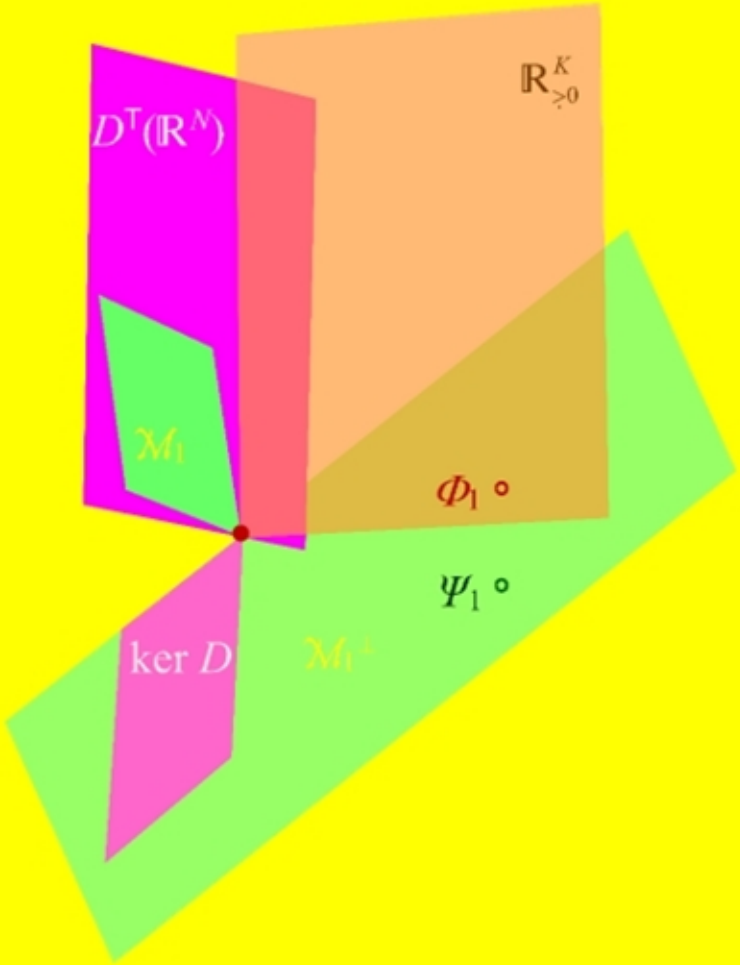
Rudolf Pleier

# Diskrete stochastische Finanzmathematik

Zweite Auflage



Der Autor Dr. Dr. Rudolf Pleier ist 1948 in Etzenricht in der Oberpfalz (Bayern) geboren. In den 1970er Jahren studierte er Mathematik und Physik an der Universität Würzburg mit den Abschlüssen Diplom und Promotion. Zu seiner Existenzgründung musste er unter verschiedenen angebotenen Finanzierungen mit einer geeigneten Methode die für ihn optimale auswählen. Inspiriert durch dieses Schlüsselerlebnis befasst er sich seit vielen Jahren mit der Finanzmathematik und insbesondere mit der Bewertung von Zahlungsströmen.

Rudolf Pleier

# Diskrete stochastische Finanzmathematik

Zweite Auflage

© 2023 Dr. Dr. Rudolf Pleier

ISBN Softcover: 978-3-347-98162-1
ISBN E-Book: 978-3-347-98163-8

Druck und Distribution im Auftrag des Autors:
tredition GmbH, Heinz-Beusen-Stieg 5, 22926 Ahrensburg, Germany

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Für die Inhalte ist der Autor verantwortlich. Jede Verwertung ist ohne seine Zustimmung unzulässig. Die Publikation und Verbreitung erfolgen im Auftrag des Autors, zu erreichen unter: tredition GmbH, Abteilung "Impressumservice", Heinz-Beusen-Stieg 5, 22926 Ahrensburg, Deutschland.

Bibliografische Informationen der Deutschen Natoonalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http:// dnb.d-nb.de abrufbar.

# Vorwort

Die Beurteilung einer Zahlung in der Zukunft oder einer aus mehreren Zahlungen zu verschiedenen Zeitpunkten bestehenden Zahlungsfolge (eines Zahlungsstroms) und der Vergleich von alternativen Zahlungsströmen ist ein zentrales Thema der Finanzmathematik. In der Praxis sind zukünftige Zahlungen meist noch unsicher und eventuell auch gar nicht genau bekannt. Im Gegensatz zur klassischen (deterministischen) Finanzmathematik mit ihren Themen Abschreibung, Zins-, Renten-, Tilgungs-, Kurs- und Rendite-, Effektivzins- und Investitionsrechnung erfasst die moderne stochastische Finanzmathematik auch die Zufallsabhängigkeit der Zahlungsströme mit deren Beschreibung als stochastische Prozesse.

Da im Zeitraum zwischen einer Produktionsentscheidung und der Fertigstellung bzw. der Verteilung der Waren unvorhergesehene Umstände eintreten und insbesondere die Preise sich ändern können, sind Landwirte, Hersteller und Händler gewissen Risiken ausgesetzt. Es wurden daher als spezielle Finanzinstrumente verschiedene Derivate entwickelt zur Sicherstellung der Versorgung mit Rohstoffen und Waren, zur Erleichterung des Handels, zur Absicherung gegen Risiken, aber auch als Finanzierungsquelle und zur Spekulation auf Gewinn.

Der in einem Derivat[1] (derivativen Finanzinstrument, einer Finanzinnovation) vertraglich festgelegte zustandsabhängige Zahlungsanspruch (Zahlungsprofil, englisch: claim, contingent claim für „bedingte Forderung“, spezieller derivative asset) wird aus einem oder mehreren zukünftigen Ereignissen bzw. spezieller von anderen zugrunde gelegten Finanzprodukten (Basiswert, Basisobjekt, englisch: underlying) abgeleitet. Basiswerte können dabei verschiedene Vermögenswerte sein wie beispielsweise Rohstoffe (Getreide, Gold, Öl, Gas usw.), Handelswaren, Wertpapiere (Anleihen, Aktien), Devisen (Währungen, Wechselkurse), Indizes (Aktienindizes wie der S&P 500, Dax, Dow Jones usw.), Zinssätze, das Wetter und auch andere Derivate. Ein Derivat als bedingtes bzw. einseitig bindendes Termingeschäft bzw. Option gibt dem Inhaber das Recht (aber nicht die Verpflichtung), zu einem bei Vertragsabschluss vereinbarten Preis einen Basiswert zu einem zukünftigen Zeitpunkt oder innerhalb eines zukünftigen Zeitraums zu kaufen (Kauf- oder Call-Option) oder zu verkaufen (Verkaufs- oder Put-Option). Ein Derivat als unbedingtes bzw. zweiseitig bindendes Termingeschäft (Forward und Future) gibt dem Inhaber die Verpflichtung, zu einem bei Vertragsabschluss festgelegten Preis einen Basiswert zu einem zukünftigen Zeitpunkt zu kaufen oder zu verkaufen. Ebenfalls ein zweiseitig bindendes Termingeschäft ist ein Swap, bei dem ganze Zahlungsströme getauscht werden. Derivate werden unterschiedlich an der Börse oder außerbörslich (Over-the-Counter, OTC) gehandelt.

Aufzeichnungen über Derivate gibt es schon aus der Zeit vor zirka 4000 Jahren. Nachfolgend werden einige Beispiele zur Geschichte der Derivate[2] angeführt. So wird im 48. Gesetz von insgesamt 282 Gesetzen des Codex von Hammurapi[3] Folgendes geregelt: „Ein Landwirt, der auf seinem Grundstück eine Hypothek hat, ist im Falle einer Missernte von der jährlichen Zinszahlung befreit.“ Nach Whaley (2006) ist dies eine der ersten Beschreibungen eines De-

[1] Das Wort Derivat kommt vom lateinischen derivare für ableiten.

[2] Literatur zur Geschichte der Derivate: Swan (2000), Whaley (2006), Weber (2008), Kummer u. Pauletto (2012).

[3] Der Text des Codex Hammurapi wurde in altbabylonischer Keilschrift auf einer Diorit-Stele im 20. Regierungsjahr des babylonischen Königs Hammurapi erstellt, dessen Regierungszeit etwa 1792 bis 1750 v. Chr. war. Teile des Textes sind auch noch durch einige Tontafeln bekannt.

rivats, das als eine All-or-Nothing-Put-Option interpretiert werden kann. Außerdem wurden Handelsverträge der Kaufleute in Keilschrift auf Tontafeln schriftlich fixiert, darunter auch Vereinbarungen über die zukünftige Lieferung von Getreide oder anderen Waren. So steht auf einer Tontafel aus dem Jahr 1809 v. Chr., dass der Kaufmann Abuwaqar vom Händler Blanumamhe sechs Schekel Silber leiht und diese Schuld nach sechs Monaten mit Sesamsamen zum aktuellen Kurs zurückzahlt. Es wird hierbei also ein Silberdarlehen mit einem Terminverkauf von Sesamsamen verknüpft.

Über ein vom griechischen Philosophen, Mathematiker und Astronomen Thales von Milet (ca. 624 – ca. 544 v. Chr.) verwendetes Derivat erzählt der griechische Philosoph und Universalgelehrte Aristoteles (384–322 v. Chr.) in seiner Abhandlung „Politika“ (ca. 335 v. Chr.). Thales strebte zwar als Philosoph nicht nach Reichtum, wollte aber dennoch zeigen, dass es Philosophen leicht falle reich zu werden. Er sah aufgrund seiner metereologischen Beobachtungen eine große Olivenernte voraus und vereinbarte daher mit den Besitzern von Olivenpressen in Milet und Chios, die Pressen zur Erntezeit für eine geringe Gebühr zu mieten. Als zur Erntezeit tatsächlich ein großer Bedarf an Pressen auftrat, hat Thales sein Nutzungsrecht mit einem Aufschlag weiterverkauft und dabei einen großen Gewinn erzielt. Nach Whaley (2006) hat Thales eine Call-Option erworben und diese dann zum Zeitpunkt der Ernte wieder verkauft.

Zur Erleichterung des Handels wurden auch im Mittelalter Derivate eingesetzt. Schon ab dem 10. Jahrhundert schlossen italienische Kaufleute sogenannte Commendas ab. Diese sind kommerziale Partnerschaftsverträge für Land- und Seeunternehmen, bei denen der eine Partner das Geld bereitstellte und der andere Partner die Handelsmission durchführte, die also insgesamt Warentermingeschäfte darstellten. Ein weiteres Beispiel sind die Monti-Aktien von italienischen Stadtstaaten für die Beteiligung an künftigen Staatseinnahmen. Diese konnten gehandelt werden und dienten auch als Zahlungsmittel für Waren und Dienstleistungen. Außerdem wurde ab 1207 in Palermo der sogenannte Wechsel als Tauschmittel im Fernhandel verwendet, bei dem vereinbart wird, einen bestimmten Geldbetrag in einer anderen Währung an einem anderen Ort und zu einem späteren Zeitpunkt zu zahlen.

Nach dem Umzug der Amsterdamer Börse in den neu geschaffenen Börsenkomplex im Jahr 1611 wurden hier neben Derivaten auf Waren das erste Mal auch Derivate auf Wertpapiere wie Anleihen und Aktien gehandelt. In den Jahren 1636–1637 kam es beim Handel mit Termin- und Optionskontrakten auf Tulpenzwiebel in Holland zur ersten dokumentierten Spekulationsblase, der sogenannten Tulpenmanie. Im Jahr 1697 wurde der erste Future-Handel auf der Dojima-Reisbörse auf der Flussinsel Dojima in der japanischen Stadt Osaka eingeführt. Im Jahr 1728 wurde der erste bekannte Optionsschein in Verbindung mit einer Optionsanleihe herausgegeben, und zwar von der Kaiserlichen Ostindischen Kompanie in den Österreichischen Niederlanden. Der erste deutsche Optionsschein wurde im Jahr 1925 von der Karstadt AG zusammen mit einer Optionsanleihe ausgegeben, die aber nicht in Deutschland, sondern nur in New York gehandelt wurde. Der erste in Deutschland gehandelte Optionsschein wurde dann im Jahr 1926 durch die Vereinigten Stahlwerke AG Düsseldorf herausgegeben.

In den USA wurde an der Chicago Board of Trade (CBOT) im Jahr 1851 der erste Zeitvertrag (englisch time contract) für die zukünftige Lieferung von Mais gehandelt. Die 1865 eingeführten Regeln begründeten dann den Handel mit Futures. Neben Futures auf landwirtschaftliche Produkte wurden Futures auch auf weitere Basiswerte eingeführt. So wurden an der Chicago Mercantile Exchange (CME) im Jahr 1972 erste Futures auf Währungen, an der CBOT im Jahr 1975 erste Futures auf Zinssätze, an der CME im Jahr 1982 erste Futures auf

Aktienindizes und im Jahr 1999 erste Futures auf das Wetter gehandelt. Als erste elektronische Handelsplattform für Termingeschäfte wurde im Jahr 1992 von CME die Software CME Globex Trading System eingeführt.

Als Begründer der modernen stochastischen Finanzmathematik gelten der französische Mathematiker Louis Bachelier (1870–1946; Dissertation 1900), der US-amerikanische Wirtschaftswissenschaftler Paul A. Samuelson (1915–2009, Nobelpreis 1970), der US-amerikanische Physiker, Mathematiker und Wirtschaftswissenschaftler Fischer S. Black (1938–1995), der kanadische Wirtschaftswissenschaftler Myron S. Scholes (*1941, Nobelpreis 1997) und der US-amerikanische Mathematiker und Wirtschaftswissenschaftler Robert C. Merton (*1944, Nobelpreis 1997).[4] Die Literatur zur stochastischen Finanzmathematik befasst sich mit der Bewertung (Preisfindung) und der Risikoabsicherung (Hedging) eines Zahlungsanspruchs, den man durch den Erwerb eines Derivats erhält. In der Literatur wird zur Einführung als elementares Beispiel eines Derivats meist eine sogenannte europäische Call-Option[5] angegeben, die dem Optionshalter das Recht verbrieft, ein bestimmtes Wertpapier (das underlying, z. B. eine Aktie) zu einem bestimmten Fälligkeitszeitpunkt (Ausübungszeitpunkt, Maturität, englisch: maturity, maturity date) $T$ und zu einem heute schon festgelegten Preis (Ausübungs-, Basis- oder Strikepreis, englisch: exercise price, strike price, strike) $K$ zu kaufen. Die Preisbestimmung für eine europäische Call-Option auf eine Aktie war geschichtlich gesehen das Ausgangsproblem der modernen Finanzmathematik Anfang der 1970er Jahre. In der Praxis werden sowohl die zeitdiskreten Marktmodelle als Einperioden- und Mehrperiodenmodell als auch die zeitkontinuierlichen (zeitstetigen) Marktmodelle angewandt.

Im vorliegenden Buch soll eine Einführung in die Bewertung stochastischer (zustands- oder zufallsabhängiger, unsicherer) diskreter[6] Zahlungsströme gegeben werden. Die Bewertung erfolgt unter der Verwendung eines Marktmodells, mit dem der reale Kapitalmarkt durch eine mathematische Formulierung vereinfachend und näherungsweise beschrieben werden soll. Eine der Idealisierungen im Modell ist beispielsweise die Annahme eines vollkommenen Kapitalmarkts (Finanzmarkts).[7] Geschichtliche Beispiele für Marktmodelle werden in Kapitel 1 aufgeführt. Bei Verwendung eines konkreten mathematischen Modells aus $N$ ausgewählten und modellierten Finanzinstrumenten sind in der Praxis die damit gewonnenen Ergebnisse stets mit Vorsicht zu betrachten und ist deren Übereinstimmung mit den realen Daten des Finanzmarkts mittels statistischer Methoden zu überprüfen. Hinsichtlich der konkreten Anwendung eines Modells, beispielsweise des Binomialbaummodells, zur numerischen Bewertung bestimmter Derivate wird in Kapitel 1 ein Literaturhinweis gegeben. Bei der Anwendung erfolgt die Modellierung der Wertpapierkurse, die Kalibrierung (Anpassung) der verwendeten Parameter an reale Zins- und Aktienkursentwicklungen und die Implemen-

---

4 Auf die Anfänge der stochastischen Finanzmathematik verweisen auch Knispel et al. (2011), S. 14, Sandmann (2010), S. 342, Pfeifer (2014), S. 3.

5 Das Zahlungsprofil einer europäischen Call-Option als ein Beispiel eines zufallsabhängigen Zahlungsanspruchs wird beschrieben bei Kremer (2011), S. 10, (2017), S. 10, Korn (1999), S. 90, (2014), S. 12, Hausmann et al. (2002), S. 86, Trautmann (2007), S. 285, Kallsen (2009), S. 55, Sandmann (2010), S. 12, Rudolph und Schäfer (2010), S. 18, Reitz (2011), S. 11, Knispel et al. (2011), S. 6, Hull (2012), S. 31, Bäuerle u. Rieder (2017), 2–4.

6 Betrachtet werden Zahlungsströme $X$, die zeitdiskret sind mit den Zahlungen $X_t$ zu den endlich vielen Zeitpunkten $t \in I = \{0,1,\ldots,T\}$, die zustandsdiskret sind, also nur von endlich vielen Zuständen $\omega \in \Omega$ abhängen, und wertkontinuierlich mit Werten in $\mathbb{R}$ sind.

7 Literatur zu einer ausführlicheren Beschreibung eines sogenannten vollkommenen Kapitalmarkts wird noch in einer Fußnote von Kapitel 2 angegeben.

tierung (konkrete Umsetzung) des Algorithmus in einen Programmcode. Die hier vorliegende Abhandlung befasst sich dagegen mit den mathematischen Strukturen, die den Marktmodellen zugrundeliegen. Dazu werden in den Vektorräumen $\mathcal{W}$ der zu bewertenden Zahlungsprofile und $\mathcal{H}_N$ der Handelsstrategien die Strukturen und Lagebeziehungen spezieller Unterräume dargestellt und gezeigt, wie sich bestimmte Begriffe (Law of One Price, Vollständigkeit und Arbitragefreiheit) in diesen Lagebeziehungen widerspiegeln. Durch die linearalgebraische Beschreibung können diese auch mit grafischen Darstellungen veranschaulicht werden.

Als einfacher Einstieg in die Bewertung zufallsabhängiger Zahlungsströme wird hier in Kapitel 2 das zeit*diskrete* Mehrperiodenmodell mit endlichem Zustandsraum behandelt. Es sollen dabei Zahlungsströme $X \in L(\mathcal{H}_N)$ bewertet werden, die als das (Aus-)Zahlungsprofil $L(h)$ einer Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$, einer sogenannten vorhersehbaren Folge $h = (h_0,\ldots,h_T)^\mathsf{T}$ von Portfoliovektoren $h_t = (h_t^1,\ldots,h_t^N)^\mathsf{T}$, aus den $N$ Finanzinstrumenten $S^j$ des Marktmodells nachgebildet (dupliziert) werden können. Aus der Sicht des Inhabers des Zahlungsanspruchs $X$ oder des Inhabers eines den Anspruch duplizierenden Portfolios $h$ kann $X$ (insbesondere bei $X \geq 0$) als Margenzahlungsstrom angesehen werden. Dagegen kann aus der Sicht der Bank als Wertpapierdepot- und Portfolio-Verwalter das Zahlungsprofil $X$ auch als Auszahlungsprofil bezeichnet werden.

Speziell für den Blickwinkel eines Einsteigers in die stochastische Finanzmathematik wird in Kapitel 2 auch dargestellt, wie man ausgehend von den für das mathematische Marktmodell ausgewählten Preisprozessen von Finanzinstrumenten $S^j$ ($j = 1,\ldots,N$) zu einem Zustandsraum $\Omega$ und zu einer Filtration von Partitionen bzw. $\sigma$-Algebren gelangt, die das im Lauf der Zeit zunehmende Wissen über diese Preisprozesse modelliert. Es wird ausführlich erklärt, wie dann auch für einen beliebigen stochastischen Prozess $X$ dessen Adaptiertheit an diese Filtration als ein im Lauf der Zeit erfolgender Zuwachs des Wissens über den Prozess interpretiert werden kann. Weiter wird die zeitliche Entwicklung des Portfoliowerts einer Handelsstrategie $h$ mit den stochastischen Prozessen des Vermögenswerts $V(h)$, des Reinvestitionswerts $R(h)$, des Gewinns oder Ertragswerts $G(h)$ und des (Aus-)Zahlungswerts $L(h)$ der Handelsstrategie präzisiert und mit grafischen Darstellungen veranschaulicht.

Die Bewertung von Zahlungsprofilen nach dem Duplikationsprinzip („Pricing by Duplication“) von Black, Scholes und Merton wird in Kapitel 3 behandelt. Dazu wird das zu bewertende stochastische Zahlungsprofil $X$ durch das Zahlungsprofil $L(h)$ einer Handelsstrategie $h$ in jedem möglichen Zustand $\omega \in \Omega$ nachgebildet und mit dem deterministischen Startkapitaleinsatz $V_0(h)$ dieser Handelsstrategie zum Zeitpunkt $t = 0$ bewertet. Notwendig und hinreichend für diese Preisbestimmung $\pi(X) = V_0(h)$ von $X = L(h)$ ist die Gültigkeit des Law of One Price (des Gesetzes des eindeutig bestimmten Preises; Abk.: LOP) im Marktmodell, dass also für festes $X$ der Startkapitaleinsatz $V_0(h)$ für alle Duplikationsstrategien $h$ (mit $L(h) = X$) konstant ist. Wegen der $P$-sicheren[8] Definition der Duplikation und der deterministischen Festlegung des Vermögenswerts $V_0(h)$ der Handelsstrategie im Zeitpunkt $t = 0$ werden bei der Bewertung die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten $P(\omega)$ der Zustände $\omega \in \Omega$ nicht benötigt, sodass die Bewertung hierbei nicht wahrscheinlichkeitstheoretisch (w-theoretisch), sondern linearalgebraisch erfolgt.

[8] $P$ ist hier das Wahrscheinlichkeitsmaß für die Kursentwicklungen der Finanzinstrumente des Marktmodells und ist nicht zu verwechseln mit dem weiter unten verwendeten deterministischen Preisvektor.

Indem ein geeignetes Skalarprodukt nicht nur auf dem Raum $\mathcal{W}$ der zu bewertenden Zahlungsprofile, sondern auch auf dem Raum $\mathcal{H}_N$ der Handelsstrategien definiert wird, können in den Abschnitten 3.4, 3.5 und 3.6 mit Hilfe adjungierter Abbildungen etliche neue Charakterisierungen des Law of One Price, der Vollständigkeit[9] und der Arbitragefreiheit[10] hergeleitet werden. Der Beweis der Charakterisierungen wird hier direkt im Mehrperiodenmodell ohne Rückführung auf die enthaltenen Einperiodenmodelle gegeben. Es können auch die Lagebeziehungen einiger wichtiger Unterräume von $\mathcal{W}$ und $\mathcal{H}_N$ bei gültigem LOP und bei nichtgültigem LOP beschrieben werden und damit dieses Gesetz geometrisch visualisiert werden. Allein mit linearer Algebra kann in den Abschnitten 3.3.3 und 3.4.1 gezeigt werden, dass das LOP gleichbedeutend ist zur Existenz eines (nicht notwendig positiven) Bewertungsprozesses $\Psi \in \mathcal{W}$, mit dem für alle $h \in \mathcal{H}_N$ bzw. $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ die Preisgleichungen $\Psi^{\mathsf{T}} L(h) = V_0(h)$ erfüllt sind. Mit vorliegendem Bewertungsprozess $\Psi$ kann dann der Preis $\pi(X) = V_0(h)$ eines Zahlungsprofils $X = L(h)$ auch noch unabhängig von der Handelsstrategie $h$ als Skalarprodukt $\pi(X) = \langle \Psi, X \rangle = \Psi^{\mathsf{T}} X$ von $\Psi$ und $X$ berechnet werden. Die Bewertungsprozesse sind dabei genau die $L^*$-Urbilder $\Psi$ von $b$ ($L^*$ Adjungierte von $L$, $b \in \mathcal{H}_N$ Bewertungsprozess der Handelsstrategien) bzw. die mit $\Psi_0 = 1$ normierten Normalenvektoren $\Psi$ zum Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells. Der Nachweis der Existenz eines Bewertungsprozesses erfolgt auf verschiedenen Wegen, nämlich direkt mit dem Rieszschen Darstellungssatz für die lineare Preisfunktion $\pi(X)$, weiter als ein $L^*$-Urbild $\Psi$ von $b$ mittels der Struktur der Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems $L(h) = X$ als affiner Unterraum, der Inklusion der Kerne der linearen Abbildungen $L$ und $V_0$ und den Eigenschaften des orthogonalen Komplements. Außerdem erfolgt der Nachweis als ein normierter $\mathcal{M}$-Normalenvektor $\Psi$ einmal mittels des trivialen Durchschnitts $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ der Unterräume $\mathcal{V}$ und $\mathcal{M}$ von $L(\mathcal{H}_N)$ und der Eigenschaften des orthogonalen Komplements, ein weiteres Mal mittels $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ und eines Alternativsatzes der konvexen Geometrie und das andere Mal mittels $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$, des Dimensionssatzes für lineare Unterräume und der direkten Zerlegung des Unterraums $\mathcal{M}^{\perp}$.

Mit einem weiteren Alternativsatz aus der konvexen Geometrie zur Disjunktheit eines linearen Unterraums und des punktierten nichtnegativen Orthanten kann in Abschnitt 3.6.1 unmittelbar gezeigt werden, dass die Arbitragefreiheit (AF) des Marktmodells gleichbedeutend ist zur Existenz eines (strikt) positiven Normalenvektors $\Phi$ von $\mathcal{M}$ bzw. zur Existenz eines positiven Bewertungsprozesses $\Phi$, eines sogenannten Diskontierungsprozesses $\Phi$, mit dem für alle $h \in \mathcal{H}_N$ bzw. $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ die Preisgleichungen $\Phi^{\mathsf{T}} L(h) = V_0(h)$ erfüllt sind.

Die vielzitierten Begriffe formale Maße und formale W-Maße, stochastischer Diskontierungsfaktor, Arrow-Debreu-Preis, Zustandspreis oder besser Ereignispreis, Diskontvektor, Arrow-Debreu-Preisvektor, Zustandspreisvektor oder besser Ereignispreisvektor, Diskontierungsvektor, Diskontierungsprozess, Zustandspreisprozess, deterministischer Diskontie-

[9] Das Marktmodell heißt vollständig, wenn *jedes* Zahlungsprofil mittels einer Handelsstrategie dupliziert werden kann.

[10] Das Wort Arbitrage kommt vom französischen arbitrage für Schiedsspruch und vom lateinischen arbitratus für freie Wahl, Belieben, Ermessen und wird als wirtschaftlicher Begriff für das Ausnutzen von Preisunterschieden für gleiche Waren auf verschiedenen Märkten verwendet. Ein Marktmodell heißt arbitragefrei, wenn mit einer Handelsstrategie ohne Einsatz eines Anfangskapitals kein risikoloser Gewinn zu einem späteren Zeitpunkt erzielt werden kann.

rungsfaktor, deterministischer Diskontierungsvektor, deterministischer Preisvektor, (formale, synthetische) Preismaße und einheitliches Preismaß, Martingalmaß, risikoloses bzw. risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß) und risikoneutrale Bewertung werden in den Abschnitten 3.7, 3.8 und 3.9 unter der jeweiligen impliziten Voraussetzung der Arbitragefreiheit, der Duplizierbarkeit bestimmter Arrow-Debreu-Papiere, der Vollständigkeit und der Existenz sogenannter festverzinslicher Handelsstrategien plausibel entwickelt. Bei der Behandlung des sogenannten äquivalenten Martingalmaßes[11] im dividendenlosen relativen Marktmodell wird am Ende des Kapitels 3 noch auf eine Brücke von der zeitdiskreten zur zeitstetigen Finanzmathematik hingewiesen.

Weitere Brücken werden in Kapitel 4 bei den Interpretationen der Bewertung unter der Voraussetzung des Law of One Price (LOP) geschlagen von der Bewertung deterministischer (zufallsunabhängiger, sicherer) Zahlungsströme zur Bewertung stochastischer (zufallsabhängiger, unsicherer) Zahlungsströme. Eine erste Brücke ergibt sich dadurch, dass das Duplikationsprinzip auch als Abstandsmessung von der Hyperebene $\mathcal{M}$ der Kapitalmarktgeschäfte angesehen werden kann. Eine zweite Brücke liefert die Tatsache, dass das Duplikationsprinzip auch als Duplizierungskonzept (Nachbildung, additive Zerlegung) mit einem Ergänzungsgeschäft vom Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells und der Beurteilungskurve der Sofortentnahme interpretiert werden kann. Zusätzliche Brücken erhält man unter weiteren Voraussetzungen mit der Interpretation der Preisberechnung als verallgemeinerte Barwertberechnung (Diskontierung). Hierfür werden drei Arten der Barwertberechnung angegeben, die alle eine Verallgemeinerung der Barwert-Bewertung deterministischer Zahlungsströme $X = (X_0,\ldots,X_T)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{T+1}$ darstellen, bei der $X$ mit dem deterministischen Preisvektor $P = (d_0,\ldots,d_T)^\mathsf{T}$ auf den Barwert $B_T(X;P) = P^\mathsf{T}X$ diskontiert wird. Als Erstes wird bei vorausgesetzter Arbitragefreiheit und Vollständigkeit des Marktmodells der Preis $\pi(X)$ als Barwert $B_T(X;\Phi)$ mit dem stochastischen Ereignispreisvektor $\Phi = (\Phi_t(A_{t,k}))$ aus den Zahlungen $X_t(A_{t,k})$ von $X$ berechnet. Als Zweites wird unter Voraussetzung der Arbitragefreiheit und der Duplizierbarkeit der deterministischen Arrow-Debreu-Papiere $\mathbf{1}_{t,\Omega}$ ($t \in I = \{0,\ldots,T\}$) der Preis $\pi(X)$ als Barwert mit dem deterministischen Preisvektor $P$ für die Erwartungswerte $E_{Q_t}(X_t)$ der Zustandsfunktionen $X_t$ bestimmt. Die Erwartungswerte werden hierbei bezüglich formaler (synthetischer) Wahrscheinlichkeitsmaße $Q_t$ ermittelt, die innerhalb des Marktmodells hergeleitet werden. Als Drittes kann bei Voraussetzung der Arbitragefreiheit und der Existenz sogenannter festverzinslicher Handelsstrategien oder eines festverzinslichen Finanzinstruments dabei an die Stelle der Wahrscheinlichkeitsmaße $Q_t$ ein für alle Zeitpunkte $t$ einheitliches Preismaß bzw. sogenanntes risikoloses und risikoneutrales W-Maß $Q$ verwendet werden, bezüglich dem alle dividendenlosen Finanzinstrumente des Marktmodells die gleiche deterministische (risikolose) Rendite aufweisen und somit risikoneutral beurteilt werden. In den letzten beiden Interpretationen ist die Bewertung mit der Verwendung der Erwartungswerte wahrscheinlichkeitstheoretisch, wobei aber anstelle des tatsächlichen Wahrscheinlichkeitsmaßes (W-Maßes) der Kursentwicklungen der dem Modell zugrundegelegten Finanzinstrumente jetzt bei der Erwartungswertberechnung die im Modell hergeleiteten formalen W-Maße $Q_t$ verwendet werden.

Der Spezialfall der endfälligen stochastischen Zahlungen wird in Kapitel 5 behandelt. Es werden Charakterisierungen der hier für die sogenannten selbstfinanzierenden Handelsstrategien spezieller definierten Begriffe des Law of One Price (LOPsf), der sf-Arbitragefreiheit

[11] Die Äquivalenz dieses W-Maßes zu dem W-Maß $P$ der Kursentwicklungen bedeutet hier dessen Positivität auf $\mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset\}$ (siehe Abschnitt 5.1.10).

(AFsf) und der sf-Vollständigkeit (VSsf) hergeleitet. Das LOPsf wird mittels spezieller Unterraumstrukturen im Raum $\mathcal{H}_N^{sf}$ der selbstfinanzierenden Handelsstrategien und im Raum $\mathbb{R}^{\Omega} = \mathbb{R}^K$ ($K = |\Omega|$, anstelle des Raums $\mathcal{W} = \mathbb{R}^{n_1}$) der zum Endzeitpunkt $T$ auftretenden Zahlungsprofile $X_T$, mittels Dimensionsgleichungen, der Existenz eines (nicht notwendig positiven, aber in der Komponentensumme normierten) Bewertungsvektors $\Psi_T$ und der Gültigkeit von Preisgleichungen charakterisiert. Die sf-Arbitragefreiheit (AFsf) wird durch die Existenz eines positiven normierten $\mathcal{M}_T$-Normalenvektors $Q_T$ zum Unterraum $\mathcal{M}_T$ der NE-Zahlungsprofile und die Existenz eines Diskontvektors $Y_T$ im dividendenversehenen ursprünglichen Marktmodell bzw. die Existenz eines sogenannten äquivalenten Martingalmaßes $\tilde{Q}_T$ im dividendenlosen relativen Marktmodell charakterisiert. Die sf-Vollständigkeit (VSsf) eines sf-arbitragefreien Marktmodells wird durch die Existenz von genau einem positiven normierten $\mathcal{M}_T$-Normalenvektor, genau einem Diskontvektor bzw. genau einem äquivalenten Martingalmaß charakterisiert. Der Beweis für die Existenz eines Bewertungsvektors erfolgt dabei auf verschiedenen Wegen, nämlich mittels des Rieszschen Darstellungssatzes für die lineare Preisfunktion $\pi(X_T)$, als $T$-te Komponente $\Psi_T$ eines Bewertungsprozesses $\Psi$, als normierter $\mathcal{M}_T$-Normalenvektor einmal mittels des trivialen Durchschnitts $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O$ der Unterräume $\mathcal{V}_0$ und $\mathcal{M}_T$ von $L_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ und der Eigenschaften des orthogonalen Komplements, das andere Mal mittels des trivialen Durchschnitts $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O$, des Dimensionssatzes für lineare Unterräume und der direkten Zerlegung des Unterraums $\mathcal{M}_T^{\perp}$. Der Nachweis eines Diskontvektors erfolgt als positiver normierter $\mathcal{M}_T$-Normalenvektor unmittelbar mit einem Alternativsatz der konvexen Geometrie zur Disjunktheit eines linearen Unterraums und des punktierten nichtnegativen Orthanten.

Das Einperiodenmodell ist zwar ein Spezialfall des Mehrperiodenmodells, nimmt aber wegen der in der Literatur gebräuchlichen speziellen Formulierung in niedrigerdimensionalen Räumen eine Sonderstellung ein. Daher werden die Charakterisierungen der Begriffe Vollständigkeit, Law of One Price und Arbitragefreiheit (AF) und (AFsf) auch noch gesondert in Kapitel 6 in der speziellen Sprache des Einperiodenmodells dargestellt und geometrisch visualisiert. Statt des Raums $\mathcal{H}_N = \mathbb{R}^{2N}$ der Handelsstrategien $h = (h_0,h_1)^{\mathsf{T}}$ und des Raums $\mathcal{W} = \mathbb{R}^{1+K}$ ($K = |\Omega|$) der Zahlungsprofile $X = (X_0,X_1)^{\mathsf{T}}$ werden hier der Raum $\mathbb{R}^N$ der Portfoliovektoren $h_1$ und der Raum $\mathbb{R}^K$ der zum Zeitpunkt $T = 1$ auftretenden Zahlungsprofile $X_1$ verwendet. Wie im Mehrperiodenmodell der endfälligen Zahlungen ist auch im Einperiodenmodell das Law of One Price jeweils äquivalent zur Existenz eines Bewertungsprozesses $\Psi$ und zur Existenz eines Bewertungsvektors $\Psi_1$. Als Besonderheit des Einperiodenmodells gilt, dass auch die allgemeine Arbitragefreiheit (AF) jeweils äquivalent ist zur Existenz eines Diskontierungsprozesses $\Phi$ und zur Existenz eines Diskontvektors $\Phi_1$. Die speziellere sf-Arbitragefreiheit (AFsf) ist äquivalent zur Existenz eines positiven normierten $\mathcal{M}_1$-Normalenvektors $Q_1$ zum Unterraum $\mathcal{M}_1$ der NE-Zahlungsprofile. Weiter ist unter der Voraussetzung (GI) der Existenz einer gewinnbringenden Investition im Kapitalmarkt $\mathcal{M}_1$ des Modells und damit insbesondere bei Vorliegen eines Numéraires im Marktmodell hier die speziellere sf-Arbitragefreiheit (AFsf) äquivalent zur allgemeinen Arbitragefreiheit (AF).

Das Buch ist für ein Selbststudium geeignet. Es wendet sich an Studierende mit finanz- und wirtschaftsmathematischer Ausrichtung, dabei vor allem an Einsteiger in die stochastische Finanzmathematik und allgemein an Leser mit Interesse an der Bewertung von Zahlungsströmen. Zur Veranschaulichung des Stoffes dienen 53 Abbildungen, einen Überblick

über die verschiedenen Charakterisierungen geben vier Tabellen und eine konkrete Erklärung einiger Themen erfolgt in sechs Beispielen. Als Einstieg in die moderne stochastische Finanzmathematik wird hier das im Vergleich zum zeitkontinuierlichen Marktmodell mathematisch wesentlich einfachere zeitdiskrete Mehrperiodenmodell mit endlichem Zustandsraum behandelt. Dazu werden nur einige Grundkenntnisse in der Analysis und linearen Algebra vorausgesetzt. Aus der konvexen Geometrie wird ein Alternativsatz zur Disjunktheit eines linearen Unterraums und des punktierten verallgemeinerten nichtnegativen Orthanten bereitgestellt, um damit unmittelbar aus der Arbitragefreiheit die Existenz eines positiven Diskontierungsprozesses bzw. aus dem Law of One Price die Existenz eines Bewertungsprozesses zu folgern. Weiter sind auch noch einige Kenntnisse in der Maß- und Integrationstheorie und der Wahrscheinlichkeitstheorie hilfreich. Bei der Verwendung diesbezüglicher Begriffe und Resultate werden aber stets Literaturhinweise angegeben, wo diese nachgelesen werden können. In der vorliegenden zweiten Auflage des Buches wurden Verbesserungen und Ergänzungen vorgenommen. Einige Ergebnisse sind auch in kurzen Artikeln auf der Website www.pleier-r.de des Autors dargestellt.

