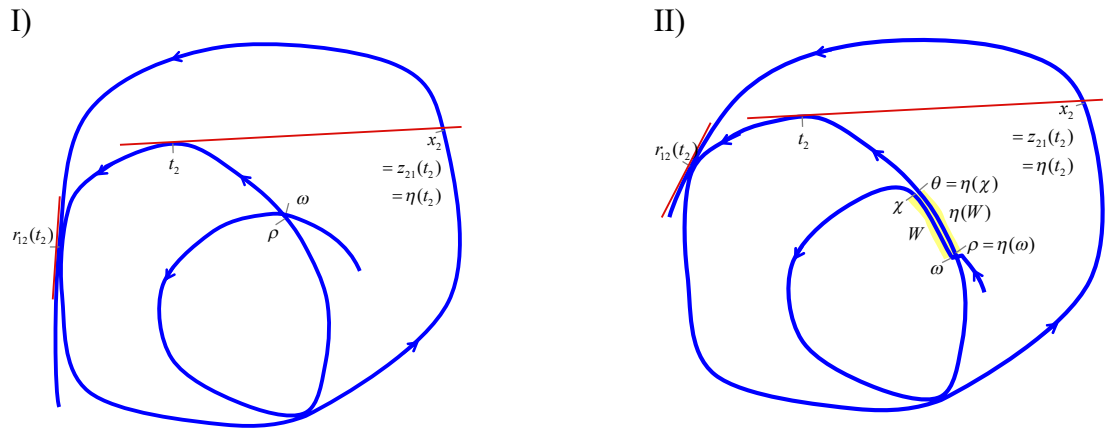


Abb. 4.19 Im Fall c, β) besitzt die Integralkurve C beim Kurvenparameterpaar $\{\omega,\rho\}$ I) einen Doppelpunkt ohne Doppeltangente bzw. II) einen Doppelpunkt mit Doppeltangente und mit Selbstdurchsetzung von innen nach außen.

Es ist jetzt also noch der Fall II, dass $\{\omega,\rho\}$ die Eigenschaft (3.9) (Doppelpunkt mit Doppeltangente, Selbstberührung von C) aufweist, ausführlicher zu betrachten. Dieser Fall wird in der Abbildung 4.19, II) dargestellt.

Als Nächstes wird die Diskonjugiertheit in $[\omega,\rho[$ und die Übereinstimmung $\rho = \eta(\omega)$ begründet. Da $L^+ \in K_{II}^+$ in $[\omega,b[\supseteq [\omega,\rho[\supseteq [\omega',\rho[$, $\omega' \in]\omega,\rho[$, und wegen der Wahl von ρ

$$u_2^+(.,\rho) = \lambda u_2^+(.,\omega) > 0 \text{ in }]\omega,\rho[\supseteq [\omega',\rho[,\ \omega' \in]\omega,\rho[,$$

mit einem reellen $\lambda > 0$ ist, folgt nach Satz 4.5, b, 2) die Diskonjugiertheit von (L) und (L^+) in jedem abgeschlossenen Intervall $[\omega',\rho]$ und damit im halboffenen Intervall $]\omega,\rho]$. Mit Satz 4.3 folgt dann noch die

Diskonjugiertheit in $[\omega,\rho[$.

Da außerdem wegen $u_2^+(\rho,\omega) = 0$ die Nichtdiskonjugiertheit in $[\omega,\rho]$ vorliegt, folgt

$$\rho = \eta(\omega).$$

Weiter wird nun die Klassenzugehörigkeit $L \in K_I[\omega,b] \cap J$ bewiesen. Für einen Widerspruchsbeweis nimmt man an, dass $L \notin K_I[\omega,b] \cap J$ ist. Da oben bereits $L \in K_I]\omega,b] \cap J$ begründet wurde, bedeutet die Annahme, dass die verbleibende Stelle

ω eine einfache Nullstelle von $u_2(.,t)$ für ein $t \in]\omega,b] \cap J$

ist. Mit der Diskonjugiertheit von (L) in $[\omega,\rho[$ folgt $t \geq \rho$. Bei $t = \rho$ wäre ω eine einfache Nullstelle von $u_2(.,\rho) = u_2(.,t)$, im Widerspruch zu der im vorliegenden Fall II für $\{\omega,\rho\}$ auftretenden Doppeltangente $[u_2(.,\omega)] = [u_2(.,\rho)]$. Also ist $t > \rho$.

Da $u_2^+(t,\omega) = u_2(\omega,t) = 0$ ist und $\{\omega,\rho\}$ einen Doppelpunkt $[u_2^+(.,\omega)] = [u_2^+(.,\rho)]$ liefert, gilt auch $u_2(\rho,t) = u_2^+(t,\rho) = 0$. Die Nullstelle ρ von $u_2(.,t)$ ist dabei keine zweifache Nullstelle, da sonst im vorliegenden Fall II $[u_2(.,\omega)] = [u_2(.,\rho)] = [u_2(.,t)]$ und ω eine zweifache Nullstelle von $u_2(.,t)$ wäre. Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass ω einfache Nullstelle von $u_2(.,t)$ ist. Also ist auch ρ einfache Nullstelle von $u_2(.,t)$, was nun im Widerspruch zu $L \in K_I$ in $]\omega,b] \cap J \supseteq [\rho,t]$ steht. Damit ist nun

$$L \in K_I[\omega,b] \cap J$$

bewiesen. Da nach Voraussetzung x_1 einfache Nullstelle von $u_2(.,t_1)$ ($x_1 < t_1$), folgt daraus insbesondere $x_1 \notin [\omega,b] \cap J$, also

$$a \leq x_1 < \omega.$$

Weiter verwendet man das Supremum χ der Menge

$$W := \{s \in [\omega,t_2[: \forall\, x \in [\omega,s] \text{ ist } u_2^+(t,x) = 0 \text{ für ein } t = t(x) \in]x,b] \cap J\} \subseteq [\omega,t_2[.$$

Wegen $u_2^+(\rho,\omega) = 0$ mit $\rho \in]\omega,x_2] \subseteq]\omega,b] \cap J$ ist $\omega \in W$, $W \neq \emptyset$ und $\chi = \sup W \in [\omega,t_2]$. Mit einem $s \in W$ ist auch $[\omega,s[\subseteq W$, sodass W ein Intervall mit linkem Randpunkt ω ist. Geometrisch bedeutet die Inzidenz $s \in W$ zunächst, dass für jeden Kurvenparameter x des Intervalls $[\omega,s[$ der Kurvenpunkt $[\mathbf{y}(x)]$ auf einer Tangente $\langle \mathbf{z}(t) \rangle$ des nachfolgenden Kurvenstücks liegt.

Als Nächstes wird jetzt $\chi < t_2$ begründet. Oben wurde bereits bewiesen, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass für die $\xi \in [t_2-\varepsilon,t_2]$ die Ungleichung

$$u_2^+(.,\xi) > 0 \text{ in }]\xi,b] \cap J$$

erfüllt ist. Wegen $\omega < t_2$ kann man daher ein $\xi \in]\omega,t_2[\cap]t_2-\varepsilon,t_2[$ wählen, für welches $u_2^+(.,\xi)$ nullstellenfrei in $]\xi,b] \cap J$ ist. Aufgrund der Definition von W ist $\xi \notin W$, somit $W \subseteq [\omega,\xi[$, $\chi = \sup W \leq \xi < t_2$ und somit

$$\chi \in [\omega,t_2[.$$

Für jedes $x \in W$ sei o. E. $t(x)$ die kleinste Nullstelle von $u_2^+(.,x)$ in $]x,b] \cap J$, damit $x(t)$ eindeutig bestimmt und (für fest gedachtes x)

$$z := u_2^+(.,x) > 0 \text{ in }]x,t(x)[.$$

Für diese Nullstelle $t(x)$ wird jetzt die Abschätzung $t(x) < x_2$ mit einem Widerspruchsbeweis gezeigt. Dazu nimmt man $t(x) \geq x_2$ an und erschließt einen Widerspruch mittels Hilfssatz 4.4, 1, b) mit $c = t_2$, $d = x_2$, $t_0 = t(x) \geq x_2$. Die Voraussetzungen des Hilfssatzes sind erfüllt: $L \in K_I$ in $]t_2,t(x)[\subseteq]\omega,b] \cap J$, $u_2^+(t_2,x_2) = u_2(x_2,t_2) = 0$, $z(t(x)) = 0$ für $z := u_2^+(.,x)$ und wegen

$$x \leq \chi < t_2 < x_2 \leq t(x),$$

$z(t_2) \neq 0 = u_2^+(x_2,x_2)$ auch $[z] \neq [u_2^+(.,x_2)]$. Außerdem liegt für $\{t_2,x_2\}$ keine Doppeltangente ohne Doppelpunkt vor, da x_2 einfache Nullstelle von $u_2(.,t_2)$ ist und daher $\{t_2,x_2\}$ keine Doppeltangente liefert. Demzufolge besitzt z eine Nullstelle ξ in $]t_2,x_2[\subseteq]x,t(x)[$, im Widerspruch zur Nullstellenfreiheit von z in $]x,t(x)[$. Damit gilt

$$t(x) < x_2 \text{ für jedes } x \in W.$$

Mit dieser Abschätzung $t(x) \in]x,x_2[\subseteq [\omega,x_2[$ für die $x \in W$ kann jetzt analog zu Beweisteil a) von (4.11) (jetzt mit $u_2^+(.,.)$ statt $u_2(.,.)$) $\chi \in W$ und $\chi = \max W$ begründet werden: Dazu verwendet man die Stetigkeit von $u_2^+(.,.)$ in $J \times J$, die Diskonjugiertheit von (L^+) in einer Umgebung $[\chi-\varepsilon,\chi+\varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$) von χ und Folgen $s_n \in [\chi-\varepsilon_n,\chi] \cap W \longrightarrow \chi$ ($\varepsilon_n = \varepsilon/n$, $n \in \mathbb{N}$) und $t_n = t(s_n) \in [\chi+\varepsilon,x_2[$. Wegen der Beschränktheit der Folge t_n kann o. E. (ggf. Übergang zu konvergenter Teilfolge) angenommen werden, dass t_n gegen ein $\theta \in [\chi+\varepsilon,x_2] \subseteq]\chi,x_2]$ konvergiert. Demzufolge gilt

$$u_2^+(\theta,\chi) = 0 \text{ mit einem } \theta \in]\chi,x_2].$$

Da außerdem wegen $s_n \in W$ und $[\omega,s_n] \subseteq W$ ($n \in \mathbb{N}$) auch $[\omega,\chi[\subseteq W$ gilt, folgt $[\omega,\chi] \subseteq W$, insbesondere $\chi \in W$ und

$$W = [\omega,\chi].$$

Es wird nun bewiesen, dass für jedes $x \in W$ das zugehörige Kurvenparameterpaar $\{x,t(x)\}$ die Kurveneigenschaft (3.9) (Doppelpunkt und Doppeltangente) erfüllt. Wegen $L^+ \in K_{II}^+[\omega,b[$ und $u_2^+(t(x),x) = 0$ ($t(x) \in]x,x_2[\subseteq [\omega,b[$) ist

$$[u_2^+(.,x)] = [u_2^+(.,t(x))],$$

wegen $L \in K_I[\omega,b] \cap J$ und $u_2(x,t(x)) = u_2^+(t(x),x) = 0$ ($t(x) \in]x,x_2[\subseteq [\omega,b[$) ist

$$[u_2(.,x)] = [u_2(.,t(x))]$$

und somit insgesamt für $\{x,t(x)\}$ die Eigenschaft (3.9) erfüllt.