Etzenricht, Juli 2023 Rudolf Pleier

# Inhaltsverzeichnis


**1 Bewertung von Zahlungsströmen mit einem Marktmodell ..... 1**

**2 Mehrperiodenmodell ..... 5**

2.1 Preisprozess und Handelsstrategie ..... 5
2.2 Induzierte Partition einer $\sigma$-Algebra ..... 9
2.3 Charakterisierung der Messbarkeit einer Zustandsfunktion ..... 12
2.4 Beschreibung des Wissenszuwachses über einen Prozess durch die natürliche Filtration ..... 15
2.5 Interpretation der Adaptiertheit als Wissenszuwachs ..... 19
2.6 Summen- und Tupel-Darstellung der messbaren Zustandsfunktionen und adaptierten Prozesse ..... 25
2.6.1 Summen- und Tupel-Darstellung der messbaren Zustandsfunktionen . 25
2.6.2 Summen- und Tupel-Darstellung der adaptierten stochastischen Prozesse ..... 27
2.6.3 Isomorphie der Vektorräume $\mathcal{W}_N$, $\mathcal{H}_N$ und $\mathcal{W}$ zu passendem $\mathbb{R}^n$ ..... 29
2.7 Präzisierung der zeitlichen Entwicklung des Portfoliowerts ..... 30
2.8 Additive Zerlegung des Auszahlungswerts $L$ ..... 36
2.8.1 Additive Zerlegung von $L$ in $V$ und - $R$ ..... 36
2.8.2 Darstellungsmatrix von $L$ ..... 37
2.8.3 Additive Zerlegung von $L$ in $\breve{V}$ und $\breve{L}$ ..... 42
2.8.4 Additive Zerlegung des $L$-Bildraums ..... 43
2.9 Euklidische Vektorräume ..... 48
2.10 Adjungierte Abbildung $L^*$ ..... 51
2.10.1 Orthogonale Zerlegung der Räume $\mathcal{W}$ und $\mathcal{H}_N$ ..... 51
2.10.2 Lage der $L^*$-Bilder $L^*(\mathcal{M})$ und $L^*(\mathcal{M}^\perp)$ zum Unterraum $\mathcal{B}$ ..... 53
2.10.3 Additive Zerlegung der adjungierten Abbildung $L^*$ ..... 54
2.10.4 Additive Zerlegung von $L^*(\mathcal{W})$ im Spezialfall (LOP) ..... 56
2.11 Lagebeziehungen einiger Unterräume von $\mathcal{W}$ und $\mathcal{H}_N$ ..... 57

**3 Bewertung nach dem Duplikationsprinzip ..... 63**

3.1 Duplizierbarkeit eines Zahlungsprofils ..... 63
3.2 Berechnung einer Duplikationsstrategie ..... 65
3.2.1 Rekursive Auflösung des gestaffelten linearen Gleichungssystems ..... 65
3.2.2 Duplizierbarkeit und Vollständigkeit im Einperiodenmodell ..... 74
3.2.3 Äquivalenz der Duplizierbarkeit eines festen Zahlungsprofils $X$ im Mehrperiodenmodell zur Duplizierbarkeit bestimmter Zahlungsprofile $Z_t$ in den enthaltenen Einperiodenmodellen ..... 75
3.2.4 Charakterisierung des Law of One Price in einem enthaltenen Einperiodenmodell ..... 77
3.2.5 Äquivalenz der Vollständigkeit des Mehrperiodenmodells zur Vollständigkeit aller enthaltenen Einperiodenmodelle ..... 79

3.3 Definition der Bewertung eines Zahlungsprofils ... 80
3.3.1 Bewertung einer Handelsstrategie ... 80
3.3.2 Preis eines Zahlungsprofils und Law of One Price ... 82
3.3.3 Charakterisierung des Law of One Price durch die Existenz eines Bewertungsprozesses ... 85
3.4 Charakterisierungen des Law of One Price (LOP) ... 92
3.4.1 Verschiedene Charakterisierungen des LOP ... 92
3.4.2 Geometrische Interpretation der Bewertung als Abstandsmessung ... 110
3.4.3 Berechnung eines Bewertungsprozesses ... 112
3.4.4 LOP im Mehrperiodenmodell und in den enthaltenen Einperiodenmodellen ... 119
3.4.5 Geometrische Bedeutung der von Null verschiedenen Komponenten des Bewertungsprozesses ... 124
3.5 Charakterisierungen der Vollständigkeit (VS) ... 129
3.5.1 Vielfalt der Bewertungsprozesse und Diskontierungsprozesse ... 129
3.5.2 LOP und Vollständigkeit ... 130
3.5.3 Vollständigkeit und Dimensionsgleichung $m = n_1$ ... 131
3.6 Charakterisierungen der Arbitragefreiheit (AF) ... 134
3.6.1 Fundamentalsatz der Preistheorie mit der Charakterisierung der Arbitragefreiheit durch die Existenz eines Diskontierungsprozesses ... 134
3.6.2 Berechnung eines Diskontierungsprozesses ... 146
3.6.3 Äquivalenz der Arbitragefreiheit im Mehrperiodenmodell zur Arbitragefreiheit in den enthaltenen Einperiodenmodellen ... 147
3.6.4 Geometrische Interpretation des schrittweisen Übergangs vom LOP zur Arbitragefreiheit (AF) ... 148
3.7 Folgerungen aus dem Law of One Price bzw. der Arbitragefreiheit ... 149
3.7.1 Unterraum $\mathcal{M}$ als Menge der Kapitalmarktgeschäfte mit dem Preis Null ... 149
3.7.2 Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ als lineare Hülle der einperiodischen Termingeschäfte $F^{\tau,j,k}$ ... 150
3.7.3 Bewertung der Zahlungsströme von Finanzgeschäften ... 155
3.7.4 Formale Maße $\Phi_t$ und W-Maße $Q_t$ ... 156
3.8 Folgerungen aus der Arbitragefreiheit und der Duplizierbarkeit von Arrow-Debreu-Papieren ... 158
3.8.1 Duplizierbare $t$-periodische stochastische AD-Papiere und AD-Kassageschäfte ... 158
3.8.2 Duplizierbare $t$-periodische deterministische AD-Papiere und AD-Kassageschäfte ... 164
3.8.3 Duplizierbare mehrperiodische stochastische AD-Termingeschäfte ... 166
3.8.4 Duplizierbare einperiodische deterministische AD-Termingeschäfte 168
3.9 Folgerungen aus der Arbitragefreiheit und der Existenz von festverzinslichen Handelsstrategien ... 170
3.9.1 Deterministische einperiodische Diskontfaktoren ... 170
3.9.2 Deterministische $t$-periodische Diskontierungsfaktoren ... 174
3.9.3 Preismaße $Q_t$ und einheitliches Preismaß $Q$ ... 175
3.9.4 Diskontierte Preisprozesse der dividendenlosen Finanzinstrumente als Martingale bezüglich des Preismaßes $Q$ ... 179

3.9.5 Risikoloses Wahrscheinlichkeitsmaß $Q$ und risikoneutrale Bewertung der Zahlungsprofile ... 191
3.10 Folgerungen aus der Arbitragefreiheit und der Existenz eines Numéraires ... 194
3.10.1 Äquivalenz der Arbitragefreiheit bzw. Vollständigkeit im Mehrperiodenmodell zur Arbitragefreiheit bzw. Vollständigkeit im relativen Marktmodell ... 196
3.10.2 Folgerungen aus der Existenz des konstanten Finanzinstruments im relativen Marktmodell ... 197
3.10.3 Relative Preisprozesse der dividendenlosen Finanzinstrumente als Martingale bezüglich des Preismaßes $Q$ ... 198

**4 Interpretationen der Bewertung ... 203**

4.1 Bewertung als Abstandsmessung ... 203
4.2 Bewertung nach dem Duplizierungskonzept ... 205
4.3 Bewertung als Diskontierung der Zahlungen $X_t(A_{t,k})$ mittels stochastischer Diskontierungsfaktoren $d_{t,k}$ ... 209
4.4 Bewertung als Diskontierung der $Q_t$-Erwartungswerte der Zahlungen $X_t$ bezüglich der Preismaße $Q_t$ mit deterministischen Diskontierungsfaktoren $d_t$ . 211
4.5 Bewertung als Diskontierung der $Q$-Erwartungswerte der Zahlungen $X_t$ bezüglich des Preismaßes $Q$ mit deterministischen Diskontierungsfaktoren $d_t$ 213

**5 Spezialfall der endfälligen Zahlungen ... 215**

5.1 Spezielle sf-Arbitragefreiheit (AFsf), Diskontvektoren und äquivalente Martingalmaße ... 215
5.1.1 sf-Duplizierbarkeit und selbstfinanzierende Handelsstrategien ... 216
5.1.2 sf-Arbitragefreiheit ... 219
5.1.3 Äquivalenz der sf-Arbitragefreiheit im ursprünglichen Marktmodell und der sf-Arbitragefreiheit im relativen Marktmodell ... 221
5.1.4 sf-Arbitragefreiheit im Mehrperiodenmodell und Arbitragefreiheit in den Einperiodenmodellen ... 221
5.1.5 Charakterisierung der Selbstfinanzierungsbedingung (SF) im ursprünglichen Marktmodell ... 222
5.1.6 Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit im ursprünglichen Marktmodell mittels der kumulierten Gewinne ... 226
5.1.7 Charakterisierungen der Selbstfinanzierungsbedingung (SF) im relativen Marktmodell ... 227
5.1.8 Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit im relativen Marktmodell mittels der relativen kumulierten Gewinne ... 243
5.1.9 Äquivalenz der sf-Arbitragefreiheit des Mehrperiodenmodells zur sf-Arbitragefreiheit der enthaltenen Einperiodenmodelle ... 245
5.1.10 Charakterisierung eines Martingalmaßes im dividendenlosen relativen Marktmodell mittels des erwarteten relativen kumulierten Gewinns Null der sf-Handelsstrategien ... 248
5.1.11 Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit im relativen Marktmodell durch die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes bzw. eines Diskontvektors ... 255
5.1.12 Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit im ursprünglichen Marktmodell durch die Existenz eines Diskontvektors ... 259

5.2 Spezielle sf-Vollständigkeit (VSsfT), Diskontvektoren und äquivalente Martingalmaße ... 264
5.2.1 sf-Vollständigkeit ... 265
5.2.2 sf-Vollständigkeit des Mehrperiodenmodells und der enthaltenen Einperiodenmodelle ... 265
5.2.3 Äquivalenz der sf-Vollständigkeit des ursprünglichen Marktmodells zur sf-Vollständigkeit des relativen Marktmodells ... 275
5.2.4 Charakterisierung der sf-Vollständigkeit des sf-arbitragefreien relativen Marktmodells ohne bzw. mit Dividenden ... 276
5.2.5 Charakterisierung der sf-Vollständigkeit des sf-arbitragefreien ursprünglichen Marktmodells mit Dividenden ... 280
5.3 Law of One Price (LOPsfT) und Bewertungsvektoren ... 284
5.3.1 Preis eines Zahlungsprofils ... 284
5.3.2 Äquivalenz von LOPsfT und LOP ... 285
5.3.3 Charakterisierung des LOPsfT durch die Existenz eines Bewertungsvektors ... 286
5.3.4 Äquivalenz von LOPsfT im ursprünglichen Marktmodell und LOPsfT im relativen Marktmodell ... 289
5.3.5 Additive Zerlegung des $V_T$-Bildraums in Unterräume ... 290
5.3.6 Adjungierte Abbildungen und Lagebeziehungen einiger Unterräume 298
5.3.7 Charakterisierungen des LOPsfT mittels einer direkten Summe ... 310
5.3.8 Vielfalt der Bewertungsvektoren ... 314
5.3.9 Interpretationen der Preisberechnung mittels eines Bewertungsvektors ... 321
5.3.10 Vielfalt der Diskontvektoren ... 323
5.3.11 Interpretationen der Preisberechnung mittels eines Diskontvektors ... 327
5.3.12 Weitere Charakterisierungen des LOPsfT ... 329
5.3.13 Berechnung eines Bewertungsvektors ... 343

**6 Einperiodenmodell ... 349**

6.1 Einperiodenmodell als Spezialfall des Mehrperiodenmodells mit den Räumen $\mathbb{R}^{2N}$ und $\mathbb{R}^{1+K}$ ... 352
6.2 Einperiodenmodell in der speziellen Darstellung mit den niedrigerdimensionalen Räumen $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ ... 358
6.2.1 Charakterisierungen der Duplizierbarkeit und der Vollständigkeit ... 358
6.2.2 Charakterisierungen des Law of One Price ... 365
6.2.3 Charakterisierungen der Arbitragefreiheit (AF) ... 395
6.2.4 Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit (AFsf) ... 403
6.2.5 Formales W-Maß, Preismaß, Martingalmaß und risikoneutrales W-Maß ... 412

**Literaturverzeichnis ... 421**

**Sachverzeichnis ... 425**

# 1 Bewertung von Zahlungsströmen mit einem Marktmodell

In der stochastischen Finanzmathematik wird ein Zahlungsstrom als **stochastischer Prozess**[1] (auch Zufallsprozess oder kurz Prozess) über $I \times \Omega$, d. h. als eine im Lauf der Zeit in zufallsabhängiger Weise veränderliche Variable $X = (X_t)_{t\in I} = (X_t(\omega))_{t\in I,\omega\in\Omega}$,

$$X : (t,\omega) \in I \times \Omega \mapsto X(t,\omega) = X_t(\omega) \in \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{R}^N \qquad (N \in \mathbb{N}),$$

beschrieben, wobei noch die Zeitparametermenge $I$ und der Zustandsraum $\Omega$ festzulegen sind. Nachfolgend treten als stochastische Prozesse beispielsweise das Zahlungsprofil $X$ eines Derivats, die Preisprozesse $S^j$, $S^{\delta,j}$ ($j \in J = \{1,\ldots,N\}$) der $N$ für das Marktmodell ausgewählten Wertpapiere, die zugehörigen Dividendenprozesse $\delta^j$, die mit einem Numéraire diskontierten Preisprozesse $\tilde{S}^j$, die Handelsstrategie $h$ zur zeitlichen Veränderung des aus den Wertpapieren gebildeten Portfolios, der durch $h$ definierte Wertprozess (Vermögensprozess) $V(h)$, der (Re-)Investitionsprozess (Wiederanlageprozess) $R(h)$, das (Aus-)Zahlungsprofil $L(h)$ des Portfolios, der Bewertungsprozess $\Psi$ und der Diskontierungsprozess $\Phi$ des Marktmodells auf.

Ein stochastisches Zahlungsprofil $X$ soll mit Hilfe eines Marktmodells nach dem **Duplikationsprinzip** bewertet werden, indem $X$ als das noch zu definierende (Aus-)Zahlungsprofil $L(h)$ einer Handelsstrategie $h = (h^1,\ldots,h^N)^\mathsf{T}$ zu einem Wertpapierportfolio aus $N$ ausgewählten und mathematisch modellierten Wertpapieren (Finanzinstrumenten) $S^j$ ($j \in J = \{1,\ldots,N\}$) nachgebildet (dupliziert) wird und der Wert (Preis) $\pi(X)$ von $X$ dann durch den noch zu definierenden Startkapitaleinsatz $V_0(h)$ der Handelstrategie $h$ zum Zeitpunkt $t = 0$ definiert wird:

$$\pi(X) := V_0(h) \text{ für } X = L(h).$$

Notwendig und hinreichend für diese Preisbestimmung von $X$ bzw. für die Wohldefiniertheit der Nutzenfunktion $\pi(X) = V_0(h)$ für die $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ ist die Gültigkeit des **Law of One Price** (des Gesetzes des eindeutig bestimmten Preises; Abk.: LOP) im Marktmodell, dass also für festes $X$ der Startkapitaleinsatz $V_0(h)$ für alle Duplikationsstrategien $h$ (mit $L(h) = X$) konstant ist.

Zur Duplikation eines Zahlungsanspruchs $X$ werden in der Praxis sowohl **zeitdiskrete Marktmodelle** mit endlicher diskreter Zeitparametermenge $I = \{0,1,\ldots,T\}$ als auch **zeitkontinuierliche (zeitstetige) Marktmodelle** mit dem Intervall $I = [0,T] \subseteq \mathbb{R}$ als Zeitparametermenge verwendet.[2] Bei der Konstruktion eines geeigneten und möglichst realistischen

---

[1] Die Definition des (stochastischen) Prozesses $X : (t,\omega) \in I \times \Omega \mapsto X(t,\omega) = X_t(\omega)$ und ausführlichere Betrachtungen dazu findet man bei Bauer (2002) WT, S. 304, Kremer (2011), S. 147, Hausmann et al. (2002), S. 367. Für festes $\omega \in \Omega$ wird die auf $I$ definierte Abbildung $X(.,\omega) : t \in I \mapsto X_t(\omega)$ als zu $\omega$ gehöriger Pfad (Trajektorie, Realisation) des stochastischen Prozesses $X$ bezeichnet. Heinz Bauer (1928–2002) war ein deutscher Mathematiker, der sich mit Wahrscheinlichkeitstheorie und Analysis beschäftigte.

[2] Zur Realitätsnähe und zu den Vor- und Nachteilen von zeitdiskreten bzw. zeitkontinuierlichen Modellen findet man Anmerkungen bei Hausmann et al. (2002), S. 114, 131, 165, 181, 367, Sandmann (2010), S. 21, 281.

konkreten mathematischen Modells des Finanzmarkts zur Aufgabe der Preisfindung für eine bestimmte Klasse von Zahlungsprofilen stellt die Auswahl der Wertpapiere und deren spezielle mathematische Modellierung mit aus historischen Daten bestimmten Parametern immer noch ein wichtiges Problem dar.[3] Dabei ist nach erfolgter Festlegung der Modellvoraussetzungen und der Modellzusammenhänge eine möglichst gute Übereinstimmung des Modells mit den realen Daten des Finanzmarkts stets mit statistischen Methoden zu überprüfen. Ein Beispiel für ein konkretes zeitkontinuierliches Marktmodell ist das oft als **Black-Scholes-Modell**[4] (Black-Scholes-Merton-Modell, BSM- oder BMS-Modell) bezeichnete zeitkontinuierliche Standardmarktmodell mit $N = 2$ Wertpapieren, das für eine alternative Herleitung der von Black und Scholes 1973 angegebenen Optionsbewertungsformel verwendet wird. Dieses Modell wurde schon 1965 von Samuelson als Weiterentwicklung des Bachelier-Modells vorgeschlagen.[5] Es besteht aus einem festverzinslichen Wertpapier (Anleihe, Geldmarktkonto, Sparkonto) und einer dividendenlosen Aktie. Ein wichtiges Beispiel für ein zeitdiskretes Marktmodell (Mehrperiodenmodell) ist das nach der Idee von Sharpe aus dem Jahr 1964 dann im Jahr 1979 in zwei voneinander unabhängigen Originalarbeiten von Cox, Ross und Rubinstein und von Rendleman und Bartter dargestellte **Binomialbaummodell**[6] (Cox-Ross-Rubinstein-Modell, CRR-Modell) mit den beiden gleichen Wertpapieren wie im eben genannten zeitkontinuierlichen Marktmodell. Dieses Modell wurde zunächst zur Veranschaulichung und Approximation des zeitkontinuierlichen Black-Scholes-Modells verwendet. Darüberhinaus gestattet es aber auch eine einfache Anwendung zur numerischen Bewertung von europäischen Optionen, amerikanischen Optionen und vielen nichtstandardmäßigen (exotischen) Optionen.

Auf der Grundlage dieser beiden Standardmodelle sind viele weitere Modelle entwickelt worden, welche die Standardmodelle abändern und verallgemeinern oder ein anderes Verfahren zur Bewertung anwenden. Um die Realität mit dem Modell besser abzubilden, werden dabei mit zunehmender Komplexität des Modells weniger einschränkende Annahmen verwendet. Beispielsweise wird statt einer aus den beobachteten Kursrenditen historisch bestimmten Volatilität $\sigma$ als konstanter Modellparameter der im BSM-Modell verwendeten Aktie $S$ eine sog. implizite Volatilität (Implied Standard Deviation, ISD) eingesetzt, die sich mit dem Modell rückwärts aus den tatsächlich auf dem Markt beobachteten Optionspreisen berechnet. Weiter wird an Stelle einer konstanten Volatilität $\sigma$ eine von der Zeit $t$ abhängige Volatilität $\sigma_t$ eingesetzt. So wird im CEV-Modell (Constant Elasticity of Variance Model, Modell der konstanten Elastizität der Varianz) von Cox im Jahr 1975, Cox und Ross 1976

---

3 Anmerkungen zur Konstruktion konkreter Marktmodelle findet man bei Kallsen (2009), S. 48.

4 Das BSM-Modell wird z. B. behandelt bei Rudolph und Schäfer (2010), S. 345f, Sandmann (2010), S. 301ff, Kremer (2011), S. 280–293, (2017), S. 90–96.

5 Den Literaturhinweis auf Samuelson findet man bei Knispel et al. (2011), S. 14.

6 Das Binomialbaummodell wird z. B. beschrieben bei Kremer (2011), S. 229–286, (2017), S. 45–53, 75–96, Bäuerle und Rieder (2017), S. 21–36, 85f, 89–92, Trautmann (2007), S. 327–374, Sandmann (2010), S. 36f, 199ff, Rudolph und Schäfer (2010), S. 257ff. Bei passender Wahl der Parameter konvergiert der Preisprozess des risikobehafteten Wertpapiers im CRR-Modell gegen den entsprechenden Preisprozess im BSM-Modell und dann auch der Preis einer Call-Option im CRR-Modell gegen den Preis einer Call-Option im BSM-Modell. Eine Anwendung zur numerischen Bewertung von Derivaten mit Modellierung der Wertpapierkurse, Kalibrierung (Anpassung) der Parameter an reale Zins- und Aktienkursentwicklungen und Implementierung (konkreter Umsetzung) des Algorithmus in einen Programmcode findet man bei Kremer (2011), S. 239–280, (2017), S. 75–78, 96–106. Er behandelt dabei europäische und amerikanische Optionen mit und ohne Dividendenzahlungen der Aktie.

und Beckers 1980 angenommen, dass die Volatilität $\sigma$ mit dem Kurs $S$ der Aktie bei konstanter Elastizität schwankt.[7] Beim GARCH-Modell (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, verallgemeinerte autoregressive bedingte Heteroskedastizität) von Bollerslev 1986 wird die Volatilität $\sigma_t$ mittels einer deterministischen Funktion aus den letzten $p$ beobachteten Werten der logarithmischen Rendite $u_i = \ln(S_i/S_{i-1})$ der Aktie $S$ ($i = t\text{-}1,\ldots,t\text{-}p$) und den letzten $q$ Schätzern $\sigma_i$ ($i = t\text{-}1,\ldots,t\text{-}q$) für die Volatilität berechnet.[8] Bei Modellen mit stochastischer Volatilität wird nicht nur der Aktienkurs $S_t$ durch eine stochastische Differenzialgleichung (engl.: stochastic differential equation, SDE), sondern auch die Volatilität $\sigma_t$ durch eine zweite stochastische Differenzialgleichung modelliert. Ein Beispiel hierfür ist das Heston-Modell von Heston aus dem Jahr 1993.[9] Um nicht nur stetige Aktienkurse in einem sog. Diffusion-Modell, sondern auch Aktienkurse mit Sprüngen zu beschreiben, werden weitere Modelle verwendet. Beim gemischten Jump-Diffusion-Modell von Merton aus dem Jahr 1976 wird die stetige Aktienkursänderung durch Sprünge überlagert. Das Varianz-Gamma-Modell von Madan, Carr und Chang im Jahr 1998 ist ein reines Jump-Modell. Eine weitere Alternative zum BSM-Modell ist das IVF-Modell (Implied Volatility Function Model, Implied Tree Model) von Derman und Kani, Dupire sowie Rubinstein jeweils im Jahr 1994, bei dem die Volatilität $\sigma(S,t)$ als Funktion des Aktienkurses $S$ und der Zeit $t$ so gewählt werden kann, dass die heute beobachteten Preise für alle europäischen Optionen exakt berechnet werden.[10] Als ein Beispiel für ein Modell, das nicht nach dem Duplikationsprinzip bewertet, ist das CGMY-Modell von Carr, Geman, Madan und Yor aus dem Jahr 2002 zu nennen.[11] Für Modelle, bei denen keine explizite analytische Lösungsformel für den Derivatpreis vorliegt oder die zur Erfassung von zu diskreten Zeitpunkten anfallenden Dividenden und Transaktionskosten dienen, kommen numerische Verfahren zum Einsatz, nämlich Baummodelle, die Monte-Carlo-Simulation und Finite-Differenzen-Methoden.[12] Einem Baummodell liegt der graphentheoretische Informationsbaum eines Marktmodells mit endlicher Zeitparametermenge $I$ und endlichem Zustandsraum $\Omega$ zugrunde. Zu nennen sind hierzu das oben schon erwähnte Binomialbaummodell, das Trinomialbaum-Modell und als Erweiterung davon das Adaptive-Mesh-Modell von Figlewski und Gao aus dem Jahr 1999 zur Bewertung amerikanischer Optionen. Die Monte-Carlo-Simulation beruht auf der Idee der zufälligen Stichprobe und verwendet Zufallszahlen, um für eine bestimmte Anzahl verschiedener Pfade jeweils die Auszahlung zu berechnen und dann den Mittelwert dieser Auszahlungen zu bestimmen. Sie ist besonders effizient für Derivate, die von mindestens drei stochastischen Marktvariablen abhängen. Die Finite-Differenzen-Methoden führen die Differenzialgleichung des Derivats in ein System von Differenzengleichungen über, das iterativ gelöst wird. Abschließend ist festzustellen, dass für die verschiedenartigen Anwendungen kein einheitliches Modell zur Verfügung steht, sondern jeweils ein möglichst gut angepasstes Modell zu verwenden ist.

---

7 Das CEV-Modell wird behandelt bei Hull (2012), S. 745, Rudolph und Schäfer (2010), S. 323, Trautmann (2007), S. 401.

8 Das GARCH-Modell wird beschrieben bei Hull (2012), S. 626–637, Reitz (2011), S. 137.

9 Zum Heston-Modell findet man weitere Informationen bei Hull (2012), S. 751, Reitz (2011), S. 137f.

10 Das IVF-Modell wird näher beschrieben bei Hull (2012), S. 752f.

11 Trautmann (2007), S. 401, erwähnt das CGMY-Modell als Beispiel eines präferenzabhängigen Modells, das nicht das Duplikationsprinzip verwendet, aber den Preisprozess des Basisinstruments noch realistischer modelliert.

12 Die numerischen Verfahren werden behandelt bei Hull (2012), S. 537–581.

Nachfolgend wird nur das zeit*diskrete* Mehrperiodenmodell (für $T$ Zeitperioden, $T \in \mathbb{N}$) weiter untersucht, das mathematisch einfacher darzustellen ist und eher der realen Situation entspricht. Dabei könnte speziell das Einperiodenmodell ($T = 1$) kurz als Spezialfall des Mehrperiodenmodells abgehandelt werden. Aufgrund der in der Literatur gebräuchlichen Darstellung in niedrigerdimensionalen Räumen mit der Matrix $L' \in \mathbb{R}^{(1+K)\times N}$ und deren Blockzeilen $S_0^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{1\times N}$ und $D^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{K\times N}$ ($K = |\Omega|$, $N = |J|$) wird jedoch das Einperiodenmodell auch noch ausführlich in Kapitel 6 behandelt. Weiter wird auch der Spezialfall der endfälligen Zahlungen in niedrigerdimensionalen Räumen gesondert in Kapitel 5 behandelt. In diesen beiden Kapiteln findet man auch etliche neue Charakterisierungen der Begriffe Arbitragefreiheit, Law of One Price und Vollständigkeit und deren geometrische Veranschaulichung mittels besonderer Unterraumstrukturen. Hinsichtlich der zeit*kontinuierlichen* (zeitstetigen) Marktmodelle, die weitergehende theoretische Analysen von verschiedenen Derivaten ermöglichen, aber einen wesentlich höheren mathematisch-technischen Aufwand erfordern, wird auf die Literatur[13] verwiesen.

[13] Literatur zu zeitkontinuierlichen Marktmodellen und insbesondere zum bekanntesten Modell für die Optionsbewertung, dem BSM-Modell (nach Black, Scholes und Merton, 1973): Kremer (2011), S. 439–461, Kremer (2017), S. 193–218, Hull (2012), S. 381–419, Hausmann et al. (2002), S. 181–227, 346–421, Trautmann (2007), S. 375–416, Deutsch (2008), S. 85–108, Rudolph und Schäfer (2010), S. 270–286, Sandmann (2010), S. 283–346, Reitz (2011), S. 93ff, Deck (2006), S. 207–232, Irle (1998), S.116ff, Korn (1999), S. 10ff, Korn (2014), S. 57–121.

# 2 Mehrperiodenmodell

In diesem Kapitel werden einige grundlegende Begriffe zur Formulierung des Mehrperiodenmodells (englisch: multi-period model) vorgestellt: Preisprozess, Zustandsraum, Portfolio, Filtration, Adaptiertheit, Vorhersehbarkeit, Handelsstrategie und Wissenszuwachs über einen Prozess. Weiter werden der Vektorraum $\mathcal{H}_N$ der Handelsstrategien und der Vektorraum $\mathcal{W}$ der zu bewertenden adaptierten Zahlungsprofile jeweils mit einem Skalarprodukt ausgestattet. Für die durch den Auszahlungswert des Portfolios der $N$ Wertpapiere gegebene lineare Abbildung $L : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathcal{W}$ wird die Darstellungsmatrix beschrieben, die dazu adjungierte Abbildung $L^* : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{H}_N$ bereitgestellt und für die Abbildungen $L$ und $L^*$ werden additive Zerlegungen angegeben. Schließlich werden noch einige Lagebeziehungen für lineare Unterräume von $\mathcal{W}$ und $\mathcal{H}_N$ hergeleitet.

## 2.1 Preisprozess und Handelsstrategie

Es wird der mathematisch wesentlich einfachere Fall betrachtet, bei dem für die Zeitparametermenge $I$ die endliche diskrete Menge

$$I = \{0,1,\ldots,T\} \qquad (T \in \mathbb{N})$$

gewählt wird. Bei einer konkreten Anwendung erfolgt zunächst die mathematische Modellierung der Preisentwicklung $S_t^j$ für die $N$ ausgewählten Wertpapiere (Finanzinstrumente) $S^j$, $j = 1,\ldots,N$, des Marktmodells. Damit erhält man die zeit- und zufallsabhängige Entwicklung des hier als Spaltenvektor geschriebenen **Preisprozesses**

$$S = (S_0,\ldots,S_t,\ldots,S_T)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{N\cdot(T+1)}, \qquad S_t = (S_t^1,\ldots,S_t^N)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^N$$

($t \in I = \{0,\ldots,T\}$), mit der deterministischen Anfangswertbedingung $S_0^j \in [0,\infty[ \subseteq \mathbb{R}$ ($j \in J = \{1,\ldots,N\}$). Dann können alle nach den Modellvoraussetzungen endlich vielen möglichen Kursentwicklungen (Pfadvektoren) des Preisprozesses $S$ zu einem endlichen **Zustandsraum**[1] $\Omega$ zusammengefasst werden, der alle im Modell auftretenden zufallsabhängigen Zustände (Szenarien, theoretisch möglichen Elementarereignisse) $\omega$ enthält: $|\Omega| = K < \infty$, $\Omega = \{\omega_1,\ldots,\omega_K\}$. Jeder Kursentwicklung $\omega_k \in \Omega$ entspricht ein Pfadvektor

$$S(\omega_k) = (S_0(\omega_k),\ldots,S_t(\omega_k),\ldots,S_T(\omega_k))^\mathsf{T} \text{ mit}$$
$$S_t(\omega_k) = (S_t^1(\omega_k),\ldots,S_t^j(\omega_k),\ldots,S_t^N(\omega_k))^\mathsf{T} \in [0,\infty[^N$$

($t = 0,..,T$; $k = 1,..,K$). Damit ist die Kursentwicklung von $S$ als $\mathbb{R}^N$-wertiger, genauer $[0,\infty[^N$-wertiger, stochastischer Prozess über $I \times \Omega$ dargestellt.[2] Der Preisprozess

$$S = (S_t(\omega))_{t\in I,\omega\in\Omega}$$

---

[1] Die Bildung des Zustandsraum $\Omega$ aus der Kursentwicklung des Preisvektors $S$ wird bei Kremer (2011), S. 151f, bei Hausmann et al. (2002), S. 350, und auch hier im nachfolgenden Abschnitt 2.4 noch ausführlicher behandelt.

[2] Die Definition des stochastischen Prozesses als Funktion $X : (t,\omega) \in I \times \Omega \mapsto X(t,\omega) = X_t(\omega) \in \mathbb{R}^N$ und ausführlichere Betrachtungen dazu findet man bei Bauer (2002) WT, S. 304, Kremer (2011), S. 147, Hausmann et al. (2002), S. 367. Für festes $\omega \in \Omega$ wird die auf $I$ definierte Abbildung $X(.,\omega) : t \in I \mapsto X_t(\omega)$ als zu $\omega$ gehöriger Pfad (Trajektorie, Realisation) des stochastischen Prozesses $X$ bezeichnet. Für festes $t \in I$ ist $X_t = X(t,.) : \omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega) \in \mathbb{R}^N$ eine Zustandsfunktion auf $\Omega$.

liegt im Vektorraum $\mathcal{S}_N := (\mathbb{R}^N)^{I \times \Omega}$ der $\mathbb{R}^N$-wertigen stochastischen Prozesse über $I \times \Omega$. Ein für Anwendungen wichtiges Beispiel eines Mehrperiodenmodells (englisch: multi-period model) ist das **Binomialbaummodell**[3] (Cox-Ross-Rubinstein-Modell, CRR-Modell) aus $N = 2$ Finanzinstrumenten (einem festverzinslichen Wertpapier $S^1 = B$ und einer dividendenlosen Aktie $S^2 = S$) mit $n = T/\Delta t \in \mathbb{N}$ Zeitperioden und $2^n$ Endzuständen $\omega \in \Omega$.
Bei den hier verwendeten Wertpapieren sollen nun auch Dividendenzahlungen mit erfasst werden. Dazu verwendet man beim $j$-ten Wertpapier neben dem Preisprozess $S^j$ auch noch einen **Dividendenprozess** $\delta^j$ und den kombinierten Preisprozess

$$S^{\delta,j} = S^j + \delta^j .$$

Um aus den $N$ Wertpapieren ein **Portfolio** (Bündel, Mischung, Zusammenfassung) zu bilden, in welchem jedes dieser Wertpapiere $S^j$ in einer bestimmten Stückzahl $h^j \in \mathbb{R}$ vorkommt, ist der (Spalten-)Vektor $h = (h^1,\ldots,h^N)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^N$ festzulegen. Die Verwendung von nichtganzzahligen und auch negativer Werte $h^j$ ergibt sich aus der Voraussetzung eines **vollkommenen Kapitalmarkts**[4]. Der Wert des Portfolios im Zeitpunkt $t$ ist dann die Summe der Positionen $S_t^j \cdot h^j$ aller $N$ Wertpapiere, also das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^N$ von $S_t$ und $h$ bzw. das Matrizenprodukt des Zeilenvektors $S_t^\mathsf{T}$ und des Spaltenvektors $h$:

$$S_t^\mathsf{T} h = \sum_{j=1}^{N} S_t^j h^j .$$

Falls der Portfoliovektor $h$ ebenfalls noch zeit- und zufallsabhängig (z. B. abhängig von den Kursentwicklungen bestimmter Aktien bis zum Zeitpunkt $t$) sein soll, nimmt man $h = (h_t(\omega))_{t\in I,\omega\in\Omega}$ als $\mathbb{R}^N$-wertigen stochastischen Prozess über $I \times \Omega$. Auch hierfür wird im Folgenden die Vektorschreibweise

$$h = (h_0,h_1,\ldots,h_T)^\mathsf{T}$$

mit $h_t = (h_t(\omega))_{\omega\in\Omega}$, $t \in I$, und $h_t(\omega) = (h_t^1(\omega),\ldots,h_t^N(\omega))^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^N$ verwendet. Der (Vermögens-)Wert des Portfolios im Zeitpunkt $t$ ist dann

$$V_t(h) = S_t^\mathsf{T} h_t = \sum_{j=1}^{N} S_t^j h_t^j .$$

---

[3] Das Binomialbaummodell wird z. B. beschrieben bei Kremer (2011), S. 229–286, (2017), S. 45–53, 75–96, Bäuerle und Rieder (2017), S. 21–36, 85f, 89–92, Trautmann (2007), S.327–374, Sandmann (2010), S. 36f, 199ff, Rudolph und Schäfer (2010), S. 257ff.

[4] Eine negative Anzahl $h^j$ des Wertpapiers $S^j$ im Portfolio bedeutet analog zu einem negativen Kontostand in Euro auf einem Bankkonto, dass $|h^j|$ Wertpapiere $S^j$ geliehen und dann anderweitig am Markt verkauft wurden und daher eine Schuld in der Höhe $|h^j|S^j$ in diesem Wertpapier besteht. Dass bei einer negativen Anzahl $h^j$ derselbe Preis $S^j$ verwendet wird wie bei einer positiven Anzahl, ist eine der Annahmen des sogenannten vollkommenen Kapitalmarkts, nämlich dass beim Kauf und beim Verkauf der gleiche Preis gilt. Eine ausführlichere Beschreibung der idealisierenden Annahmen des vollkommenen Kapitalmarkts findet man beispielsweise bei Kruschwitz (1999), S. 39, 64, 140f, Korn u. Korn (1999), S. 66, Hausmann et al. (2002), S. 27f, 39, 73, 132, 198f, 411, Kremer (2011), S. 6f, Deck (2006), S. 8f, Trautmann (2007), S. 7–15, Deutsch (2008), S. 59–61, Kallsen (2009), S. 35, Sandmann (2010), S. 20ff, 200, Rudolph und Schäfer (2010), S. 207f, 239, Reitz (2011), S.73f., Hull (2012), S. 144, Korn (2014), S. 103, Bäuerle u. Rieder (2017), 4–5.

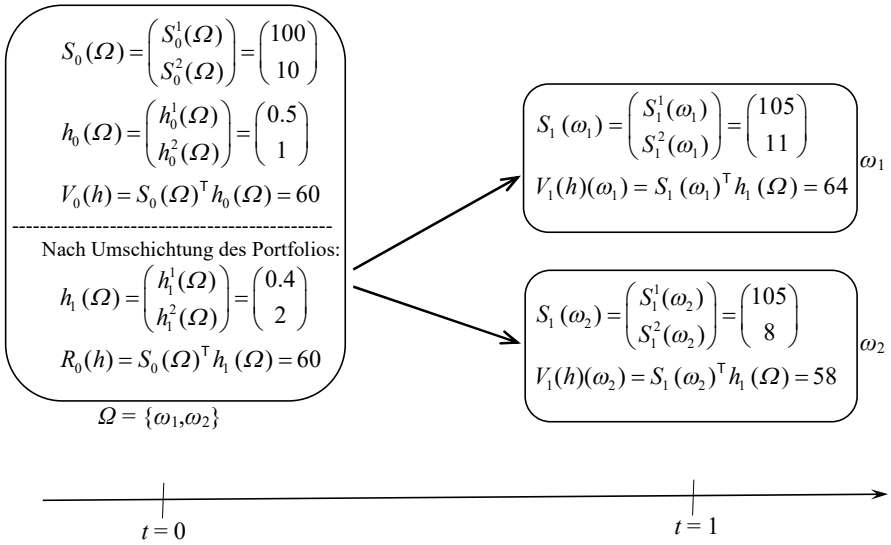



**Abb. 2.1** Grafische Darstellung eines Beispiels für einen dividendenlosen Preisprozess $S$ ($\delta = 0$) und eine Handelsstrategie $h$ in einem Einperiodenmodell ($T = 1$) mit zwei Zuständen ($K = |\Omega| = 2$), den Vermögenswerten $V_0(h)$, $V_1(h)$ des Portfolios, dem Startkapitaleinsatz $V_0(h)$ vor dem Handeln (der Umschichtung), dem Reinvestitionswert $R_0(h)$ nach dem Handeln im Zeitpunkt 0 und dem daraus sich entwickelnden Endkapital $V_1(h)$ für die Entnahme im Zeitpunkt 1.

Bei der nachfolgenden Modellierung des Wissenszuwachses hinsichtlich der stochastischen Prozesse $S$ und $\delta$ wird in Abschnitt 2.4 zu den Preisprozessen $S$ und $\delta$ die natürliche **Filtration** $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ von $\sigma$-Algebren konstruiert, mit der diese Prozesse $S$ und $\delta$ dann **$\mathcal{F}$-adaptiert**[5] bzw. die zugehörigen Zustandsfunktionen $S_t$ und $\delta_t$ **$\mathcal{F}_t$-messbar**[6] sind ($t \in I$). Der verwendete Handelsprozess $h$ soll nun ebenfalls an diese Filtration $\mathcal{F}$ adaptiert und darüber hinaus noch **$\mathcal{F}$-vorhersehbar** (vorhersagbar, englisch: predictable, previsible) sein. Dies bedeutet, dass die Zustandsfunktion $h_0$ $\mathcal{F}_0$-messbar ($\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{P}_0 = \{\Omega\}$), also nach der unten in Abschnitt 2.3 noch folgenden Charakterisierung der Messbarkeit konstant auf $\Omega$ ist und für die weiteren Zeitpunkte $t = 1,\ldots,T$ die jeweilige Zustandsfunktion $h_t$ sogar $\mathcal{F}_{t-1}$-messbar ist. Nach Abschnitt 2.3 bedeutet dies, dass $h_t$ auf jedem $A_{t-1} \in \mathcal{P}_{t-1}$ ($= \mathcal{Z}(\mathcal{F}_{t-1})$, siehe Abschnitt 2.2) konstant ist und dass zum Zeitpunkt $t$ - 1 schon bekannt, welches Ereignis $A_{t-1}$ eingetreten ist und welcher Wert $h_t(A_{t-1})$ für die Zustandsfunktion $h_t$ angenommen wird. Insbesondere ist dann auch noch $h_1$ konstant auf $\Omega$. Ein vorhersehbarer Handelsprozess $h$ für die Portfolioentwicklung wird als **Handelsstrategie** bezeichnet. Ein einfaches Beispiel für einen Preisprozess $S$ und eine Handelsstrategie $h$ wird in der Abbildung 2.1 dargestellt. Bei der Bewertung von

---

[5] Die Definition der Adaptiertheit eines stochastischen Prozesses $S = (S_t)_{t \in I} = (S_0,\ldots,S_T)^{\mathsf{T}}$ bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ von $\sigma$-Algebren durch die $\mathcal{F}_t$-Messbarkeit der einzelnen Zustandsfunktionen $S_t$ bezüglich der $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_t$ gibt Kremer (2011) auf S. 147, Bauer (2002) WT (Wahrscheinlichkeitstheorie) auf S. 138.

[6] Die Definition der Messbarkeit einer Zustandsfunktion gibt Bauer (1992) MI (Maß- und Integrationstheorie) auf S. 41. Die Messbarkeit wird hier in Abschnitt 2.3 bei endlichem Zustandsraum noch durch die Konstanz auf den Elementen der induzierten Partition charakterisiert.

Zahlungsprofilen werden im Folgenden nur Zahlungsprofile $X$ betrachtet, die an die vorgegebene Filtration $\mathcal{F}$ adaptiert und durch die Zahlungsprofile $L(h)$ von ($\mathcal{F}$-vorhersehbaren) Handelsstrategien $h$ nachbildbar sind.

Als weiterer Modellbestandteil könnte noch für die Kursentwicklungen $\omega_k \in \Omega$ jeweils deren Eintrittswahrscheinlichkeit[7] $P(\omega_k)$ und somit insgesamt ein Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß) $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ modelliert werden.[8] Es werden dabei nur Zustände $\omega_k \in \Omega$ erfasst, die eine positive Wahrscheinlichkeit $P(\omega_k)$ besitzen.[9] Damit sind dann die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ aller Ereignisse $A \in \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega) =: \mathcal{A}$ im gefilterten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\in I},P)$ festgelegt.[10] Weiter ergeben sich auch die (Wahrscheinlichkeits-)Verteilungen[11] (die W-Gesetze, die Bildmaße $\mathrm{Vert}(S_t) = S_t(P) = P_{S_t}$ auf $\mathcal{B}^N$) für die $\mathcal{F}_t$-messbaren $\mathbb{R}^N$-wertigen Preis-Zustandsfunktionen $S_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$. Es wird sich aber zeigen, dass durch die Festlegung des Preises $\pi(X)$ eines Zahlungsprofils $X$ nach dem Duplikationsprinzip (siehe Abschnitt 3.3.2) diese Eintrittswahrscheinlichkeiten in die Bewertung nicht eingehen. Die Bewertung erfolgt nicht wahrscheinlichkeitstheoretisch (mit den tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten), sondern, wie in Kapitel 3 noch gezeigt wird, sicher (für alle $\omega \in \Omega$) durch das Lösen linearer Gleichungssysteme, also mittels linearer Algebra.

---

7 Beispielsweise werden die Eintrittswahrscheinlichkeiten bei der Kursentwicklung im Binomialbaum-Modell modelliert bei Kremer (2011), S. 243–250.

8 Die Annahme $\mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$ ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, da man nach Kühn (2016), S. 37, andernfalls zum Grundraum $\Omega' = \{A_\omega \in \mathcal{F}_T : \omega \in \Omega\}$ übergehen kann, der aus den Atomen $A_\omega = \bigcap_{\omega\in A\in\mathcal{F}_T} A \in \mathcal{F}_T$ ($\omega \in \Omega$) der $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_T$ besteht, und dann $\mathcal{P}_T = \{A_\omega : \omega \in \Omega\} = \Omega'$ und $\mathcal{F}_T = \sigma(\mathcal{P}_T) = \sigma(\Omega') = \mathcal{P}(\Omega')$ erhält.

9 Die Annahme der Positivität der Eintrittswahrscheinlichkeiten $P(\{\omega\})$ für alle Zustände $\omega \in \Omega$ ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, da man nach Kühn (2016), S. 37, andernfalls zum Teilraum $\Omega' = \{\omega \in \Omega : P(\{\omega\}) > 0\}$, zu den Spur-$\sigma$-Algebren $\mathcal{F}_T' = \mathcal{F}_T \cap \Omega'$ und $\mathcal{F}_t' = \mathcal{F}_t \cap \Omega'$ ($t \in I$) und zur Restriktion $P' = P\big|_{\mathcal{F}_T'}$ des W-Maßes $P$ auf $\mathcal{F}_T'$ übergeht.

10 Die Definitionen der hier verwendeten Begriffe der Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie, nämlich $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}$ in (über) $\Omega$, Algebra, messbare Menge $A \in \mathcal{A}$, Messraum $(\Omega,\mathcal{A})$, Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß) $P$, $\sigma$-Algebra $\mathcal{B}^N$ der Borelschen Mengen (benannt nach dem französischen Mathematiker Émile Borel, 1871–1956), Lebesgue-Borelsches Maß (L-B-Maß), benannt nach Émile Borel und seinem Landsmann und Mathematiker Henri Lebesgue, 1875–1941), Wahrscheinlichkeitsraum (W-Raum) $(\Omega,\mathcal{A},P)$, Filtration $\mathcal{F}$ von $\sigma$-Algebren, gefilterter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},P)$, natürliche (kanonische, minimale) Filtration, Zustandsfunktion, Zufallsvariable (messbare Zustandsfunktion) und adaptierter stochastischer Prozess, findet man bei Bauer (1992) MI, S. 3, 5, 32, 38, 40, Bauer (2002) WT, S. 4, 14, 138, Kremer (2011), S. 141, 145f, Hausmann et al. (2002), S. 348f, 353. Bei einem endlichen Zustandsraum $\Omega$ sind auch die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subseteq \Omega\}$ von $\Omega$ und die $\sigma$-Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{F}_t$ ($t \in I$) endlich. Hier stimmt dann der Begriff der $\sigma$-Algebra mit dem Begriff der Algebra überein.

11 Die Definition der (Wahrscheinlichkeits-)Verteilung (des W-Gesetzes, Bildmaßes) $\mathrm{Vert}(X) := P_X := X(P)$ auf $\mathcal{B}^N$ für eine auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (W-Raum) $(\Omega,\mathcal{A},P)$ definierte $(\mathcal{A},\mathcal{B}^N)$-messbare Zufallsvariable $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ durch $P_X(A') := P\{X \in A'\} = P(X^{-1}(A'))$, $A' \in \mathcal{B}^N$, findet man bei Bauer (2002) WT, S. 15.

## 2.2 Induzierte Partition einer σ-Algebra

In welcher Weise die $\mathcal{F}$-Adaptiertheit eines stochastischen Prozesses $X \in \mathcal{W}_N$ den Wissenszuwachs[12] hinsichtlich des Prozesses beschreibt, wird im nachfolgenden Abschnitt 2.5 noch näher erläutert. Dazu wird aber zunächst noch die schöne bijektive Beziehung bereitgestellt, die es bei endlichem oder abzählbarem Zustandsraum $\Omega$ zwischen den σ-Algebren $\mathcal{A}$ über $\Omega$ und den speziellen von $\mathcal{A}$ induzierten Partitionen $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ von $\Omega$ gibt. Mit dieser Beziehung kann dann die Messbarkeit einer auf $\Omega$ definierten Zustandsfunktion und die Adaptiertheit eines auf $I \times \Omega$ definierten stochastischen Prozesses anschaulicher und übersichtlicher dargestellt werden.

Bei endlichem oder abzählbarem Zustandsraum $\Omega$ gehört nicht nur zu jeder **Partition**[13] $\mathcal{P}$ von $\Omega$ die von $\mathcal{P}$ **erzeugte σ-Algebra**[14] $\sigma(\mathcal{P})$ als die kleinste σ-Algebra $\mathcal{A}$ über $\Omega$ mit der Eigenschaft $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}$,

$$\sigma(\mathcal{P}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{C}\ \sigma-Algebra \\ \mathcal{P}\subseteq\mathcal{C}}} \mathcal{C}$$

sondern auch umgekehrt zu jeder σ-Algebra $\mathcal{A}$ über $\Omega$ die eindeutig bestimmte feinste Partition[15]

---

[12] Erklärungen und Beispiele zur Zunahme der Information über einen an eine Filtration $\mathcal{F}$ adaptierten stochastischen Prozess findet man bei Kremer (2011), S. 136–139, Hausmann et al. (2002), S. 351–353. Die Interpretation der Adaptiertheit als Wissenszuwachs wird hier im nachfolgenden Abschnitt 2.5 dargestellt.

[13] Die Definition für eine Partition (disjunkte Zerlegung, schlichte Überdeckung, Klasseneinteilung, Faserung) $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ einer Menge $\Omega \neq \emptyset$ als ein Mengensystem von nichtleeren, paarweise disjunkten (elementfremden) Teilmengen von $\Omega$, deren Vereinigung wieder $\Omega$ ergibt, findet man beispielsweise im Lexikon der Mathematik, Bd. 1 (2000), S.95, bei v. Mangoldt und Knopp, Bd. 4 (1973), S. 16f, und Kremer (2011) auf S. 137: $A \neq \emptyset\ \forall\ A \in \mathcal{P}$, $\Omega = \bigcup_{A\in\mathcal{P}} A$ , $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ für $A_1, A_2 \in \mathcal{P}$ mit $A_1 \neq A_2$. Die Definition für eine Filtration $(\mathcal{P}_t)_{t\in I}$ von Partitionen $\mathcal{P}_t$ (Für $s \leq t$ ist $\mathcal{P}_s \preccurlyeq \mathcal{P}_t$, d. h. $\mathcal{P}_t$ ist feiner als $\mathcal{P}_s$: $\forall\ A_{t+1} \in \mathcal{P}_{t+1}\ \exists\ A_t \in \mathcal{P}_t$ mit $A_{t+1} \subseteq A_t$; $\mathcal{P}_0 = \{\Omega\}$ (der Zufall tritt erst ab $t = 1$ auf), $\mathcal{P}_T = \{\{\omega_1\},\ldots,\{\omega_K\}\}$) und den dadurch gegebenen Informationspfaden $(A_t)_{t\in I}$ ($A_t \in \mathcal{P}_t$, $A_t \supseteq A_{t+1}$) im Informationsbaum findet man bei Kremer (2011) auf S. 137–139. Für die zur Filtration $(\mathcal{P}_t)_{t\in I}$ von Partitionen gehörige Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ von σ-Algebren $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{P}_t)$ gilt $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\Omega\}$, $\mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{F}_{t+1} \supseteq \mathcal{F}_t$ für $t = 0,\ldots,T\text{-}1$. Die erste Bedingung bedeutet, dass die Werte der adaptierten Prozesse zum Zeitpunkt $t = 0$ noch deterministisch und erst ab den Zeitpunkten $t > 0$ zufallsabhängig sind. Eine Filtration von σ-Algebren ist eine bezüglich der Mengenrelation $\supseteq$ (umfasst) aufsteigende Folge von σ-Algebren.

[14] Die Definition einer von einem Mengensystem $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ (in $\Omega$) erzeugten σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ als die kleinste $\mathcal{E}$ umfassende σ-Algebra bzw. als Durchschnitt aller $\mathcal{E}$ umfassenden σ-Algebren findet man bei Bauer (1992) MI, S. 4. $\mathcal{E}$ heißt ein Erzeuger von $\sigma(\mathcal{E})$.

[15] Den Beweis zur Existenz und Einzigkeit der von einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ induzierten Partition $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ gibt Kremer (2011) auf S. 143f. für einen endlichen Zustandsraum $\Omega$. Bei der Verallgemeinerung auf ein abzählbares $\Omega$ oder noch allgemeiner auf eine abzählbare σ-Algebra $\mathcal{A}$ (bei beliebigem $\Omega$) muss

$$\mathcal{P} = \mathcal{Z}(\mathcal{A}) := \{A_\omega : \omega \in \Omega\} \subseteq \mathcal{A} \text{ mit } \quad A_\omega := \bigcap_{\omega \in A \in \mathcal{A}} A \in \mathcal{A},$$

von $\Omega$ mit der Eigenschaft

$$(\mathcal{P} \subseteq)\ \sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{A}.$$

Diese Partition $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ ist also unter den Partitionen von $\Omega$ der feinste Erzeuger von $\mathcal{A}$ und wird die von der $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}$ **induzierte Partition** genannt. Die Elemente $A_\omega$, $\omega \in \Omega$, der Partition $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ sind für festes $\omega$ gegeben als der Durchschnitt der $A$ mit $\omega \in A \in \mathcal{A}$ und wegen der Abzählbarkeit von $\Omega$ bzw. allgemeiner wegen der Abzählbarkeit von $\mathcal{A}$ mittels einer abzählbaren Durchschnittsbildung definiert und somit auch Elemente von $\mathcal{A}$. Mit $\mathcal{A}$ ist auch die Teilmenge $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ abzählbar. Die Elemente $A_\omega$ von $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ sind in $\mathcal{A}$ nicht weiter teilbar (Begründung nachfolgend in Beweisteil 1) und werden als **atomare Mengen** („Atome“) der $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}$ bezeichnet. Analog können die Elemente $\omega' \in A_\omega$ als die „Nukleonen“ von $A_\omega$ und die Mengen $C \in \mathcal{A}$, die nach Beweisteil 2) aus den Atomen $A_\omega$, $\omega \in C$, zusammengesetzt sind, als „**Moleküle**“ bezeichnet werden.

**Beweis** zur Existenz und Einzigkeit der induzierten Partition zu einer $\sigma$-Algebra in einem abzählbaren Zustandsraum $\Omega$: Der Beweis wird noch etwas allgemeiner unter der Voraussetzung geführt, dass $\mathcal{A}$ eine abzählbare $\sigma$-Algebra ist. Eine dazu äquivalente Voraussetzung ist, dass es eine abzählbare Partition $\mathcal{E}$ von $\Omega$ mit $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$ gibt.

1) Als Erstes wird gezeigt, dass das oben definierte Mengensystem $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ eine Partition von $\Omega$ ist. Jede zu festem $\omega \in \Omega$ als Durchschnittsmenge gebildete Menge $A_\omega$ ist als Durchschnitt von höchstens abzählbar vielen $A \in \mathcal{A}$, da $\mathcal{A}$ abzählbar ist, in $\mathcal{A}$ gelegen. Weiter ist $A_\omega$ nichtleer, da zumindest $A = \Omega$ die Eigenschaft $\omega \in A \in \mathcal{A}$ erfüllt, somit das Mengensystem für die Durchschnittbildung nichtleer ist und $\omega \in A_\omega$ gilt. Außerdem ist $\Omega$ die Vereinigung aller $A_\omega$, $\omega \in \Omega$. Es ist somit nur noch zu zeigen, dass für zwei $A_\omega$, $A_{\omega'} \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ entweder $A_\omega \cap A_{\omega'} = \emptyset$ oder $A_\omega = A_{\omega'}$ gilt. Im Fall $B := A_\omega \cap A_{\omega'} \neq \emptyset$ ist also $A_\omega = A_{\omega'}$ zu zeigen. Da $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra ist, gilt wegen $A_\omega, A_{\omega'} \in \mathcal{A}$ auch $B \in \mathcal{A}$, $C := A_\omega \setminus B \in \mathcal{A}$. Aufgrund der Definition von $B$ und $C$ gilt $B, C \subseteq A_\omega$. Es wird nun zunächst begründet, dass der Fall $\omega \notin B$, also $\omega \in C := A_\omega \setminus B \subseteq A_\omega$ nicht auftreten kann. Andernfalls würde nämlich aus $\omega \in C \in \mathcal{A}$ und der Definition von $A_\omega$ die Inklusion $A_\omega \subseteq C$, dann insgesamt die Gleichheit $A_\omega = C$ und schließlich der Widerspruch $B = A_\omega \setminus C = \emptyset$ folgen. Demzufolge kann nur der Fall $\omega \in B$ eintreten, so dass aus $\omega \in B \in \mathcal{A}$ die Inklusion $A_\omega \subseteq B$ und insgesamt die Gleichheit $A_\omega = B$ folgt. Da Analoges für $\omega'$ an Stelle von $\omega$ gezeigt werden kann, ergibt sich im Fall $B \neq \emptyset$ die Gleichheit $A_\omega = B = A_{\omega'}$.

---

beim Beweis von Kremer nur der Begriff Algebra durch $\sigma$-Algebra ersetzt werden (siehe nachfolgenden Beweis). Für überabzählbares $\mathcal{A}$ ist jedoch diese bijektive Beziehung einer $\sigma$-Algebra zu einer Partition nicht mehr gegeben: Im Allgemeinen muss dann $A_\omega$ kein Element der $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}$ mehr sein. Für $\Omega = \mathbb{R}$ enthalten zwar die beiden überabzählbaren $\sigma$-Algebren $\mathcal{B}^1$ und $\mathcal{P}(\Omega)$ wegen $\{\omega\} \in \mathcal{B}^1$ und $\{\omega\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ auch die überabzählbare Partition $\mathcal{P} := \{\{\omega\} : \omega \in \mathbb{R}\}$ als feinste Partition von $\mathbb{R}$ überhaupt, aber es gilt $\sigma(\mathcal{P}) \subsetneq \mathcal{B}^1 \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Die Partition $\mathcal{P}$ ist also jeweils kein Erzeuger für $\mathcal{B}^1$ und für $\mathcal{P}(\Omega)$. Die Eigenschaft $\sigma(\mathcal{P}) \neq \mathcal{B}^1$ ergibt sich, da das Mengensystem $\mathcal{C} := \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ abzählbar} \vee \mathbb{R} \setminus A \text{ abzählbar}\}$ nach Bauer (1992) MI, S. 3, Bsp. 2, eine $\sigma$-Algebra ist und dann $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{C} \neq \mathcal{B}^1$ ist. Für die Eigenschaft $\mathcal{B}^1 \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ gibt Bauer (1992) MI, S. 52, ein Beispiel für eine mittels des Auswahlaxioms nicht ganz einfach zu konstruierende nicht-Borelsche Menge $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{B}^1$ an.

Begründung der **Atomarität** (Unteilbarkeit) von $A_\omega$ in $\mathcal{A}$: Mit dem eben verwendeten Beweisgang kann auch begründet werden, dass jedes $A_\omega \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ in $\mathcal{A}$ nicht weiter teilbar ist, dass es also keine Zerlegung $A_\omega = B \cup C$ mit nichtleeren, disjunkten $B, C \in \mathcal{A}$ ($B, C \subseteq A_\omega$) gibt: Nimmt man nämlich eine derartige Zerlegung an und o. E. $\omega \in C \in \mathcal{A}$, so folgt wie oben $A_\omega = C$ und $B = A_\omega \setminus C = \emptyset$, also ein Widerspruch.

2) Als Zweites ist nachzuweisen, dass $\sigma(\mathcal{Z}(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$ gilt, dass also $\mathcal{A}$ die von $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ erzeugte σ-Algebra bzw. $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ ein Erzeuger von $\mathcal{A}$ ist.
„⊆“: Die Inklusion „⊆“ erhält man, da $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ gilt, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und $\sigma(\mathcal{Z}(\mathcal{A}))$ die kleinste $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ umfassende σ-Algebra ist.
„⊇“: Zur Begründung der umgekehrten Inklusion „⊇“ ist für ein beliebiges $D \in \mathcal{A}$ die Eigenschaft $D \in \sigma(\mathcal{Z}(\mathcal{A}))$ zu beweisen. Für $D = \emptyset$ ist dies erfüllt, da $\sigma(\mathcal{Z}(\mathcal{A}))$ eine σ-Algebra ist. Für $D \neq \emptyset$ und jedes $\omega \in D$ gilt, wie oben in 1) bereits begründet wurde, $\omega \in A_\omega$ und somit die Inklusion

$$D = \bigcup_{\omega \in D} \{\omega\} \subseteq \bigcup_{\omega \in D} A_\omega =: C.$$

$C$ liegt als die Vereinigung der abzählbar vielen $A_\omega \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ ($\subseteq \sigma(\mathcal{Z}(\mathcal{A})) \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ abzählbar), $\omega \in D$, ebenfalls in der σ-Algebra $\sigma(\mathcal{Z}(\mathcal{A}))$. Außerdem gilt für jedes $\omega \in D$ wegen $\omega \in D \in \mathcal{A}$ und der Definition von $A_\omega$ als Durchschnitt aller $A \in \mathcal{A}$ mit $\omega \in A \in \mathcal{A}$ die Inklusion $A_\omega \subseteq D$ und somit $C \subseteq D$. Insgesamt ist somit $D = C \in \sigma(\mathcal{Z}(\mathcal{A}))$, also auch $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{Z}(\mathcal{A}))$ und insgesamt $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{Z}(\mathcal{A}))$ gezeigt.
Für die $D \in \mathcal{A}$ ist damit auch die **Molekülstruktur** mit seinen abzählbar vielen Atomen $A_\omega \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$, $\omega \in D$, gezeigt:

$$\text{Für } D \in \mathcal{A} \text{ gilt } D = \bigcup_{\omega \in D} A_\omega .$$

Schreibt man die Partition

$$\mathcal{P} = \mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \{A_\omega : \omega \in \Omega\} = \{A_p : p \in P\}$$

mit einer abzählbaren Indexmenge $P \subseteq \mathbb{N}$ für seine verschiedenen Elemente, so ist $P = \{1,\ldots,k\}$ bei endlichem $\mathcal{P}$ bzw. $P = \mathbb{N}$ bei abzählbar unendlichem $\mathcal{P}$. Für die damit gebildete Menge

$$\mathcal{D} := \{C = \bigcup_{m \in M} A_m : M = M(C) \subseteq P\},$$

deren Elemente man allein durch die Vereinigungsbildung einer Auswahl der abzählbar vielen Elemente $A_p$ der Partition $\mathcal{P}$ erhält, gilt zunächst $\mathcal{D} \subseteq \sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{A}$. Außerdem wurde oben gezeigt, dass jedes $D \in \mathcal{A}$ Molekülstruktur besitzt, also die Vereinigung der $A_\omega \in \mathcal{P}$ mit $\omega \in D$ ist, und somit Element von $\mathcal{D}$ ist. Daher gilt auch $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ und insgesamt $\mathcal{D} = \mathcal{A}$.[16]

3) Als Drittes ist zu beweisen, dass die Partition $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ feiner ist als jede Partition $\mathcal{R}$ ($\subseteq \mathcal{A}$) von $\Omega$ mit der Eigenschaft

$$\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{A}$$

und somit die eindeutig bestimmte feinste derartige Partition ist. Zum Nachweis der Aussage, dass $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ feiner ist als $\mathcal{R}$, ist für ein beliebiges $A \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ die Existenz eines $R \in \mathcal{R}$ mit $A \subseteq R$ zu zeigen. Für $A \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ gilt $A \neq \emptyset$. Daher gibt es ein $\omega \in A$ und dazu ein $R \in \mathcal{R}$ mit $\omega \in R \in \mathcal{A}$. Nach Beweisteil 1 (mit $\omega \in A = A_{\omega'} \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$, $\omega \in A_\omega$) ist $A = A_\omega$, nach der Definition von $A_\omega$ gilt $A_\omega \subseteq R$, also $A = A_\omega \subseteq R$. Damit ist $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ feiner als $\mathcal{R}$. □

[16] Die Aussage $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{D}$ ist der Inhalt des Lemmas 3.13 von Kremer (2011), S. 142.

## 2.3 Charakterisierung der Messbarkeit einer Zustandsfunktion

Mit Hilfe der bijektiven Beziehung zwischen den $\sigma$-Algebren $\mathcal{A}$ und den von $\mathcal{A}$ induzierten Partitionen $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ eines endlichen (oder abzählbaren) Zustandsraums $\Omega$ kann die Messbarkeit einer auf $\Omega$ definierten Zustandsfunktion $f$ auf einfache Weise charakterisiert werden:[17]

**Charakterisierung der Messbarkeit einer Zustandsfunktion**: Der Zustandsraum $\Omega$ sei abzählbar. Eine $\mathbb{R}^N$-wertige Zustandsfunktion $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ ist genau dann $(\mathcal{A},\mathcal{B}^N)$-**messbar** ($\mathcal{A}$-messbar), d. h.

$$f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in B\} \in \mathcal{A} \text{ für alle } B \in \mathcal{B}^N$$

($\mathcal{B}^N$ = $\sigma$-Algebra der Borelschen Mengen in $\mathbb{R}^N$), wenn $f$ auf jeder Menge $A \in \mathcal{P} := \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ konstant ist:

$$\text{Für jedes } A \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}) \text{ gilt: } f(\omega) = c_A =: f(A) \in \mathbb{R}^N \text{ für alle } \omega \in A.$$

Bei der hier vorliegenden Behandlung des Mehrperiodenmodells mit endlichem Zustandsraum kann dann also stets die letztere einfachere und anschaulichere Charakterisierung der Messbarkeit von Funktionen verwendet werden. Eine $\mathcal{A}$-messbare Funktion wird daher auch als $\mathcal{P}$-messbar bezeichnet. Als Folgerung der Konstanz der messbaren Funktion $f$ auf jedem Element $A$ der Zerlegung $\mathcal{P} = \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ ergibt sich in Abschnitt 2.6 eine Summendarstellung und eine Tupel-Schreibweise von $f$. In der Abbildung 2.2 ist eine messbare reellwertige Zustandsfunktion $f$ auf endlichem Zustandsraum $\Omega$ dargestellt, die auf jedem Element $A_m$ der Partition $\mathcal{P} = \{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ von $\Omega$ konstant ist. Die messbare Funktion $f$ kann durch das Quadrupel $(f(A_1),f(A_2),f(A_3),f(A_4))^\mathsf{T} = (5,0,2,7)^\mathsf{T}$ der Funktionswerte $f(A_m)$ beschrieben werden.

[17] Den Beweis zur Charakterisierung der Messbarkeit findet man bei Kremer (2011), S. 149, bzw. (2017), S. 126f, für endliches $\Omega$. Für abzählbares $\Omega$ muss nur der Begriff Algebra durch $\sigma$-Algebra ersetzt werden. Für endliches $\Omega$ stimmt der Begriff $\sigma$-Algebra mit dem Begriff Algebra überein, für welche die Abgeschlossenheit der Vereinigungsbildung und die Additivität der Maße von paarweise disjunkten Mengen nur für endlich viele Mengen (endliche Additivität) statt für abzählbar viele Mengen (abzählbare Additivität, $\sigma$-Additivität) gefordert wird. Statt der Abzählbarkeit von $\Omega$ genügt auch die Abzählbarkeit der beiden Mengen $\mathcal{A}$ und $f(\Omega)$.

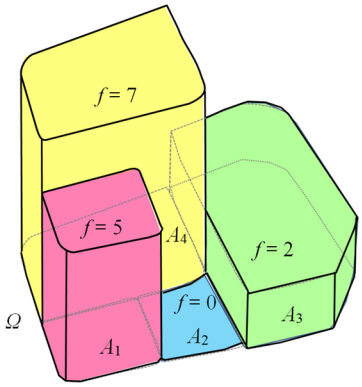



**Abb. 2.2** Grafische Darstellung einer messbaren reellwertigen Zustandsfunktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

**Beweis** zur Charakterisierung der Messbarkeit einer Zustandsfunktion $f \in (\mathbb{R}^N)^\Omega$ bei abzählbarem Zustandsraum $\Omega$: Bei abzählbarem $\Omega$ ist auch die $\sigma$-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) := \{T : T \subseteq \Omega\}$, die dadurch induzierte Partition $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ $(\subseteq \mathcal{A})$ und die Bildmenge $f(\Omega)$ der $\mathbb{R}^N$-wertigen Zustandsfunktion $f$ abzählbar. Statt der Abzählbarkeit von $\Omega$ wird nachfolgend nur die Abzählbarkeit von $\mathcal{A}$ (bzw. $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$) und $f(\Omega)$ verwendet. Mit abzählbaren Indexmengen $P, L \subseteq \mathbb{N}$ gilt also

$$\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \{A_p \in \mathcal{A} : p \in P\},$$
$$f(\Omega) = \{c_i \in \mathbb{R}^N : i \in L\}.$$

1) „⇐“: Falls nun $f$ auf jedem $A_p \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ $(\subseteq \mathcal{A})$ jeweils konstant ist und zu festem $c_i \in f(\Omega)$ genau für die Indizes $p \in P_i \subseteq P$ auf den Mengen $A_p \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ der Funktionswert $f(A_p) = c_i$ angenommen wird, so gilt wegen der Abzählbarkeit der Indexmenge $P_i$ $(\subseteq P)$ zunächst für die Urbildmenge

$$U_i := f^{-1}(\{c_i\}) = \bigcup_{p \in P_i} A_p$$

die Inzidenz $U_i \in \mathcal{A}$ für jedes $c_i \in f(\Omega)$. Daraus folgt dann auch für jedes $B \in \mathcal{B}^N$ wegen der Abzählbarkeit der Indexmenge $\{i \in L : c_i \in B\}$ $(\subseteq L)$ auch die Inzidenz

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(B \cap f(\Omega)) = \bigcup_{i \in L : c_i \in B} f^{-1}(\{c_i\}) = \bigcup_{i \in L : c_i \in B} U_i \in \mathcal{A}.$$

Die Funktion $f$ ist somit messbar.

2) „⇒“: Ist umgekehrt $f$ messbar, also $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}^N$, so liegen insbesondere für die speziellen Borelschen Mengen[18] $\{c_i\} \in \mathcal{B}^N$ $(i \in L)$ deren Urbildmengen in $\mathcal{A}$: Es ist also $U_i = f^{-1}(\{c_i\}) \in \mathcal{A}$ und $f(U_i) = c_i$. Wegen der Abzählbarkeit von $\mathcal{A}$ und des (nach Beweisteil 2 von Abschnitt 2.2) daraus resultierenden „Molekülaufbaus“ der Elemente von $\mathcal{A}$ mit den Atomen $A_p$ von $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ gilt

$$U_i = \bigcup_{p \in P_i} A_p$$

mit einer Indexmenge $P_i \subseteq P$. Die Urbildmenge $U_i$ von $c_i$ setzt sich aus bestimmten $A_p \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ zusammen, auf denen $f$ den konstanten Wert $c_i$ annimmt. Damit ist auch $f(A_p) = c_i$ für diese $p \in P_i$, also $f$ konstant auf jedem Atom $A_p$, das beim Molekülaufbau der Urbildmengen $U_i$ beteiligt ist.

---

[18] Nach Bauer (1992) MI, S. 35, sind die einpunktigen Teilmengen $\{x\}$ des $\mathbb{R}^N$ Borelsch und L-B-Nullmengen (Nullmengen des Lebesgue-Borelschen Maßes, des L-B-Maßes). Außerdem ist dann auch jede abzählbare Teilmenge des $\mathbb{R}^N$ Borelsch und L-B-Nullmenge.

Es soll nun noch für ein beliebig fixiertes $A_m \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ gezeigt werden, dass $f$ auf $A_m$ konstant ist. Dazu wählt man ein $\omega' \in A_m \neq \emptyset$. Für den zugehörigen Funktionswert $f(\omega') \in f(\Omega)$ gilt $f(\omega') = c_i$ mit einem $i \in L$. Daher ist $\omega' \in U_i$ und $\omega' \in A_p \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ mit einem $p \in P_i$ ($A_p \subseteq U_i$). Daraus folgt zunächst $A_m = A_{\omega'} = A_p$ und dann für deren Bildmengen $f(A_m) = f(A_p) = \{c_i\}$, so dass $f$ auf $A_m$ konstant ist.

3) Anmerkungen:
a) Schwächere hinreichende Bedingung für die Charakterisierung der Messbarkeit der Zustandsfunktion: Im Beweisteil 1) wird deutlich, dass für diese Charakterisierung der Messbarkeit einer Zustandsfunktion $f$ statt der Abzählbarkeit des Zustandsraum $\Omega$ es auch genügt, dass sowohl die $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}$ (und damit $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$) als auch die Bildmenge $f(\Omega)$ abzählbar sind.
b) Information über die Funktionswerte einer messbaren Funktion mittels „beobachtbarer“[19] (d. h. in $\mathcal{A}$ gelegener) Urbildmengen: Die Darstellung

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{i \in L : c_i \in B} U_i$$

der Elemente $f^{-1}(B)$ der von der Zustandsfunktion $f$ erzeugten $\sigma$-Algebra

$$\mathcal{F} := \sigma(f) := f^{-1}(\mathcal{B}^N) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}^N\}$$

in Beweisteil 1) bedeutet, dass wegen der vorausgesetzten Abzählbarkeit der Bildmenge $f(\Omega)$ bzw. der zugehörigen Indexmenge $L$ die Elemente von $\mathcal{F}$ jeweils durch Vereinigung von abzählbar vielen Elementen der abzählbaren Partition

$$\mathcal{U} = \{U_i = f^{-1}(\{c_i\}) : i \in L\}$$

von $\Omega$ gebildet werden können. Damit gilt $\mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{U})$.
Da wegen $\{c_i\} \in \mathcal{B}^N$ und der Definition von $\mathcal{F}$ außerdem $U_i \in \mathcal{F}$ ($i \in L$) und somit stets auch die umgekehrte Inklusion $\sigma(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{F}$ gilt, folgt hier insgesamt

$$\sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{F},$$

sodass $\mathcal{U}$ ein Erzeuger von $\mathcal{F}$ ist. Bei abzählbarer Bildmenge $f(\Omega)$ genügt es also für die Messbarkeit von $f$, d. h. für die Inklusion $\mathcal{F} := f^{-1}(\mathcal{B}^N) \subseteq \mathcal{A}$, wenn die Inklusion

$$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{A}$$

für den Erzeuger $\mathcal{U}$ von $\mathcal{F}$ gilt. In diesem Fall liegt dann nämlich auch $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{U})$ in $\mathcal{A}$ und $f$ ist messbar. Bei einer $\mathcal{A}$-messbaren Zustandsfunktion $f$ liegen alle $f$-Urbildmengen $f^{-1}(B)$ ($B \in \mathcal{B}^N$) bzw. $U_i = f^{-1}(\{c_i\})$ ($c_i \in f(\Omega)$) in der $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}$ der „beobachtbaren Ereignisse“ $A \subseteq \Omega$. Die Information über die Lage der Funktionswerte der messbaren Funktion $f$ in $\mathbb{R}$ wird also widergespiegelt durch die Partition $\mathcal{U}$ bzw. durch die $\sigma$-Algebra $\sigma(\mathcal{U}) = \sigma(f)$ der Urbildmengen in $\mathcal{A}$. In der Vorausschau sind alle diese Urbildmengen beobachtbare Ereignisse. Nach Ablauf des zugehörigen wahrscheinlichkeitstheoretischen Experiments ist dann für jede Urbildmenge bekannt, ob sie eingetreten ist oder nicht, bzw. ob ein zugehöriger Funktionswert angenommen worden ist oder nicht. □

[19] Die „theoretisch möglichen Ereignisse“ $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ und die „beobachtbaren Ereignisse“ $A \in \mathcal{A}$ werden bei Bauer (2002) WT auf S. 5 unterschieden.

## 2.4 Beschreibung des Wissenszuwachses über einen Prozess durch die natürliche Filtration

Nach der Modellierung der Kursentwicklung der Wertpapiere soll auch die im Lauf der Zeit erfolgende Zunahme der Information über die Kursentwicklung bzw. über den Preisprozess $S \in (\mathbb{R}^N)^{I \times \Omega}$ modelliert werden. Dies erfolgt durch die Konstruktion eines Zustandsraums $\Omega$, einer Filtration $(\mathcal{P}_t)_{t \in I}$ von Partitionen $\mathcal{P}_t$ von $\Omega$ und der zugehörigen Filtration (isotonen bzw. aufsteigenden Familie) $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ von $\sigma$-Algebren $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{P}_t)$, an welche der $\mathbb{R}^N$-wertige Preisprozess $S$ adaptiert ist. Genau genommen erfolgt die Konstruktion der sogenannten **natürlichen (kanonischen, minimalen, assoziierten) Filtration**[20] des Preisprozesses $S$. Die hierbei für jeden Zeitpunkt $t \in I$ angegebene $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_t$ ist die von den Abbildungen $S_s : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $s \le t$, **erzeugte** $\sigma$-**Algebra**, also die kleinste $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}$, bezüglich der jede der Zustandsfunktionen $S_s$, $s \le t$, $(\mathcal{A},\mathcal{B}^N)$-messbar ist ($\mathcal{B}^N$ ist die $\sigma$-Algebra der Borelschen Mengen in $\mathbb{R}^N$):

$$\mathcal{F}_t = \sigma(S_s;\, s \le t) = \sigma\Big(\bigcup_{s \le t} \sigma(S_s)\Big)$$

$$= \sigma\Big(\bigcup_{s \le t} S_s^{-1}(\mathcal{B}^N)\Big) = \sigma\Big(\bigcup_{s \le t} \{S_s^{-1}(B_s) : B_s \in \mathcal{B}^N\}\Big) .$$

Nach den Überlegungen im obigen Beweisteil 1) von Abschnitt 2.3 zur Charakterisierung der Messbarkeit genügt es bei endlichem oder abzählbarem Zustandsraum $\Omega$ (und damit abzählbarem Bildraum $S_s(\Omega)$) statt der Urbildmengen $S_s^{-1}(B_s)$ von beliebigen Borelschen Mengen $B_s \in \mathcal{B}^N$ nur die Urbildmengen der speziellen (abzählbaren) Teilmengen $B_s \subseteq S_s(\Omega)$ ($\subseteq \mathbb{R}^N$) zu betrachten:[21]

$$\mathcal{F}_t = \sigma\Big(\bigcup_{s \le t} \{S_s^{-1}(B_s) : B_s \subseteq S_s(\Omega)\}\Big) .$$

Nach den Anmerkungen in Teil 3 b) des Beweises in Abschnitt 2.3 spiegelt die einzelne $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_t = \sigma(S_s;\, s \le t)$ das Wissen über die bis zum Zeitpunkt $t$ angenommenen Funktions-

---

[20] Den Begriff der von Abbildungen $S_s$ ($s \in \{1,..,t\}$) erzeugten $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_t = \sigma(S_s;\, s \in \{1,..,t\})$ und der kanonischen (minimalen) Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$, $\mathcal{F}_t = \sigma(S_s;\, s \le t)$, findet man bei Bauer (1992) MI, S. 42, bzw. (2002) WT, S. 138, die Definition der Borelschen Mengen und des Lebesgue-Borelschen Maßes (L-B-Maßes) bei Bauer (1992) MI, S. 32. Die von den Abbildungen $S_s$ ($s \le t$) erzeugte $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_t = \sigma(S_s;\, s \le t)$ ist die kleinste $\sigma$-Algebra, bezüglich der jedes $S_s$ messbar ist. Allgemein ist eine einzelne $\sigma$-Algebra die Grundlage für die Definition eines Maßraums bzw. eines Wahrscheinlichkeitsraums. Die spezielle $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_t = \sigma(S_s;\, s \le t)$ hier spiegelt das Wissen über die vom Prozess $S$ im Zeitraum $[0,t]$ angenommenen Funktionswerte $S_s(\omega)$ wider. Weiter ist im Zeitpunkt $t$ dann bekannt, welche der Ereignisse $E \in \sigma(S_s) \subseteq \mathcal{F}_s$ ($s \le t$) eingetreten sind und welche Funktionswerte $S_s(\omega)$ in den Zeitpunkten $s \le t$ angenommen wurden. Mit der natürlichen Filtration (Filtrierung) $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ der $\sigma$-Algebren $\mathcal{F}_t = \sigma(S_s;\, s \le t)$ kann die bis zum jeweiligen Zeitpunkt $t$ vorhandene Information über den stochastischen Prozess $S$ und damit der Wissenszuwachs beschrieben werden.

[21] Bei abzählbarem $\Omega$ ist nämlich auch das Bild $S_s(\Omega)$ abzählbar und nach Bauer (1992) MI, S. 35, Borelsch (eine Borelsche Menge) und L-B-Nullmenge. Für beliebiges $B_s \in \mathcal{B}^N$ ist dann ihre Teilmenge $B_s' := B_s \cap S_s(\Omega) \subseteq S_s(\Omega)$ abzählbar, $B_s' \in \mathcal{B}^N$ und $S_s^{-1}(B_s) = S_s^{-1}(B_s')$. Umgekehrt ist auch jede Teilmenge $B_s'$ von $S_s(\Omega)$ abzählbar und damit Borelsch.

werte $S_s(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $s \le t$, wider. Außerdem spiegelt $\mathcal{F}_t$ nach der ausführlicheren Erklärung im nächsten Abschnitt 2.5 auch das Wissen über die zum Endzeitpunkt $T$ noch möglichen Funktionswerte wider. Da die $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_t$ von allen $S_s$, $s \le t$, erzeugt wird, bildet die Folge $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ eine aufsteigende (isotone) Folge, also eine Filtration von $\sigma$-Algebren. Die aufsteigende Folge $\mathcal{F}$ modelliert somit den im Laufe der Zeit erfolgenden Wissenszuwachs über den Preisprozess $S$.
Mit dieser Filtration $\mathcal{F}$ von $\sigma$-Algebren $\mathcal{F}_t$ liegt der Preisprozess $S$ im Untervektorraum[22]

$$\mathcal{W}_N := \mathcal{W}_N(\mathcal{F}) = \{X \in (\mathbb{R}^N)^{I\times\Omega} : X \text{ ist } \mathcal{F}\text{-adaptierter stochastischer Prozess}\}$$

der $\mathcal{F}$-adaptierten $\mathbb{R}^N$-wertigen stochastischen Prozesse. In Abschnitt 2.5 wird noch begründet, dass auch für einen beliebigen stochastischen Prozess $X$ die Adaptiertheit als Wissenszuwachs interpretiert werden kann. Die bei Kremer (2011), S. 151f, angegebene Konstruktionsmethode für den Zustandsraum und die natürliche Filtration wird nachfolgend etwas ausführlicher dargestellt. Ein Zahlenbeispiel für einen an eine Filtration $\mathcal{P}$ von Partitionen adaptierten Preisprozess $S$ wird in Beispiel 3.2 in Abschnitt 3.2.1 gegeben, in dem auch der Wissenszuwachs über $S$ mit dem Informationsbaum veranschaulicht wird.

**Konstruktion des endlichen Zustandsraums und der natürlichen Filtration** zu einem Prozess $S$: Nach der mathematischen Modellierung der Kursentwicklung der $N$ Wertpapiere $S^j$ ($j \in J = \{1,\dots,N\}$) können die Kurspfade des $N$-dimensionalen Preisvektors $S = (S^1,\dots,S^N)^\mathsf{T}$ angegeben werden. Es sind dies $K$ paarweise verschiedene Abbildungen

$$S(k) : t \in I = \{0,\dots,T\} \mapsto S(k)(t) := S_t(k) := (\, S_t^1(k)\,,\dots,\, S_t^N(k)\,)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^N$$

mit der zum Zeitpunkt $t = 0$ gehörigen gleichen Anfangswertbedingung

$$S(k)(0) := S_0(k) := (\, S_0^1(k)\,,\dots,\, S_0^N(k)\,)^\mathsf{T} = (a_0{}^1,\dots,\, a_0{}^N)^\mathsf{T} = a_0 \in \mathbb{R}^N$$

für alle $k \in \{1,\dots,K\}$. Jede dieser $K$ Abbildungen $S(k)$ liefert einen Pfadvektor

$$\omega_k := S(k) = (S_t(k))_{t\in I} = (S_0(k),\dots,S_T(k))^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{N\cdot(T+1)}$$

und beschreibt ein Szenario (einen Umweltzustand, ein Elementarereignis, ein theoretisch mögliches Ereignis) für das Marktmodell. Die Menge dieser Pfadvektoren ergibt den Zustandsraum $\Omega$ des Marktmodells:

$$\Omega := \{\omega_k = S(k) : k = 1,\dots,K\}.$$

Damit kann auch ein $N$-dimensionaler Preisprozess $\hat{S}$ als stochastischer Prozess

$$\hat{S} : (t,\omega) \in I \times \Omega \mapsto \hat{S}(t,\omega) = \hat{S}_t(\omega) \in \mathbb{R}^N$$

durch die Zuordnungsvorschrift

$$\hat{S} : (t,\omega_k) \in I \times \Omega \mapsto = \hat{S}_t(\omega_k) := S_t(k)$$

derart definiert werden, dass jeweils der zum Zustand $\omega_k \in \Omega$ gehörige Pfad (Trajektorie, Realisation)

$$\hat{S}(.,\omega_k) : t \in I \mapsto \hat{S}_t(\omega_k) = S_t(k) \in \mathbb{R}^N$$

bzw. das zugehörige $N\cdot(T+1)$-Tupel $(\hat{S}_0(\omega_k),\dots,\hat{S}_T(\omega_k))^\mathsf{T}$ mit dem $k$-ten Pfadvektor $\omega_k = (S_0(k),\dots,S_T(k))$ des Preisvektors $S$ übereinstimmt. Außerdem erfüllt der Preisprozess $\hat{S}$ die gemeinsame Anfangswertbedingung $\hat{S}_0(\omega_k) = S_0(k) = a_0$ für alle $\omega_k \in \Omega$. Aufgrund der Identität $\hat{S}_t(\omega_k) = S_t(k)$ können die Indizes $k$ und die Zustände $\omega_k$ identifiziert und der Preisprozess $\hat{S}$ wie der Preisvektor auch mit $S$ bezeichnet werden: $\hat{S}_t(\omega_k) =: S_t(\omega_k)$.