Als Nächstes wird nun für jedes $x \in W$ bewiesen, dass die Übereinstimmung $t(x) = \eta(x)$ gilt. Da mit einem reellen $\lambda > 0$ die Ungleichung

$$u_2^+(.,t(x)) = \lambda u_2^+(.,x) > 0 \text{ in }]x,t(x)[$$

und außerdem die Klassenzugehörigkeit $L^+ \in K_{II}^+$ in $[\omega,b[\supseteq [\omega,x_2[\supseteq [x,t(x)]$ erfüllt ist, folgt nach Satz 4.5, b, 2) die Diskonjugiertheit von (L) und (L^+) in jedem abgeschlossenen Intervall $[x',t(x)] \subseteq]x,t(x)]$ ($x' \in]x,t(x)[$), damit auch im halboffenen Intervall $]x,t(x)]$ und nach Satz 4.3 auch in $[x,t(x)[$. Da (L) in $[x,t(x)]$ nichtdiskonjugiert ist, folgt für jedes $x \in W = [\omega,\chi]$

$$t(x) = \eta(x)$$

und mit der oben für $\{x,t(x)\}$ bewiesenen Eigenschaft (3.9)

$$W = [\omega,\chi] \subseteq D_3.$$

Für alle $x \in W = [\omega,\chi]$ liegt für die Kurvenparameterpaare $\{x,\eta(x)\}$ die Kurveneigenschaft (3.9) vor, also die Selbstberührung der Kurve C längs des Parameterintervalls W. Es wird jetzt noch gezeigt, dass bei diesem Selbstberührungsintervall W eine Selbstdurchsetzung der Kurve C von innen nach außen gemäß der Bedingung (4.23), 1) mit $c_1 = \omega$ und $c_2 = \chi$ auftritt.

Als Erstes wird für die C-Selbstdurchsetzung von innen nach außen bewiesen, dass es zu jedem reellen $\varepsilon > 0$ Stellen

$$x' \in]\chi,\chi+\varepsilon[, \quad t' \in]\eta(\chi),\eta(\chi)+\varepsilon[$$

gibt, sodass t' eine einfache Nullstelle von $u_2(.,x')$ ist. Zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es wegen der Stetigkeit und strengen Monotonie von η in E ein $\delta \in]0,\varepsilon]$ mit

$$\eta(]\chi,\chi+\delta[) \subseteq]\eta(\chi),\eta(\chi)+\varepsilon[.$$

Wegen der Definition von χ als Supremum von W gibt es ein $x' \in]\chi,\chi+\delta[\subseteq]\chi,\chi+\varepsilon[$ mit

$$u_2^+(.,x') > 0 \text{ in }]x',b] \cap J.$$

Mit $t' := \eta(x')$ gilt $t' \in]\eta(\chi),\eta(\chi)+\varepsilon[$,

$$H^+(x') = u_2^+(\eta(x'),x') = u_2^+(t',x') \neq 0$$

und somit $x' \in A_1$. Nach der Minimalitätseigenschaft (4.7) ist dann $\eta(x') = z_{21}(x') < z_{21}^+(x')$ und $u_2(\eta(x'),x') = 0$. Dabei ist die Nullstelle $t' = \eta(x')$ von $u_2(.,x')$ keine zweifache Nullstelle, da sonst $\eta(x') = z_{21}(x') = z_{22}(x')$ und nach den Ungleichungen (4.10) $z_{21}^+(x') \leq z_{22}(x') = \eta(x')$ wäre, im Widerspruch zu $\eta(x') < z_{21}^+(x')$. Daher ist

$$t' \in]\eta(\chi),\eta(\chi)+\varepsilon[\text{ eine einfache Nullstelle von } u_2(.,x'),$$
$$x' \in]\chi,\chi+\varepsilon[,$$

und mit $c_2 = \chi$ die zweite Bedingung der Selbstdurchsetzungsart (4.23), 1) erfüllt.

Als Zweites wird für die C-Selbstdurchsetzung von innen nach außen bewiesen, dass es zu jedem reellen $\varepsilon > 0$ Stellen

$$x' \in]\omega-\varepsilon,\omega[, \quad t' \in]\eta(\omega)-\varepsilon,\eta(\omega)[$$

gibt, sodass x' eine einfache Nullstelle von $u_2(.,t')$ ist. Es sei α das Supremum der Menge

$$S := \{x \in J : x < \rho \text{ ist einfache Nullstelle von } u_2(.,t) \text{ für ein } t = t(x) \in]x,\rho]\}.$$