Nachfolgend wird nun eine Filtration $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_t)_{t\in I}$ von Partitionen $\mathcal{P}_t$ des Zustandsraums $\Omega$ derart konstruiert, dass der Preisprozess $S$ an die Filtration $\mathcal{P}$ adaptiert ist. Dazu wird für den festen Zeitpunkt $t \in I$

---

[22] Die Unterraum-Eigenschaften ($\emptyset \ne \mathcal{W}_N \subseteq (\mathbb{R}^N)^{I\times\Omega}$, $\mathcal{W}_N + \mathcal{W}_N \subseteq \mathcal{W}_N$, $\alpha\mathcal{W}_N \subseteq \mathcal{W}_N$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$) von $\mathcal{W}_N$ ergeben sich aus $O \in \mathcal{W}_N$ und den bei Bauer (1992) MI, S. 59, Satz 9.4, angegebenen Eigenschaften der messbaren Funktionen, nämlich dass jede konstante Funktion messbar ist und mit zwei messbaren reellwertigen Funktionen auch deren Summe und deren Produkt messbar sind.

der zum Zeitintervall $[0,t]$ gehörige Teilprozess $P^t := (S_0,\ldots,S_t)^\mathsf{T}$ als Abbildung

$$P^t : \omega \in \Omega \mapsto P^t(\omega) := (S_0(\omega),\ldots,S_t(\omega))^\mathsf{T} \in P^t(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^{N\cdot(t+1)}$$

betrachtet. Zu den Punkten $c^t = (c_0^t,\ldots,c_t^t)^\mathsf{T} \in P^t(\Omega)$ werden dann die Ereignisse $A(c^t) \subseteq \Omega$ als die zur Abbildung $P^t$ gehörigen Urbildmengen von $c^t$ definiert:

$$\begin{aligned} A(c^t) &:= (P^t)^{-1}(\{c^t\}) = \{\omega \in \Omega : P^t(\omega) = c^t\} \\ &= \{\omega \in \Omega : S_s(\omega) = c_s^t \text{ für } s = 0,\ldots,t\} = \bigcap_{s\le t} S_s^{-1}(\{c_s^t\}) . \end{aligned}$$

Für das aus diesen Ereignissen $A(c^t)$ gebildete Mengensystem

$$\mathcal{P}_t = \{A(c^t) : c^t \in P^t(\Omega)\}$$

wird gezeigt, dass es eine Partition von $\Omega$ ist: Zunächst ist wegen $K = |\Omega| \ge 1$, $\Omega \ne \emptyset$ auch $P^t(\Omega) \ne \emptyset$. Für jedes $c^t \in P^t(\Omega)$ existiert dann ein $\omega' \in \Omega$ mit $P^t(\omega') = c^t$, sodass $\omega' \in A(c^t)$ ist und $A(c^t)$ nicht leer ist. Zu jedem $\omega \in \Omega$ existiert das $P^t$-Bild $c^t := P^t(\omega) \in P^t(\Omega)$, sodass $\omega \in A(c^t)$ gilt und insgesamt $\Omega$ die Vereinigung dieser $A(c^t)$ ist. Falls es zu $c^t$, $d^t \in P^t(\Omega)$ ein $\omega' \in A(c^t) \cap A(d^t)$ gibt, folgt $c^t = P^t(\omega') = d^t$ und $A(c^t) = A(d^t)$. Verschiedene derartige Ereignisse $A(c^t)$, $A(d^t)$ sind also auch disjunkt. Die Ereignisse $A(c^t)$, $c^t \in P^t(\Omega)$, liefern also eine (disjunkte) Zerlegung von $\Omega$.

Weiter wird gezeigt, dass das System $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_t)_{t\in I}$ eine Filtration von Partitionen ist: Für $t = 0$ und das deterministisch bestimmte[23]

$$c^0 = c_0^0 = a_0 = S_0(\Omega) = P^0(\Omega)$$

ist $A(c^0) = (P^0)^{-1}(\{c^0\}) = \Omega$ und $\mathcal{P}_0 = \{\Omega\}$. Für $t = T$ und $c^T \in P^T(\Omega) = S(\Omega)$ ist mit einem $\omega_k \in \Omega$ zunächst

$$c^T = P^T(\omega_k) = S(\omega_k) = (S_0(\omega_k),\ldots,S_T(\omega_k))^\mathsf{T} = (S_0(k),\ldots,S_T(k))^\mathsf{T} = \omega_k,$$

damit $\omega_k$ eindeutig durch $c^T$ festgelegt und somit $A(c^T) = (P^T)^{-1}(\{c^T\}) = S^{-1}(\{c^T\}) = \{\omega_k\}$. Ingesamt erhält man $\mathcal{P}_T = \{\{\omega_1\},\ldots,\{\omega_K\}\}$.

Für $t \in \{0,\ldots,T\text{-}1\}$ ist $\mathcal{P}_{t+1}$ feiner als $\mathcal{P}_t$, d. h. zu jedem $A(c^{t+1}) \in \mathcal{P}_{t+1}$, $c^{t+1} = (c_0^{t+1},\ldots,c_t^{t+1},c_{t+1}^{t+1}) \in P^{t+1}(\Omega)$, gibt es ein $A(c^t) \in \mathcal{P}_t$ mit $A(c^{t+1}) \subseteq A(c^t)$: Mit der Festlegung $c^t := (c_0^{t+1},\ldots,c_t^{t+1}) \in P^t(\Omega)$ gilt nämlich

$$A(c^{t+1}) = \bigcap_{s\le t+1} S_s^{-1}(\{c_s^{t+1}\}) = A(c^t) \cap S_{t+1}^{-1}(\{c_{t+1}^{t+1}\}) \subseteq A(c^t).$$

Aufgrund der Definition der Ereignisse $A(c^t) \in \mathcal{P}_t$ ist die Abbildung $P^t = (S_0,\ldots,S_t)$ auf jedem $A(c^t)$ konstant gleich $c^t$ und somit messbar bezüglich der Partition $\mathcal{P}_t$ bzw. bezüglich der von $\mathcal{P}_t$ erzeugten $\sigma$-Algebra

$$\mathcal{G}_t := \sigma(\mathcal{P}_t).$$

„$\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_t$“: Die Konstanz von $P^t$ auf jedem $A(c^t)$ bedeutet auch, dass die Abbildungen $S_s$, $s \le t$, auf jedem $A(c^t) \in \mathcal{P}_t$ konstant gleich $c_s^t$ und somit ebenfalls messbar bezüglich $\mathcal{G}_t$ sind. Da für jedes $c_s \in S_s(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^N$ die einelementige Menge $\{c_s\}$ in $\mathcal{B}^N$ liegt, folgt wegen der $(\mathcal{G}_t,\mathcal{B}^N)$-Messbarkeit der Abbildung $S_s$, dass $S_s^{-1}(\{c_s\}) \in \mathcal{G}_t$ gilt. Weiter ist dann auch für jede (abzählbare) Teilmenge $B_s \subseteq S_s(\Omega)$ deren Urbildmenge

$$S_s^{-1}(B_s) = \bigcup_{c_s \in B_s \cap S_s(\Omega)} S_s^{-1}(\{c_s\})$$

ebenfalls ein Element von $\mathcal{G}_t$. Schließlich folgt für die von den Abbildungen $S_s$ ($s \le t$) erzeugte $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_t$ und die vom Mengensystem $\mathcal{P}_t$ erzeugte $\sigma$-Algebra $\mathcal{G}_t = \sigma(\mathcal{P}_t)$ die Inklusion

$$\mathcal{F}_t = \sigma\Big(\bigcup_{s\le t}\{S_s^{-1}(B_s) : B_s \subseteq S_s(\Omega)\}\Big) \subseteq \mathcal{G}_t.$$

„$\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t$“: Andererseits folgt für beliebig vorgegebenes $c^t = (c_0^t,\ldots,c_t^t) \in P^t(\Omega)$ und die speziellen Bo-

[23] Die Schreibweise $S_0(\Omega) = a_0$ bedeutet, dass $S_0(\omega) = a_0$ für alle $\omega \in \Omega$, das $S_0$-Bild von $\Omega$ gleich $S_0(\Omega) = \{a_0\}$ ist und daher der $S_0$-Funktionswert auch für $\Omega$ definiert werden kann.

relschen Mengen $B_s = \{ c_s^t \} \subseteq S_s(\Omega)$ zunächst $S_s^{-1}(\{c_s^t\}) \in \mathcal{F}_t$ und dann auch

$$A(c^t) = \bigcap_{s \le t} S_s^{-1}(\{c_s^t\}) \in \mathcal{F}_t.$$

Damit gilt auch $\mathcal{P}_t \subseteq \mathcal{F}_t$, $\mathcal{G}_t = \sigma(\mathcal{P}_t) \subseteq \mathcal{F}_t$ und insgesamt $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t$.
Die hier zum Preisprozess $S$ konstruierte Filtration $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in I}$ von $\sigma$-Algebren stimmt also überein mit der natürlichen Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$, an die der Preisprozess $S$ adaptiert ist. △

Analog kann auch für den Dividendenprozess $\delta$, für den derselbe Zustandsraum $\Omega$ wie für $S$ vorliegen soll, die natürliche Filtration $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_t)_{t \in I}$ von Partitionen und die zugehörige Filtration $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_t)_{t \in I}$ von $\sigma$-Algebren $\mathcal{K}_t = \sigma(\mathcal{R}_t)$ bestimmt werden. Die beiden Prozesse $S$ und $\delta$ sind dann adaptiert an die Filtration $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_t)_{t \in I}$ von Partitionen bzw. die Filtration $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_t)_{t \in I}$ von $\sigma$-Algebren $\mathcal{H}_t = \sigma(\mathcal{S}_t)$, wenn für jedes $t \in I$ die Partition $\mathcal{S}_t$ als die Verfeinerung von $\mathcal{P}_t$ und $\mathcal{R}_t$ und die $\sigma$-Algebra $\mathcal{H}_t$ als die von $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{P}_t)$ und $\mathcal{K}_t = \sigma(\mathcal{R}_t)$ erzeugte $\sigma$-Algebra genommen wird: $\mathcal{S}_t$ ist die Menge aller $P \cap R$ mit $P \in \mathcal{P}_t$, $R \in \mathcal{R}_t$, $P \cap R \neq \emptyset$ und $\mathcal{H}_t = \sigma(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{K}_t)$. Nachfolgend werden nun an Stelle von $\mathcal{S}$ und $\mathcal{H}$ wieder die Bezeichnungen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{F}$ verwendet, so dass die Prozesse $S$ und $\delta$ und dann auch der die Dividenden beinhaltende Preisprozess $S^\delta = S + \delta$ $\mathcal{F}$-adaptiert sind. Das **Marktmodell** kann formal durch das Tupel $((S,\delta),\mathcal{F})$ mit dem zugehörigen gefilterten Messraum $(\Omega,\mathcal{F})$ bzw. dem gefilterten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},P)$ beschrieben werden.

## 2.5 Interpretation der Adaptiertheit als Wissenszuwachs

Im vorherigen Abschnitt 2.4 wurde das im Lauf der Zeit zunehmende Wissen über einen vorgegebenen stochastischen Prozess $S \in (\mathbb{R}^N)^{I \times \Omega}$ mit Hilfe eines Zustandsraums $\Omega$ und einer Filtration von Partitionen bzw. $\sigma$-Algebren modelliert. Dieser Wissenszuwachs spiegelt sich dann wider in einer Zunahme der Information über die zum nächsten Zeitpunkt bzw. zum Endzeitpunkt $T$ noch möglichen Ereignisse.
Nachfolgend wird nun der umgekehrte Weg beschritten, indem bei einer vorgegebenen Filtration $\mathcal{P}$ von Partitionen und der zugehörigen Filtration $\mathcal{F}$ von $\sigma$-Algebren für einen beliebigen $\mathcal{F}$-adaptierten stochastischen Prozess $X \in \mathcal{W}_N = \mathcal{W}_N(\mathcal{F})$ der Wissenszuwachs über diesen Prozess $X$ dargestellt wird. Es sei jetzt also ein endlicher Zustandsraum $\Omega$ ($|\Omega| = K \in \mathbb{N}$) und eine **Filtration $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_t)_{t \in I}$ von Partitionen** $\mathcal{P}_t$ von $\Omega$ vorgegeben. $\mathcal{P}$ ist eine Folge feiner werdenden Partitionen $\mathcal{P}_t$ von $\Omega$,

$$\mathcal{P}_{t+1} \succcurlyeq \mathcal{P}_t \quad \forall\, t = 0,\ldots,T\text{-}1, \text{ d. h. } \forall\, A_{t+1} \in \mathcal{P}_{t+1}\ \exists\, A_t \in \mathcal{P}_t \text{ mit } A_{t+1} \subseteq A_t, \text{ mit}$$
$$\mathcal{P}_0 = \{\Omega\},$$
$$\mathcal{P}_T = \{\{\omega_1\},\ldots,\{\omega_K\}\}.$$

$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ sei die zugehörige **Filtration** (aufsteigende Folge) **der $\sigma$-Algebren** $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{P}_t)$:

$$\mathcal{F}_{t+1} \supseteq \mathcal{F}_t \quad \forall\, t = 0,\ldots,T\text{-}1,$$
$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\Omega\},$$
$$\mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega).$$

Weiter sei $X \in \mathcal{W}_N = \mathcal{W}_N(\mathcal{F})$, also $X = (X_t(\omega))_{t \in I, \omega \in \Omega}$ ein beliebiger **an die Filtration $\mathcal{F}$ adaptierter $\mathbb{R}^N$-wertiger stochastischer Prozess**. Die Adaptiertheit von $X$ wird nun als eine im Zeitablauf erfolgende Zunahme der Information über den stochastischen Prozess $X$ interpretiert. Dazu wird für zwei aufeinanderfolgende Zeitpunkte $t$ und $t + 1$ das jeweils vorhandene Wissen verglichen, das über die zum späteren Zeitpunkt $t + 1$ möglichen Ereignisse $A_{t+1,p} \in \mathcal{P}_{t+1}$ bzw. $E \in \mathcal{F}_{t+1}$ oder die zum Endzeitpunkt $T$ möglichen Ereignisse $A_{T,p} = \{\omega_p\} \in \mathcal{P}_T$ bzw. $E \in \mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$ und die dazugehörigen Funktionswerte zur Verfügung steht. Als Erstes wird das Wissen über die noch möglichen Ereignisse der Partition $\mathcal{P}_{t+1}$ bzw. $\mathcal{P}_T$ und über die möglichen Funktionswerte von $X$ und als Zweites das Wissen über die noch möglichen Ereignisse der $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_{t+1}$ bzw. $\mathcal{F}_T$ und über die möglichen Funktionswerte von $X$ betrachtet.

**Darstellung des Wissenszuwachses mittels der Filtration von Partitionen**
Allgemein sind die Zustände $\omega \in \Omega$ bzw. die Elementarereignisse $\{\omega\} \subseteq \Omega$ und beliebige Teilmengen $T$ des Zustandsraums $\Omega$ nur sogenannte „theoretisch mögliche Ereignisse“ eines Wahrscheinlichkeitsraums (W-Raums) $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Die „beobachtbaren Ereignisse“ $A \subseteq \Omega$ dagegen werden in der $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}$ des W-Raums extra angegeben.[24] Nur für die $A \in \mathcal{A}$ ist die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ von $A$ definiert, mit der in der Vorausschau das Ereignis $A$ eintritt. Hier nun sind in der Vorausschau auf den Zeitpunkt $t \in I$ die beobachtbaren Ereignisse genau

[24] Die theoretisch möglichen Ereignisse und die beobachtbaren Ereignisse werden bei Bauer (2002) WT auf S. 5 unterschieden. Eine $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}$ in $\Omega$ liefert erst die Grundlage für die Definition eines Wahrscheinlichkeitsmaßes bzw. eines Wahrscheinlichkeitsraums.

die Elemente $A_t$ der $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_t$, die jeweils mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit eintreten.[25] Nach Eintritt des Zeitpunkts $t$, also nach Ablauf des zugehörigen wahrscheinlichkeitstheoretischen Experiments, ist dann für jedes Ereignis $A_t \in \mathcal{F}_t$ bekannt, ob es eingetreten oder nicht eingetreten ist. Insbesondere gilt dies auch für die $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$ ($\subseteq \mathcal{F}_t$). Da das Mengensystem $\mathcal{P}_t$ eine disjunkte Überdeckung von $\Omega$ ist, tritt mindestens eines dieser $A_{t,k}$ ein. Da die Ereignisse $A_{t,k}$ paarweise disjunkt (fremd, unvereinbar) sind, tritt höchstens eines der Ereignisse $A_{t,k}$ ein. Insgesamt gilt, dass genau ein $A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$ zum Zeitpunkt $t$ eintritt. Dieses Ereignis $A_{t,m}$ zerfällt in die Ereignisse $A_{t+1,p} \in \mathcal{P}_{t+1}$ mit $A_{t+1,p} \subseteq A_{t,m}$: Wegen $A_{t,m} \in \mathcal{P}_t \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+1}$ und dem zweiten Teil des Beweises von Abschnitt 2.2 ist nämlich das Molekül $A_{t,m}$ von $\mathcal{F}_{t+1}$ die Vereinigung von Atomen $A_{t+1,p}$ von $\mathcal{P}_{t+1}$. Im darauffolgenden Zeitpunkt $t + 1$ tritt dann genau ein Ereignis $A_{t+1,q} \in \mathcal{P}_{t+1}$ mit $A_{t+1,q} \subseteq A_{t,m}$ ein.

Diese Aufeinanderfolge der Ereignisse lässt sich graphentheoretisch mit einem gerichteten (gewurzelten) Baum, dem **Informationsbaum**, veranschaulichen, dessen Knoten die Atome $A_{t,k}$ der Partitionen $\mathcal{P}_t$ sind und bei dem jedes der Atome $A_{t,m}$ durch eine gerichtete Kante $(A_{t,m},A_{t+1,p})$ mit jeder seiner Teilmengen $A_{t+1,p}$ verbunden ist, in die es zum nachfolgenden Zeitpunkt zerfällt. Ein Beispiel eines Informationsbaums wird in Abbildung 2.3 dargestellt. Ein Zahlenbeispiel für den Informationsbaum eines Preisprozesses $S$ wird in Beispiel 3.2 in Abschnitt 3.2.1 gegeben. Jeder im Baum verlaufende Pfad (Kantenzug, Kantenfolge, Weg, engl.: path) $(A_t)_{t\in I}$ mit $A_t \in \mathcal{P}_t$ und $A_t \supseteq A_{t+1}$ für $t = 0,\ldots,T\text{-}1$ von der Wurzel $A_0 = \Omega \in \mathcal{P}_0$ zu einem Blatt $A_T = \{\omega\} \in \mathcal{P}_T$ wird als **Informationspfad** bezeichnet. Beim Fortschreiten auf einem Informationspfad nimmt die Information in der Weise zu, dass rückblickend die Anzahl der bisher eingetretenen Ereignisse $A_s \in \mathcal{P}_s$, $s \le t$, zunimmt und vorausblickend sich die Anzahl der noch möglichen Endzustände $\omega \in \Omega$ verringert. Dieser Wissenszuwachs soll nun noch etwas ausführlicher beschrieben werden.

[25] Erstaunlicherweise treten bei endlichem Zustandsraum $\Omega$ diese Wahrscheinlichkeiten bei der Bewertung bzw. Preisberechnung von $\mathcal{F}$-adaptierten stochastischen Prozessen $X \in \mathcal{W}(\mathcal{F})$, die mittels $\mathcal{F}$-vorhersehbarer Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N$ duplizierbar sind ($X \in L(\mathcal{H}_N)$), nicht auf.

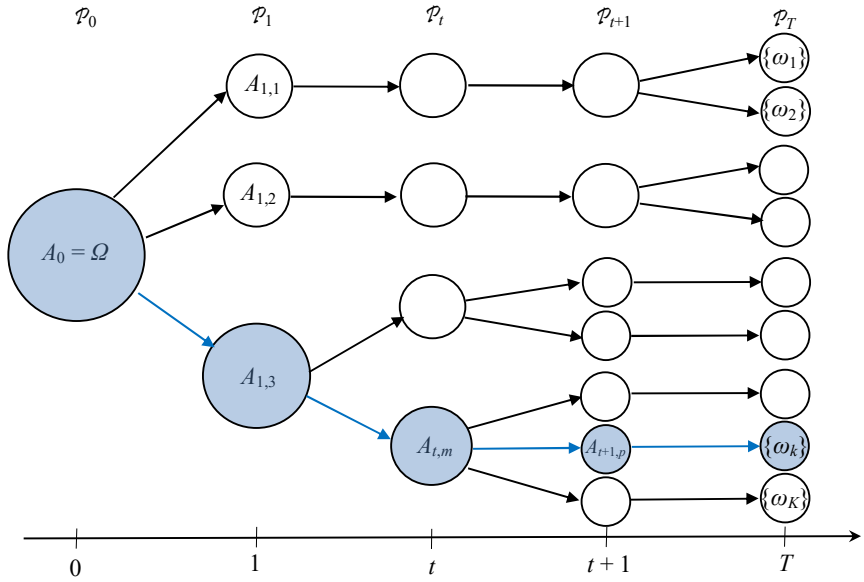



**Abb. 2.3** Der Informationsbaum zu einer Filtration $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_t)_{t\in I}$ von Partitionen und ein blau gezeichneter spezieller Informationspfad

Zum Zeitpunkt $t = 0$ bedeutet die $\mathcal{F}_0$-Messbarkeit von $X_0$ wegen $\mathcal{P}_0 = \{\Omega\}$, dass die Zustandsfunktion $X_0$ auf $\Omega$ den konstanten Wert $X_0(\Omega) \in \mathbb{R}^N$ annimmt ($X_0(\Omega) = X_0(A_0) := X_0(\omega)$ ist konstant für alle $\omega \in \Omega$). Im zugehörigen graphentheoretischen Informationsbaum führen $k_1$ Kanten $(A_0,A_{1,k})$ vom Knoten $A_0 = \Omega \in \mathcal{P}_0$ zu den Nachfolgerknoten $A_{1,k} \in \mathcal{P}_1$ ($k = 1,\ldots,k_1$). Im Zeitpunkt $t = 0$ ist aber noch nicht bekannt, welches Ereignis $A_{1,m}$ bei $t = 1$ eintritt bzw. welcher Knoten $A_{1,m}$ erreicht und welcher Funktionswert $X_1(A_{1,m})$ angenommen wird. Vorausblickend auf alle nachfolgenden Zeitpunkte $t = 1, \ldots, T$ besteht hier noch die größte Unsicherheit, da in diesen Zeitpunkten noch alle Ereignisse $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$ ($k = 1,\ldots,k_t$) eintreten bzw. beobachtet werden können.

Zum darauffolgenden Zeitpunkt $t = 1$ tritt dann genau ein Ereignis $A_{1,m} \in \mathcal{P}_1$ ein und die Zustandsfunktion $X_1$ nimmt genau den Funktionswert $X_1(A_{1,m})$ an. Beim Blick vom Zeitpunkt $t = 1$ aus auf die abgelaufenen Zeitpunkte $t = 0$ und $t = 1$ ist bekannt, dass bei $t = 0$ das Ereignis $A_0 = \Omega$ und bei $t = 1$ das Ereignis $A_{1,m}$ stattgefunden hat und die Funktionswerte $X_0(\Omega)$ und $X_1(A_{1,m})$ angenommen wurden. Beim Blick vom Zeitpunkt $t = 1$ aus auf den Endzeitpunkt $t = T$ können dann nur noch die Zustände (Elementarereignisse) $\omega$, die in dem bei $t = 1$ realisierten $A_{1,m}$ liegen, als Endzustände realisiert werden bzw. die zugehörigen Funktionswerte $X_1(\omega)$ angenommen werden. Beim Blick von $t = 1$ aus auf den Zeitpunkt $t = 2$ können nur noch noch die Ereignisse $A_{2,p} \in \mathcal{P}_2$ eintreten, die in $A_{1,m}$ liegen bzw. können nur noch die Funktionwerte $X_2(A_{2,p})$, $A_{2,p} \in \mathcal{P}_2$ mit $A_{2,p} \subseteq A_{1,m}$, angenommen werden. Alle anderen Ereignisse $A_{2,p} \in \mathcal{P}_2$ mit $A_{2,p} \nsubseteq A_{1,m}$ können nicht auftreten. Im Informationsbaum können vom Knoten $A_{1,m}$ aus nur noch die Knoten $A_{2,p}$ mit der Eigenschaft $A_{2,p} \subseteq A_{1,m}$ durch Kanten erreicht werden.

Wenn dann zum Zeitpunkt $t = 2$ genau das bestimmte Ereignis $A_{2,q} \subseteq A_{1,m}$ realisiert worden ist bzw. genau der bestimmte Funktionswert $X_2(A_{2,q})$ angenommen worden ist, können beim Blick von $t = 2$ aus auf $t = T$ nur noch die Endzustände $\omega \in A_{2,q}$ realisiert werden. Auf diese Weise nimmt im Zeitablauf die Unsicherheit über die noch möglichen Endzustände $\omega \in \Omega$ bei $t = T$ ab.

Allgemein ist zum Zeitpunkt $t$ ($t = 0,\ldots,T\text{-}1$) bekannt, genau welches der Ereignisse $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$ und welcher Funktionswert $X_t(A_{t,k})$ eingetreten ist. Für jedes der Ereignisse $A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$ ist also bekannt, ob es eingetreten ist oder nicht. Vom Standpunkt des eingetretenen Ereignisses $A_{t,m}$ aus ist rückblickend nun für alle Zeitpunkte $s \leq t$ bekannt, welche Ereignisse $A_{s,k}$ auf dem bisher zurückgelegten Informationspfad tatsächlich eingetreten sind bzw. welche Funktionswerte $X_s(A_{s,k})$ tatsächlich angenommen wurden. Die tatsächlich eingetretenen Ereignisse sind die $A_{s,k}$ mit $A_{s,k} \supseteq A_{t,m}$. Vorausblickend ist zum Zeitpunkt $t$ aber nicht bekannt, ob zum Zeitpunkt $t + 1$ ein bestimmtes Ereignis $A_{t+1,p} \in \mathcal{P}_{t+1}$ eintritt oder nicht eintritt. Nach der Realisation von dem genau einen festen Ereignis $A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$ im Zeitpunkt $t$ können zum Zeitpunkt $t + 1$ dann jedoch nur noch Ereignisse

$$A_{t+1,p} \in \mathcal{P}_{t+1} \text{ mit } A_{t+1,p} \subseteq A_{t,m}$$

eintreten bzw. die zugehörigen Funktionswerte $X_{t+1}(A_{t+1,p})$ angenommen werden. Weiter können zum Zeitpunkt $s > t$ nur noch die Ereignisse

$$A_{s,p} \in \mathcal{P}_s \text{ mit } A_{s,p} \subseteq A_{t,m}$$

eintreten bzw. die zugehörigen Funktionswerte $X_s(A_{s,p})$ angenommen werden. Insbesondere können zum Endzeitpunkt $t = T$ nur noch die Endzustände

$$\omega \in \Omega \text{ mit } \omega \in A_{t,m}$$

eintreten und die zugehörigen Funktionswerte $X_T(\omega)$ angenommen werden.

Nach Eintritt des Zeitpunkts $t + 1$ tritt dann aber wieder genau ein Ereignis $A_{t+1,q} \in \mathcal{P}_{t+1}$ mit $A_{t+1,q} \subseteq A_{t,m}$ ein und wird von $X_{t+1}$ genau der Funktionswert $X_{t+1}(A_{t+1,q})$ angenommen. Für jedes Ereignis $A_{t+1,r} \in \mathcal{P}_{t+1}$ ist dann bekannt, ob es eingetreten ist ($r = q$) oder nicht ($r \neq q$). Beim Fortschreiten auf dem Informationspfad vom Ereignis $A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$ zum Ereignis $A_{t+1,q}$ wird erstens im Rückblick das Wissen über die in den Zeitpunkten $s \leq t + 1$ tatsächlich realisierten Ereignisse $A_{s,k} \in \mathcal{P}_s$ und Funktionswerte $X_s(A_{s,k})$ vergrößert. Zweitens wird im Vorausblick die Unsicherheit, welches der Ereignisse $A_{s,p} \in \mathcal{P}_s$ im Zeitpunkt $s > t$ bzw. welcher der Endzustände $\omega \in \Omega$ schließlich im Endzeitpunkt $s = T$ eintritt, ausgehend vom Ereignis $A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$ eingegrenzt auf das Ereignis $A_{t+1,q} \in \mathcal{P}_{t+1}$. In der nachfolgenden Abbildung 2.4 ist für ein Beispiel einer Filtration $\mathcal{P}$ von Partitionen dargestellt, wie beim Übergang vom Zeitpunkt $t$ zum Zeitpunkt $t + 1$ die Anzahl der noch möglichen Ereignisse im Zeitpunkt $t + 1$ bzw. $T$ abnimmt.

Beim Fortschreiten auf dem tatsächlich realisierten Informationspfad $(A_t)_{t \in I}$ im Informationsbaum[26] nimmt rückblickend das Wissen über die tatsächlich eingetretenen Ereignisse bzw. angenommenen Funktionswerte zu und vorausblickend die Unsicherheit über die noch möglichen Ereignisse $A_{s,p} \in \mathcal{P}_s$ und die noch möglichen Endzustände $\omega \in \Omega$ laufend ab. Im End-

[26] Ein Beispiel für einen Informationsbaum mit seinen Informationspfaden gibt Kremer (2011) auf S. 136 (Abb. 3.1), 139f.

zeitpunkt $s = T$ ist der tatsächlich eingetretene Informationspfad bekannt und es bleibt schließlich genau ein Zustand (Elementarereignis) $\omega$ übrig. Mit den Ereignissen $A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$ der Partitions-Filtration $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_t)_{t\in I}$ bzw. genauer mit dem zugehörigen Informationsbaum und seiner Menge an Informationspfaden erhält man also eine anschauliche und übersichtliche Interpretation der $\mathcal{P}$- bzw. $\mathcal{F}$-Adaptiertheit des Prozesses $X$, also der $\mathcal{P}_t$-Messbarkeit der Zustandsfunktionen $X_t$, $t \in I$, als Wissenszuwachs über das Eintreten der Ereignisse $A_{t,m}$ und der zugehörigen Funktionswerte $X_t(A_{t,m})$.

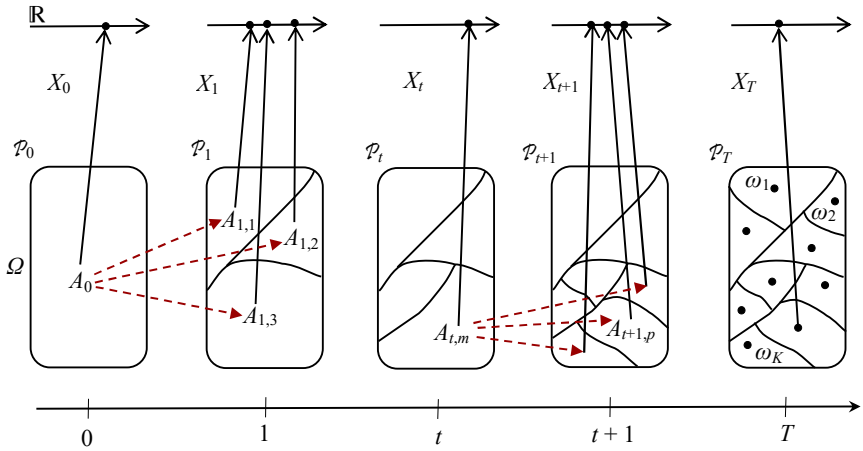



**Abb. 2.4** Der in einer Filtration $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_t)_{t\in I}$ von Partitionen vorhandene Zuwachs des Wissens über einen adaptierten stochastischen Prozess $X = (X_t(\omega))_{t\in I,\omega\in\Omega}$ $(N = 1)$

**Darstellung des Wissenszuwachses mittels der Filtration von $\sigma$-Algebren**
Bei dem in diesem Buch betrachteten Fall eines endlichen Zustandsraums kann der Informationszuwachs über die adaptierten stochastischen Prozesse mit einer Filtration von Partitionen beschrieben werden. Da für überabzählbaren Zustandsraum der Wissenszuwachs aber mit einer Filtration von $\sigma$-Algebren modelliert wird, soll auch hierfür diese Informationszunahme dargestellt werden. Die entsprechende Formulierung der Informationszunahme mit der Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ der $\sigma$-Algebren $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{P}_t)$ ist aber nicht mehr ganz so übersichtlich wie bei den Partitionen. Zum Zeitpunkt $t$ tritt genau ein Atom $A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$ ein und wird genau der zugehörige Funktionswert $X_t(A_{t,m})$ angenommen. Alle anderen Atome $A_{t,k} \neq A_{t,m}$ treten nicht ein. Damit tritt auch jedes der Ereignisse (Moleküle)

$$A \in \mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{P}_t) \text{ mit } A_{t,m} \subseteq A$$

ein. Es wurde nämlich im zweiten Teil des Beweises in Abschnitt 2.2 zur Existenz und Einzigkeit der induzierten Partition gezeigt, dass das Molekül $A \in \mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{P}_t)$ die Vereinigung von Atomen $A_{t,k}$ der Partition $\mathcal{P}_t$ ist:

$$A = \bigcup_{k\in M} A_{t,k}$$

mit einer Indexmenge $M = M(A) \subseteq \{1,\ldots,k_t\}$. Jedes andere Molekül $A \in \mathcal{F}_t$, für das $A_{t,m} \cap A = \emptyset$ ist, tritt dagegen nicht ein. Für jedes Molekül $A \in \mathcal{F}_t$ ist zum Zeitpunkt $t$ bekannt, ob es eintritt ($A_{t,m} \subseteq A$) oder nicht eintritt ($A_{t,m} \cap A = \emptyset$). Beim Blick vom Zeitpunkt $t$ aus auf den Zeitpunkt $t + 1$ ist aber noch nicht bekannt, welche der Ereignisse $D \in \mathcal{F}_{t+1}$ eintreten werden bzw. ob ein bestimmtes Ereignis $D \in \mathcal{F}_{t+1}$ eintritt oder nicht eintritt.

Beim Blick vom Zeitpunkt $t$ aus auf den nachfolgenden Zeitpunkt $t + 1$ ist aber wegen der Eigenschaften der Filtration zumindest bekannt, dass höchstens die Atome

$$A_{t+1,p} \in \mathcal{P}_{t+1} \subseteq \mathcal{F}_{t+1} \text{ mit } A_{t+1,p} \subseteq A_{t,m},\ p \in \{1,\ldots,k_{t+1}\},$$

eintreten und höchstens die zugehörigen Funktionswerte $X_{t+1}(A_{t+1,p})$ angenommen werden können. Die Indexmenge für diese $p$ sei $P$. Nach Abschnitt 2.2, Beweisteil 2) ist innerhalb der $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_{t+1}$ das Molekül $A_{t,m} \in \mathcal{P}_t \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+1}$ die Vereinigung dieser Atome $A_{t+1,p}$, $p \in P$, von $\mathcal{P}_{t+1}$. Richtet man den Blick von den Partitionsereignissen $A_{t+1,p} \in \mathcal{P}_{t+1}$ weg auch auf die $\sigma$-Algebra-Ereignisse $D \in \mathcal{F}_{t+1}$, so können im Zeitpunkt $t + 1$ höchstens die Moleküle

$$D = \bigcup_{r \in R} A_{t+1,r} \in \mathcal{F}_{t+1} \text{ mit } R \subseteq \{1,\ldots,k_{t+1}\},\ R \cap P \neq \emptyset$$

bzw. mit

$$D \cap A_{t,m} \neq \emptyset$$

eintreten. Die bereits angegebene maximale Einschränkung der noch möglichen Funktionswerte $X_{t+1}(A_{t+1,p})$ ist aber allein durch das spezielle $\mathcal{F}_{t+1}$-Ereignis $D' = A_{t,m} \in \mathcal{F}_{t+1}$ gegeben: Es sind nur noch Funktionswerte

$$X_{t+1}(A_{t+1,p}) \text{ mit } A_{t+1,p} \subseteq A_{t,m}$$

möglich. Man hat hier also eine größere Vielfalt bei den noch möglichen $\mathcal{F}_{t+1}$-Ereignissen als bei den noch möglichen Funktionswerten $X_{t+1}(A_{t+1,p})$.
Beim Blick vom Zeitpunkt $t$ aus auf den Endzeitpunkt $T$ können höchstens die Moleküle $D \in \mathcal{F}_T = \mathfrak{P}(\Omega)$ mit $D \cap A_{t,m} \neq \emptyset$ eintreten und höchstens die Funktionswerte $X_T(\omega)$ von $\omega \in A_{t,m}$ angenommen werden. Auch hier hat man wieder eine größere Vielfalt bei den noch möglichen Ereignissen $D \in \mathcal{F}_T$ bzw. $D \subseteq \Omega$ als bei den noch möglichen Funktionswerten $X_T(\omega)$.

Nach Eintritt des Zeitpunkts $t + 1$ tritt dann aber wieder genau ein Ereignis $A_{t+1,q} \in \mathcal{P}_{t+1}$, $q \in P$ bzw. $A_{t+1,q} \subseteq A_{t,m}$, ein und wird von $X_{t+1}$ genau der Funktionswert $X_{t+1}(A_{t+1,q})$ angenommen. Für jedes Ereignis $E \in \mathcal{F}_{t+1}$ ist dann wieder bekannt, ob es eintritt ($A_{t+1,q} \subseteq E$) oder nicht ($A_{t+1,q} \cap E = \emptyset$). Beim Blick vom Zeitpunkt $t + 1$ aus auf den Endzeitpunkt $T$ können höchstens noch die Ereignisse $E \in \mathcal{F}_T = \mathfrak{P}(\Omega)$ mit $E \cap A_{t+1,q} \neq \emptyset$ eintreten und höchstens die Funktionswerte $X_T(\omega)$ von $\omega \in A_{t+1,q}$ angenommen werden. Beim Übergang vom Zeitpunkt $t$ zum Zeitpunkt $t + 1$ wird das Wissen über die auf dem Informationspfad eingetretenen Ereignisse vom Zeitintervall $[0,t]$ erweitert auf das Zeitintervall $[0,t+1]$. Dabei wird die Unsicherheit darüber, welche Ereignisse $D \in \mathcal{F}_{t+1}$ im Zeitpunkt $t + 1$ eintreten, ausgehend von den zunächst möglichen Molekülen

$$D \in \mathcal{F}_{t+1} \text{ mit } A_{t+1,p} \subseteq D \text{ und beliebigem } p \in P$$

eingegrenzt auf die Moleküle

$$E \in \mathcal{F}_{t+1} \text{ mit } A_{t+1,q} \subseteq E \text{ für das feste } q \in P.$$

Ebenso wird die Unsicherheit darüber, welche Ereignisse $D \in \mathcal{F}_T = \mathfrak{P}(\Omega)$ im Endzeitpunkt $T$ eintreten, ausgehend von den zunächst möglichen Ereignissen

$$D \subseteq \Omega \text{ mit } D \cap A_{t,m} \neq \emptyset$$

eingegrenzt auf die Ereignisse

$$E \subseteq \Omega \text{ mit } E \cap A_{t+1,q} \neq \emptyset.$$

Die Unsicherheit über die noch möglichen Funktionswerte $X_{t+1}(A_{t+1,p})$ wird von den zunächst möglichen Indizes $p \in P$ eingegrenzt auf den einzigen Index $q \in P$. Die Unsicherheit über die noch möglichen Funktionswerte $X_T(\omega)$ wird von den zunächst möglichen $\omega \in A_{t,m}$ eingegrenzt auf die $\omega \in A_{t+1,q}$.

Mit Eintritt des Endzeitpunkts $t = T$ gibt es schließlich nur ein einziges Atom $A_{T,k} = \{\omega_k\} \in \mathcal{P}_T = \{\{\omega_1\},\ldots,\{\omega_K\}\}$, das eintritt und dessen Funktionswert $X_T(\omega_k)$ angenommen wird. Von den Ereignissen der zugehörigen $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_T = \mathfrak{P}(\Omega)$ treten nur die Ereignisse $E \in \mathfrak{P}(\Omega)$ mit $\omega_k \in E$ ein.

Man erhält also auch mit den Ereignissen der $\sigma$-Algebren $\mathcal{F}_t$ der Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ eine Interpretation der Adaptiertheit des Prozesses $X$ als Informationszunahme über die Realisation der Ereignisse $D \in \mathcal{F}_t$ und die Realisation eines Funktionswerts $X_t(A_{t,m}) \in X_t(\mathcal{P}_t)$. Zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ gibt es aber im Gegensatz zu einem einzig eintretenden Atom $A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$ eine Vielfalt von eintretenden Molekülen $A \in \mathcal{F}_t$ ($A_{t,m} \subseteq A$). Dementsprechend gibt es auch bei der Vorausschau vom Zeitpunkt $t$ aus auf die noch möglichen Moleküle $D \in \mathcal{F}_{t+1}$ des Zeitpunkts $t + 1$ bei der Filtration der $\sigma$-Algebren eine größere Unsicherheit als bei der entsprechenden Vorausschau auf die noch möglichen Atome $A_{t+1,p} \in \mathcal{P}_{t+1}$ bei der Filtration der Partitionen.

## 2.6 Summen- und Tupel-Darstellung der messbaren Zustandsfunktionen und adaptierten Prozesse

### 2.6.1 Summen- und Tupel-Darstellung der messbaren Zustandsfunktionen

Ist nun bei endlichem Messraum $(\Omega,\mathcal{A})$ die von der $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}$ von $\Omega$ induzierte Partition durch $\mathcal{P} = \mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \{A_m : m = 1,\ldots,k\}$ gegeben und sind

$$\mathbf{1}_{A_m} : \Omega \longrightarrow \{0,1\} \subseteq \mathbb{R}$$

die **charakteristischen Funktionen** (Indikatorfunktionen) dieser Mengen $A_m$ ($m = 1,\ldots,k$), so erhält man die **Summendarstellung** der $(\mathcal{A},\mathcal{B}^N)$-messbaren $\mathbb{R}^N$-wertigen Zustandsfunktion $f \in (\mathbb{R}^N)^\Omega$ bzw.

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

mittels der charakteristischen Funktionen $\mathbf{1}_{A_1},\ldots,\mathbf{1}_{A_k} \in \mathbb{R}^\Omega$. Eine grafische Darstellung einer charakteristischen Funktion wird in Abbildung 2.5 und die Darstellung einer messbaren reellwertigen Zustandsfunktion ($N = 1$) in Abbildung 2.2 gegeben.

$$f = \sum_{m=1}^{k} f(A_m)\mathbf{1}_{A_m} \qquad \text{mit } \mathbf{1}_{A_m}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega \in A_m, \\ 0 & \text{für } \omega \notin A_m. \end{cases}$$

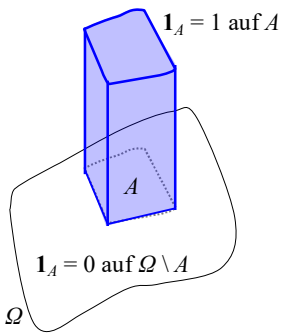



**Abb. 2.5** Grafische Darstellung der charakteristischen Funktion $\mathbf{1}_A : \Omega \longrightarrow \{0,1\}$ einer Teilmenge $A \subseteq \Omega$

Die obige Summendarstellung ist im Fall $N > 1$ keine Koordinatendarstellung bezüglich einer Basis des Vektorraums $(\mathbb{R}^N)^{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}$ der $(\mathcal{A},\mathcal{B}^N)$-messbaren Funktionen

$$f: A_p \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}) \mapsto f(A_p) \in \mathbb{R}^N.$$

Die Koeffizienten $f(A_m) \in \mathbb{R}^N$ in der Summe sind nämlich bei $N > 1$ keine reellen Zahlen, sondern $N$-Tupel reeller Zahlen. Weiter sind die $(\mathcal{A},\mathcal{B}^1)$-messbaren charakteristischen Funktionen $\mathbf{1}_{A_m}$ reellwertig und nicht $\mathbb{R}^N$-wertig wie die dargestellte Zustandsfunktion $f$.