Da $x_1 \in T$ und $x_1 \leq \sup T = \omega < \rho$ ist, gilt auch $x_1 \in S$ und $S \neq \emptyset$. Es ist $S \subseteq [a,\rho[\cap J$, $S = T \cap [a,\rho[\subseteq T$ und

$$\alpha = \sup S \leq \sup T = \omega.$$

Es wird jetzt $\alpha = \omega$ gezeigt. Für einen Widerspruchsbeweis nimmt man dazu $\alpha < \omega$ an. Wegen der Definition von $\omega = \sup T$ gibt es dann ein

$$x \in]\alpha,\omega] \cap T$$

und dazu ein

$$t = t(x) \in]x,\rho],$$

sodass x eine einfache Nullstelle von $y := u_2(.,t)$ ist:

$$y(x) = 0.$$

O. E. sei (nach Zusatz zu Satz 2.4) x so nahe bei ω, dass (L) in $[x,\omega]$ diskonjugiert ist. Demzufolge ist $t > \omega$, also

$$t \in \,]\omega,\rho].$$

Um zu einen Widerspruch zu gelangen, wird nun gezeigt, dass die Voraussetzungen von Hilfssatz 4.4, a, 1) mit $c = \omega$, $d = \rho$, $t_0 = x < \omega$ erfüllt sind: Da y in $[x,\omega]$ die einfache Nullstelle x und $u_2(.,\omega)$ in $[x,\omega]$ die einzige und zweifache Nullstelle ω besitzt, gilt $x < \omega$ und $[y] \neq [u_2(.,\omega)]$. Nach der Definition von $\alpha = \sup S$ ist jedes $x \in J$ mit $\alpha < x < \rho$ keine einfache Nullstelle einer Lösung $u_2(.,t)$ mit $t > x$, $t \in J$, da ansonsten $x \in S$ wäre, im Widerspruch zu $x > \alpha$. Also ist $L \in K_I$ in $]\alpha,\rho[\supseteq]x,\rho[$. Außerdem gilt $u_2(\rho,\omega) = u_2^+(\omega,\rho) = 0$, da oben für $\{\omega,\rho\}$ ein Doppelpunkt $[u_2^+(.,\omega)] = [u_2^+(.,\rho)]$ nachgewiesen wurde. Mit dem Hilfssatz 4.4 folgt dann, dass y eine Nullstelle ξ in $]\omega,\rho[$ besitzt. Mit einer Fallunterscheidung gelangt man schließlich zum Widerspruch zur obigen Annahme.

Falls $\xi \in \,]\omega,\rho[$ eine zweifache Nullstelle von $y = u_2(.,t)$ ist, erhält man zusammen mit der einfachen Nullstelle $x \in \,]\alpha,\omega[$ einen Widerspruch zu $L \in K_I]\alpha,\rho[$. Falls $\xi \in \,]\omega,\rho[$ eine einfache Nullstelle von $y = u_2(.,t)$, $t \in \,]\omega,\rho]$ (wurde oben gezeigt), ist, folgt zunächst $\xi \neq t$. Falls $\xi < t$ ist, erhält man mit der einfachen Nullstelle $\xi \in \,]\omega,\rho[$ und der zweifachen Nullstelle $t \in \,]\omega,\rho]$ einen Widerspruch zu $L \in K_I$ in $]\alpha,\rho[\supseteq]\omega,\rho[$. Falls $\xi > t$ ist, erhält man mit der Nullstelle $\xi \in \,]\omega,\rho[$ und der zweifachen Nullstelle $t \in \,]\omega,\rho]$ einen Widerspruch zur Diskonjugiertheit von (L) in $]\omega,\rho] =]\omega,\eta(\omega)]$, die sich nach Satz 4.3 aus der Diskonjugiertheit in $[\omega,\eta(\omega)[$ ergibt. Es kann also der Fall $\alpha < \omega$ nicht eintreten, sodass $\alpha = \omega$ bewiesen ist.

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben und wegen $\omega < \rho$ o. E. noch $\omega < \rho - \varepsilon$. Wegen $\eta(\omega) = \rho$, der Stetigkeit und strengen Monotonie von η in E gibt es ein $\delta \in \,]0,\varepsilon]$ mit

$$\eta(]\omega\text{-}\delta,\omega[) \subseteq \,]\eta(\omega)\text{-}\varepsilon,\eta(\omega)[= \,]\rho\text{-}\varepsilon,\rho[.$$

Wegen $\omega = \alpha = \sup S$ gibt es ein $x' \in \,]\omega\text{-}\delta,\omega] \cap S \subseteq \,]\omega\text{-}\varepsilon,\omega] \cap S$ und dazu ein $t' = t(x') \in]x',\rho]$, sodass

x' eine einfache Nullstelle von $u_2(.,t')$ ist.

Wegen der Diskonjugiertheit von (L) in $[x',\eta(x')[$ ist

$$t' \geq \eta(x') > \eta(\omega) - \varepsilon = \rho - \varepsilon,$$

also $t' \in \,]\rho\text{-}\varepsilon,\rho]$. Weiter ist

$$t' \neq \rho,$$

da sonst bei $t' = \rho$ wegen der im Fall II vorliegenden Doppeltangente $\{\omega,\rho\}$ die einfache Nullstelle x' von $u_2(.,t')$ auch eine einfache Nullstelle von $u_2(.,\omega)$ wäre,

$$u_2(x',\omega) = \lambda u_2(x',\rho) = \lambda u_2(x',t') = 0 \quad (\lambda \neq 0),$$

und demnach $u_2(.,\omega)$ die einfache Nullstelle x' und die zweifache Nullstelle ω besitzt, was aber wegen der Wahl $\omega < \rho - \varepsilon$ im Widerspruch zur Diskonjugiertheit in $[x',\eta(x')[\supseteq [x',\rho\text{-}\varepsilon] \supseteq [x',\omega]$ steht. Somit gilt insgesamt

$$t' \in \,]\rho\text{-}\varepsilon,\rho[.$$

Außerdem gilt

$$x' \neq \omega,$$

da sonst $x' = \omega$ eine Nullstelle von $u_2(.,t')$, $t' \in \,]x',\rho] =]\omega,\rho[$, ist, was im Widerspruch zur Diskonjugiertheit in $[\omega,\eta(\omega)[= [\omega,\rho[$ steht. Insgesamt ist dann

$x' \in \,]\omega\text{-}\varepsilon,\omega[$ eine einfache Nullstelle von $u_2(.,t')$,

$t' \in \,]\rho\text{-}\varepsilon,\rho[$.

Damit ist mit x' und t' die erste Bedingung der Selbstdurchsetzungsart (4.23), 1) ($c_1 = \omega$) von innen nach außen bewiesen. Ingesamt sind beide Bedingungen von (4.23), 1) ($c_1 = \omega$, $c_2 = \chi$) für eine Selbstdurchsetzung erfüllt und daher $L \notin K(J)$ gezeigt. □

Literaturverzeichnis

Ahmad S. (1974), Oscillation properties of third order linear differential equations and their adjoints. J. Math. Phys. Sci. 8, 291–298, 248; MR # 13716.

Ahmad S., Benharbit A. (1975), Some oscillation properties of third order linear differential equations. Ann. Polon. Math. 31, 15–21; MR 52 # 6097.

Ahmad S., Lazer A.C. (1969), On the oscillatory behavior of a class of linear third order differential equations. J. Math. Anal. Appl. 28, 681–689; MR 40 # 1646.

Azbelev N.V., Caljuk Z.B. (1964), On the question of distribution of zeros of solutions of linear differential equations of the third order. Amer. Math. Soc. Transl. II Serie 42, 233–245; MR 22 # 12266.

Barrett J.H. (1964), Canonical forms for third-order linear differential equations. Ann. Mat. Pura Appl. 65, 253–274.

Barrett J.H. (1969), Oscillation theory of ordinary linear differential equations. Advances in Math. 3, 415–509; MR 41 # 2113.

Beesack P.R. (1956), Nonoscillation and disconjugacy in the complex domain. Trans. Amer. Soc. 81, 211–242.

Birkhoff G.D. (1911), On the solutions of ordinary linear homogeneous differential equations of the third order. Ann. of Math. 12, 103–127.

Bol G. (1950), Projektive Differentialgeometrie, 1. Teil, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

Bulgakov A.I., Maksimov V.P., Martynyuk A.A. and Tonkov E.L. (2009), Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 9 (4), 327–332, Personage in Science N.V. Azbelev; http://www.e-ndst.kiev.ua/v9n4/0(29).pdf. Zugegriffen am 08.11.2019.

Coppel W.A. (1971), Disconjugacy, Lecture Notes in Mathematics 220. Springer, Berlin Heidelberg New York.

Deiser O. (2013), Analysis 1, Mathematik für das Lehramt, 2. Auflage, Springer, Berlin Heidelberg. http://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=analysis1_3_2_Z3. Zugegriffen am 04.08.2020.

Deiser O. (2014), Analysis 2, Mathematik für das Lehramt, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg. http://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=analysis2. Zugegriffen am 23.08.2020.

Divakova A.Ya. (1970), Nonoscillatory solutions of third order differential equations. Diff. Equations 6, 1149–1152; MR 43 # 6513.

Dolan J.M. (1970), On the relationship between the oscillatory behavior of a linear third-order equation and its adjoint. J. Differential Equations 7, 367–388; MR 41 # 568.

Dolan J.M., Klaasen G.A. (1975a), Strongly oscillatory and nonoscillatory subspaces of linear equations. Canad. J. Math. 27, 106–110; MR 50 # 10433.

Dolan J.M., Klaasen G.A. (1975b), Dominance of n-th order equations. Rocky Mountain J. Math. 5, 263–270.

Erwe F. (1967), Differential- und Integralrechnung I, Bibliographisches Institut, Mannheim.

Etgen G.J., Shih C.D. (1973a), Disconjugacy and oscillation of third order differential equations with nonnegative coefficients. Proc. Amer. Math. Soc. 38, 577–582; MR 47 # 8971.

Etgen G.J., Shih C.D. (1973b), On the oscillation of certain third order linear equations. Proc. Amer. Math. Soc. 41, 151–155; MR 47 # 8972.

Etgen G.J., Shih C.D. (1975), Conditions for the nonoscillation of third order differential equations with nonnegative coefficients. Siam J. Math. Anal. Vol.6, No.1, 1–8; MR 50 # 10434.

Grauert H., Fischer W. (1968), Differential- und Integralrechnung II, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

Grauert H., Lieb I. (1967), Differential- und Integralrechnung I, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

Greguš M. (1963), Über die asymptotischen Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 63, 1–10; MR 29 # 4958.

Guggenheimer H. (1972), Geometric theory of differential equations. IV: Two-point boundary value problems of linear equations. Rendiconti di Matematica (Roma) (6) 5, 237–250.

Guggenheimer H. (1976), Distribution of zeros and limit behavior of solutions of differential equations. Proc. Amer. Math. Soc. 61, 275–279.

Hanan M. (1961), Oscillation criteria for third-order linear differential equations. Pac. J. Math. 11, 919–944; MR 26 # 2695.