Nur im Falle der Dimension $N = 1$ liegt mit der obigen Summendarstellung für die $(\mathcal{A},\mathcal{B}^1)$-messbare reellwertige Zustandsfunktion $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ schon eine **Koordinatendarstellung** bezüglich der Basis $\mathbf{1}_{A_m}$ $(m = 1,\ldots,k)$ von $\mathbb{R}^{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}$ vor, da hierbei die als Koordinaten auftretenden Funktionswerte $f(A_m)$ reelle Zahlen und die Basisvektoren $\mathbf{1}_{A_m}$ wie $f$ auch $(\mathcal{A},\mathcal{B}^1)$-messbare reellwertige Zustandsfunktionen sind:[27] [28]
Im Falle $N > 1$ erhält man aber eine Koordinatendarstellung

$$f = \sum_{m=1}^{k} (f^1(A_m),\ldots,f^N(A_m))^{\mathsf{T}} \mathbf{1}_{A_m} = \sum_{m=1}^{k}\sum_{j=1}^{N} f^j(A_m)\mathbf{e}_j \mathbf{1}_{A_m}$$
$$= \sum_{m=1}^{k}\sum_{j=1}^{N} f^j(A_m) w_{A_m,j}$$

mit dem Koordinaten-$N{\cdot}k$-Tupel

$$(f^1(A_1),..,f^N(A_1);...;f^1(A_k),..,f^N(A_k))^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{N\cdot k}$$

reeller Zahlen $f^j(A_m)$ zur Basis der $(\mathcal{A},\mathcal{B}^N)$-messbaren $\mathbb{R}^N$-wertigen Zustandsfunktionen

$$w_{A_m,j} := \mathbf{1}_{A_m,j} := \mathbf{1}_{A_m} \cdot \mathbf{e}_j \in (\mathbb{R}^N)^{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}, (A_m,j) \in \mathcal{P} \times J$$

($\mathbf{e}_j = (0,..,0,1,0,..,0)^{\mathsf{T}} = (\delta_{j,k})_{k=1,..,N}$), $j \in J$, Standardbasis des $\mathbb{R}^N$).
Aber dennoch besteht auch mittels der obigen Summendarstellung mit den $\mathbf{1}_{A_m} \in \mathbb{R}^{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}$ eine isomorphe Beziehung zwischen den Abbildungen $f \in (\mathbb{R}^N)^{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}$ und den $k$-Tupeln $(f(A_1),\ldots,f(A_k))^{\mathsf{T}}$ aus $N$-Tupeln $f(A_m)$. Daher kann die $\mathbb{R}^N$-wertige Abbildung $f$ in der **Tupel-Schreibweise** (Tupel-Darstellung) sowohl durch ein $k$-Tupel als auch durch ein Koordinaten-$N{\cdot}k$-Tupel dargestellt bzw. mit diesem identifiziert werden:

$$f \quad \leftrightarrow \quad (f(A_1),\ldots,f(A_k))^{\mathsf{T}}$$
$$\leftrightarrow \quad (f^1(A_1),..,f^N(A_1);...;f^1(A_k),..,f^N(A_k))^{\mathsf{T}}.$$

In der obigen Abbildung 2.2 (in Abschnitt 2.3) ist ein Beispiel einer messbaren reellwertigen Zustandsfunktion $f$ auf endlichem Zustandsraum $\Omega$ dargestellt, welche durch das Quadrupel $(f(A_1),f(A_2),f(A_3),f(A_4))^{\mathsf{T}} = (5,0,2,7)^{\mathsf{T}}$ der Funktionswerte $f(A_m)$ für die Elemente $A_m$ der Partition $\mathcal{P} = \{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ von $\Omega$ beschrieben wird.

---

[27] Diese Koordinatendarstellung für eine messbare reellwertige Zustandsfunktion bringt Kremer (2011) auf S. 150, Lemma 3.24 und (2017) auf S. 58.

[28] Speziell für nichtnegative reelle Funktionswerte $f(A_m)$ erhält man (bei endlichem $f(\Omega)$) eine $\mathcal{A}$-messbare Elementarfunktion oder nichtnegative Treppenfunktion. Diese liegt in einer sog. Normaldarstellung vor, da hier $\mathcal{P}$ eine Zerlegung von $\Omega$ ist. Diese Elementarfunktionen verwendet Bauer (1992) MI, S. 62, in der Integrationstheorie.

### 2.6.2 Summen- und Tupel-Darstellung der adaptierten stochastischen Prozesse

**Summendarstellungen der $\mathcal{F}$-adaptierten Prozesse**

Es sei $X = (X_t(\omega))_{t\in I,\omega\in\Omega} \in \mathcal{W}_N$, also $X$ ein an die Filtration $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_t)_{t\in I}$ der Partitionen $\mathcal{P}_t = \mathcal{Z}(\mathcal{F}_t)$ bzw. an die Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ von $\sigma$-Algebren $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{P}_t)$ adaptierter $N$-dimensionaler stochastischer Prozess auf dem gefilterten Messraum $(\Omega,\mathcal{F})$ (Definition von $\mathcal{W}_N$ in Abschnitt 2.4). Mit den Bezeichnungen

$$\mathcal{P}_t = \{ A_{t,1},\ldots, A_{t,k_t} \},\ k_t := |\mathcal{P}_t| \qquad (t \in I;\ k_0 = 1,\ k_T = K),$$

gelten dann für die $(\mathcal{F}_t,\mathcal{B}^N)$-messbare ($\mathcal{F}_t$-messbare oder $\mathcal{P}_t$-messbare) Zustandsfunktion $X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ die Summendarstellungen

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{m=1}^{k_t} X_t(A_{t,m})\mathbf{1}_{A_{t,m}} \\ &= \sum_{m=1}^{k_t}\sum_{j=1}^{N} X_t^j(A_{t,m})\mathbf{1}_{A_{t,m},j} \end{aligned}$$

mittels der charakteristischen Funktionen $\mathbf{1}_{A_{t,1}}, \ldots, \mathbf{1}_{A_{t,k_t}}$ des $k_t$-dimensionalen Vektorraums

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{t,1} &:= \mathcal{W}_{t,1}(\mathcal{F}_t) \\ &:= \{g \in \mathbb{R}^\Omega : g \text{ ist } (\mathcal{F}_t,\mathcal{B}^1)\text{-messbare Zustandsfunktion}\} \end{aligned}$$

der $(\mathcal{F}_t,\mathcal{B}^1)$-messbaren reellwertigen Funktionen $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ($N = 1$) bzw. mittels der charakteristischen Funktionen $\mathbf{1}_{A_{t,1,1}},..,\mathbf{1}_{A_{t,1,N}}$; …; $\mathbf{1}_{A_{t,k_t,1}},...,\mathbf{1}_{A_{t,k_t,N}}$ (Definition der $\mathbf{1}_{A_{t,k},j} = \mathbf{1}_{A_{t,k}} \cdot \mathbf{e}_j$ in Abschnitt 2.6.1, hier mit $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$ statt $A_m \in \mathcal{P}$) des $N{\cdot}k_t$-dimensionalen Vektorraums

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{t,N} &:= \mathcal{W}_{t,N}(\mathcal{F}_t) \\ &:= \{f \in (\mathbb{R}^N)^\Omega : f \text{ ist } (\mathcal{F}_t,\mathcal{B}^N)\text{-messbare Zustandsfunktion}\} \end{aligned}$$

der $(\mathcal{F}_t,\mathcal{B}^N)$-messbaren $\mathbb{R}^N$-wertigen Funktionen $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ ($N > 1$). Jede dieser Zustandsfunktionen $X_t$ lässt sich durch ein Block-$k_t$-Tupel

$$(X_t(A_{t,1}),...,X_t(A_{t,k_t}))^\mathsf{T}$$

oder ein $N{\cdot}k_t$-Tupel

$$(X_t^1(A_{t,1}),..,X_t^N(A_{t,1});...;X_t^1(A_{t,k_t}),..,X_t^N(A_{t,k_t}))^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{N\cdot k_t}$$

beschreiben.

Für den an die Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ adaptierten stochastischen Prozess $X$ erhält man die Summendarstellungen

$$\begin{aligned} X &= \sum_{t\in I} X_t \mathbf{1}_t \\ &= \sum_{t=0}^{T}\sum_{A_t\in\mathcal{P}_t} X_t(A_t)\mathbf{1}_{t,A_t} \\ &= \sum_{t=0}^{T}\sum_{A_t\in\mathcal{P}_t}\sum_{j=1}^{N} X_t^j(A_t)\mathbf{1}_{t,A_t,j} \end{aligned}$$

mit den charakteristischen Funktionen

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_t &:= \mathbf{1}_{t,\Omega} &&= (0,..,0,\mathbf{1}_\Omega,0,..,0)^\mathsf{T},\\
\mathbf{1}_{t,A_t} &:= \mathbf{1}_t \cdot \mathbf{1}_{A_t} &&= (0,..,0,\mathbf{1}_{A_t},0,..,0)^\mathsf{T},\\
w_{t,A_t,j} &:= \mathbf{1}_{t,A_t,j} := \mathbf{1}_{t,A_t}\cdot\mathbf{e}_j &&= (0,..,0,\mathbf{1}_{A_t}\,\mathbf{e}_j,0,..,0)^\mathsf{T}
\end{aligned}$$

von $(\mathbb{R}^N)^{I\times\Omega}$, $(t,A_t,j) \in I(\mathcal{W}_N) := \{(s,A_s,i) : s \in I, A_s \in \mathcal{P}_s, i \in J\}$. Die charakteristischen Funktionen werden hierbei in der Tupelschreibweise als ($T$+1)-Tupel dargestellt. Der stochastische Prozess $X$ lässt sich dann in der Tupel-Schreibweise beschreiben durch ein ($T$+1)-Tupel

$$(X_0,..,X_t,..,X_T)^\mathsf{T}$$

von $\mathcal{F}_t$–messbaren Zustandsfunktionen $X_t$, durch ein $n_1$-Tupel ($n_1 := k_0+\ldots+k_T$, $k_0 = 1$, $k_T = K$)

$$(X_0(\Omega); X_1(A_{1,1}),..,X_1(A_{1,k_1});\ldots; X_T(A_{T,1}),...,X_T(A_{T,K}))^\mathsf{T}$$

von $N$-Tupeln $X_t(A_{t,k}) = (X_t^1(A_{t,k}),...,X_t^N(A_{t,k}))^\mathsf{T}$ ($t \in I$, $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$) und schließlich durch das Koordinaten-$n$-Tupel ($n := n_N := N\cdot(k_0+\ldots+k_T)$)

$$\left(X_0^1(\Omega),..,X_0^N(\Omega); X_1^1(A_{1,1}),..,X_1^N(A_{1,1}),...,X_1^1(A_{1,k_1}),..,X_1^N(A_{1,k_1});....,X_T^N(A_{T,k_T})\right)^\mathsf{T}$$

$\in \mathbb{R}^n$ bezüglich der $\mathcal{W}_N$-Basis $w_{t,A_t,j} := \mathbf{1}_{t,A_t,j} := \mathbf{1}_t\cdot\mathbf{1}_{A_t}\cdot\mathbf{e}_j$, $(t,A_t,j) \in I(\mathcal{W}_N)$.

**Speziell für** $N = 1$ besitzt der $\mathcal{F}$-adaptierte reellwertige stochastische Prozess $X \in \mathcal{W} = \mathcal{W}_1$ das Koordinaten-$n_1$-Tupel

$$(X_0(\Omega); X_1(A_{1,1}),..,X_1(A_{1,k_1});\ldots; X_T(A_{T,1}),...,X_T(A_{T,K}))^\mathsf{T}$$

aus reellen Zahlen $X_t(A_{t,k})$ ($n_1 = k_0+\ldots+k_T$) bezüglich der $\mathcal{W}$-Basis $w_{t,A_t} = \mathbf{1}_{t,A_t}$ ($t \in I$, $A_t \in \mathcal{P}_t$).

**Summendarstellungen der Handelsstrategien**

Analog besitzt eine ($\mathcal{F}$-vorhersehbare) Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ die Summendarstellungen

$$\begin{aligned}
h &= \sum_{t\in I} h_t\,\mathbf{1}_t\\
&= \sum_{t=0}^{T}\sum_{A_{t-1}\in\mathcal{P}_{t-1}} h_t(A_{t-1})\mathbf{1}_{t,A_{t-1}}\\
&= \sum_{t=0}^{T}\sum_{A_{t-1}\in\mathcal{P}_{t-1}}\sum_{j=1}^{N} h_t^j(A_{t-1})\mathbf{1}_{t,A_{t-1},j}\,.
\end{aligned}$$

Die Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ kann daher identifiziert werden mit dem ($T$+1)-Tupel

$$(h_0,..,h_t,..,h_T)^\mathsf{T}$$

$\mathcal{F}_{t\text{-}1}$-messbarer Zustandsfunktionen $h_t$, mit dem $m_1$-Tupel ($m_1 = k_{\text{-}1}+k_0+k_1+\ldots+k_{T\text{-}1}$, $k_{\text{-}1} = k_0 = 1$)

$$(h_0(\Omega); h_1(\Omega); h_2(A_{1,1}),..,h_2(A_{1,k_1});\ldots; h_T(A_{T-1,1}),...,h_T(A_{T-1,k_{T-1}}))^\mathsf{T}$$

von $N$-Tupeln $h_t(A_{t-1}) = (h_t^1(A_{t-1}),...,h_t^N(A_{t-1}))^\mathsf{T}$ ($t \in I$, $A_{t\text{-}1} \in \mathcal{P}_{t\text{-}1}$) und schließlich mit dem Koordinaten-$m$-Tupel ($m := m_N := N\cdot(1+1+k_1+\ldots+k_{T\text{-}1})$)

$$\left(h_0^1(\Omega),..,h_0^N(\Omega); h_1^1(\Omega),..,h_1^1(\Omega); h_2^1(A_{1,1}),..,h_2^N(A_{1,1}),...,h_2^N(A_{1,k_1});..,h_T^N(A_{T-1,k_{T-1}})\right)^\mathsf{T}$$

$\in \mathbb{R}^m$ bezüglich der $\mathcal{H}_N$-Basis

$$h_{t,A_{t-1},j} := \mathbf{1}_{t,A_{t-1},j} := \mathbf{1}_t\cdot\mathbf{1}_{A_{t-1}}\cdot\mathbf{e}_j$$

$((t,A_{t\text{-}1},j) \in I(\mathcal{H}_N) := \{(s,A_{s\text{-}1},i) : s \in I, A_{s\text{-}1} \in \mathcal{P}_{s\text{-}1}, i \in J\}, \mathcal{P}_{-1} := \mathcal{P}_0 = \{\Omega\}, A_{-1} := A_0 = \Omega)$, wobei die $\mathcal{F}$-Vorhersehbarkeit der $h \in \mathcal{H}_N$ berücksichtigt wird.

Speziell zum Zeitpunkt $t = 0$ und zu einem $\gamma \in \mathbb{R}^N$ wird nachfolgend für eine spezielle deterministische (auf $\Omega$ konstante) Handelsstrategie noch die Bezeichnung

$$\gamma_{0,\Omega} := \gamma 1_{0,\Omega} = (\gamma,0,\ldots,0)^{\mathsf{T}} = \gamma_1 h_{0,\Omega,1} + \ldots + \gamma_N h_{0,\Omega,N} \in \mathcal{H}_N$$

verwendet. Diesem stochastischen Prozess $\gamma_{0,\Omega} \in \mathcal{H}_N \subseteq \mathcal{W}_N$ entsprechen in der Tupel-Schreibweise ein ($T$+1)-Tupel zur Verdeutlichung der Abhängigkeit von $t \in I$, ein $n$-Tupel für die Vertretung eines adaptierten Prozesses und die Abhängigkeit von $(t,A_t,j) \in I(\mathcal{W}_N)$ und ein $m$-Tupel für die Vertretung einer Handelsstrategie und die Abhängigkeit von $(t,A_{t\text{-}1},j) \in I(\mathcal{H}_N)$. Speziell für $N = 1$ und $\gamma = 1 \in \mathbb{R}$ entspricht $1_{0,\Omega} = (1,0,\ldots,0)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{W}$ als Handelsstrategie $h_{0,\Omega,1}$ einem $m_1$-Tupel und als $\mathcal{F}$-adaptierter Prozess $w_{0,\Omega,1} = w_{0,\Omega} = \mathbf{1}_{0,\Omega}$ einem $n_1$-Tupel.

### 2.6.3 Isomorphie der Vektorräume $\mathcal{W}_N$, $\mathcal{H}_N$ und $\mathcal{W}$ zu passendem $\mathbb{R}^n$

Auf Grund der oben bei endlichem Zustandsraum $\Omega$ angegebenen Koordinatendarstellung der $\mathcal{P}_t$-messbaren Zustandsfunktion $X_t$ existiert der Koordinaten-Isomorphismus (ein Isomorphismus ist eine bijektive lineare Abbildung, ein bijektiver Homomorphismus)

$$\varphi : X_t \in \mathcal{W}_{t,N} \mapsto (X_t(A_{t,1}),\ldots,X_t(A_{t,k_t}))^{\mathsf{T}} = (c_{t,1},\ldots,c_{t,k_t})^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{N\cdot k_t}$$

vom $N{\cdot}k_t$-dimensionalen Vektorraum

$$\mathcal{W}_{t,N} = \{X_t \in (\mathbb{R}^N)^{\Omega} : X_t \text{ ist } (\mathcal{F}_t,\mathcal{B}^N)\text{-messb. } \mathbb{R}^N\text{-wert. Zustandsfkt.}\}$$

in den Raum $\mathbb{R}^{N\cdot k_t}$. Der Raum $\mathcal{W}_{t,N}$ ist daher isomorph zum Raum $\mathbb{R}^{N\cdot k_t}$ der $N{\cdot}k_t$-Tupel

$$(c_{t,1},\ldots,c_{t,k_t})^{\mathsf{T}} = (c^1_{t,1},..c^N_{t,1};\ldots;c^1_{t,k_t},..,c^N_{t,k_t})^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{N\cdot k_t}.$$

Jede $\mathcal{P}_t$-messbare Zustandsfunktion $X_t$ kann daher mit seinem Koordinaten-$N{\cdot}k_t$-Tupel identifiziert werden.

Analog ist der $n$-dimensionale Vektorraum

$$\mathcal{W}_N = \{X \in (\mathbb{R}^N)^{I\times\Omega} : X \text{ ist } \mathcal{F}\text{-adapt. } \mathbb{R}^N\text{-wert. stochast. Prozess}\}$$

isomorph zum Raum $\mathbb{R}^n$ ($n := n_N := N{\cdot}(k_0 + \ldots + k_T)$, $k_0 = 1$, $k_T = K$) der $n$-Tupel[29]

$$(c_0 ; c_{1,1},\ldots,c_{1,k_1};\ldots;c_{T,1},\ldots,c_{T,K})^{\mathsf{T}} =$$

$$(c^1_0,..,c^N_0 ; c^1_{1,1},..,c^N_{1,1};\ldots,c^1_{1,k_1},..,c^N_{1,k_1};\ldots,c^1_{T,K},..,c^N_{T,K})^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{N\cdot(k_0+\ldots+k_T)}.$$

Speziell für $N = 1$ ist der Vektorraum

$$\mathcal{W} := \mathcal{W}_1 = \{X \in \mathbb{R}^{I\times\Omega} : X \text{ ist } \mathcal{F}\text{-adapt. reellwert. Prozess}\}$$

der $\mathcal{F}$-adaptierten reellwertigen stochastischen Prozesse $X$ isomorph zum Raum $\mathbb{R}^{n_1}$ der $n_1$-

[29] Das hier zuerst notierte Tupel ist ein Block-$n_1$-Tupel ($n_1 = k_0 + k_1 + \ldots + k_T$), dessen Blöcke $N$-Tupel sind, also insgesamt ein $n$-Tupel mit $n = Nn_1$. Das hier außerhalb der Klammer des Zeilenvektors befindliche Transponiertzeichen „$^{\mathsf{T}}$“ wirkt nur auf die Anordnung der Blöcke (hier Spaltenvektoren) $c_{t,k}$ innerhalb der Klammer und ordnet diese zu einem Spaltenvektor, es wirkt nicht auf die Blöcke selbst, die schon Spaltenvektoren sind.

Tupel mit der Dimension $n_1 = k_0 + k_1 + \ldots + k_T$. Jeder $\mathcal{F}$-adaptierte $\mathbb{R}^N$-wertige stochastische Prozess kann daher mit seinem Koordinaten-$n$-Tupel identifiziert werden und jeder $\mathcal{F}$-adaptierte reellwertige stochastische Prozess mit seinem Koordinaten- $n_1$-Tupel.

Weiter ist der in $\mathcal{W}_{t,N}$ gelegene $N{\cdot}k_{t\text{-}1}$-dimensionale lineare Unterraum

$$\mathcal{H}_{t,N} = \mathcal{W}_{t\text{-}1,N}$$

der $\mathcal{F}_{t\text{-}1}$-messbaren $\mathbb{R}^N$-wertigen Zustandsfunktionen $h_t \in (\mathbb{R}^N)^\Omega$ isomorph zum Raum $\mathbb{R}^{N\cdot k_{t-1}}$ der $N{\cdot}k_{t\text{-}1}$-Tupel

$$(c_{t,1},\ldots,c_{t,k_{t-1}})^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{N\cdot k_{t-1}}$$

und der in $\mathcal{W}_N$ gelegene Unterraum[30]

$$\mathcal{H}_N := \mathcal{H}_N(\mathcal{F}) := \{h \in (\mathbb{R}^N)^{I\times\Omega} : h \text{ ist } \mathcal{F}\text{-vorhersehbar}\} \subseteq \mathcal{W}_N$$

der (vorhersehbaren) Handelsstrategien $h$ isomorph zum Raum $\mathbb{R}^m$ der $m$-Tupel

$$(c_0\,;c_1\,;c_{2,1},\ldots,c_{2,k_1}\,;\ldots;c_{T,1},\ldots,c_{T,k_{T-1}})^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{N\cdot(1+1+k_1+\ldots+k_{T-1})}$$

mit der Dimension $m := N{\cdot}(k_0 + k_0 + k_1 + \ldots + k_{T\text{-}1})$. Jede $\mathcal{F}_{t\text{-}1}$-messbare $\mathbb{R}^N$-wertige Zustandsfunktionen $h_t$ kann mit seinem Koordinaten-$N{\cdot}k_{t\text{-}1}$-Tupel und jeder $\mathcal{F}$-vorhersehbare $\mathbb{R}^N$-wertige stochastische Prozess (d. h. jede $\mathbb{R}^N$-wertige Handelsstrategie) mit seinem Koordinaten-$m$-Tupel identifiziert werden.

## 2.7 Präzisierung der zeitlichen Entwicklung des Portfoliowerts

Um das zeitliche Auftreten der einzelnen Preisprozesswerte $S_t$ und $S_t^\delta = S_t + \delta_t$, die Verwendungszeiträume der Portfolios $h_t$ der Handelsstrategie $h$, die Umschichtung des Portfolios von $h_t$ in $h_{t+1}$ und die damit verbundene Entwicklung des Portfoliowertes zu präzisieren[31], kann man jeden Handelszeitpunkt $t \in I$ noch in drei nahe beieinander liegende Unterzeitpunkte unterteilen: $t_-$, $t_\delta$, $t_+$ mit

$$(t\text{-}1)_+ < t_- < t_\delta < t_+ < (t{+}1)_-,$$

wobei $(-1)_+ < 0$ und $(T{+}1)_- > T$ beliebig vorgegeben werden können. Für jeden Zeitpunkt $t$ werden damit zum Portfolio verschiedene Werte definiert: Vermögenswert, Reinvestitionswert, Auszahlungswert und in Abschnitt 5.1.5 noch Ertragswert oder Gewinn. Eine grafische Darstellung der zeitlichen Entwicklung des Portfoliowerts wird in den nachfolgenden Abbildungen 2.6 und 2.7 gegeben.

- **Vermögenswert**: Beim Zeitpunkt $t_-$ hat sich für das Wertpapier $j$ der cum dividende-Kurs $S_t^{\delta,j} = S_t^j + \delta_t^j$ eingestellt ($j = 1,\ldots,N$). Für den aus den $N$ Wertpapieren gebildeten $N$-dimensionalen Preisprozess hat sich dementsprechend der Kurs $S_t^\delta = (S_t^{\delta,1},\ldots,S_t^{\delta,N})^\mathsf{T}$ gebildet. Das im vorhergehenden Zeitintervall $[(t\text{-}1)_+,t_-]$ gemäß der Handelsstrategie $h$ verwendete Portfolio $h_t = (h_t^1,\ldots,h_t^N)^\mathsf{T}$ hat bei $t_-$ den Vermögenswert

[30] Die Unterraum-Eigenschaften von $\mathcal{H}_N$ werden wie oben in Abschnitt 2.4 für $\mathcal{W}_N$ gezeigt.

[31] Die zeitliche Entwicklung des Portfoliowerts wird präzisiert bei Kremer (2011), S. 158, mit zwei Unterzeitpunkten und bei Kallsen (2009), S. 26, 35, 44, mit drei Vorgängen.

$$
\begin{aligned}
V_t(h) &:= S_t^\delta \cdot h_t \\
&= (S_t^\delta(\omega)^\mathsf{T} h_t(\omega))_{\omega\in\Omega} = (\sum_{j=1}^N S_t^{\delta,j}(\omega) h_t^j(\omega))_{\omega\in\Omega} = \sum_{j=1}^N S_t^{\delta,j} h_t^j \\
&= (S_t^\delta(A_{t,k})^\mathsf{T} h_t(A_{t,k}))_{A_{t,k}\in\mathcal{P}_t} = (\sum_{j=1}^N S_t^{\delta,j}(A_{t,k}) h_t^j(A_{t,k}))_{A_{t,k}\in\mathcal{P}_t} \\
&= \sum_{k=1}^{k_t} S_t^\delta(A_{t,k})^\mathsf{T} h_t(A_{t,k}) \cdot \mathbf{1}_{A_{t,k}} \\
&= \left(S_t^\delta(A_{t,1})^\mathsf{T} h_t(A_{t,1}),\ldots,S_t^\delta(A_{t,k_t})^\mathsf{T} h_t(A_{t,k_t})\right)^\mathsf{T} \qquad (t\in I).
\end{aligned}
$$

Die $\mathbb{R}$-wertige Zustandsfunktion $V_t(h) = V_t(h)(\omega))_{\omega\in\Omega} \in \mathcal{W}_{t,1}$ ist argumentweise (punktweise für jeden Punkt $(t,\omega) \in I \times \Omega$) als das Produkt der $\mathcal{F}_t$-messbaren $\mathbb{R}^N$-wertigen Zustandsfunktionen $S_t^\delta$, $h_t \in \mathcal{W}_{t,N}$ definiert. Es ist also für jeden Zeitpunkt $t \in I$ und Zustand $\omega \in \Omega$ das (Standard-)Skalarprodukt von $S_t^\delta(\omega)$ und $h_t(\omega)$ bzw. für jeden Zeitpunkt $t \in I$ und jedes Ereignis $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$ das Skalarprodukt von $S_t^\delta(A_{t,k})$ und $h_t(A_{t,k})$ im $\mathbb{R}^N$ zu berechnen.[32] Da die Zustandsfunktionen $S_t^\delta$, $h_t \in \mathcal{W}_{t,N}$ auch mit ihren $k_t$-Tupel

$$
\begin{aligned}
S_t^\delta &= \left(S_t^\delta(A_{t,1}),\ldots,S_t^\delta(A_{t,k_t})\right)^\mathsf{T}, \\
h_t &= \left(h_t(A_{t,1}),\ldots,h_t(A_{t,k_t})\right)^\mathsf{T}
\end{aligned}
$$

identifiziert werden, erhält man hier für die Produktzustandsfunktion $V_t(h) : A_{t,k} \in \mathcal{P}_t \mapsto \mathbb{R}$ auch die Schreibweise[33]

$$
\begin{aligned}
V_t(h) &= S_t^\delta \cdot h_t \\
&= \begin{pmatrix} S_t^\delta(A_{t,1}) \\ \cdot \\ \cdot \\ S_t^\delta(A_{t,k_t}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_t(A_{t,1}) \\ \cdot \\ \cdot \\ h_t(A_{t,k_t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_t^\delta(A_{t,1})^\mathsf{T} h_t(A_{t,1}) \\ \cdot \\ \cdot \\ S_t^\delta(A_{t,k_t})^\mathsf{T} h_t(A_{t,k_t}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} S_t^{\delta,1}(A_{t,1}) h_t^1(A_{t,1}) + \ldots + S_t^{\delta,N}(A_{t,1}) h_t^N(A_{t,1}) \\ \cdot \\ \cdot \\ S_t^{\delta,1}(A_{t,k_t}) h_t^1(A_{t,k_t}) + \ldots + S_t^{\delta,N}(A_{t,k_t}) h_t^N(A_{t,k_t}) \end{pmatrix} \\
&= S_t^{\delta,1} h_t^1 + \ldots + S_t^{\delta,N} h_t^N
\end{aligned}
$$

---

[32] Das Produkt $Z_t = X_t \cdot Y_t$ zweier $\mathbb{R}^N$-wertiger Zustandsfunktionen $X_t$, $Y_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ ergibt eine reellwertige Zustandsfunktion $Z_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Weiter ist das Produkt $Z_t = X_t \cdot Y_t$ einer reellwertigen Zustandsfunktion $X_t$ und einer $\mathbb{R}^N$-wertigen Zustandsfunktion $Y_t$ eine $\mathbb{R}^N$-wertige Zustandsfunktion $Z_t$.

[33] Die aufwendigere Matrizenschreibweise für die Berechnung von $V_t(h)$ aus den Block-$k_t$-Tupeln $S_t^\delta$ und den Block $k_{t-1}$-Tupeln $h_t$ wird unten noch in Abschnitt 2.8.2 bei der Matrizenschreibweise für die Abbildung $L$ angegeben mit $V(h) = V \cdot h$ mit der Blockdiagonalmatrix $V = \mathrm{diag}(B_0^\delta,\ldots,B_T^\delta)$ und dem $\mathcal{F}$-vorhersehbaren Portfolio-Spaltenvektor $h = (h_0,\ldots,h_T)^\mathsf{T}$.

als Produkt der $k_t$-Tupel (mit dem Multiplikationspunkt einer Produktfunktion und nicht als Skalarprodukt) und als Ergebnis ein $k_t$-Tupel. Bei der Berechnung einer Duplikationsstrategie $h$ in Abschnitt 3.2.1 wird noch verwendet, dass die Handelsstrategie $h$ $\mathcal{F}$-vorhersehbar ist und daher die $\mathcal{F}_{t-1}$-messbaren Zustandsfunktionen $h_t$ auf den Nachfolgerknoten $A_{t,m}$ ($\subseteq A_{t-1,k}$) eines Knotens $A_{t-1,k}$ konstant gleich $h_t(A_{t-1,k})$ sind.

Dieses Produkt der $k_t$-Tupel ist nicht zu verwechseln mit dem Skalarprodukt (siehe Abschnitt 2.9)

$$\left\langle S_t^\delta, h_t \right\rangle_{\mathcal{W}_{t,N}} = S_t^{\delta\mathsf{T}} h_t = \left(S_t^\delta(A_{t,1})^\mathsf{T},\ldots,S_t^\delta(A_{t,k_t})^\mathsf{T}\right)\begin{pmatrix} h_t(A_{t,1}) \\ \cdot \\ \cdot \\ h_t(A_{t,k_t}) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{k_t} S_t^\delta(A_{t,k})^\mathsf{T} h_t(A_{t,k})$$

$$= \sum_{k=1}^{k_t}\sum_{j=1}^{N} S_t^{\delta,j}(A_{t,k}) \cdot h_t^j(A_{t,k}) \in \mathbb{R}$$

der Zustandsfunktionen $S_t^\delta$ und $h_t$ im Raum $\mathcal{W}_{t,N}$ bzw. der $k_t$·$N$-Tupel $S_t^\delta$ und $h_t$ im Raum $\mathbb{R}^{N\cdot k_t}$, bei dem die zu den Ereignissen $A_{t,k}$ gebildeten Produkte noch aufsummiert werden. Analoges gilt unten für den Reinvestitionswert $R_t(h) = S_t \cdot h_{t+1}$.

Speziell im Zeitpunkt $t = 0_-$ sind wegen $\mathcal{P}_0 = \{\Omega\}$ die $N$-Tupel $S_0^\delta$ und $h_0$ und damit auch der Vermögenswert

$$V_0(h) = S_0^\delta \cdot h_0 = S_0^\delta(\Omega)^\mathsf{T} h_0(\Omega) \in \mathbb{R}$$

unabhängig von den $\omega \in \Omega$ ($k_0 = 1$, $A_0 = \Omega$). Die durch $V_0(h)$ gegebene deterministische (auf $\Omega$ konstante) Zustandsfunktion $V_0(h) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. die dadurch vermittelte Linearform $V_0 : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathbb{R}$ spielt noch eine wichtige Rolle in Abschnitt 3.3.2 bei der Definition des Preises von Zahlungsprofilen nach dem Duplikationsprinzip und dem dabei benötigten Gesetz des eindeutig bestimmten Preises (Law of One Price, Abk.: LOP).

- **Dividendenzahlung**: Beim Zeitpunkt $t_\delta$ wird der cum dividende-Kurs $S_t^{\delta,j}$ in den ex dividende-Kurs $S_t^j$ und die Dividende $\delta_t^j$ aufgeteilt und die Dividende gezahlt. Das Wertpapier hat dann den Kurs $S_t^j$. Sowohl die im Portfolio anfallende Dividende

$$\delta_t \cdot h_t = (\delta_t(\omega)^\mathsf{T} h_t(\omega))_{\omega\in\Omega} = \left(\sum_{j=1}^{N} \delta_t^j(\omega) \cdot h_t^j(\omega)\right)_{\omega\in\Omega}$$

als auch der dividendenbereinigte Portfoliowert

$$S_t \cdot h_t = (S_t(\omega)^\mathsf{T} h_t(\omega))_{\omega\in\Omega} = \left(\sum_{j=1}^{N} S_t^j(\omega) \cdot h_t^j(\omega)\right)_{\omega\in\Omega}$$

stehen für die beiden nachfolgenden Aktionen des Zeitpunkts $t_+$ zur Verfügung. Es kann also insgesamt der Wert $V_t(h) = S_t^\delta \cdot h_t$, ggf. auch teilweise, vom Depotverwalter an den Portfolioinhaber ausgezahlt oder zur Neubildung des Portfolios für das nachfolgende Zeitintervall $[t_+,(t+1)_-]$ verwendet werden.

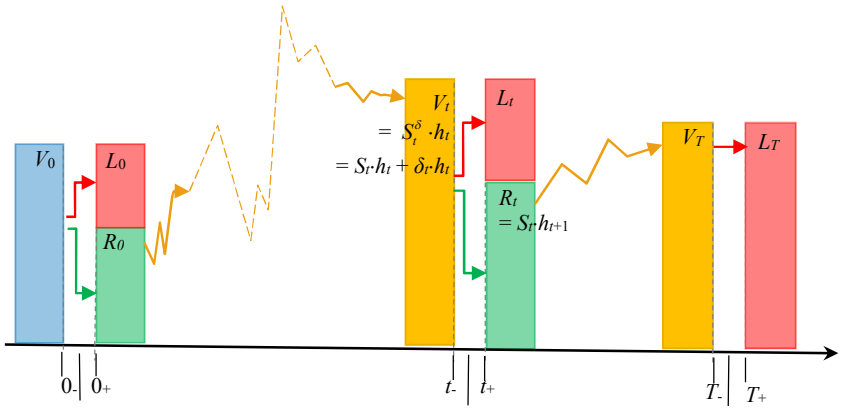



**Abb. 2.6** Präzisierung der zeitlichen Entwicklung des Portfoliowerts mittels Vermögenswert $V_t(h)$, Reinvestitionswert $R_t(h)$ und Portfolioauszahlung $L_t(h)$ zum Zeitpunkt $t$

- **Reinvestitionswert**: Beim Zeitpunkt $t_+$ hat also das $j$-te Wertpapier den Kurs $S_t^j$ bzw. der $N$-dimensionale Preisprozess den Kurs $S_t = (S_t^1,...,S_t^N)^\mathsf{T}$, der dann für die Bildung des neuen Portfolios $h_{t+1} = (h_{t+1}^1,...,h_{t+1}^N)^\mathsf{T}$ im nachfolgenden Zeitraum $[t_+,(t+1)_-]$ verwendet wird. Dieses Portfolio $h_{t+1}$ hat bei $t_+$ den Reinvestitionswert

$$
\begin{aligned}
R_t(h) &:= S_t \cdot h_{t+1} \\
&= (S_t(\omega)^\mathsf{T} h_{t+1}(\omega))_{\omega\in\Omega} = (\sum_{j=1}^N S_t^j(\omega)^\mathsf{T} h_{t+1}^j(\omega))_{\omega\in\Omega} = \sum_{j=1}^N S_t^j h_{t+1}^j \\
&= (S_t(A_{t,k})^\mathsf{T} h_{t+1}(A_{t,k}))_{A_{t,k}\in\mathcal{P}_t} = (\sum_{j=1}^N S_t^j(A_{t,k}) h_{t+1}^j(A_{t,k}))_{A_{t,k}\in\mathcal{P}_t} \\
&= \sum_{k=1}^{k_t} S_t(A_{t,k})^\mathsf{T} h_{t+1}(A_{t,k}) \cdot \mathbf{1}_{A_{t,k}} \\
&= \left(S_t(A_{t,1})^\mathsf{T} h_{t+1}(A_{t,1}),...,S_t(A_{t,k_t})^\mathsf{T} h_{t+1}(A_{t,k_t})\right)^\mathsf{T}
\end{aligned}
$$

($t \in I$; $h_{T+1} := 0$, $R_T(h) = 0$). Die Berechnung der Zustandsfunktion $R_t(h) = (R_t(h)(\omega))_{\omega\in\Omega}$ als das Produkt der $\mathcal{F}_t$-messbaren $\mathbb{R}^N$-wertigen Zustandsfunktionen $S_t$, $g_t = h_{t+1} \in \mathcal{W}_{t,N}$ erfolgt also analog zu $V_t(h)$ argumentweise für die Ereignisse $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$.
Aus dem Reinvestitionswert $R_t(h) = S_t \cdot h_{t+1}$ entwickelt sich dann im Zeitintervall $[t_+,(t+1)_-]$ rein zufällig der Vermögenswert $V_{t+1}(h) = S_{t+1}^\delta \cdot h_{t+1}$ des Zeitpunkts $(t+1)_-$.

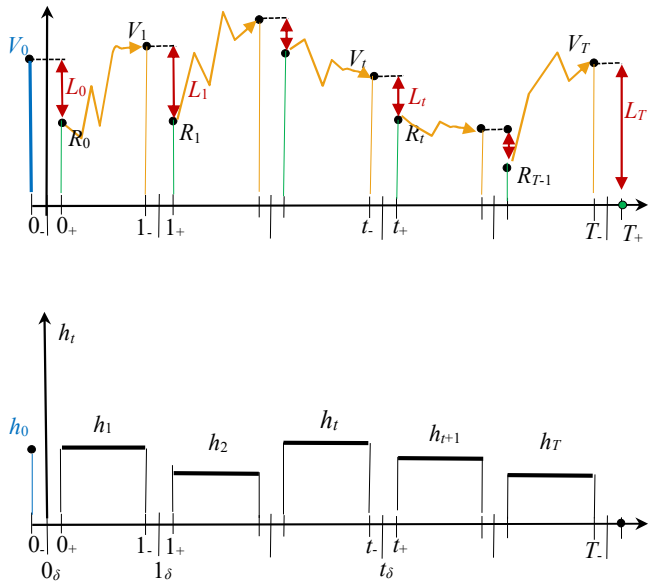



**Abb. 2.7** Die zeitliche Entwicklung der Portfoliovektoren $h_t$, der Portfoliowerte $V_t(h)$ und $R_t(h)$ und der Portfolioauszahlung $L_t(h)$ im Zeitintervall $[0,T]$ $(N = 1)$

- **(Aus-)Zahlungswert**: Der nach der Neuinvestition in ein Portfolio $h_{t+1}$ zum Zeitpunkt $t_+$ verbleibende Wert

$$L_t(h) := V_t(h) - R_t(h) = S_t^\delta \cdot h_t - S_t \cdot h_{t+1}$$

$$= (S_t^\delta(\omega)^\top h_t(\omega))_{\omega\in\Omega} - (S_t(\omega)^\top h_{t+1}(\omega))_{\omega\in\Omega}$$

$$= \left(S_t^\delta(A_{t,k})^\top h_t(A_{t,k}) - S_t(A_{t,k})^\top h_{t+1}(A_{t,k})\right)_{A_{t,k}\in\mathfrak{P}_t}$$

$(t \in I;\ h_{T+1} := 0)$ wird vom Depotverwalter an den Portfolioinhaber gezahlt und (Aus-)Zahlungswert genannt. Die Zahlung $L_t(h)$ ist (bei $L_t(h) \geq 0$) aus der Sicht des Depotverwalters eine Auszahlung und aus der Sicht des Portfolioinhabers eine Einzahlung. Sie stellt für den Portfolioinhaber den durch die Portfolioumschichtung bei $t_+$ resultierenden Wert der Portfolioauszahlung, der Margenzahlung bzw. seines Zahlungsanspruchs dar. Speziell zum Zeitpunkt $t = T$ ist $h_{T+1} = 0$, $R_T(h) = 0$ und $L_T(h) = V_T(h) = S_T^\delta \cdot h_T$, sodass der gesamte Vermögenswert ausbezahlt wird.
Der zum Zeitpunkt $t_-$ vorliegende Portfoliowert

$$V_t(h) = R_t(h) + L_t(h)$$

wird im Zeitpunkt $t_+$ aufgeteilt in die Portfolioauszahlung $L_t(h)$ und den Reinvestitionswert $R_t(h)$ für das neue Portfolio $h_{t+1}$ des Zeitraums $[t_+,(t+1)_-]$.