Herold H. (1971), Über die Nullstellen der Ableitung der Lösungen linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung. Math. Z. 119, 290–312; MR 43 # 6515.

Herold H. (1972), Nullstellen bei Lösungen linearer Differentialgleichungen 3. Ordnung mit komplexwertigen Koeffizienten. Archiv der Math. 23, 192–197.

Herold H. (1975), Differentialgleichungen im Komplexen. Studia Mathematica. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht.

Hildebrandt S. (2006), Analysis 1, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2. Auflage.

Hinton D.B. (1966), Disconjugate properties of a system of differential equations. J. Differential Equations 2, 420–437.

Jones G.D. (1973a), An asymptotic property of solutions of $y''' + py' + qy = 0$. Pac. J. Math. 47, 135–138; MR 48 # 4410.

Jones G.D. (1973b), Oscillation properties of third order differential equations. Rocky Mountain J. Math. 3, 507–513; MR 50 # 7669.

Jones G.D. (1974a), Oscillatory behavior of third order differential equations. Proc. Amer. Math. Soc. 43, 133–136; MR 48 # 11666.

Jones G.D. (1974b), Properties of solutions of a class of third-order differential equations. J. Math. Anal. Appl. 48, 165–169; MR 50 # 5095.

Jones G.D. (1976), Oscillation criteria for third order differential equations. Siam J. Math. Anal. 7, no.1, 13–15.

Kim W.J. (1970), Oscillatory properties of linear third-order differential equations. Proc. Amer. Math. Soc. 26, 286–293; MR 41 # 8758.

Köhler G. (2006), Analysis, Heldermann Verlag, Lemgo.

Kowalsky H.-J. (1967), Lineare Algebra, Walter de Gruyter Verlag, Berlin, 3. Auflage.

Lazer A.C. (1966), The behavior of solutions of the differential equation $y''' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Pac. J. Math. 17, 435–466; MR 33 # 1552.

Lexikon der Mathematik (2000–2003), Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin, Band 1–6.

Mangoldt H.v., Knopp K. (1971), Band 1, Einführung in die Höhere Mathematik, Hirzel Verlag, Stuttgart, 14. Auflage.

Mangoldt H.v., Knopp K. (1974), Band 2, Einführung in die Höhere Mathematik, Hirzel Verlag, Stuttgart, 14. Auflage.

Mangoldt H.v., Knopp K. (1975), Band 3, Einführung in die Höhere Mathematik, Hirzel Verlag, Stuttgart, 14. Auflage.

Marini M., Mawhin J. (2014), Ricordo di Gaetano Villari, https://www.researchgate.net/publication/280553562_Ricordo_di_Gaetano_Villari. Zugegriffen am 07.11.2019.

Neuman F. (1972), Geometrical approach to linear differential equations of the n-th order. Rendiconti di Matematica (Roma) 5, 579–602.

Neuman F. (1974), On two problems on oscillations of linear differential equations of the third order. J. Differential Equations 15, 589–596; MR 49 # 7514.

Reynolds C.N. (1921), On the zeros of homogeneous linear differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. 22, 220–229.

Schlesinger L. (1895), Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, 1. Band, Teubner, Leipzig.

Švec M. (1957), Sur une propriété des intégrales de l' équation $y^{(n)} + Q(x)y = 0$, $n = 3, 4$. Czechoslovak Math. J. 7 (82), 450–462.

Švec M. (1965a), Some remarks on a third order linear differential equation (Russian). Czechoslovak Math. J. 15 (90), 42–49.

Švec M. (1965b), Einige asymptotische und oszillatorische Eigenschaften der Differentialgleichung $y''' + A(x)y' + B(x)y = 0$. Czechoslovak Math. J. 15 (90), 378–393; MR 32 # 2656.

Swanson C.A. (1968), Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations. Academic Press, New York and London.

Villari G. (1958), Sul carattera oscillatorio delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari omogenee del terzo ordine. Boll. Un. Mat. Ital. (3) 13, 73–78.

Wilczynski E.J. (1905), Projective differential geometry of curves and ruled surfaces, Teubner, Leipzig.

Wintner A. (1951), On the non-existence of conjugate points, Amer. J. Math 73, 368–380.

Sachverzeichnis

A

Ableitung
  linksseitige 148, 152
  rechtsseitige 150, 154
Ableitungen
  verallgemeinerte 5, 25
Adjungierte
  klassische 5
Ahmad S. 23, 29, 47, 50
Allgemeiner Trennungssatz 81, 82
Anfangsbedingungen einer Lösung 26
Anfangswerte einer Lösung 38
Anfangswertproblem 142
Anzahl der Nullstellen 78, 80, 81, 82, 87
Azbelev N.V. 39, 107, 120, 121, 124

B

Bachmann P. 11
Barrett J.H. 5, 7, 16, 25, 26, 51, 101, 107, 121, 122, 124, 125, 128, 130
Basis, kanonische 35
Beesack P.R. 11, 23
begleitendes Dreieck 57, 62
  von Bol 58
Beispiel 37, 40, 46, 50, 114, 156
  für geometrischen Beweis 76
Benharbit A. 29
Bernoulli J. 56, 85, 90, 102, 103
Beweis, geometrischer 76
Bilinearform 5, 26
Birkhoff G.D. 6, 7, 28, 29, 37, 39, 53, 55, 56, 59, 63, 81, 82, 83, 110, 114, 116, 159
Bol G. 53, 55, 58
Bolzano B. 48, 106, 125
Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft 108
Borel E. 108
Bulgakov A.I. 39

C

Caljuk Z.B. 39, 107, 120, 121, 124
Charakterisierung der nichtoszillatorischen Lösungen 28
Coppel W.A. 12, 14, 16, 28, 51, 52, 82, 91, 101, 107, 109, 114, 131
Cramer G. 36
Cramersche Regel 36, 38

D

Deiser O. 137, 148
Determinantenmethode 38
Differentialgleichung
  adjungierte 5, 25
  diskonjugierte 14, 40
  homogene lineare 1. Ordnung 35
  homogene lineare 2. Ordnung 12, 15, 19, 22, 42
  homogene lineare 3. Ordnung 5, 11, 25
  inhomogene lineare 2. Ordnung 76
  nichtdiskonjugierte 91, 97, 100
  nichtoszillatorische 40
  oszillatorische 40
  schwach oszillatorische 40
  stark oszillatorische 40
Differentialoperator, klassischer adjungierter 25
Differenzierbarkeit 138
  linksseitige 148, 152
  rechtsseitige 150, 154
Dimensionssatz für Unterräume 45
direkte Summe 44
diskonjugierte Differentialgleichung 14, 40, 91, 103
Diskonjugiertheit 7, 15, 69, 82
  an den Intervallgrenzen 47, 51
  lokale 51
Divakova A.Ya. 5, 11, 21
Dolan J.M. 27, 28, 39, 40, 46, 47, 112, 113
Doppelkegel der nichtoszillatorischen Lösungen 6, 47
Doppelpunkt 7, 61, 62, 64
Doppeltangente 7, 61, 62, 64
Dreieck, begleitendes 57, 62
duales Raumpaar 5
Dualraum 58

E

Ebene
  euklidische 54
  projektive 53
Eigenschaft
  asymptotische 47
  D 15
  D^- 15
  D^+ 15
Eigenschaften
  der Klassen 28, 73, 101
eigentlicher Definitionsbereich 131
Einheitspunkt 58
Einheitssphäre 53
Endlichkeitsbereich 131
Epsilon-Delta-Charakterisierung 137
Erwe F. 120, 137, 142, 143, 148
Etgen G.J. 23, 24, 28, 114
euklidische Ebene 54
euklidische Norm 113
Existenz
  einer Nullstelle 82, 87, 88, 90, 100, 116
  einer nullstellenfreien Lösung 80, 90
  von monotonen Lösungen 28
  von nullstellenfreien Lösungen 28
Existenz- und Einzigkeitssatz 32, 34, 35, 38
Extremalsatz von Weierstraß 101, 102
Extremum, lokales 102

F

Fermat P. 102
Ferngerade 54, 56
Fernpunkt 56
Fischer W. 142, 143
Fixpunktproblem 142
folgenkompakt 108
Formel von Liouville 35
Fréchet M.R. 108
Fundamentalsystem 6, 35
  adjungiertes 6, 37

Markov- 52, 91
spezielles 28, 37, 62
Funktion
implizite 143
monoton steigende 133
stetig differenzierbare 143
stetige 143
streng monoton steigende 133

G

gemischtes Produkt 36
General Separation Theorem 81
Gerade in der projektiven Ebene 53
Geradenkoordinaten, homogene 6, 53, 58
glatte Kurve 54
Gleichungssystem, lineares 36, 38
Grauert H. 137, 142, 143, 148
Greensche Transformierte, modifizierte 23
Greguš M. 24, 50
Grundpunkte 58
Guggenheimer H. 53, 143

H

Hanan M. 21, 23, 28, 29, 103, 112
Häufungspunkt 114, 122, 155, 173
Heine H.E. 108
Heine-Borel-Überdeckungseigenschaft 108, 109
Herold H. 5, 8, 11, 12, 19, 23
Hilfsformeln 16
Hilfspunkte 119
Hinton D.B. 5, 25
homogene Koordinaten
einer Geraden 6
eines Punktes 6, 53
Hyperebenenkoordinaten 6, 53, 58

I

Infimum 120, 121
Integral, unbestimmtes 13
Integral, uneigentliches 13
Integralkurve 6, 53
Integralungleichung 11, 14
Integration, partielle 16
Intervall 5, 11, 25, 163, 168, 175
Intervall, ausgeartetes 133, 137
Intervall, echtes 137
Intervall, reguläres
erster Art 29
zweiter Art 29
Intervalleigenschaft 132
Inzidenz in $\mathbb{P}^2$ 59
Isomorphie 58

J

Jones G.D. 28, 50, 112
j-te Ableitung
beschränkte 24
mit Grenzwert Null 24
ohne Grenzwert 24
quadratisch integrierbare 24

K

kanonische Basis 53
kartesische Koordinaten 54
Kegel, konvexer linearer 47
Kettenregel für die Differentiation 143
Kim W.J. 23, 28
Klaasen G.A. 28, 47, 112
Klasse
C_{II}^k 28
C_{I}^k 28
D 40
K 158, 159
K_{I} 28
K_{II} 28
von Differentialgleichungen 7, 27, 28, 67
Knopp K. 13, 142, 143, 148
Koeffizienten der linearen Differentialgleichung 3. Ordnung 57
Köhler G. 137
Komplement, orthogonales 37
Konuskombination 47
Koordinaten
homogene 6, 53
kartesische 54, 63
projektive 53, 55
Koordinatensystem, projektives 58
Kowalsky H.-J. 5, 27, 37, 45, 58
Kreuzprodukt 35
Kronecker L. 26
Kronecker-Symbol 26
Krümmung der Integralkurve 55
Kurvenstück 80
geschlossenes 86