**Sonderrolle des Startkapitaleinsatzes** $V_0(h)$: Bei der hier mit den Werten $V_t(h)$ und $R_t(h)$ beschriebenen und in den Abbildungen 2.6 und 2.7 dargestellten zeitlichen Portfoliowertentwicklung ist ein wichtiger Unterschied zwischen dem Anfangszeitpunkt $t = 0$ und den weiteren Zeitpunkten $t > 0$ zu beachten. Bei der Berechnung des Zahlungsprofils $L(h)$ spielt nämlich der Portfoliovektor $h_0$ eine andere Rolle als die nachfolgenden Portfoliovektoren $h_t$

($t > 0$). Nur für den Zeitparameter $t = 0$ entwickelt sich der Vermögenswert $V_0(h)$ *nicht* zufallsabhängig aus einem zu $h_0$ gehörigen Investionswert $R_{-1}(h) = S_{-1} \cdot h_0$ eines früheren Zeitpunkts $t = -1$. Bei einer Durchführung der Handelsstrategie $h$ wird dagegen das Kapital $V_0(h)$ als deterministisches Startkapital vom Portfolioinhaber im Portfolio zur Verfügung gestellt und mit einem deterministischen Portfoliovektor $h_0 \in \mathbb{R}^N$ gemäß der Gleichung $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0$ auf die Wertpapiere $S_0^{\delta,j}$ ($j \in J$) verteilt. Der Portfoliovektor $h_0 \in \mathbb{R}^N$ ist durch diese Gleichung $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0$ bei $N > 1$ nicht eindeutig bestimmt. Der zum Zeitindex $t = 0$ gehörige Portfoliovektor $h_0$ tritt bei der Berechnung des Zahlungsprofils $L(h)$ allein im Zeitpunkt $t = 0_-$ bei der Aufteilung des Startkapitaleinsatzes $V_0(h)$ auf die Wertpapiere $S_0^{\delta,j}$ auf. Bei der Handelsstrategie $h$ ist also im Zeitpunkt $t = 0$ das Startkapital $V_0(h)$ die entscheidende Größe, während $h_0$ nur eine untergeordnete Rolle spielt, nämlich nur eine Verteilung des Startkapitals auf die Wertpapiere zum Zeitpunkt $t = 0_-$ beschreibt. Soll nun tatsächlich eine Handelsstrategie $h$ durchgeführt werden und damit das Zahlungsprofil $L(h)$ realisiert werden, so sind für ein Portfolio eines Depots das Startkapital $V_0(h)$ bereitzustellen und dann die Umschichtungen mittels der Portfoliovektoren $h_t$ ($t > 0$) vorzunehmen. Für den Portfolioinhaber, der das Startkapital aufbringt, resultieren dadurch im Zeitpunkt $t = 0_-$ die Zahlung $M_0(h) = -V_0(h)$ und in den Zeitpunkten $t_+$ ($t \in I$) die Zahlungen $L_t(h)$, also insgesamt der Zahlungsstrom $Z = -V_0(h) \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} + L(h)$, der nach Abschnitt 3.7.3 ein Kapitalmarktgeschäft ist.

Im Gegensatz zum Zeitindex $t = 0$ erscheint für die nachfolgenden Zeitindizes $t > 0$ der jeweilige Portfoliovektor $h_t = (h_t^1, \ldots, h_t^N)^\mathsf{T}$ bei der Bestimmung von $L(h)$ sowohl im Zeitpunkt $(t\text{-}1)_+$ mit dem Reinvestitionswert $R_{t-1}(h) = S_{t-1} \cdot h_t$ als auch im Zeitpunkt $t_-$ mit dem Vermögenswert $V_t(h) = S_t^\delta \cdot h_t$, der sich im Zeitintervall $[(t\text{-}1)_+, t_-]$ rein zufallsabhängig aus dem Reinvestitionswert $R_{t-1}(h)$ entwickelt. Aus Sicht des Portfolioinhabers gehört also für jeden Zeitindex $t > 0$ zum Portfoliovektor $h_t$ sowohl die Auszahlung $-R_{t-1}(h) = -S_{t-1} \cdot h_t$ im Zeitpunkt $t$-1 als auch die Einzahlung $V_t(h) = S_t^\delta \cdot h_t$ im Zeitpunkt $t$, also der Kauf und Verkauf des zu $h_t$ gehörigen Portfolios.

Insgesamt setzt sich das zur Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ gebildete Zahlungsprofil $L(h)$ additiv zusammen aus dem zum Zeitpunkt $t = 0$ erbrachten deterministischen Startkapitaleinsatz

$$\breve{V}(h) := V_0(h) \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} = (S_0^\delta \cdot h_0, 0, \ldots, 0)^\mathsf{T}$$

des Portfolioinhabers und den zu den Portfoliovektoren $h_t$ der Zeitindizes $t \in \{1, \ldots, T\}$ gehörigen Finanzgeschäften

$$\begin{aligned} C^t(h_t) &:= -R_{t-1}(h) \cdot \mathbf{1}_{t-1,\Omega} + V_t(h) \cdot \mathbf{1}_{t,\Omega} \\ &= \left(0, \ldots, 0, -S_{t-1} \cdot h_t, +S_t^\delta \cdot h_t, 0, \ldots, 0\right)^\mathsf{T}, \end{aligned}$$

bei denen das durch $h_t$ beschriebene Portfolio im Zeitpunkt $t$-1 gekauft und im Zeitpunkt $t$ wieder verkauft wird. Diese Eigenschaft der mittels Handelsstrategien $h$ gebildeten Zahlungsprofile $L(h)$ wird noch in Abschnitt 3.7.2 bei der Beschreibung der Kapitalmarktgeschäfte des Marktmodells und in Abschnitt 4.2 bei der Interpretation des Duplikationsprinzips als Duplizierungskonzept mit Beurteilungskurve und Kapitalmarktgeschäft verwendet.

## 2.8 Additive Zerlegung des Auszahlungswerts *L* in deterministischen Anteil $\breve{V}$ und stochastischen Anteil $\breve{L}$

### 2.8.1 Additive Zerlegung von *L* in *V* und - *R*

Mit $\mathcal{H}_N$ wird der im Vektorraum $\mathcal{S}_N := (\mathbb{R}^N)^{I\times\Omega}$ der $\mathbb{R}^N$-wertigen stochastischen Prozesse gelegene Untervektorraum der Handelsstrategien bezeichnet:

$\mathcal{H}_N := \mathcal{H}_N(\mathcal{F}) := \{h \in (\mathbb{R}^N)^{I\times\Omega} : h \text{ ist } \mathcal{F}\text{-vorhersehbar}\} \subseteq \mathcal{W}_N \subseteq \mathcal{S}_N$. Für jede vorgegebene Handelsstrategie $h = (h_t(\omega))_{t\in I,\omega\in\Omega} \in \mathcal{H}_N$ sind auf der gesamten Zeitparametermenge $I = \{0,\dots,T\}$ der **Wertprozess** (Vermögensprozess)

$V(h) = (V_t(h))_{t\in I}$,

der **(Re-)Investitionsprozess** (Wiederanlageprozess)

$R(h) = (R_t(h))_{t\in I}$

und das **Zahlungsprofil** (Auszahlungsprozess, Entnahmeprozess[34])

$L(h) = (L_t(h))_{t\in I} = V(h) - R(h)$

der Handelsstrategie $h$ definiert. Aufgrund der bei der Definition des Zahlungswerts $L_t(h)$ ($t \in I$) in Abschnitt 2.7 angegebenen additiven Zerlegung in $V_t(h)$ und $-R_t(h)$ ergibt sich die entsprechende Zerlegung für den Entnahmeprozess $L(h)$.

Da die Handelsstrategie $h$ $\mathcal{F}$-vorhersehbar und damit $\mathcal{F}$-adaptiert ist, ist jede der $\mathbb{R}^N$-wertigen Zustandsfunktionen $h_t = (h_t^1,\dots,h_t^N)^\top$ $(\mathcal{F}_t,\mathcal{B}^N)$-messbar ($t \in I$) und dann auch jede der reellwertigen Zustandsfunktionen $h_t^j = (h_t^j(\omega))_{\omega\in\Omega}$ $(\mathcal{F}_t,\mathcal{B}^1)$-messbar[35] ($j = 1,\dots,N$). Da analog auch die reellwertigen Zustandsfunktionen $S_t^{\delta,j} = (S_t^{\delta,j}(\omega))_{\omega\in\Omega}$ $(\mathcal{F}_t,\mathcal{B}^1)$-messbar sind, sind auch die Produkte $S_t^{\delta,j}h_t^j$ und dann $V_t(h) = S_t^\delta \cdot h_t = S_t^{\delta,1}h_t^1 + \dots + S_t^{\delta,N}h_t^N$ als deren Summe $(\mathcal{F}_t,\mathcal{B}^1)$-messbar. Analog folgt wegen der $\mathcal{F}_t$-Messbarkeit von $S_t^j$ und $h_{t+1}^j$, dass auch $R_t(h) = S_t \cdot h_{t+1}$ und die Differenz $L_t(h) = V_t(h) - R_t(h)$ $(\mathcal{F}_t,\mathcal{B}^1)$-messbar sind.[36] Insgesamt ergibt sich,

---

[34] Kremer (2011), S. 159, 160, verwendet die Begriffe Wertprozess, Investitionsprozess und Entnahmeprozess.

[35] Ein erster einfacher Beweis: Nach Abschnitt 2.3 ist die $(\mathcal{F}_t,\mathcal{B}^N)$-messbare Zustandsfunktion $h_t$ auf den $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$ jeweils konstant. Dann ist auch jede Komponentenfunktion $h_t^j$ ($j \in J$) auf jedem $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$ konstant und somit $(\mathcal{F}_t,\mathcal{B}^1)$-messbar.
Ein zweiter Beweis: Nach Bauer (1992) MI, S. 150, oder (2002) WT, S. 60, Def. 9.1, ist die Produkt-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}^N = \mathcal{B}^1\otimes\dots\otimes\mathcal{B}^1$ der $\sigma$-Algebren $\mathcal{A}_j = \mathcal{B}^1$ ($j = 1,\dots,N$) per Definition die kleinste $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}$ in $\hat{\Omega} = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_N = \mathbb{R}^N$ ($\Omega_j = \mathbb{R}$) derart, dass jede Projektionsabbildung $p_j : (x_1,\dots,x_N) \in \hat{\Omega} \mapsto x_j \in \Omega_j$ $(\mathcal{A},\mathcal{A}_j)$-messbar ist. Demzufolge ist $h_t^j = p_j \circ h_t$ als die Zusammensetzung der $(\mathcal{F}_t,\mathcal{B}^N)$-messbaren Funktion $h_t$ und der $(\mathcal{B}^N,\mathcal{B}^1)$-messbaren Funktion $p_j$ nach Bauer (1992) MI, S. 42, Satz 7.3, $(\mathcal{F}_t,\mathcal{B}^1)$-messbar.

[36] Nach Bauer (1992) MI, S. 59, Satz 9.4, ist für beliebiges $\Omega$ jede konstante Funktion messbar und mit zwei messbaren reellwertigen Funktionen auch deren Summe und deren Produkt messbar.
Eine zweite und einfachere Begründung für endliches (oder abzählbares) $\Omega$ ergibt sich mit der Charakterisierung einer $\mathcal{A}$-messbaren Zustandsfunktion von Abschnitt 2.3: Jede auf $\Omega$ konstante Funktion $c$ ist auch auf jedem $A \in \mathcal{P} = \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ konstant und damit $\mathcal{A}$-messbar. Für zwei $\mathcal{A}$-messbare reell-

dass die reellwertigen Prozesse $V(h)$, $R(h)$ und $L(h)$ $\mathcal{F}$-adaptiert sind:

$$V(h), R(h), L(h) \in \mathcal{W} = \mathcal{W}_1 = \{X \in \mathbb{R}^{I \times \Omega} : X \text{ ist } \mathcal{F}\text{-adaptiert}\}.$$

Die durch die Zuordnungsvorschriften $V(h)$, $R(h)$ und $L(h)$ gegebenen Abbildungen erfüllen jeweils die Linearitätseigenschaft einer linearen Abbildung $f$:

$$f(\lambda h + \mu g) = \lambda f(h) + \mu f(g) \qquad \text{für } h, g \in \mathcal{H}_N \text{ und Skalare } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Daher werden durch diese Prozesse lineare Abbildungen

$$V, R, L : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathcal{W}$$

von $\mathcal{H}_N$ in $\mathcal{W}$ gegeben.

## 2.8.2 Darstellungsmatrix von *L*

Für die lineare Abbildung

$$L : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathcal{W}$$

vom $m$-dimensionalen Untervektorraum $\mathcal{H}_N$ ($m = N\cdot(k_0+k_0+k_1+\ldots+k_{T-1})$, $k_0 = 1$) des Vektorraums $\mathcal{W}_N$ in den $n_1$-dimensionalen Vektorraum $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1$ ($n_1 = k_0+k_1+\ldots+k_T$) wird jetzt eine Matrizenschreibweise

$$L(h) = V\cdot h - R\cdot h = L\cdot h$$

mit den Matrizen $V$, $R$ und $L$ und einem $\mathcal{F}$-vorhersehbaren Portfolio-Spaltenvektor $h$ angegeben.

a) In der in Abschnitt 2.6.2 angegebenen Tupel-Schreibweise sind die $\mathcal{F}_t$-messbaren $\mathbb{R}^N$-wertigen Preis-Zustandsfunktionen $S_t^\delta$ und $S_t$ bezüglich der $\mathcal{W}_{t,N}$-Basis $\mathbf{1}_{A_{t,k},j}$ ($k = 1,\ldots,k_t$, $j = 1,\ldots,N$) Block-$k_t$-Tupel aus $N$-Tupeln und die $\mathcal{F}_{t-1}$-messbare Portfolio-Zustandsfunktion $h_t$ bezüglich der $\mathcal{H}_{t,N}$-Basis $\mathbf{1}_{A_{t-1,k},j}$ ($k = 1,\ldots,k_{t-1}$, $j = 1,\ldots,N$) ein Block-$k_{t-1}$-Tupel aus $N$-Tupeln:

$$S_t^\delta = \left(S_t^\delta(A_{t,1}),\ldots,S_t^\delta(A_{t,k_t})\right)^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} S_t^\delta(A_{t,1}) \\ . \\ S_t^\delta(A_{t,k_t}) \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$$S_t^\delta(A_{t,s})^\mathsf{T} = \left(S_t^{\delta,1}(A_{t,s}),\ldots,S_t^{\delta,N}(A_{t,s})\right) \in \mathbb{R}^N,\ s = 1,\ldots,k_t,$$

$$h_t = \left(h_t(A_{t-1,1}),\ldots,h_t(A_{t-1,k_{t-1}})\right)^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} h_t(A_{t-1,1}) \\ . \\ h_t(A_{t-1,k_{t-1}}) \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$$h_t(A_{t-1,k})^\mathsf{T} = \left(h_t^1(A_{t-1,k}),\ldots,h_t^N(A_{t-1,k})\right) \in \mathbb{R}^N,\ k = 1,\ldots,k_{t-1}.$$

Um den als Produktfunktion definierten $\mathcal{F}_t$-messbaren reellwertigen Vermögenswert

$$V_t(h) = S_t^\delta \cdot h_t = (S_t^\delta(A_{t,1})^\mathsf{T} h_t(A_{t,1}),\ldots,S_t^\delta(A_{t,k_t})^\mathsf{T} h_t(A_{t,k_t}))^\mathsf{T}$$

als $k_t$-Tupel in der Matrizenschreibweise

$$V_t(h) = B_t^\delta h_t$$

zu schreiben, ist zu beachten, dass bei den hierbei auftretenden Skalarprodukten $S_t^\delta(A_{t,s})^\mathsf{T} h_t(A_{t,s})$ für die Knoten $A_{t,s} \in \mathcal{P}_t$ mit demselben Vorgängerknoten $A_{t-1,k} \in \mathcal{P}_{t-1}$ wegen der $\mathcal{F}_{t-1}$-Messbarkeit der Portfolio-Zustandsfunktion $h_t$ derselbe Portfoliowert $h_t(A_{t-1,k})$ verwendet wird:

$$h_t(A_{t,s}) = h_t(A_{t-1,k}) \text{ für } A_{t,s} \subseteq A_{t-1,k}.$$

---

wertige Zustandsfunktionen $f$ und $g$ ist mit $f$ und $g$ auch $f \pm g$ und $f\cdot g$ auf jedem $A \in \mathcal{P}$ konstant und damit $\mathcal{A}$-messbar.

Die Bildung der Skalarprodukte $S_t^{\delta}(A_{t,s})^{\mathsf{T}} h_t(A_{t,s}) = S_t^{\delta}(A_{t,s})^{\mathsf{T}} h_t(A_{t-1,k})$ zu einem fest vorgegebenen Portfoliowert $h_t(A_{t-1,k}) \in \mathbb{R}^N$ erfolgt in der Matrizenschreibweise somit mit dem Matrixblock

$$C_t^{\delta}(A_{t-1,k}) = \begin{pmatrix} S_t^{\delta}(A_{t,m})^{\mathsf{T}} \\ . \\ S_t^{\delta}(A_{t,r})^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\nu(t-1,A_{t-1,k})\times N}$$

aus den $N$-dimensionalen Zeilenvektoren

$$S_t^{\delta}(A_{t,s})^{\mathsf{T}} = \left(S_t^{\delta,1}(A_{t,s}),...,S_t^{\delta,N}(A_{t,s})\right) \in \mathbb{R}^N \text{ mit } A_{t,s} \in \mathcal{P}_t\text{: } A_{t,s} \subseteq A_{t-1,k}\text{:}$$

$$C_t^{\delta}(A_{t-1,k})h_t(A_{t-1,k}) = \begin{pmatrix} S_t^{\delta}(A_{t,m})^{\mathsf{T}} h_t(A_{t-1,k}) \\ . \\ S_t^{\delta}(A_{t,r})^{\mathsf{T}} h_t(A_{t-1,k}) \end{pmatrix}$$

($\nu(t\text{-}1,A_{t\text{-}1,k})$ ist der Aufspaltungswert des Knoten $A_{t\text{-}1,k}$, also die Anzahl seiner Nachfolgerknoten $A_{t,s} \in \mathcal{P}_t$, und gibt die Anzahl der Zeilen des Blocks $C_t^{\delta}(A_{t-1,k})$ an). Die Bildung aller Skalarprodukte $S_t^{\delta}(A_{t,s})^{\mathsf{T}} h_t(A_{t-1,k})$ zum gesamten Block-$k_{t\text{-}1}$-Tupel der Portfolio-Zustandsfunktion

$$h_t = \begin{pmatrix} h_t(A_{t-1,1}) \\ . \\ h_t(A_{t-1,k_{t-1}}) \end{pmatrix}$$

erfolgt dann durch Matrizenmultiplikation von $h_t$ mit der $k_{t\text{-}1}$-reihigen Blockdiagonalmatrix

$$B_t^{\delta} = \operatorname{diag}(C_t^{\delta}(A_{t-1,1}),\ldots,C_t^{\delta}(A_{t-1,k_{t-1}}))$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} h_t(A_{t-1,1}) & h_t(A_{t-1,2}) & . & h_t(A_{t-1,k_{t-1}}) \end{array} \\ \hline \begin{pmatrix} C_t^{\delta}(A_{t-1,1}) & 0 & . & 0 \\ 0 & C_t^{\delta}(A_{t-1,2}) & . & . \\ . & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & C_t^{\delta}(A_{t-1,k_{t-1}}) \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{k_{t-1}\times Nk_{t-1}}$$

aus den Blöcken $C_t^{\delta}(A_{t-1,k})$, $k = 1,\ldots,k_{t\text{-}1}$:

$$V_t(h) = B_t^{\delta} h_t = \begin{pmatrix} C_t^{\delta}(A_{t-1,1}) & 0 & . & 0 \\ 0 & C_t^{\delta}(A_{t-1,2}) & . & . \\ . & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & C_t^{\delta}(A_{t-1,k_{t-1}}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_t(A_{t-1,1}) \\ . \\ . \\ h_t(A_{t-1,k_{t-1}}) \end{pmatrix}.$$

Die Reihenfolge der im jeweiligen Block $C_t^{\delta}(A_{t-1,k})$ auftretenden Knoten $A_{t,s}$ ($\subseteq A_{t\text{-}1,k}$) kann dabei beliebig festgelegt werden. Die Reihenfolge der Knoten $A_{t,s} \in \mathcal{P}_t$ ($k = 1,\ldots,k_t$) insgesamt ergibt sich somit aus der Reihenfolge der Vorgängerknoten $A_{t\text{-}1,k}$ und der zum jeweiligen Vorgängerknoten festgelegten Reihenfolge. Sie ist dann aber in Teil b) genauso zu verwenden im Block-$k_t$-Tupel der Portfolio-Zustandsfunktion $h_{t+1} = \left(h_{t+1}(A_{t,1}),...,h_{t+1}(A_{t,k_t})\right)^{\mathsf{T}}$ und in der Matrix $B_t$ bei der Bildung des Matrizenprodukts $R_t(h) = B_t h_{t+1}$ und bei der für den nächsten Zeitindex $t$+1 stattfindenden Bildung von $V_t(h) = B_{t+1}^{\delta} h_{t+1}$.

b) Um den als Produktfunktion definierten $\mathcal{F}_t$-messbaren Reinvestitionswert

$$R_t(h) = S_t \cdot h_{t+1} = (S_t(A_{t,1})^{\mathsf{T}} h_{t+1}(A_{t,1}),\ldots,S_t(A_{t,k_t})^{\mathsf{T}} h_{t+1}(A_{t,k_t}))^{\mathsf{T}}$$

als $k_t$-Tupel in der Matrizenschreibweise

$$R_t(h) = B_t\, h_{t+1}$$

zu schreiben, verwendet man für die Matrizendarstellung von $S_t$ die $k_t$-reihige Blockdiagonalmatrix

$$B_t = \operatorname{diag}(S_t(A_{t,1})^{\mathsf{T}},\ldots,S_t(A_{t,k_t})^{\mathsf{T}})$$

$$= \begin{matrix} h_{t+1}(A_{t,1}) & h_{t+1}(A_{t,2}) & . & h_{t+1}(A_{t,k_t}) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} S_t(A_{t,1})^{\mathsf{T}} & 0 & . & 0 \\ 0 & S_t(A_{t,2})^{\mathsf{T}} & . & . \\ . & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & S_t(A_{t,k_t})^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k_t \times Nk_t}$$

mit den Blöcken $S_t(A_{t,s})^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^N$ und für $h_{t+1}$ das zur $\mathcal{H}_{t+1,N}$-Basis gehörige, die Vorhersehbarkeit von $h$ beschreibende Block-$k_t$-Tupel

$$h_{t+1} = \left(h_{t+1}(A_{t,1}),\ldots,h_{t+1}(A_{t,k_t})\right)^{\mathsf{T}}$$

mit den Blöcken $h_{t+1}(A_{t,s}) \in \mathbb{R}^N$:

$$R_t(h) = B_t\, h_{t+1} = \begin{pmatrix} S_t(A_{t,1})^{\mathsf{T}} & 0 & . & 0 \\ 0 & S_t(A_{t,2})^{\mathsf{T}} & . & . \\ . & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & S_t(A_{t,k_t})^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{t+1}(A_{t,1}) \\ . \\ . \\ h_{t+1}(A_{t,k_t}) \end{pmatrix}.$$

Die Reihenfolge der $A_{t,s} \in \mathcal{P}_t$ in $B_t$ und $h_{t+1}$ ist dabei gemäß der in Teil a) bei der Bildung der Matrix $B_t^{\delta}$ festgelegten Reihenfolge bei der Verteilung der Zeilenvektoren $S_t^{\delta}(A_{t,s})^{\mathsf{T}}$ auf die Matrixblöcke $C_t^{\delta}(A_{t-1,k})$ zu wählen. Die Matrix $B_t$ ist eine $k_t \times k_tN$-Matrix und besitzt die gleiche Spaltenzahl $k_tN$ wie die Matrix $B_{t+1}^{\delta}$.

Für $t = 0$ bestehen die Blöcke $B_0^{\delta} = C_0^{\delta}(A_{-1,1}) = S_0^{\delta}(\Omega)^{\mathsf{T}}$ und $B_0 = S_0(A_{0,1})^{\mathsf{T}} = S_0(\Omega)^{\mathsf{T}}$ jeweils nur aus dem einzigen $N$-Tupel $S_0^{\delta}(\Omega)^{\mathsf{T}}$ bzw. $S_0(\Omega)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^N$. Für $t = 1$ besitzen alle Knoten $A_{1,s} \in \mathcal{P}_1$ denselben Vorgängerknoten $A_{0,1} = \Omega \in \mathcal{P}_0$, sodass die Reihenfolge der Knoten $A_{1,s}$ in der Matrix

$$B_1^{\delta} = C_1^{\delta}(\Omega) = \begin{pmatrix} S_1^{\delta}(A_{1,1})^{\mathsf{T}} \\ . \\ S_1^{\delta}(A_{1,k_1})^{\mathsf{T}} \end{pmatrix}$$

beliebig festgelegt werden kann. In der Matrix $B_1 = \operatorname{diag}\left(S_1(A_{1,1})^{\mathsf{T}},\ldots,S_1(A_{1,k_1})^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}}$ treten dann die Knoten $A_{1,s}$ in der bei $B_1^{\delta}$ festgelegten Reihenfolge auf. Für $t = 2$ besitzen die Knoten $A_{2,s} \in \mathcal{P}_2$ im Allgemeinen verschiedene Vorgängerknoten $A_{1,k} \in \mathcal{P}_1$, deren Reihenfolge bereits festgelegt wurde. Demnach sind die Zeilenvektoren $S_2^{\delta}(A_{2,s})^{\mathsf{T}}$ auf die Blöcke $C_2^{\delta}(A_{1,k})$ der Vorgängerknoten $A_{1,k}$ zu verteilen und können dort beliebig angeordnet werden. Entsprechendes gilt sukzessive für die weiteren Zeitindizes $t$.

c) Für das Zahlungsprofil $L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ erhält man dann in einer Matrizenschreibweise die Darstellung $L(h) = V(h) - R(h) =$

$$\begin{pmatrix} L_0(h) \\ L_1(h) \\ . \\ L_t(h) \\ . \\ . \\ L_{T-1}(h) \\ L_T(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0^\delta \cdot h_0 \\ S_1^\delta \cdot h_1 \\ . \\ S_t^\delta \cdot h_t \\ . \\ . \\ S_{T-1}^\delta \cdot h_{T-1} \\ S_T^\delta \cdot h_T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_0 \cdot h_1 \\ S_1 \cdot h_2 \\ . \\ S_t \cdot h_{t+1} \\ . \\ . \\ S_{T-1} \cdot h_T \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0^\delta h_0 \\ B_1^\delta h_1 \\ . \\ B_t^\delta h_t \\ . \\ . \\ B_{T-1}^\delta h_{T-1} \\ B_T^\delta h_T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_0 h_1 \\ B_1 h_2 \\ . \\ B_t h_{t+1} \\ . \\ . \\ B_{T-1} h_T \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{matrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_t & h_{t+1} & . & h_{T-1} & h_T \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} B_0^\delta & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & B_1^\delta & . & & & & & . \\ . & . & B_2^\delta & . & & & & . \\ . & & . & B_t^\delta & . & . & & . \\ . & & & . & B_{t+1}^\delta & . & . & . \\ . & & & & . & . & . & . \\ . & & & & & . & B_{T-1}^\delta & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & B_T^\delta \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ . \\ h_t \\ . \\ . \\ . \\ h_T \end{pmatrix} - \begin{array}{c} \begin{matrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_t & h_{t+1} & . & h_{T-1} & h_T \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & B_0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & . & & & & . \\ . & . & 0 & B_{t-1} & . & & & . \\ . & & . & 0 & B_t & . & & . \\ . & & & . & 0 & . & . & . \\ . & & & & . & . & B_{T-2} & 0 \\ . & & & & & . & 0 & B_{T-1} \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ . \\ . \\ h_{t+1} \\ . \\ . \\ h_T \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{matrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_t & h_{t+1} & . & h_{T-1} & h_T \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} B_0^\delta & -B_0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & B_1^\delta & -B_1 & . & & & & . \\ . & . & B_2^\delta & -B_{t-1} & . & & & . \\ . & & . & B_t^\delta & -B_t & . & & . \\ . & & & . & B_{t+1}^\delta & . & . & . \\ . & & & & . & . & . & 0 \\ . & & & & & . & B_{T-1}^\delta & -B_{T-1} \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & B_T^\delta \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ . \\ . \\ h_{t+1} \\ . \\ . \\ h_T \end{pmatrix}$$

$= V \cdot h - R \cdot h = L \cdot h$

mit dem zur $\mathcal{H}_N$-Basis gehörigen „$\mathcal{F}$-vorhersehbaren“ Portfolio-Spaltenvektor

$$h = (h_0,\ldots,h_T)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^m$$

mit $h_t = \left(h_t(A_{t-1,1}),...,h_t(A_{t-1,k_{t-1}})\right)^\mathsf{T}$, $t \in I$, $A_{t\text{-}1,k} \in \mathcal{P}_{t\text{-}1}$, $h_t(A_{t\text{-}1,k}) = (h_t^1(A_{t-1,k}),...,h_t^N(A_{t-1,k}))^\mathsf{T}$, der $(T+1)$-reihigen Blockdiagonalmatrix bzw. $n_1 \times m$-Matrix ($n_1 = k_0+k_1+\ldots+k_T$, $m = N\cdot(k_0+k_0+\ldots+k_{T\text{-}1})$)

$$V = \text{diag}(\, B_0^\delta ,\ldots, B_T^\delta \,)$$

mit den Blöcken $B_t^\delta$ $(t = 0,\ldots,T)$ in der Hauptdiagonalen und mit der $(T+1)$-reihigen Blocksupradiagonalmatrix bzw. $n_1 \times m$-Matrix

$$R = \text{supradiag}(\, B_0 ,\ldots, B_{T-1} \,),$$

die nur die Blöcke $B_{t-1}$ $(t = 1,\ldots,T)$ in der Supradiagonalen, d. h. der über der Hauptdiagonalen gelegenen Diagonalen, und sonst nur Nullen enthält. Dabei ist jeder Block $B_t^\delta$ eine $k_{t\text{-}1}$-reihige Blockdiagonalmatrix mit den Blöcken $C_t^\delta(A_{t-1,k})$ in der Blockdiagonalen, die wiederum aus bestimmten Zei-

lenvektoren $S_t^{\delta}(A_{t,m})^{\mathsf{T}}$ bestehen. Weiter ist jeder Block $B_t$ eine $k_t$-reihige Blockdiagonalmatrix mit den Zeilenvektoren $S_t(A_{t,k})^{\mathsf{T}}$ in der Blockdiagonalen.

Für die Abbildung *L* erhält man schließlich die Darstellungsmatrix (Abbildungsmatrix)

$$L = V - R \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$$

in Gestalt einer ($T$+1)-reihigen oberen Blockbidiagonalmatrix mit den $k_t \times k_{t-1}N$-Blöcken $B_t^{\delta}$ in der Hauptdiagonalen und den $k_{t-1} \times k_{t-1}N$-Blöcken $-B_{t-1}$ in der Supradiagonalen, d. h. der über der Hauptdiagonalen gelegenen Diagonalen.

**Für den Spezialfall der Laufzeit $T = 1$** mit dem Einperiodenmodell erhält man für die Abbildung

$$L : \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}^{1+K}$$

die (1+*K*)×2*N*-Darstellungsmatrix

$$L = \begin{pmatrix} B_0^{\delta} & -B_0 \\ 0 & B_1^{\delta} \end{pmatrix}$$

mit den Blöcken

$$B_0 = S_0(A_{0,1})^{\mathsf{T}} = S_0(\Omega)^{\mathsf{T}},$$

$$B_0^{\delta} = C_0^{\delta}(A_{-1,1}) = S_0^{\delta}(\Omega)^{\mathsf{T}},$$

$$B_1^{\delta} = C_1^{\delta}(A_{0,1}) = \begin{pmatrix} S_1^{\delta}(\omega_1)^{\mathsf{T}} \\ \vdots \\ S_1^{\delta}(\omega_K)^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1^{\delta,1}(\omega_1) & \cdots & S_1^{\delta,N}(\omega_1) \\ \vdots & & \vdots \\ S_1^{\delta,1}(\omega_K) & \cdots & S_1^{\delta,N}(\omega_K) \end{pmatrix} = D^{\mathsf{T}}.$$

Mit der Matrix

$$D = \left(S_1^{\delta}(\omega_1),\ldots,S_1^{\delta}(\omega_K)\right) = \begin{pmatrix} S_1^{\delta,1}(\omega_1) & \cdots & S_1^{\delta,1}(\omega_K) \\ \vdots & & \vdots \\ S_1^{\delta,N}(\omega_1) & \cdots & S_1^{\delta,N}(\omega_K) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times K},$$

in der die *N*-Tupel $S_1^{\delta}(\omega_k) = (S_1^{\delta,1}(\omega_k),\ldots,S_1^{\delta,N}(\omega_k))^{\mathsf{T}}$ ($k = 1,\ldots,K$) als Spaltenvektoren in einer Zeile aufgereiht werden, bzw. mit der Matrix

$$D^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} S_1^{\delta}(\omega_1)^{\mathsf{T}} \\ \vdots \\ S_1^{\delta}(\omega_K)^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1^{\delta,1}(\omega_1) & \cdots & S_1^{\delta,N}(\omega_1) \\ \vdots & & \vdots \\ S_1^{\delta,1}(\omega_K) & \cdots & S_1^{\delta,N}(\omega_K) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{K \times N},$$

in der diese *N*-Tupel als Zeilenvektoren $S_1^{\delta}(\omega_k)^{\mathsf{T}} = (S_1^{\delta,1}(\omega_k),\ldots,S_1^{\delta,N}(\omega_k))$ ($k = 1,\ldots,K$) in einer Spalte aufgereiht werden, erhält man die (1+*K*)×2*N*-Darstellungsmatrix

$$L = \begin{pmatrix} S_0^{\delta\mathsf{T}} & -S_0^{\mathsf{T}} \\ 0 & D^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(1+K)\times 2N}$$

der Abbildung $L$ bezüglich der Standardbasen des $\mathbb{R}^{1+K}$ und $\mathbb{R}^{2N}$. [37] △

### 2.8.3 Additive Zerlegung von $L$ in $\breve{V}$ und $\breve{L}$

Jede Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ lässt sich additiv zerlegen in einen (auf $\Omega$ konstanten) deterministischen Anteil $\breve{h}$ und einen stochastischen Anteil $\hat{h}$:

$$\begin{aligned} h &= (h_0,h_1,..,h_t,..,h_T)^{\mathsf{T}} \qquad (h_t = (h_t^1,...,h_t^N)^{\mathsf{T}},\ t \in I) \\ &= (h_0,0,\ldots,0)^{\mathsf{T}} + (0,h_1,\ldots,h_T)^{\mathsf{T}} \\ &= \breve{h} + \hat{h} \end{aligned}$$

mit

$$\breve{h} := (h_0,0,\ldots,0)^{\mathsf{T}} = (h_0)_{0,\Omega} \in \mathcal{H}_N,$$

$$\hat{h} := (0,h_1,\ldots,h_T)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{H}_N.$$

Die Tatsache, dass für ein vorhersehbares $h \in \mathcal{H}_N$ neben $h_0$ auch noch $h_1$ deterministisch ist, wird hier nicht verwendet. Es wird nun gezeigt, dass dieser additiven Zerlegung (Dekomposition) der Handelsstrategie $h$ auch eine additive Zerlegung des $L$-Bilds $L(h)$ in die zwei Prozesse

$$\begin{aligned} \breve{V}(h) &= L(\breve{h}), \\ \breve{L}(h) &= L(\hat{h}) \end{aligned}$$

entspricht, wobei $\breve{V}(h)$ nur von den deterministischen $S_0^{\delta}$ und $h_0$ abhängt und somit von den Zuständen $\omega \in \Omega$ unabhängig ist und $\breve{L}(h)$ nur von den stochastischen $h_1,\ldots,h_T$ und nicht von $h_0$ abhängt:

$$\begin{aligned} L(h) &= L(\breve{h}) + L(\hat{h}) \\ &= \breve{V}(h) + \breve{L}(h) \quad \text{mit} \\ \breve{V}(h) &= \left(\breve{V}_0(h),\breve{V}_1(h),...,\breve{V}_T(h)\right)^{\mathsf{T}} = \left(V_0(h),0,...,0\right)^{\mathsf{T}} = V_0(h)\cdot\mathbf{1}_{0,\Omega}, \\ \breve{L}(h) &= \left(\breve{L}_0(h),\breve{L}_1(h),...,\breve{L}_T(h)\right)^{\mathsf{T}} = \left(-R_0(h),L_1(h),...,L_T(h)\right)^{\mathsf{T}}, \end{aligned}$$

$\breve{V}_0(h)(\omega) = V_0(h) = \breve{V}_0(\breve{h}) = S_0^{\delta\mathsf{T}}h_0 \in \mathbb{R}$ für $t=0$, $\breve{V}_t(h)(\omega) = 0$ für $t = 1,\ldots,T$, $\omega \in \Omega$,

$\breve{L}_0(h) = -R_0(h) = L_0(h) - V_0(h) \in \mathbb{R}$ für $t=0$, $\breve{L}_t(h) = L_t(h) = S_t^{\delta}\cdot h_t - S_t\cdot h_{t+1}$ für $t = 1,\ldots,T$.

**Beweis**: Für die deterministische Handelsstrategie $\breve{h} = h_0\cdot\mathbf{1}_{0,\Omega} = (h_0,0,\ldots,0)^{\mathsf{T}}$ ist

$$\begin{aligned} L_0(\breve{h}) &= V_0(\breve{h}) - R_0(\breve{h}) = S_0^{\delta\mathsf{T}}h_0 - S_0^{\mathsf{T}}0 = V_0(h), \\ L_t(\breve{h}) &= V_t(\breve{h}) - R_t(\breve{h}) = S_t^{\delta}\cdot\breve{h}_t - S_t\cdot\breve{h}_{t+1} = 0 \quad \text{für } t \geq 1, \end{aligned}$$

[37] Diese Matrizendarstellung kann man auch direkt den Gleichungssystemen (DP$A_{0,1}$) und (DP$A_{-1,1}$) entnehmen, die man in Abschnitt 3.2 bei der Berechnung einer Duplikationsstrategie im Spezialfall $T = 1$ ($h_2 = 0$) erhält.

$$L(\breve{h}) = V_0(h)\cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} =: \breve{V}(h),$$

für die stochastische Handelsstrategie $\hat{h} := (0,h_1,\ldots,h_T)^\top$ ist

$$L_0(\hat{h}) = V_0(\hat{h}) - R_0(\hat{h}) = S_0^{\delta\top}0 - S_0^\top h_1 = -R_0(h) = L_0(h) - V_0(h),$$

$$L_t(\hat{h}) = V_t(\hat{h}) - R_t(\hat{h}) = S_t^\delta \cdot h_t - S_t \cdot h_t = L_t(h) \text{ für } t \geq 1,$$

$$L(\hat{h}) = L(h) - \breve{V}(h) =: \breve{L}(h).$$ □

Wie $L$ liefern auch $\breve{V}$ und $\breve{L}$ lineare Abbildungen von $\mathcal{H}_N$ in $\mathcal{W}$:

$$\breve{V} : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathcal{W},$$

$$\breve{L} : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathcal{W}.$$

Die lineare Abbildung $L$ zur Beschreibung der Zahlungsprofile der Handelsstrategien lässt sich somit additiv zerlegen in den **deterministischen Anteil** $\breve{V}$ zur Beschreibung des Startkapitaleinsatzes des Portfolios und in den **stochastischen Anteil** $\breve{L}$ zur Beschreibung des Handels mit Kapitalmarktgeschäften $C^q(h_t)$. Eine ausführlichere Erklärung folgt dazu noch in Abschnitt 3.7.2. Im Gegensatz zum Vermögensprozess $V$, bei dem neben der deterministischen Zustandsfunktion $V_0(h) = S_0^{\delta\top}h_0$ auch die weiteren stochastischen Zustandsfunktionen $V_t(h)$ ($t = 1,\ldots,T$) erfasst sind, enthält der Startkapitalprozess $\breve{V}$ nur die deterministische Zustandsfunktion $V_0(h)$ zur Beschreibung des Startkapitaleinsatzes der Handelsstrategie $h$. Die weiteren Zustandsfunktionen $V_t(h)$ ($t = 1,\ldots,T$) sind neben den $R_t(h)$ in $\breve{L}$ enthalten.

### 2.8.4 Additive Zerlegung des *L*-Bildraums $L(\mathcal{H}_N)$ in Unterräume

Aus der additiven Zerlegung der Abbildung $L = \breve{V} + \breve{L}$ erhält man auch die additive Zerlegung des zum festgelegten Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ gehörigen Bildraums $L(\mathcal{H}_N)$ in die Unterräume $\breve{V}(\mathcal{H}_N)$ und $\breve{L}(\mathcal{H}_N)$. Zunächst folgt die Inklusion

$$L(\mathcal{H}_N) = \{L(h) = \breve{V}(h) + \breve{L}(h) : h \in \mathcal{H}_N\}$$
$$\subseteq \{\breve{V}(h) + \breve{L}(k) : h,k \in \mathcal{H}_N\} = \breve{V}(\mathcal{H}_N) + \breve{L}(\mathcal{H}_N).$$

Andererseits liegen wegen der Darstellungen der Bilder $\breve{V}(h) = L(\breve{h})$, $\breve{L}(h) = L(\hat{h})$ mit $\breve{h}$, $\hat{h} \in \mathcal{H}_N$ die Bildräume $\breve{V}(\mathcal{H}_N)$, $\breve{L}(\mathcal{H}_N)$ der Abbildungen $\breve{V}$ und $\breve{L}$ in $L(\mathcal{H}_N)$ und wegen der Unterraumeigenschaft von $L(\mathcal{H}_N)$ dann auch deren Summe in $L(\mathcal{H}_N)$:

$$\breve{V}(\mathcal{H}_N),\ \breve{L}(\mathcal{H}_N),\ \breve{V}(\mathcal{H}_N) + \breve{L}(\mathcal{H}_N) \subseteq L(\mathcal{H}_N).$$

Insgesamt ergibt sich, dass die beiden Unterräume $\breve{V}(\mathcal{H}_N)$ und $\breve{L}(\mathcal{H}_N)$ zusammen den gesamten Bildraum $L(\mathcal{H}_N)$ von $L$ aufspannen:

$$L(\mathcal{H}_N) = \breve{V}(\mathcal{H}_N) + \breve{L}(\mathcal{H}_N).$$

Im nachfolgenden Abschnitt 3.4.1 mit den Charakterisierungen des LOP wird gezeigt, dass der Bildraum $L(\mathcal{H}_N)$ genau dann die direkte Summe dieser beiden Unterräume ist, d. h. dass also noch $\breve{V}(\mathcal{H}_N) \cap \breve{L}(\mathcal{H}_N) = O$ gilt, wenn im Marktmodell das Gesetz des eindeutig bestimmten Preises (Law of One Price, Abk.: LOP; Definition siehe Abschnitt 3.3.2) gilt. Die Unterräume $\breve{V}(\mathcal{H}_N)$ und $\breve{L}(\mathcal{H}_N)$ werden nun nachfolgend noch näher beschrieben.