L

l'Hospital G.F.A. 56, 85, 90, 102, 103, 105
Lagrange J.L. 5, 25, 38
Lagrangesche Identität 38
Landau E. 11
Landau-Symbol 11
Lazer A.C. 23, 24, 28, 50, 112
Leibniz G. W. 36
Lexikon der Mathematik 132
Lieb I. 137, 148
lineare Hülle 38, 94
Liouville J. 35
Formel von 35
Lösung
der Differentialgleichung 11
monotone 28
nichtnegative 7
nichtoszillatorische 7, 28, 40, 111
nullstellenfreie 7, 28, 111
oszillatorische 40
vorzeichenwechselfreie 46
Lösungen
linear abhängige 32, 34
linear unabhängige 38, 81
orthogonale 27, 58
Lösungsraum der Differentialgleichung 25

M

Majorantenkriterium 13
Mangoldt H.v. 13, 142, 143, 148
Markov A.A. 52
Markov-Fundamentalsystem 52, 82, 91, 114
Mathematica, Softwaresystem von Wolfram Research 158
Mathematika, Softwaresystem von Wolfram Research 156
Menge

der nichtoszillatorischen Lösungen 46, 111
der nullstellenfreien Lösungen 111
der oszillatorischen Lösungen 46
zusammenhängende 48
Mittelwertsatz der Differentialrechnung 148, 150, 152, 154
Monotonie 133
strenge 133
Multiplikationstabelle 36, 57

N

Neuman F. 40, 50, 53, 59, 63, 112
Nichtdiskonjugiertheit 90, 91, 97, 100
nichtoszillatorische Lösung 40
nichtoszillatorischer Unterraum 40
Normalenvektor 53
Nullstelle
einfache 28, 30, 66
gemeinsame 84
zweifache 66, 84
Nullstellenanzahl 78, 80, 81
Nullstellenfreiheit 84, 90
Nullstellensatz 48, 106

O

orthogonale Lösungen 6, 27, 58
orthogonales Komplement 37
Ostrogradski M.W. 35
oszillatorische Lösung 40
oszillatorischer Unterraum 40

P

Parameterdarstellung einer Kurve 56
Produkt, skalares 5, 6
Produktsatz für Determinanten 36, 43
projektive Ebene 6, 53
projektive Koordinaten 58
eines Punktes 53, 55
Punkt
in der projektiven Ebene 53
isolierter 155
Punkt, erster (rechter) konjugierter 8, 91, 97, 100, 122
Punkt, erster linker konjugierter 122
Punktkoordinaten, homogene 6, 53

R

Raumpaar 26
duales 5, 27
Regel von de l'Hospital 56, 85, 90, 102, 103, 105
reguläres Intervall 159
erster Art 29
zweiter Art 29
Relativtopologie 140, 155
Reynolds C.N. 53, 55, 81
Riccati J.F. 11
Riccatische Differentialgleichung 11
Riesz F. 58
Rieszscher Darstellungssatz 58
Rolle M. 41, 43, 46, 101

S

Satz
Extremal- 102
vom Minimum und Maximum 102
von Bolzano-Weierstraß 112, 114, 125
von der impliziten Funktion 142, 143, 144, 146, 147, 149, 151, 153, 154
von der Stetigkeit der Umkehrfunktion 134, 136
von Fermat 101
von Heine-Borel 108
von Rolle 41, 43, 46, 101, 114
Schlesinger L. 37
Schnittpunkt 65, 66
zweier Geraden 59
Schreibweise 17
schwach oszillatorischer Unterraum 40
Selbstberührung 7, 64, 65, 84, 159
Selbstdurchsetzung 159
Selbstschneidung, echte 64
Selbstschneidungspunkt 65, 66
Selbsttreffen 64
Selbsttreffpunkt 65
Shih C.D. 23, 24, 28, 114
skalares Produkt 6
Skalarprodukt 27
kanonisches 35
natürliches 58
Spatprodukt 36
Spiralform
der Integralkurve mit Selbstberührungen 73
der Integralkurve ohne Selbstberührung 69
nach außen fortlaufend 69
nach innen fortlaufend 69
Spurtopologie 140
Stammfunktion 13
Standardbasis 35, 53
Standardskalarprodukt 35
stark oszillatorischer Unterraum 40
Stetigkeit 134
Stetigkeit der Lösung 30
Sturm J.C.F. 43
Sturmscher Trennungssatz 43, 81, 113
Summe, direkte 44
Supremum 120, 122
Švec M. 28, 50, 107, 114
Symbol

T

Tangente der Integralkurve 54
Tangentenschar 80
Trennung der Nullstellen 21, 28, 43, 77
Trennungssatz, allgemeiner 82

U

überdeckungskompakt 108
Überdeckungssatz von Heine-Borel 108
Umkehrfunktion 134
Unterraum
nichtoszillatorischer 40
oszillatorischer 40
schwach oszillatorischer 40
stark oszillatorischer 7, 40

V

Vektorprodukt 35
Verbindungsgerade zweier Punkte 59
Vergleichssatz 28
Villari G. 23, 28
Vollständigkeitsaxiom 120
Vorzeichenwechsel der Krümmung 56

Vorzeichenwechselstelle 30, 157

W

Weierstraß K.T.W. 48, 102, 125
Wilczynski E.J. 6, 53, 55
Wintner A. 40
Wroński J.H. 31
Wronski-Determinante 31, 32, 35, 43, 56, 101, 119, 157
  verallgemeinerte 34, 35

Z

Zwischenwertsatz 48, 49, 106