Bezeichnet man mit $\mathcal{M}$ das $L$-Bild des Kerns $\ker \breve{V}$ von $\breve{V}$ bzw. des Kerns $\ker V_0$ von $V_0$,

$$\mathcal{M} := L(\ker \breve{V}) = L(\ker V_0)$$

so kann die Übereinstimmung von $\mathcal{M}$ mit dem Bildraum $\breve{L}(\mathcal{H}_N)$ der Abbildung $\breve{L}$ gezeigt werden:

$$\mathcal{M} = \breve{L}(\mathcal{H}_N) .$$

**Beweis** für $\mathcal{M} = \breve{L}(\mathcal{H}_N)$ : „$\subseteq$“: Für jedes $X = L(h) \in \mathcal{M}$ mit $h \in \ker \breve{V} \subseteq \mathcal{H}_N$ gilt wegen $\breve{V}(h) = 0$ auch $X = \breve{V}(h) + \breve{L}(h) = \breve{L}(h) \in \breve{L}(\mathcal{H}_N)$, also die Inklusion $\mathcal{M} \subseteq \breve{L}(\mathcal{H}_N)$ .

„$\supseteq$“: Umgekehrt gilt für $X = \breve{L}(h) \in \breve{L}(\mathcal{H}_N)$, $h = (h_0,h_1,\ldots,h_T)^\mathsf{T} \in \mathcal{H}_N$, mit dem zugehörigen $\hat{h} = (0,h_1,\ldots,h_T)^\mathsf{T} \in \mathcal{H}_N$ wegen $\hat{h}_0 = 0$, $V_0(\hat{h}) = S_0^{\delta\mathsf{T}}\hat{h}_0 = 0$, $\breve{V}(\hat{h}) = 0$, $\hat{h} \in \ker \breve{V}$ auch die Inzidenz

$$X = \breve{L}(h) = L(\hat{h}) \in L(\ker \breve{V}) = \mathcal{M}.$$

Damit gilt auch $\breve{L}(\mathcal{H}_N) \subseteq \mathcal{M}$ und insgesamt

$$\mathcal{M} = \breve{L}(\mathcal{H}_N) .$$ □

Weiter kann nachfolgend für den Bildraum

$$\mathcal{V} := \breve{V}(\mathcal{H}_N)$$

der Abbildung $\breve{V}$ die Übereinstimmung mit dem eindimensionalen Unterraum

$$\mathcal{E} := [\,\mathbf{1}_{0,\Omega}\,] := \operatorname{lin}\{\mathbf{1}_{0,\Omega}\} = \{p \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} : p \in \mathbb{R}\} \ (\subseteq \mathcal{W})$$

(dim $\mathcal{E} = 1$), der vom deterministischen ersten $\mathcal{W}$-Basisvektor $w_{0,\Omega} = \mathbf{1}_{0,\Omega} = (1,0,\ldots,0)^\mathsf{T} \in \mathcal{W}$ aufgespannt wird, und die Inklusion $\mathcal{E} \subseteq L(\mathcal{H}_N)$ gezeigt werden. Zum Beweis benötigt man noch die für Marktmodelle im Allgemeinen vorliegende, also nur rein mathematisch-technische Voraussetzung

(AWS$^\delta$) $\qquad S_0^\delta = (S_0^{\delta,1},\ldots,S_0^{\delta,N})^\mathsf{T} \neq (0,\ldots,0)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^N,$

dass also der deterministische Anfangswert $S_0^\delta$ des $\mathbb{R}^N$-wertigen Preisprozesses $S^\delta$ bzw. die spezielle deterministische Handelsstrategie

$$b := (S_0^\delta)_{0,\Omega} := S_0^\delta \, 1_{0,\Omega} = (S_0^\delta,0,\ldots,0)^\mathsf{T} \in \mathcal{H}_N \setminus O$$

(zur Schreibweise von $b$ mit $1_{0,\Omega} \in \mathcal{H}_N$ siehe Abschnitt 2.6.2) von Null verschieden ist.

Unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) gilt

$\mathcal{V} = \mathcal{E} \neq O$,

$\mathcal{E} \subseteq L(\mathcal{H}_N)$,

$L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{E} + \mathcal{M}$.

**Beweis** für $\mathcal{V} := \breve{V}(\mathcal{H}_N) = \mathcal{E}$ und $\mathcal{E} \subseteq L(\mathcal{H}_N)$:

1) „$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$“: Es gilt für jedes $X = \breve{V}(h) = V_0(h)\cdot\mathbf{1}_{0,\Omega} \in \breve{V}(\mathcal{H}_N)$ auch $X \in \{p\cdot\mathbf{1}_{0,\Omega} : p \in \mathbb{R}\} = \text{lin}\{\mathbf{1}_{0,\Omega}\}$ $=: \mathcal{E}$ und somit stets die Inklusion $\breve{V}(\mathcal{H}_N) \subseteq \mathcal{E}$.

2) „$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V}$ und $\mathcal{E} \subseteq L(\mathcal{H}_N)$“: Zum speziellen deterministischen Zahlungsprofil $Y := p\cdot\mathbf{1}_{0,\Omega} \in \mathcal{E}\,(p \in \mathbb{R})$ existiert unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) $S_0^\delta = (S_0^{\delta,1},...,S_0^{\delta,N})^\mathsf{T} \neq 0$ ein $N$-Tupel $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_N)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^N$ als Lösung der inhomogenen linearen Gleichung

$$S_0^{\delta,1}\gamma_1 + ... + S_0^{\delta,N}\gamma_N = S_0^{\delta\mathsf{T}}\gamma = p.$$

Für die damit gebildete spezielle deterministische Handelsstrategie $g := \gamma_{0,\Omega} := (\gamma,0,\ldots,0)^\mathsf{T} \in \mathcal{H}_N$ (Definition der Bezeichnung $\gamma_{0,\Omega} \in \mathcal{H}_N$ in Abschnitt 2.6.2) ist

$$p = S_0^{\delta\mathsf{T}}\gamma = S_0^{\delta\mathsf{T}}g_0 = V_0(g)$$

und

$$Y = p\cdot\mathbf{1}_{0,\Omega} = V_0(g)\cdot\mathbf{1}_{0,\Omega} = \breve{V}(g) \in \breve{V}(\mathcal{H}_N)\,.$$

Da $Y \in \mathcal{E}$ beliebig war, gilt $\mathcal{E} \subseteq \breve{V}(\mathcal{H}_N)$. Mit der in Abschnitt 2.8.4 begründeten stets gültigen Inklusion $\breve{V}(\mathcal{H}_N) \subseteq L(\mathcal{H}_N)$ gilt dann noch $\mathcal{E} \subseteq \breve{V}(\mathcal{H}_N) \subseteq L(\mathcal{H}_N)$.

3) Zweiter Beweis von $\mathcal{V} = \mathcal{E}$ unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$): Falls $S_0^\delta \neq 0$ ist, gilt $O \neq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$ und $1 \leq \dim \mathcal{V} \leq \dim \mathcal{E} = 1$. Nach einem Satz der linearen Algebra[38] folgt aus der Inklusion $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$ und der Dimensionsgleichheit $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{E}$ die Übereinstimmung $\mathcal{V} = \mathcal{E}$ der Unterräume. Eine weitere Begründung verwendet, dass ein Vektor $X \in \mathcal{V} \setminus O$ eine Basis sowohl von $\mathcal{V}$ als auch von $\mathcal{E}$ ist und demnach die lineare Hülle $\text{lin}\,X$ mit $\mathcal{V}$ und $\mathcal{E}$ übereinstimmt: $\text{lin}\,X = \mathcal{V} = \mathcal{E}$.

Insgesamt ist unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) die Übereinstimmung $\mathcal{V} = \mathcal{E}$ und die Inklusion $\mathcal{E} \subseteq L(\mathcal{H}_N)$ bewiesen. Insbesondere gilt für $p = 1$ damit auch die Darstellung

(DP$\mathbf{1}_{0,\Omega}$) $\qquad \mathbf{1}_{0,\Omega} = \breve{V}(g) = L(\breve{g}) \in L(\mathcal{H}_N)$

für ein $\breve{g} \in \mathcal{H}_N$ mit $V_0(\breve{g}) = V_0(g) = 1$. Ein weiterer Beweis für $\mathbf{1}_{0,\Omega} \in L(\mathcal{H}_N)$ wird unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) in Abschnitt 3.2.1 bei der rekursiven Auflösung der Duplikationsgleichung (DP) mit den Anmerkungen zur letzten Gleichung (DP$A_{-1,1}$) des Zeitindex $t = 0$ gegeben. □

Die Voraussetzung (AWS$^\delta$) wird nachfolgend noch des Öfteren verwendet. Dabei spielt die spezielle Handelsstrategie $b$ eine wichtige Rolle bei der Bewertung der Handelsstrategien, der Definition des Preises eines Zahlungsprofils und der Behandlung des Law of One Price in Abschnitt 3.3. Die Unterräume $\mathcal{M}$ und $\mathcal{V}$ begegnen uns wieder bei den Charakterisierungen des LOP in Abschnitt 3.4. Der Unterraum $\mathcal{M}$ tritt außerdem noch auf bei der Charakterisierung der Arbitragefreiheit in Abschnitt 3.6 und bei den Folgerungen aus dem LOP in den Abschnitten 3.7.1 und 3.7.2, wo $\mathcal{M}$ als die Menge der Kapitalmarktgeschäfte und als lineare Hülle der einperiodischen Termingeschäfte $F^{\tau,j,k}$ beschrieben wird. In der Abbildung 2.8 wird die Lage der Unterräume $\mathcal{V}$, $\mathcal{M}$ und $L(\mathcal{H}_N)$ von $\mathcal{W}$ und der Unterräume $\mathcal{B} = \text{lin}\,b$, $\ker V_0 = \mathcal{B}^\perp$ und $\ker L$ von $\mathcal{H}_N$ veranschaulicht. Weitere Aussagen zur Lagebeziehung wichtiger Unterräume folgen noch in Satz 2.1 und Satz 3.3.

---

[38] Allgemein gilt für endlichdimensionale Unterräume $U$ und $W$ eines Vektorraums, dass aus der Inklusion $U \subseteq W$ und der Dimensionsgleichheit $\dim U = \dim W$ deren Übereinstimmung $U = W$ folgt. Literatur: Kowalsky (1967), S. 39, Beispiel 6.6 (2), Wagner (1981), S. 45, Satz 1.5.10 und Bröcker (2004), S. 44, Bem. (5.1) (iii).

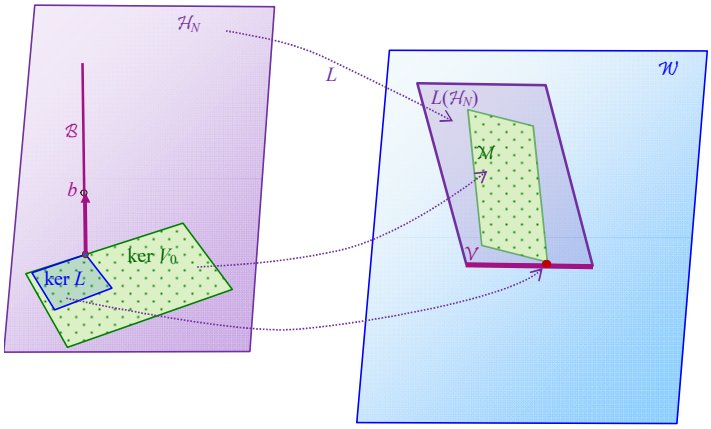



**Abb. 2.8** Die Unterräume $\mathcal{V}$, $\mathcal{M}$ und $L(\mathcal{H}_N)$ von $\mathcal{W}$ und die Unterräume $\ker L$, $\ker V_0$ und $\mathcal{B} = \text{lin}\, b$ von $\mathcal{H}_N$

Mit der speziellen deterministischen Handelsstrategie $b$ können noch zwei weitere Darstellungen des Unterraums $\mathcal{V}$ angegeben werden. Für die Handelsstrategie

$$b = \breve{b} = (b_0,0,\ldots,0)^\top = (S_0^\delta,0,\ldots,0)^\top$$

gilt $V_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0 = b_0{}^\top h_0 = b^\top h$, nach (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$ also

$$V_0(b) = b^\top b = b_0{}^\top b_0 > 0$$

und

$$L(b) = L(\breve{b}) = \breve{V}(b) = V_0(b)\cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} \in \mathcal{V} \setminus O = \mathcal{E} \setminus O.$$

Somit erhält man unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$)

$$b \notin \ker V_0 = \ker \breve{V},$$
$$b \notin \ker L$$

und für die lineare Hülle

$$\mathcal{B} := \text{lin}\,\{b\} = \{p\cdot b : p \in \mathbb{R}\}$$

von $b$ das $\breve{V}$-Bild $\breve{V}(\mathcal{B}) = \breve{V}(\text{lin}\,\{b\}) = \text{lin}\,\breve{V}(b) = \text{lin}\,\mathbf{1}_{0,\Omega} = \mathcal{E}$[39] und analog das $L$-Bild $L(\mathcal{B}) = \mathcal{E}$. Es gilt also

$$L(\mathcal{B}) = \breve{V}(\mathcal{B}) = \mathcal{E} = \mathcal{V}.$$

Im mathematischen Sonderfall $S_0^\delta = 0$ ist $b = 0$, $\mathcal{B} = O$, $V_0(h) = b^\top h = 0^\top h = 0$ und $\breve{V}(h) = V_0(h)\cdot\mathbf{1}_{0,\Omega} = 0\ \forall\, h \in \mathcal{H}_N$, $\mathcal{V} = \breve{V}(\mathcal{H}_N) = O$ und $L(\mathcal{B}) = \breve{V}(\mathcal{B}) = O = \mathcal{V} \neq \mathcal{E}$.

### Charakterisierung der Existenz eines normierten $\mathcal{M}$-Normalenvektors

Bevor der mathematische Sonderfall $S_0^\delta = 0$ näher betrachtet wird, soll erst noch der Fall $\mathcal{M}^{\perp 1} \neq \emptyset$ in Abhängigkeit von der Lage der Unterräume $\mathcal{E}$ und $\mathcal{M}$ charakterisiert werden.

[39] Allgemein gilt für eine lineare Abbildung $f: V \longrightarrow W$ und eine Teilmenge $M$ von $V$ die Übereinstimmung $f(\text{lin}\, M) = \text{lin}\, f(M)$. Literatur: Kowalsky (1967), S. 51, Satz 8.3.

Dazu werden die beiden folgenden zueinander komplementären Fälle unterschieden:

$\alpha$) (AG$\mathbf{1}_{0,\Omega}$) $\quad \mathbf{1}_{0,\Omega} \in \mathcal{M}$,

$\beta$) (KAG$\mathbf{1}_{0,\Omega}$) $\quad \mathbf{1}_{0,\Omega} \notin \mathcal{M}$.

**Der Fall** $\alpha$) bedeutet, dass das schwach positive Zahlungsprofil $\mathbf{1}_{0,\Omega} = (1,0,\ldots,0)^\top \in \mathcal{W}$ eine Arbitragegelegenheit ist (Definition in Abschnitt 3.6.1). Er ist äquivalent zu den Aussagen

$$\mathcal{E} = \operatorname{lin} \mathbf{1}_{0,\Omega} \subseteq \mathcal{M},$$
$$\mathcal{E} \cap \mathcal{M} \neq O,$$
$$\mathcal{M}^\perp \subseteq \mathcal{E}^\perp = \mathbf{1}_{0,\Omega}{}^\perp = \{X_0 = 0\},^{40}$$
$$\mathcal{M}^\perp = \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{E}^\perp = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 0\},$$
$$\mathcal{M}^\perp \setminus \mathcal{E}^\perp = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 \neq 0\} = \emptyset,$$
$$\mathcal{M}^{\perp 1} := \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\} = \emptyset.$$

**Der Fall** $\beta$) bedeutet dementsprechend, dass das schwach positive Zahlungsprofil $\mathbf{1}_{0,\Omega}$ keine Arbitragegelegenheit ist. Er ist äquivalent zu

$$\mathcal{E} \not\subseteq \mathcal{M},$$
$$\mathcal{E} \cap \mathcal{M} = O,$$
$$\mathcal{M}^\perp \not\subseteq \mathcal{E}^\perp = \{X_0 = 0\},$$
$$\mathcal{M}^\perp \neq \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{E}^\perp = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 0\},$$
$$\mathcal{M}^\perp \setminus \mathcal{E}^\perp = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 \neq 0\} \neq \emptyset,$$
$$\mathcal{M}^{\perp 1} := \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\} \neq \emptyset.$$

Damit erhält man die Charakterisierung der Existenz eines normierten $\mathcal{M}$-Normalenvektors durch das Vorliegen des Falls $\beta$):

$$\mathcal{M}^{\perp 1} \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \beta)\ \mathbf{1}_{0,\Omega} \notin \mathcal{M}$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{E} \cap \mathcal{M} = O.$$

Das Vorliegen des Falls $\beta$) $\mathcal{E} \cap \mathcal{M} = O$ ist hinreichend für die Gültigkeit des Law of One Price (LOP; Definition siehe Abschnitt 3.3.2): Dies folgt wegen der Inklusion $\mathcal{M}^{\perp 1} \subseteq \mathcal{A}$ nach Abschnitt 3.3.3 oder wegen der Inklusion $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} \subseteq \mathcal{E} \cap \mathcal{M}$ nach Satz 3.3, 22) in Abschnitt 3.4.1. Andererseits ist die Arbitragefreiheit (AF; Definition in Abschnitt 3.6.1) wegen der Inklusion $\mathcal{E}_{\geq 0} \cap \mathcal{M} \subseteq \mathcal{W}_{\geq 0} \cap \mathcal{M}$ hinreichend für das Vorliegen des Falls $\beta$) $\mathcal{E}_{\geq 0} \cap \mathcal{M} = O$ bzw. $\mathcal{E} \cap \mathcal{M} = O$.

**Im mathematischen Sonderfall** $S_0^\delta = 0$ ist der deterministische Prozess $\breve{V}(h) = V_0(h)\mathbf{1}_{0,\Omega} = S_0^{\delta\top} h_0 \mathbf{1}_{0,\Omega} = 0\ \forall\ h \in \mathcal{H}_N$ und damit der Unterraum $\mathcal{V} = \breve{V}(\mathcal{H}_N) = O \neq \mathcal{E}$, also $\mathcal{V}$ nicht eindimensional. Umgekehrt folgt aus $\mathcal{V} = O$ auch $\breve{V}(h) = 0\ \forall\ h \in \mathcal{H}_N$ bzw. $S_0^{\delta\top} h_0 = 0\ \forall\ h_0 \in \mathbb{R}^N$ und wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts auch $S_0^\delta = 0$. Es gilt also $\mathcal{V} = O$ genau dann, wenn $S_0^\delta = 0$ ist, also

---

40 Bei einem endlich erzeugbaren Unterraum $U$ eines Vektorraums gilt für das orthogonale Komplement $U^\perp$ die involutorische (selbstinverse) Eigenschaft $U^{\perp\perp} := (U^\perp)^\perp = U$. Die endliche Dimension von $U$ wird benötigt zum Beweis der Inklusion $U^{\perp\perp} \subseteq U$. Für endlichdimensionale Unterräume $U$ und $W$ ist $U \subseteq W$ äquivalent zu $U^\perp \supseteq W^\perp$. Literatur: Kowalsky (1967), S. 134, Satz 20.8, Wagner (1981), S. 182.

die Bedingung (AWS$^\delta$) nicht erfüllt ist. Dies bedeutet auch, dass $\mathcal{V} \neq O$ genau dann vorliegt, wenn $S_0^\delta \neq 0$ gilt:

$$\mathcal{V} \neq O \Leftrightarrow (\text{AWS}^\delta)\ S_0^\delta \neq 0.$$

Bei der in Abschnitt 3.3.2 noch zu behandelnden Bewertung von Zahlungsprofilen nach dem Duplikationsprinzip durch den Startkapitaleinsatz $V_0(h)$ der Duplikationsstrategien $h$ von $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ kommt in diesem Sonderfall $S_0^\delta = 0$ nur die uninteressante Bewertung mit dem konstanten Preis Null zum Einsatz ($\pi(X) = V_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0 = 0$), die für einen Vergleich der Zahlungsprofile nicht verwendet werden kann. Es gilt aber das Law of One Price (LOP; Definition in Abschnitt 3.3.2), nach dem für jedes $X \in L(\mathcal{H}_N)$ alle Duplikationsstrategien $h$ einen konstanten Startkapitaleinsatz $V_0(h)$ besitzen. Weiter ist in diesem Sonderfall $b := S_0^\delta 1_{0,\Omega} = 0$, $\mathcal{B} := \text{lin}\ \{b\} = O$,

$$\ker V_0 = \ker b^\top = \{b\}^\top = \mathcal{B}^\perp = \mathcal{H}_N,$$
$$\mathcal{M} = L(\ker V_0) = L(\mathcal{B}^\perp) = L(\mathcal{H}_N),$$
$$\mathcal{M}^\perp = L(\mathcal{H}_N)^\perp = \ker L^*,$$
$$L^{*-1}(\{b\}) = \ker L^* = \mathcal{M}^\perp.$$

Im Sonderfall $S_0^\delta = S_0 + \delta_0 = 0$ ist wegen $S_0 \geq 0$, $\delta_0 \geq 0$ auch $S_0 = 0$ und daher $L_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0 - S_0^\top h_1 = 0\ \forall\ h \in \mathcal{H}_N$. Demnach gilt

$$\mathcal{M} = L(\mathcal{H}_N) \subseteq \{X_0 = 0\} = \mathcal{E}^\perp,$$
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^{\perp\perp} \subseteq L(\mathcal{H}_N)^\perp = \ker L^* = \mathcal{M}^\perp,$$
$$\mathbf{1}_{0,\Omega} \in \mathcal{M}^\perp,$$
$$\mathcal{E} \cap \mathcal{M} \subseteq \mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp = O,$$
$$\mathcal{E} \not\subseteq \mathcal{M}$$

und es liegt der oben behandelte

Fall $\beta$) $\mathbf{1}_{0,\Omega} \notin \mathcal{M}$

vor. Hiermit ergeben sich für den Sonderfall die folgenden Aussagen:

Im Sonderfall $S_0^\delta = 0$ gelten das LOP und die folgenden Relationen:

$$\mathcal{M}^{\perp 1} := \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\} \neq \emptyset,$$
$$L^{*-1}(\{b\}) = \mathcal{M}^\perp \neq \mathcal{M}^{\perp 1} \qquad (0 \in \mathcal{M}^\perp \setminus \{X_0 = 1\}).$$

## 2.9 Euklidische Vektorräume $\mathcal{W}_N$ und $\mathcal{H}_N$ mit ihren Skalarprodukten

Analog zum Vektorraum $\mathbb{R}^n$ der reellwertigen $n$-Tupel mit seinem Standardskalarprodukt wird auch der $n$-dimensionale reelle Vektorraum $\mathcal{W}_N$ mit einem **Skalarprodukt** (einer positiv definiten symmetrischen Bilinearform) ausgestattet und dadurch zu einem sogenannten **euklidischen Vektorraum** gemacht. Damit stehen dann die Leistungen des Skalarprodukts zur Verfügung, nämlich die Längenmessung durch die euklidische Norm, die Winkelmessung und für jeden (endlich-dimensionalen) Unterraum $U$ die additive Zerlegung des Vektorraums als direkte Summe von $U$ und dessem orthogonalen Komplement $U^\perp$.[41] Das Skalarprodukt

[41] Die Leistungen des Skalarprodukts werden beschrieben bei Wagner (1981), S. 178–182.

$$\langle .,. \rangle_{\mathcal{W}_N} : \mathcal{W}_N \times \mathcal{W}_N \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf $\mathcal{W}_N$ wird nun mit den Koordinaten zur $\mathcal{W}_N$-Basis so definiert, dass der Koordinaten-Isomorphismus $\varphi : \mathcal{W}_N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ das Skalarprodukt invariant lässt, also eine sogenannte orthogonale Abbildung[42] ist, bzw. dass die oben angegebene $\mathcal{W}_N$-Basis $w_{t,A_t,j}$, $(t,A_t,j) \in I(\mathcal{W}_N)$, aus charakteristischen Funktionen eine Orthonormalbasis ist: Mit der Festlegung

$$\begin{aligned}\langle X, Y \rangle_{\mathcal{W}_N} &:= \sum_{t=0}^{T} \sum_{k=1}^{k_t} \sum_{j=1}^{N} X_t^j(A_{t,k}) Y_t^j(A_{t,k}) \\ &= \sum_{t=0}^{T} \sum_{k=1}^{k_t} X_t(A_{t,k})^{\mathsf{T}} Y_t(A_{t,k}) \\ &= \sum_{t=0}^{T} \langle X_t, Y_t \rangle_{\mathcal{W}_{t,N}}\end{aligned}$$

und dem zusätzlich auf $\mathcal{W}_{t,N}$ definierten Skalarprodukt

$$\begin{aligned}\langle X_t, Y_t \rangle_{\mathcal{W}_{t,N}} &:= \sum_{k=1}^{k_t} \sum_{j=1}^{N} X_t^j(A_{t,k}) Y_t^j(A_{t,k}) \\ &= \sum_{k=1}^{k_t} X_t(A_{t,k})^{\mathsf{T}} Y_t(A_{t,k})\end{aligned}$$

ist dann nämlich

$$\begin{aligned}\langle w_{r,A_r,p,d}, w_{s,A_s,m,i} \rangle_{\mathcal{W}_N} &= \sum_{t=0}^{T} \sum_{k=1}^{k_t} \sum_{j=1}^{N} \delta_{r,t} \delta_{p,k} \delta_{d,j} \cdot \delta_{s,t} \delta_{m,k} \delta_{i,j} \\ &= \delta_{r,s} \delta_{p,m} \delta_{d,i} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{für } r = s \wedge p = m \wedge d = i, \\ 0 & \text{für } r \neq s \vee p \neq m \vee d \neq i. \end{cases}\end{aligned}$$

Außerdem kann auf dem Unterraum $\mathcal{H}_N$ von $\mathcal{W}_N$ ein weiteres Skalarprodukt mit den Koordinaten bezüglich der $\mathcal{H}_N$-Basis $h_{t,A_{t-1},j}$, $(t,A_{t-1},j) \in I(\mathcal{H}_N)$, definiert werden, welches also statt der $\mathcal{F}$-Adaptiertheit jetzt die $\mathcal{F}$-Vorhersehbarkeit der Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N$ berücksichtigt, und welches die $\mathcal{H}_N$-Basis $h_{t,A_{t-1},j}$, $(t,A_{t-1},j) \in I(\mathcal{H}_N)$, zur Orthonormalbasis macht:

$$\begin{aligned}\{g, h\}_{\mathcal{H}_N} &:= \sum_{t=0}^{T} \sum_{k=1}^{k_t} \sum_{j=1}^{N} g_t^j(A_{t-1,k}) h_t^j(A_{t-1,k}) \\ &= \sum_{t=0}^{T} \sum_{k=1}^{k_{t-1}} g_t(A_{t-1,k})^{\mathsf{T}} h_t(A_{t-1,k}) \\ &= \sum_{t=0}^{T} \{g_t, h_t\}_{\mathcal{H}_{t,N}} .\end{aligned}$$

[42] Orthogonale (längentreue, das Skalarprodukt erhaltende) Abbildungen werden behandelt bei Kowalsky (1967), S. 149–155.

Weiter kann auf dem Vektorraum $\mathcal{S}_N := (\mathbb{R}^N)^{I\times\Omega}$ der $\mathbb{R}^N$-wertigen stochastischen Prozesse ein Skalarprodukt derart definiert werden, dass die $\mathcal{S}_N$-Basis $s_{t,\omega,j}$, $(t,\omega,j) \in I(\mathcal{S}_N) = I \times \Omega \times J$, eine Orthonormalbasis ist:

$$\begin{aligned}\langle X,Y\rangle_{\mathcal{S}_N} &:= \sum_{t=0}^{T}\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{N} X_t^j(\omega_k)Y_t^j(\omega_k)\\ &= \sum_{t=0}^{T}\sum_{k=1}^{K} X_t(\omega_k)^{\top}Y_t(\omega_k)\\ &= \sum_{t=0}^{T}\langle X_t,Y_t\rangle_{\mathcal{S}_{t,N}}.\end{aligned}$$

Aufgrund der Isomorphie der Vektorräume $\mathcal{W}_N$ und $\mathbb{R}^n$ und der Identifizierung der $\mathcal{F}$-adaptierten stochastischen Prozesse mit den zugehörigen Koordinaten-$n$-Tupeln kann das Skalarprodukt $\langle X,Y\rangle$ von $\mathcal{W}_N$ auch in der Matrizenschreibweise des Standardskalarprodukts des $\mathbb{R}^n$ als Produkt $X^{\top}Y$ des Zeilenvektors $X^{\top}$ und des Spaltenvektors $Y$ der Koordinaten-$n$-Tupel geschrieben werden:

$$\langle X,Y\rangle_{\mathcal{W}_N} = X^{\top}Y.$$

Analoges gilt für die Skalarprodukte $\langle X_t,Y_t\rangle_{\mathcal{W}_{t,N}}$ in $\mathcal{W}_{t,N}$, $\{g,h\}_{\mathcal{H}_N}$ in $\mathcal{H}_N$ und $\langle X,Y\rangle_{\mathcal{S}_N}$ in $\mathcal{S}_N$.

In dieser Schreibweise ist dann

$$X^{\top}Y = \sum_{t=0}^{T} X_t^{\top}Y_t.$$

Nicht zu verwechseln ist das Skalarprodukt zweier Zustandsfunktionen $X_t$ und $Y_t$ oder zweier stochastischer Prozesse $X$ und $Y$ mit dem Produkt (der Produktfunktion) dieser Funktionen.[43]

Das die $\mathcal{F}$-Adaptiertheit beachtende Skalarprodukt $\langle X,Y\rangle_{\mathcal{W}}$ speziell für $N = 1$ im Raum $\mathcal{W} := \mathcal{W}_1$ und das die $\mathcal{F}$-Vorhersehbarkeit beachtende Skalarprodukt $\{g,h\}_{\mathcal{H}_N}$ in $\mathcal{H}_N$ begegnen uns wieder bei der Definition der adjungierten Abbildungen im nächsten Abschnitt 2.10. Zusammen mit den adjungierten Abbildungen sind sie der Schlüssel zur Behandlung des Mehrperiodenmodells und leisten sie wichtige Dienste in den Abschnitten 3.4, 3.5 und 3.6 bei den verschiedenen Charakterisierungen des Law of One Price, der Vollständigkeit und der Arbitragefreiheit, die damit innerhalb des Mehrperiodenmodells ohne Rückgriff auf die enthaltenen Einperiodenmodelle hergeleitet werden können.

---

[43] Das Produkt $Z_t = X_t \cdot Y_t$ zweier Zustandsfunktionen $X_t$ und $Y_t$ ergibt wieder eine Zustandsfunktion $Z_t$. Ist $X_t$ reellwertig und $Y_t$ $\mathbb{R}^N$-wertig, so ist die Produktfunktion $Z_t$ $\mathbb{R}^N$-wertig. Sind $X_t$ und $Y_t$ beide $\mathbb{R}^N$-wertig, so ist $Z_t$ reellwertig. Falls $X_t$ und $Y_t$ beide messbar sind, so ist auch das Produkt $Z_t = X_t \cdot Y_t$ messbar: Nach Bauer (1992) MI, S. 59, Satz 9.4, ist nämlich jede konstante Funktion messbar und mit zwei messbaren reellwertigen Funktionen auch deren Summe und deren Produkt messbar. Das Skalarprodukt kann nur für zwei Zustandsfunktionen desselben Typs (beide besitzen gleiche Messbarkeit und beide $\mathbb{R}^N$-wertig oder beide reellwertig) gebildet werden und liefert nach der Aufsummierung der reellwertigen Koordinaten $Z_t(A_{t,k}) = X_t(A_{t,k})^{\top}Y_t(A_{t,k})$ der Produktfunktion $Z_t$ (über die Indizes $k \in \{1,\ldots,k_t\}$) eine reelle Zahl.

## 2.10 Adjungierte Abbildung $L^*$ zur Abbildung $L$

Die durch die Zuordnungsvorschrift $L(h)$ definierte lineare Abbildung $L$ wird auf dem Vektorraum $\mathcal{H}_N$ ($\subseteq \mathcal{W}_N \subseteq \mathcal{S}_N$) der Handelsstrategien betrachtet. Die lineare Abbildung

$$L : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathcal{W}$$

bildet den endlichdimensionalen euklidischen Originalraum $\mathcal{H}_N$ in den euklidischen Zielraum $\mathcal{W} := \mathcal{W}_1$ ab. Dabei ist $\mathcal{H}_N$ mit dem oben definierten Skalarprodukt $\langle g,h\rangle_{\mathcal{H}_N}$ und der dazugehörigen Orthonormalbasis $h_{t,A_{t-1},j}$, $(t,A_{t-1},j) \in I(\mathcal{H}_N)$, und $\mathcal{W}$ mit dem Skalarprodukt $\langle X,Y\rangle_{\mathcal{W}}$ und der Orthonormalbasis $w_{t,A_t}$, $(t,A_t) \in I(\mathcal{W})$, ausgestattet.

Die zur linearen Abbildung $L : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathcal{W}$ eindeutig bestimmte **adjungierte Abbildung**[44]

$$L^* : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{H}_N$$

ist definiert durch die Eigenschaft

$$\langle X,L(h)\rangle_{\mathcal{W}} = \langle L^*(X),h\rangle_{\mathcal{H}_N} \text{ für alle } X \in \mathcal{W} \text{ und } h \in \mathcal{H}_N.$$

### 2.10.1 Orthogonale Zerlegung der Räume $\mathcal{W}$ und $\mathcal{H}_N$

Mit den zu den linearen Abbildungen $L$ und $L^*$ gehörigen Bildräumen Im $L = L(\mathcal{H}_N)$, Im $L^* = L^*(\mathcal{W})$ und Kernen

$$\begin{aligned} \ker L &= L^{-1}(\{0\}) &&= \{f \in \mathcal{H}_N : L(f) = 0\} &&\subseteq \mathcal{H}_N, \\ \ker L^* &= (L^*)^{-1}(\{0\}) &&= \{Y \in \mathcal{W} : L^*(Y) = 0\} &&\subseteq \mathcal{W} \end{aligned}$$

lassen sich die Vektorräume $\mathcal{H}_N$ und $\mathcal{W}$ als direkte Summen von orthogonalen Komplementen darstellen:[45]

---

[44] Die adjungierte Abbildung $L^*$ zu $L$ wird behandelt bei Kremer (2006), S. 421–423, Kowalsky (1967), S. 136–138, (2003), S. 169–171. Die Einzigkeit ergibt sich aus der Linearität des Skalarprodukts und der definierenden Eigenschaft der Adjungierten. Zum Nachweis der Existenz kann die Abbildung $L^*$ mittels einer Orthogonalnormalbasis $\{e_1,\ldots,e_m\}$ des endlichdimensionalen Originalraums $\mathcal{H}_N$ der Abbildung $L$ durch $L^*(X) := \sum_{i=1}^{m} \langle X, L(e_i)\rangle e_i$ definiert werden. Bei gesicherter Existenz der adjungierten Abbildung $L^*$ existiert auch die zu $L^*$ adjungierte Abbildung $L^{**} := (L^*)^*$ und es gilt $L^{**} = L$ (involutorische bzw. selbstinverse Eigenschaft der Adjungierten-Bildung). Zu einer Darstellungsmatrix von $L$ bezüglich bestimmter Basen des Original- und Zielraums erhält man mit der transponierten Matrix die Darstellungsmatrix der adjungierten Abbildung $L^*$.

[45] Die Definition der direkten Summe $V = U + W$ von linearen Unterräumen $U$ und $W$ ($U \cap W = O$) und ihre Charakterisierung mit der eindeutigen additiven Zerlegung der Elemente der Unterraumsumme findet man bei Wagner (1981), S. 27, Kowalsky (1967), S. 217, Kowalsky u. Michler (2003), S. 37, Bröcker (2004), S. 35. Die beiden Unterräume heißen komplementär zueinander, jeder heißt ein lineares Komplement des anderen. Die Darstellung eines Vektorraums $V$ als spezielle direkte Summe $V = U \oplus U^{\perp}$ eines beliebigen endlichdimensionalen Unterraums $U$ (dim $U < \infty$) und seines orthogonalen Komplements $U^{\perp}$ wird bei Wagner (1981), S. 181, Satz 5.2.15, behandelt. Die noch speziellere Darstellung eines endlichdimensionalen Vektorraums $V$ (dim $V < \infty$) als direkte Summe $V = \ker L \oplus \text{Im } L^*$ des Kerns ker $L$ einer linearen Abbildung $L : V \longrightarrow W$ und des Bildraums

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_N &= \ker L \oplus \operatorname{Im} L^*, & (\ker L)^\perp &= \operatorname{Im} L^*; \\ \mathcal{W} &= \ker L^* \oplus \operatorname{Im} L, & (\ker L^*)^\perp &= \operatorname{Im} L. \end{aligned}$$

Die hier auftretenden orthogonalen Komplemente sind mit den entsprechenden Skalarprodukten zu bilden:

$$(\ker L)^\perp = \{h \in \mathcal{H}_N : \langle h, f \rangle_{\mathcal{H}_N} = 0 \; \forall f \in \ker L\} \subseteq \mathcal{H}_N,$$

$$(\ker L^*)^\perp = \{X \in \mathcal{W} : \langle X, Y \rangle_{\mathcal{W}} = 0 \; \forall \; Y \in \ker L^*\} \subseteq \mathcal{W}.$$

Die direkten Summen zueinander orthogonaler Komplemente sind insbesondere auch sog. orthogonale Summen[46] der entsprechenden Mengen, hier der zueinander orthogonalen Unterräume.

In der Abbildung 2.9 sind die orthogonalen Komplemente ker $L$ und $L^*(\mathcal{W})$ in $\mathcal{H}_N$ und die orthogonalen Komplemente ker $L^*$ und $L(\mathcal{H}_N)$ in $\mathcal{W}$ dargestellt. Aufgrund der orthogonalen Zerlegung von $\mathcal{W}$ in $L(\mathcal{H}_N)$ und ker $L^*$ gilt für duplizierbare Zahlungsprofile $X \in L(\mathcal{H}_N)$ (Definition in Abschnitt 3.1) stets die Relation $X \perp \ker L^*$.

Die Eigenschaften der Bilder und Kerne der Abbildung $L$ und ihrer adjungierten Abbildung $L^*$ finden ihre Anwendung in den Abschnitten 3.4, 3.5 und 3.6 bei den Charakterisierungen des Gesetzes des eindeutig bestimmten Preises, der Vollständigkeit und der Arbitragefreiheit innerhalb des Mehrperiodenmodells ohne Rückgriff auf die enthaltenen Einperiodenmodelle. Bei diesen Charakterisierungen werden zusätzlich zur adjungierten Abbildung $L^*$ von $L$ auch noch die adjungierten Abbildungen $\breve{L}^*$ und $\breve{V}^*$ zu den linearen Abbildungen $\breve{V}$ und $\breve{L} = L \cdot \breve{V}$ verwendet.

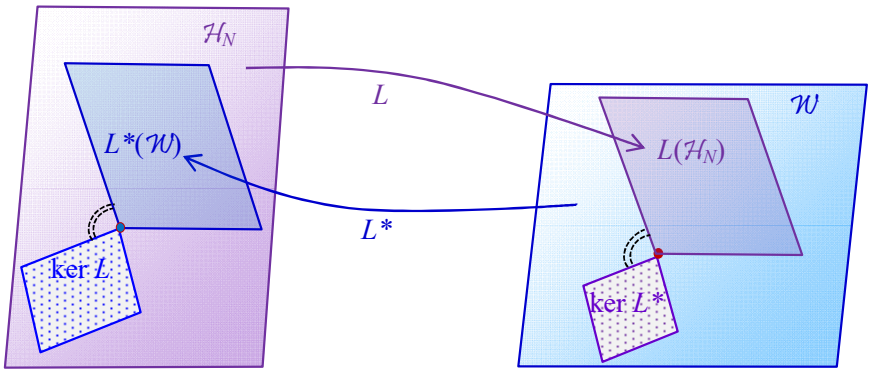



**Abb. 2.9** Die Vektorräume $\mathcal{H}_N$ und $\mathcal{W}$ als direkte Summen orthogonaler Komplemente

Nach der oben angegebenen direkten Zerlegung des Vektorraums $\mathcal{H}_N$ bzw. $\mathcal{W}$ ist die Abbildung $L$ genau dann injektiv (monomorph, umkehrbar eindeutig, eineindeutig: ker $L = O$),

Im $L^*$ der adjungierten Abbildung $L^* : W \longrightarrow V$ findet man bei Kremer (2006), S. 423, Satz 8.39, Kowalsky (1967), S. 136, Satz 21.2.

[46] Nach Stoer, Witzgall (1970), S. 51, heißt der euklidische Vektorraum $V$ orthogonale Summe seiner Teilmengen $K$ und $M$, wenn jeder Vektor $x \in V$ eine eindeutige orthogonale additive Zerlegung $x = k + m$ mit $k \in K$, $m \in M$ und $k^\mathsf{T} m = 0$ besitzt. Es gilt dann $K \cap M = O$. Beispielsweise ist $V$ die orthogonale Summe eines beliebigen linearen Kegels $K$ ($K \subseteq V$ mit $\lambda K \subseteq K \; \forall \; \lambda \in [0,\infty[$ und seines Polarkegels (polaren Kegels) $K^\mathrm{p} = \{m \in V : m^\mathsf{T} k \leq 0 \; \forall \; k \in K\}$.

wenn die Abbildung $L^*$ surjektiv (epimorph: $L^*(\mathcal{W}) = \mathcal{H}_N$) ist, und $L^*$ genau dann injektiv, wenn $L$ surjektiv ist. Demzufolge gilt:

$$L \text{ bijektiv (isomorph)} \Leftrightarrow L^* \text{ bijektiv.}$$

Nach dem Dimensionssatz[47] für endlichdimensionale Unterräume eines Vektorraums und dem Dimensionssatz[48] für eine auf einem endlichdimensionalen Vektorraum definierte lineare Abbildung erhält man die Dimensionsformeln

$$\dim \mathcal{H}_N = \dim \ker L + \dim L^*(\mathcal{W}),$$
$$\dim \mathcal{W} = \dim \ker L^* + \dim L(\mathcal{H}_N),$$
$$\dim L(\mathcal{H}_N) + \dim \ker L = \dim \mathcal{H}_N,$$
$$\dim L^*(\mathcal{W}) + \dim \ker L^* = \dim \mathcal{W}$$

und aus zweiter und vierter Gleichung die Übereinstimmung der Dimensionen der Bildräume $L(\mathcal{H}_N)$ und $L^*(\mathcal{W})$:

$$\dim L^*(\mathcal{W}) = \dim L(\mathcal{H}_N).$$

## 2.10.2 Lage der $L^*$-Bilder $L^*(\mathcal{M})$ und $L^*(\mathcal{M}^\perp)$ zum Unterraum $\mathcal{B}$

Da sich in Abschnitt 3.4.1 die Lage des eindimensionalen Unterraums $\mathcal{B} = \text{lin}\{b\}$ ($b = (S_0^\delta, 0, ..., 0)^\mathsf{T}$) bezüglich des $L^*$-Bildraums $L^*(\mathcal{W})$ als entscheidend für Auftreten des Law of One Price (LOP) erweist, wird jetzt die Lage von $\mathcal{B}$ bezüglich der Unterräume $L^*(\mathcal{M})$ und $L^*(\mathcal{M}^\perp)$ von $L^*(\mathcal{W})$ untersucht. Es wird gezeigt, dass $\mathcal{B}$ und das $L^*$-Bild $L^*(\mathcal{M})$ von $\mathcal{M}$ stets den trivialen Durchschnitt $L^*(\mathcal{M}) \cap \mathcal{B} = O$ aufweisen und das $L^*$-Bild $L^*(\mathcal{M}^\perp)$ von $\mathcal{M}^\perp$ stets in $\mathcal{B}$ enthalten ist. In den Beweisteilen L und K von Satz 3.3 in Abschnitt 3.4.1 wird noch gezeigt, dass unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) aus $b \in L^*(\mathcal{W})$ notwendig $b \in L^*(\mathcal{M}^\perp)$ folgt.

Es gilt stets

$$L^*(\mathcal{M}) \cap \mathcal{B} = O,$$
$$L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{B}$$

und unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) noch

$$\mathcal{B} \not\subseteq L^*(\mathcal{M}) \text{ und } b \notin L^*(\mathcal{M}).$$

**Beweis** für $L^*(\mathcal{M}) \cap \mathcal{B} = O$, $\mathcal{B} \not\subseteq L^*(\mathcal{M})$, $b \notin L^*(\mathcal{M})$ und $L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{B}$:

a) „$L^*(\mathcal{M}) \cap \mathcal{B} = O$, $\mathcal{B} \not\subseteq L^*(\mathcal{M})$ und $b \notin L^*(\mathcal{M})$“:

Für jedes $h \in L^*(\mathcal{M}) \cap \mathcal{B}$ ist $h = {}_{L^*(Z)}$ mit $Z = L(g) \in \mathcal{M} = L(\mathcal{B}^\perp)$, $g \in \mathcal{B}^\perp$, und $h \in \mathcal{B}$, also

$$0 = h^\mathsf{T} g = L^*(Z)^\mathsf{T} g = Z^\mathsf{T} L(g) = Z^\mathsf{T} Z,$$

wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts $Z = 0$ und $h = {}_{L^*(Z)} = 0$. Demnach ist

---

47 Den Dimensionssatz für endlich erzeugbare Unterräume $U$ und $W$ eines Vektorraums mit der ersten Dimensionsformel findet man z. B. bei Kowalsky (1967), S. 167, Kowalsky u. Michler (2003), S. 33, Wagner (1981), S. 46, und Bröcker (2004), S. 46: $\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$.

48 Den Dimensionssatz für eine auf einem endlichdimensionalen Vektorraum $V$ definierte lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$“ mit der zweiten Dimensionsformel findet man bei Kremer (2006), S. 415, Wagner (1981), S. 65, Kowalsky (1967), S. 53, Kowalsky u. Michler (2003), S. 58, und Bröcker (2004), S. 45: $\dim f(V) + \dim \ker f = \dim V$ mit $\text{rg } f := \dim f(V)$ und $\text{def } f := \dim \ker f$.

$$L^*(\mathcal{M}) \cap \mathcal{B} = O$$

und unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$ bzw. $b \neq 0$, $\mathcal{B} = \text{lin}\,\{b\} \neq O$ dann noch $\mathcal{B} \not\subseteq L^*(\mathcal{M})$ und $b \notin L^*(\mathcal{M})$.

b) „ $L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{B}$“ wird im Beweisteil B, 8b, „$\subseteq$“ von Satz 2.1 in Abschnitt 2.11 begründet. □

Wegen $\mathcal{W} = \mathcal{M}^\perp \oplus \mathcal{M}$ gilt (nach Hilfssatz 5.10 a) die Übereinstimmung

$$L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M}^\perp) + L^*(\mathcal{M})$$

und wegen $\mathcal{B} \cap L^*(\mathcal{M}) = O$ noch

$$L^*(\mathcal{M}^\perp) \cap L^*(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{B} \cap L^*(\mathcal{M}) = O.$$

Der $L^*$-Bildraum ist also stets die direkte Summe der Bilder $L^*(\mathcal{M}^\perp)$ und $L^*(\mathcal{M})$:

$$L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M}^\perp) \oplus L^*(\mathcal{M}).$$

Da in Abschnitt 3.4.1 unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) das Law of One Price (LOP) durch die Inzidenz $b \in L^*(\mathcal{M}^\perp)$ bzw. die Übereinstimmung $L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B}$ charakterisiert wird, erhält man die folgende Fallunterscheidung**:**

Unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) gilt bei gültigem LOP

$$L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B},$$
$$L^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B} \oplus L^*(\mathcal{M}),$$
$$\dim L^*(\mathcal{M}) = \dim L^*(\mathcal{W}) - 1$$

und bei ungültigem LOP

$$L^*(\mathcal{M}^\perp) = O,$$
$$L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M}).$$

### 2.10.3 Additive Zerlegung der adjungierten Abbildung $L^*$

Aus der additiven Zerlegung der Abbildung $L$ in deterministischen Anteil $\breve{V}$ und stochastischen Anteil $\breve{L}$ erhält man auch die entsprechende Zerlegung der zu $L$ adjungierten Abbildung $L^*$. Mit den durch die Gleichungen

$$\breve{L}^*(X)^\mathsf{T} h = X^\mathsf{T} \breve{L}(h) \qquad \forall\, X \in \mathcal{W},\, h \in \mathcal{H}_N,$$
$$\breve{V}^*(X)^\mathsf{T} h = X^\mathsf{T} \breve{V}(h) \qquad \forall\, X \in \mathcal{W},\, h \in \mathcal{H}_N$$

eindeutig definierten adjungierten Abbildungen $\breve{V}^*$ und $\breve{L}^*$ von $\breve{V}$ und $\breve{L}$ gelten nämlich für alle $X \in \mathcal{W}$ und $h \in \mathcal{H}_N$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} L^*(X)^\mathsf{T} h &= \langle L^*(X), h \rangle_{\mathcal{H}_N} = \big\langle X, L(h) \big\rangle_{\mathcal{W}} \\ &= X^\mathsf{T} L\big(h\big) && (L^* \text{ adjungiert zu } L) \\ &= X^\mathsf{T} \breve{V}(h) + X^\mathsf{T} \breve{L}(h) && (\text{addit. Zerlegung von } L) \\ &= \breve{V}^*(X)^\mathsf{T} h + \breve{L}^*(X)^\mathsf{T} h && (\breve{V}^*,\, \breve{L}^* \text{ adj. zu } \breve{V},\, \breve{L}) \\ &= \Big[\breve{V}^*(X) + \breve{L}^*(X)\Big]^\mathsf{T} h \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\breve{V}^*(X)^\mathsf{T} h &= X^\mathsf{T}\breve{V}(h) = X_0 V_0(h)\\ &= X_0 b^\mathsf{T} h\end{aligned}$$

mit der in Abschnitt 2.8.4 angegebenen Handelsstrategie $b := (S_0^\delta, 0,\ldots,0)^\mathsf{T} \in \mathcal{H}_N$. Da diese Gleichungen für fest gedachtes $X \in \mathcal{W}$ für alle $h \in \mathcal{H}_N$ gelten, folgen wegen der Eindeutigkeit der Darstellungsmatrizen der durch die linken Seiten gegebenen Linearformen $h \in \mathcal{H}_N \mapsto L^*(X)^\mathsf{T} h \in \mathbb{R}$ und $h \in \mathcal{H}_N \mapsto \breve{V}^*(X)^\mathsf{T} h \in \mathbb{R}$ die Beziehungen

$$\begin{aligned}L^*(X) &= \breve{V}^*(X) + \breve{L}^*(X) \quad \text{und}\\ \breve{V}^*(X) &= b\cdot X_0 = b\cdot \mathbf{1}_{0,\Omega}{}^\mathsf{T} X \in \mathcal{B}\end{aligned}$$

($\mathbf{1}_{0,\Omega} \in \mathcal{W}$ bzw. $\in \mathbb{R}^{n_1}$). Da $X \in \mathcal{W}$ beliebig war, ergibt sich die additive Zerlegung der zu $L$ adjungierten Abbildung $L^*$ folgendermaßen (Beweis folgt unten):

Die zu $L$ adjungierte Abbildung $L^*$ besitzt die additive Zerlegung

$$L^* = \breve{V}^* + \breve{L}^*$$

mit dem nur von $X_0$ abhängigen deterministischen Anteil

$$\begin{aligned}\breve{V}^*(X) &= X_0\cdot b\\ &= X_0\cdot(b_0,0,\ldots,0)^\mathsf{T}\\ &= (\breve{V}_0^*(X), 0,\ldots,0)^\mathsf{T} \in \mathcal{B}, \qquad \breve{V}_0^*(X) = X_0 b_0 = X_0 S_0^\delta,\end{aligned}$$

und dem stochastischen Anteil

$$\breve{L}^*(X) = (\breve{L}_0^*(X), \breve{L}_1^*(X), \ldots, \breve{L}_T^*(X))^\mathsf{T}, \qquad \breve{L}_0^*(X) = 0.$$

Für die Bildräume $\breve{L}^*(\mathcal{W})$ und $\breve{V}^*(\mathcal{W})$ der linearen Abbildungen $\breve{L}^*$ und $\breve{V}^*$ erhält man

$$\begin{aligned}\breve{V}^*(\mathcal{W}) &= \breve{V}^*(\mathcal{E}) = \breve{V}^*(\mathcal{V}) = \mathcal{B},\\ \breve{L}^*(\mathcal{W}) &\subseteq \mathcal{B}^\perp.\end{aligned}$$

**Beweis** für $\breve{L}_0^*(X) = 0$, $\breve{L}^*(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{B}^\perp$ und $\breve{V}^*(\mathcal{V}) = \mathcal{B}$:

1) Für alle $X \in \mathcal{W}$ und die speziellen Handelsstrategien $h = \breve{h} = (h_0, 0, \ldots, 0)^\mathsf{T} \in \mathcal{H}_N$ mit $h_0 \in \mathbb{R}^N$ und $\hat{h} = 0$ ergibt sich die Gleichung

$$\breve{L}_0^*(X)^\mathsf{T} h_0 = \breve{L}^*(X)^\mathsf{T} h = X^\mathsf{T}\breve{L}(h) = X^\mathsf{T} L(\hat{h}) = 0.$$

Da diese Gleichung für alle $h_0 \in \mathbb{R}^N$ gilt, folgt

$$\breve{L}_0^*(X) = 0.$$

Ausführlicher begründen kann man dies, indem man für $h_0$ jeweils die Standardbasisvektoren $\mathbf{e}_j$ des $\mathbb{R}^N$ einsetzt und damit die Komponenten $\breve{L}_0^{*j}(X) = 0$ erhält ($j = 1,\ldots,N$). Eine andere Begründung setzt $h_0 = \breve{L}_0^*(X)$ in die Gleichung ein und verwendet die positive Definitheit des Skalarprodukts. Eine weitere Begründung erhält man mit der Einzigkeit der Darstellungsmatrix der Linearform $h_0 \in \mathbb{R}^N \mapsto \breve{L}_0^*(X)^\mathsf{T} h_0 \in \mathbb{R}$.

2) Da dann für alle $X \in \mathcal{W}$

$$\breve{L}^*(X)^\mathsf{T} b = \breve{L}_0^*(X)^\mathsf{T} b_0 = 0 \qquad (\breve{L}_0^*(X) = 0)$$

bzw. $\breve{L}^*(X) \in \mathcal{B}^\perp$ gilt, folgt

$$\breve{L}^*(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{B}^\perp.$$

3) Aus der obigen Darstellung des Funktionswerts $\breve{V}^*(X) = X_0 \cdot b$ folgen zunächst die Inklusionen $\breve{V}^*(\mathcal{V}) \subseteq \breve{V}^*(\mathcal{E}) \subseteq \breve{V}^*(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{B}$. Für das spezielle $X = \mathbf{1}_{0,\Omega} = (1,0,\ldots,0)^\mathsf{T} \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{W}$ erhält man das $\breve{V}^*$-Bild $\breve{V}^*(X) = X_0 \cdot b = b$, demnach die Inklusionen

$$\mathcal{B} = \text{lin } b = \text{lin } \breve{V}^*(X) \subseteq \breve{V}^*(\mathcal{E}) \subseteq \breve{V}^*(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{B}$$

und somit die Übereinstimmung dieser Unterräume: $\breve{V}^*(\mathcal{E}) = \breve{V}^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B}$. Unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$ gilt $\mathcal{V} = \mathcal{E}$ und damit auch noch $\breve{V}^*(\mathcal{V}) = \breve{V}^*(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$. Aber auch im Fall, dass die Voraussetzung (AWS$^\delta$) nicht erfüllt ist, dass also der Sonderfall mit $S_0^\delta = 0$, $b = 0$, $\mathcal{B} = O$, $\breve{V}^*(X) = X_0 \cdot b = 0 \; \forall \, X \in \mathcal{W}$ und $\mathcal{V} = O$ vorliegt, gilt $\breve{V}^*(\mathcal{V}) = O = \mathcal{B}$. □

## 2.10.4 Additive Zerlegung von $L^*(\mathcal{W})$ im Spezialfall (LOP)

Aus der additiven Zerlegung der Abbildung $L^*$ erhält man mit den Unterräumen $\breve{V}^*(\mathcal{W})$ und $\breve{L}^*(\mathcal{W})$ von $\mathcal{H}_N$ die Inklusion

$$\begin{aligned} L^*(\mathcal{W}) &= \{L^*(X) = \breve{V}^*(X) + \breve{L}^*(X) \; : X \in \mathcal{W}\} \\ &\subseteq \{\breve{V}^*(X) + \breve{L}^*(Y) \; : X, Y \in \mathcal{W}\} \\ &= \breve{V}^*(\mathcal{W}) + \breve{L}^*(\mathcal{W}) \\ &= \mathcal{B} + \breve{L}^*(\mathcal{W}) \qquad (\breve{V}^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B} \text{ nach Abschnitt 2.10.3}). \end{aligned}$$

Außerdem gilt nach Abschnitt 2.10.3 für den Durchschnitt dieser $\mathcal{H}_N$-Unterräume

$$\breve{V}^*(\mathcal{W}) \cap \breve{L}^*(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{B}^\perp = O.$$

Zu beachten ist hier aber, dass der Bildraum $L^*(\mathcal{W})$ von $L^*$ im Allgemeinen nicht mit der direkten Summe dieser $\mathcal{H}_N$-Unterräume $\mathcal{B}$ und $\breve{L}^*(\mathcal{W})$ übereinstimmt. Wie nämlich in Abschnitt 3.4.1 (Satz 3.3, 7) noch gezeigt wird, ist die Inklusion $\mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{W})$ charakteristisch für das Law of One Price (LOP). Daher ist der unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$ eindimensionale Unterraum $\mathcal{B} = \breve{V}^*(\mathcal{W})$ bei nicht gültigem LOP kein Unterraum von $L^*(\mathcal{W})$ und somit auch die Summe der Unterräume $\breve{V}^*(\mathcal{W})$ und $\breve{L}^*(\mathcal{W})$ nicht in $L^*(\mathcal{W})$ enthalten:

$$\mathcal{B} + \breve{L}^*(\mathcal{W}) \not\subseteq L^*(\mathcal{W}).$$

Nur bei gültigem LOP ist nach Satz 3.3, 17) $\breve{V}^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B} = L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq L^*(\mathcal{W})$, damit auch $\breve{L}^*(\mathcal{W}) \subseteq L^*(\mathcal{W}) - \breve{V}^*(\mathcal{W}) \subseteq L^*(\mathcal{W})$ und insgesamt

$$L^*(\mathcal{W}) = \breve{V}^*(\mathcal{W}) \oplus \breve{L}^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B} \oplus \breve{L}^*(\mathcal{W}).$$

Umgekehrt folgt aus dieser direkten Zerlegung von $L^*(\mathcal{W})$ auch die Inklusion $\mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{W})$ und damit das LOP. Diese direkte Zerlegung von $L^*(\mathcal{W})$ mit den Unterräumen $\mathcal{B}$ und $\breve{L}^*(\mathcal{W})$ ist also charakteristisch für die Gültigkeit des LOP.

Im mathematischen Sonderfall $S_0^\delta = 0$ (siehe Abschnitt 2.8.4) ist $b = 0$, $\mathcal{B} = O$, $\mathcal{V} = O$, $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ und damit nach Satz 3.3, 22) von Abschnitt 3.4.1 stets das LOP gültig,

$$\breve{V}^*(X) = X_0 \cdot b = 0,\ L^*(X) = \breve{V}^*(X) + \breve{L}^*(X) = \breve{L}^*(X)\ \forall X \in \mathcal{W},$$
$$\breve{V}^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B} = O$$

und auch die obige direkte Zerlegung von $L^*(\mathcal{W})$ gegeben:

$$L^*(\mathcal{W}) = \breve{L}^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B} \oplus \breve{L}^*(\mathcal{W})\ .$$

## 2.11 Lagebeziehungen einiger Unterräume von $\mathcal{W}$ und $\mathcal{H}_N$

Bevor in Kapitel 3 die Bewertung von Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N$ und duplizierbaren Zahlungsprofilen $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N) \subseteq \mathrm{W}$ untersucht wird, wird jetzt noch ein Satz mit Beschreibungen einiger Unterräume von $\mathcal{W}$ und $\mathcal{H}_N$ und den Lagebeziehungen dieser Unterräume hergeleitet. Diese Aussagen sind noch unabhängig von der Gültigkeit des Law of One Price (LOP), welche erst bei der Bewertung der Zahlungsprofile mittels des Duplikationsprinzips in Erscheinung tritt.

**Satz 2.1 Lagebeziehungen einiger Unterräume von $\mathcal{W}$ und $\mathcal{H}_N$**

Es wird die mathematisch-technische Voraussetzung (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$ bzw. $b := S_0^\delta 1_{0,\Omega} \neq 0$ benötigt zum Nachweis von 1, 2, 5, 6, 10–12, 14. Es gelten dann für die nachfolgend definierten bzw. beschriebenen $\mathcal{H}_N$- und $\mathcal{W}$-Unterräume

1) $O \neq \mathcal{B} := \mathrm{lin}\,\{b\} \subseteq \mathcal{H}_N$,
2) $\mathcal{B}^\perp = \ker b^\mathsf{T} = \ker V_0 \neq \mathcal{H}_N$,
3) $\mathcal{M} := L(\ker V_0) = L(\mathcal{B}^\perp) = \breve{L}(\mathcal{H}_N) \subseteq L(\mathcal{H}_N)$,
4) $\mathcal{M}^\perp = \{X \in \mathcal{W} : X^\mathsf{T} Y = 0\ \forall\ Y \in \mathcal{M}\} \supseteq L(\mathcal{H}_N)^\perp = \ker L^*$,
5) $\mathcal{E} := \mathrm{lin}\,\{\mathbf{1}_{0,\Omega}\} = \mathcal{V} := \breve{V}(\mathcal{H}_N) = \breve{V}(\mathcal{B}) = L(\mathcal{B}) \subseteq L(\mathcal{H}_N)$,
6) $\mathcal{E}^\perp = \{X \in \mathcal{W} : X_0 = \mathbf{1}_{0,\Omega}{}^\mathsf{T} X = 0\} \supseteq L(\mathcal{H}_N)^\perp = \ker L^*$

noch die folgenden Beziehungen:

7) $L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{V} + \mathcal{M}$
8) $L^{*-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{M}^\perp = \ker \breve{L}^*$
9) $L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{B}$
10) $L^{*-1}(O) = \ker L^* = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 0\} = \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{E}^\perp$
11) $L^{*-1}(\mathcal{B} \setminus O) = \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^* = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 \neq 0\} = \mathcal{M}^\perp \setminus \mathcal{E}^\perp$
12) $L^{*-1}(\{b\}) = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\} =: \mathcal{M}^{\perp 1}$
13) $b \in L^*(\mathcal{W}) \Leftrightarrow \exists\ \Psi \in \mathcal{M}^\perp$ mit $\Psi_0 = 1$
14) $L^*(\mathcal{M}) \cap \mathcal{B} = O$ und $b \notin L^*(\mathcal{M})$
15) $L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M}) \oplus L^*(\mathcal{M}^\perp)$
16) $L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B} \cap L^*(\mathcal{W})$
17) $\breve{V}^*(\mathcal{W}) = \breve{V}^*(\mathcal{V}) = \mathcal{B}$
18) $\breve{L}^*(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{B}^\perp$

19) $L^*(\mathcal{W}) \quad \subseteq \mathcal{B} \oplus \breve{L}^*(\mathcal{W})$

**Beweis des Satzes 2.1**:

A) Der Beweis von 3) $\mathcal{M} = \breve{L}(\mathcal{H}_N)$ und von 7) $L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{V} + \mathcal{M}$ wird bereits in Abschnitt 2.8.4 angegeben. Dabei erfolgt der Beweis für die Unterraumsumme $L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{V} + \mathcal{M}$ dort mittels der Abbildungen $\breve{V}$ und $\breve{L}$. Einen weiteren Beweis erhält man mit Hilfssatz 5.10 a), nach dem aus der Summe $\mathcal{H}_N = \mathcal{B} + \mathcal{B}^\perp$ auch die Summe $L(\mathcal{H}_N) = L(\mathcal{B}) + L(\mathcal{B}^\perp) = \mathcal{V} + \mathcal{M}$ folgt. Außerdem wird in Abschnitt 2.8.4 unter Verwendung der Voraussetzung (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$ die Inklusion $\mathcal{E} \subseteq \breve{V}(\mathcal{H}_N)$ und damit die Übereinstimmung 5) $\mathcal{E} = \mathcal{V}$ und die Inklusion $\mathcal{E} \subseteq L(\mathcal{H}_N)$ bewiesen. Die Aussage 6) $\mathcal{E}^\perp \supseteq \ker L^*$ ist wegen der endlichen Dimension der Unterräume äquivalent zur Aussage 5) $\mathcal{E} \subseteq L(\mathcal{H}_N)$. Im mathematischen Sonderfall $S_0^\delta = 0$ ist nach Abschnitt 2.8.4 $\mathcal{V} = O \neq \mathcal{E}$, $\mathcal{M} = L(\mathcal{H}_N)$, $\mathcal{M}^\perp = \ker L^*$, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}^\perp$, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}^\perp$, $\mathcal{E} \not\subseteq \mathcal{M}$, $\mathcal{M}^{\perp 1} \neq \emptyset$.

B) Beweis von 8a) $\mathcal{M}^\perp = \ker \breve{L}^*$ und 8b) $\mathcal{M}^\perp = L^{*-1}(\mathcal{B})$:

8a) $\mathcal{M}^\perp = \ker \breve{L}^* = \breve{L}^{*-1}(O)$ : Für ein beliebiges $Y \in \mathcal{W}$ gilt $Y \in \ker \breve{L}^*$, d. h. $\breve{L}^*(Y) = 0$, genau dann, wenn

$$0 = \breve{L}^*(Y)^\mathsf{T} h \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_N$$

gilt: Die nichttriviale Aussage „⇐“ ergibt sich dabei aus der positiven Definitheit des Skalarprodukts, indem man speziell $h = \breve{L}^*(Y)$ $(\in \mathcal{H}_N)$ einsetzt.

Da aufgrund der Definition der adjungierten Abbildung $\breve{L}^*$ auch die Gleichungen

$$\breve{L}^*(Y)^\mathsf{T} h = Y^\mathsf{T} \breve{L}(h) \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_N$$

gelten, ist die Aussage $Y \in \ker \breve{L}^*$ also äquivalent zu $Y^\mathsf{T} \breve{L}(h) = 0 \;\forall\, h \in \mathcal{H}_N$ bzw. $Y \perp \breve{L}(\mathcal{H}_N) = \mathcal{M}$ (nach Abschnitt 2.8.4) oder zu $Y \in \mathcal{M}^\perp$.

8b) $\mathcal{M}^\perp = L^{*-1}(\mathcal{B})$: „⊆“: Mit der in Abschnitt 2.10.3 angegebenen additiven Zerlegung $L^* = \breve{V}^* + \breve{L}^*$ der adjungierten Abbildung $L^*$ wird jetzt gezeigt, dass die Inzidenz

$$Y \in \mathcal{M}^\perp = \ker \breve{L}^*$$

bzw. die Gleichung $\breve{L}^*(Y) = 0$ gleichbedeutend ist zur Inzidenz

$$L^*(Y) \in \mathcal{B} \text{ bzw. } Y \in L^{*-1}(\mathcal{B}).$$

Die triviale Beweisrichtung $\mathcal{M}^\perp \subseteq L^{*-1}(\mathcal{B})$ erhält man, da für $Y \in \mathcal{M}^\perp$ auch die Inzidenz $L^*(Y) \in \mathcal{B}$ bzw. $Y \in L^{*-1}(\mathcal{B})$ gilt: Es ist nämlich

$$\begin{aligned} L^*(Y) &= \breve{V}^*(Y) + \breve{L}^*(Y) \\ &= \breve{V}^*(Y) && (\breve{L}^*(Y) = 0 \text{ nach 8a}) \\ &= Y_0 \cdot b \in \mathcal{B} && \text{(Abschnitt 2.10.3).} \end{aligned}$$

Dabei ist die Inklusion $\mathcal{M}^\perp \subseteq L^{*-1}(\mathcal{B})$ auch gleichbedeutend zur Inklusion 9)

$$L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{B}.$$

Als Ergebnisse von 8a und 8b „⊆“ sind festzuhalten:

Für $Y \in \mathcal{M}^\perp$ gilt

$$\breve{L}^*(Y) = 0,$$
$$L^*(Y) = Y_0 \cdot b.$$

„⊇“: Die nichttriviale Beweisrichtung $L^{*-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{M}^\perp$ ergibt sich folgendermaßen: Aus $Y \in L^{*-1}(\mathcal{B})$ bzw. $L^*(Y) = \lambda \cdot b \in \mathcal{B}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ folgt

$$\breve{L}^*(Y) = L^*(Y) - \breve{V}^*(Y) = (\lambda - Y_0)b,$$

daraus nach Abschnitt 2.10.3

$$0 = \breve{L}_0^*(Y) = (\lambda - Y_0)b_0,$$

unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) $b_0 = S_0^\delta \neq 0$ dann $\lambda - Y_0 = 0$ und

$$\breve{L}^*(Y) = (\lambda - Y_0)b = 0$$

bzw. mit 8a) $Y \in \ker \breve{L}^* = \mathcal{M}^\perp$. Damit ist zunächst unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) die Inklusion $L^{*-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{M}^\perp$ und insgesamt die Übereinstimmung $L^{*-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{M}^\perp$ gezeigt.

Aber auch im Sonderfall, dass (AWS$^\delta$) nicht erfüllt und somit $b_0 = S_0^\delta = 0$, $b = 0$, $\mathcal{B} = O$ ist, erhält man nach Satz 2.1, 4) die Inklusion $L^{*-1}(\mathcal{B}) = L^{*-1}(O) = \ker L^* \subseteq \mathcal{M}^\perp$ und insgesamt die Übereinstimmung $L^{*-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{M}^\perp$.

Daher ergibt sich ohne die Voraussetzung (AWS$^\delta$) die Inklusion $L^{*-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{M}^\perp$ und dann die Übereinstimmung 8b)

$$L^{*-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{M}^\perp.$$

Zweiter Beweis für 8b) $\mathcal{M}^\perp = L^{*-1}(\mathcal{B})$ und 9) $L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{B}$ ohne die Voraussetzung (AWS$^\delta$) und ohne Fallunterscheidung: Es gilt $Y \in \mathcal{M}^\perp$ genau dann, wenn für beliebiges $g \in \mathcal{B}^\perp = \ker V_0$ und $L(g) \in L(\mathcal{B}^\perp) = L(\ker V_0) = \mathcal{M}$ gilt

$$L^*(Y)^\mathsf{T} g = Y^\mathsf{T} L(g) = 0,$$

also $L^*(Y) \perp \mathcal{B}^\perp$ bzw. $L^*(Y) \in \mathcal{B}^{\perp\perp} = \mathcal{B}$ (nach Kowalsky 1967, S. 134, Satz 20.8, da $\mathcal{B}$ endlichdimensional). Damit ist $\mathcal{M}^\perp = L^{*-1}(\mathcal{B})$ und folglich auch $L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{B}$ und dim $L^*(\mathcal{M}^\perp) \leq 1$ gezeigt.

C) Beweis von 9) $L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{B}$ ergibt sich aus B, 8b, „⊆“.

D) Beweis von 10) $\ker L^* = \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{E}^\perp = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 0\}$,

11) $\mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^* = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 \neq 0\}$,

12) $L^{*-1}(\{b\}) = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\}$:

Nach Beweisteil B, 8b, „⊆“ hat man für die $L^*$-Bilder der $Y \in \mathcal{M}^\perp$ die Darstellung

$$L^*(Y) = Y_0 \cdot b.$$

Damit können nun unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$ bzw. $b \neq 0$ bestimmte in $\mathcal{M}^\perp$ gelegene Teilmengen durch Bedingungen an $Y_0$ beschrieben werden:

Da nach Satz 2.1, 4) $\ker L^* \subseteq \mathcal{M}^\perp$ ist, gilt $Y \in \ker L^*$ genau dann, wenn $0 = L^*(Y) = Y_0 \cdot b$ ist. Wegen $b \neq 0$ ist dies gleichbedeutend mit $Y \in \mathcal{M}^\perp \wedge Y_0 = 0$ ist. Es ist also $\ker L^* = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 0\} = \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{E}^\perp$ (Aussage 10).

Weiter gilt $Y \in \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^*$ genau dann, wenn $0 \neq L^*(Y) = Y_0 \cdot b$ ist. Wegen $b \neq 0$ ist dies gleichbedeutend mit $Y \in \mathcal{M}^\perp \wedge Y_0 \neq 0$ ist. Es ist also $\mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^* = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 \neq 0\} = \mathcal{M}^\perp \setminus \mathcal{E}^\perp$ (Aussage 11).

Außerdem gelten nach Beweisteil B, 8b, „⊇“ die Inklusionen $L^{*-1}(\{b\}) \subseteq L^{*-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{M}^\perp$. Demnach gilt für $Y \in \mathcal{M}^\perp$ die Inzidenz $Y \in L^{*-1}(\{b\})$ genau dann, wenn $b = L^*(Y) = Y_0 \cdot b$ ist. Wegen $b \neq 0$ ist dies gleichbedeutend zu $Y \in \mathcal{M}^\perp \wedge Y_0 = 1$. Es ist also $L^{*-1}(\{b\}) = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\}$ (Aussage 12).

In der Mengenschreibweise lauten diese Ergebnisse

i) $L^{*-1}(O) = \ker L^* = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 0\} = \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{E}^\perp$,

ii) $L^{*-1}(\mathcal{B} \setminus O) = \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^* = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 \neq 0\} = \mathcal{M}^\perp \setminus \mathcal{E}^\perp$,

iii) $L^{*-1}(\{b\}) = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\}$.

Im Sonderfall $S_0^\delta = 0$ bzw. $b = 0$ ist $\mathcal{B} = O$, $\mathcal{B}^\perp = \mathcal{H}_N$,
$\mathcal{M} = L(\ker V_0) = L(\mathcal{B}^\perp) = L(\mathcal{H}_N)$,
$\mathcal{M}^\perp = L(\mathcal{H}_N)^\perp = \ker L^*$.
Nach den Betrachtungen zum Sonderfall in Abschnitt 2.8.4 (unter Verwendung von $S_0 = 0$) liegt hierfür der Fall $\beta$) (KAG$\mathbf{1}_{0,\Omega}$) $\mathbf{1}_{0,\Omega} \notin \mathcal{M}$ vor. Daher ist

$$\ker L^* = \mathcal{M}^\perp \neq \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{E}^\perp = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 0\},$$

sodass i) nicht richtig ist. Weiter ist

$$\mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^* = \emptyset \neq \mathcal{M}^\perp \setminus \mathcal{E}^\perp = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 \neq 0\}$$

und ii) nicht richtig. Außerdem ist

$$L^{*-1}(\{b\}) = \ker L^* = \mathcal{M}^\perp \neq \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\}$$

(da $0 \in \mathcal{M}^\perp \setminus \{X_0 = 1\}$) und somit iii) nicht richtig. Insbesondere ist hier noch $\mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 \neq 0\} \neq \emptyset$ und $\mathcal{M}^{\perp 1} \neq \emptyset$. Im Sonderfall $S_0^\delta = 0$ sind also die Aussagen i) = 10), ii) = 11) und iii) = 12) nicht richtig.

Der Beweis von 13) „$b \in L^*(\mathcal{W}) \Leftrightarrow \mathcal{M}^{\perp 1} = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\} \neq \emptyset$“ ergibt sich aus 12) $L^{*-1}(\{b\}) = \mathcal{M}^{\perp 1}$ unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$): Aufgrund der Übereinstimmung der beiden Mengen gilt $b \in L^*(\mathcal{W})$ bzw. $L^{*-1}(\{b\}) \neq \emptyset$ genau dann, wenn die Menge $\mathcal{M}^{\perp 1} = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\}$ nichtleer ist.

Im Sonderfall $S_0^\delta = 0$ ist $b = 0 \in L^*(\mathcal{W})$ und $L^{*-1}(\{b\}) = \mathcal{M}^\perp \neq \emptyset$ stets erfüllt. Da außerdem im Sonderfall nach Abschnitt 2.8.4 der Fall $\beta$) (KAG$\mathbf{1}_{0,\Omega}$) $\mathbf{1}_{0,\Omega} \notin \mathcal{M}$ vorliegt und damit die Bedingung $\mathcal{M}^{\perp 1} \neq \emptyset$ stets erfüllt ist, ist auch die Äquivalenz 13) richtig. Für 13) ist also die Voraussetzung (AWS$^\delta$) nicht nötig.

E) Der Beweis von 14) „$L^*(\mathcal{M}) \cap \mathcal{B} = O$ und $\mathcal{B} \nsubseteq L^*(\mathcal{M})$ bzw. $b \notin L^*(\mathcal{M})$“ wird bereits in Abschnitt 2.10.2 angegeben, wobei nur für die zweite und dritte Aussage die Voraussetzung (AWS$^\delta$) benötigt wird.

F) Beweis von 15) $L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M}) \oplus L^*(\mathcal{M}^\perp)$ : Aus $\mathcal{W} = \mathcal{M} + \mathcal{M}^\perp$ folgt nach Hilfssatz 5.10 a) die Summendarstellung

$$L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M}) + L^*(\mathcal{M}^\perp),$$

aus 9) und 14) auch ohne die Voraussetzung (AWS$^\delta$) noch $L^*(\mathcal{M}) \cap L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq L^*(\mathcal{M}) \cap \mathcal{B} = O$, also insgesamt die direkte Summe 15)

$$L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M}) \oplus L^*(\mathcal{M}^\perp).$$

Ein zweiter Beweis für diese direkte Summe ergibt sich ebenfalls ohne die Voraussetzung (AWS$^\delta$) wegen $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp = O$ und der nach 4) gültigen Inklusion $\ker L^* \subseteq \mathcal{M}^\perp$ mit Hilfssatz 5.10 c) von Abschnitt 5.3.6.

G) Beweis von 16) $L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B} \cap L^*(\mathcal{W})$ : Nach 9) $L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{B}$ gilt $L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{B} \cap L^*(\mathcal{W})$. Es ist also nur noch die umgekehrte Inklusion „$\supseteq$“ zu zeigen. Dazu werden zwei Fälle unterschieden. Im Fall i) $b \in L^*(\mathcal{W})$ bzw. $\mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{W})$ ist $\mathcal{B} \cap L^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B}$. Weiter hat man dann wegen 15) $L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M}) \oplus L^*(\mathcal{M}^\perp)$ für $b$ die Darstellung

$$b = h + g \text{ mit } h \in L^*(\mathcal{M}) \text{ und } g \in L^*(\mathcal{M}^\perp).$$

Nach 9) $L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{B}$ ist $g = \lambda b$ mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$, somit nach 14)

$$h = b - g = (1 - \lambda)b \in \mathcal{B} \cap L^*(\mathcal{M}) = O,$$

$h = 0$, $b = g \in L^*(\mathcal{M}^\perp)$ und $\mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{M}^\perp)$. Zusammen mit der umgekehrten Inklusion 9) $L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{B}$ erhält man die Übereinstimmung $L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B}$, also im Fall i)

$$L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap L^*(\mathcal{W}).$$

In diesem Fall ist dann noch $L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M}) \oplus L^*(\mathcal{M}^\perp) = L^*(\mathcal{M}) \oplus \mathcal{B}$, also $L^*(\mathcal{M})$ eine Hyperebene des $L^*$-Bildraums $L^*(\mathcal{W})$.

Im Fall ii) $b \notin L^*(\mathcal{W})$ gilt $\lambda b \notin L^*(\mathcal{W})\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\mathcal{B} \cap L^*(\mathcal{W}) = O$. Mit 9) $L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{B}$ folgt dann die Inklusion

$$L^*(\mathcal{M}^\perp) = L^*(\mathcal{M}^\perp) \cap L^*(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{B} \cap L^*(\mathcal{W}) = O,$$

also insgesamt

$$L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B} \cap L^*(\mathcal{W}) = O.$$

In diesem Fall gilt dann noch nach 15) $L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M}) \oplus L^*(\mathcal{M}^\perp) = L^*(\mathcal{M})$, so dass $L^*(\mathcal{M})$ mit dem gesamten $L^*$-Bildraum $L^*(\mathcal{W})$ übereinstimmt. Anzumerken ist hier, dass nach Satz 3.3, 6) der hier betrachtete Fall i) $b \in L^*(\mathcal{W})$ die Gültigkeit des LOP und der Fall ii) $b \notin L^*(\mathcal{W})$ die Ungültigkeit des LOP bedeutet.

H) Der Beweis von 17) $\breve{V}^*(\mathcal{W}) = \breve{V}^*(\mathcal{V}) = \mathcal{B}$ und 18) $\breve{L}^*(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{B}^\perp$ wird bereits in Abschnitt 2.10.3 angegeben.

I) Beweis von 19) $L^*(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{B} \oplus \breve{L}^*(\mathcal{W})$ : Nach Abschnitt 2.10.4 gilt stets die Inklusion

$$\begin{aligned} L^*(\mathcal{W}) &= \{L^*(X) = \breve{V}^*(X) + \breve{L}^*(X) : X \in \mathcal{W}\} \\ &\subseteq \{\breve{V}^*(Y) : Y \in \mathcal{W}\} + \{\breve{L}^*(Z) : Z \in \mathcal{W}\} \\ &= \breve{V}^*(\mathcal{W}) + \breve{L}^*(\mathcal{W}) \\ &= \mathcal{B} + \breve{L}^*(\mathcal{W}) \qquad \text{(Abschnitt 2.10.3)} \end{aligned}$$

und

$$\mathcal{B} \cap \breve{L}^*(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{B} \cap \mathcal{B}^\perp = O \qquad \text{(Abschnitt 2.10.3)}$$

also

$$L^*(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{B} \oplus \breve{L}^*(\mathcal{W}).$$

In Abschnitt 2.10.4 wird bereits angegeben, dass die Übereinstimmung $L^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B} \oplus \breve{L}^*(\mathcal{W})$ gleichbedeutend zur Gültigkeit des LOP ist und unabhängig von der Voraussetzung $S_0^\delta \neq 0$ ist. □

# 3 Bewertung nach dem Duplikationsprinzip

## 3.1 Duplizierbarkeit eines Zahlungsprofils

Es wird jetzt ein zustandsabhängiges reellwertiges Zahlungsprofil (englisch: contingent claim oder claim)

$$X \in \mathcal{W} = \{X \in \mathbb{R}^{I \times \Omega} : X \text{ ist } \mathcal{F}\text{-adaptiert reellwertig}\}$$

betrachtet, also ein reellwertiger stochastischer Prozess, der an die durch das Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ vorgegebene Filtration $\mathcal{F}$ adaptiert ist. Der im Lauf der Zeit erfolgende Wissenszuwachs über den Prozess $X$ soll also gemäß Abschnitt 2.5 durch die Filtration $\mathcal{F}$ beschrieben werden, die den Wissenszuwachs über den Preisprozess $S$ des Marktmodells modelliert (siehe Abschnitt 2.4). Für dieses Zahlungsprofil $X$ soll die Bewertung gemäß dem **Duplikationsprinzip**[1] („Pricing by Duplication“) durchgeführt werden, indem $X$ als das Zahlungsprofil $L(h)$ einer geeigneten Handelsstrategie $h = (h^1,\ldots,h^N)^\mathsf{T} \in \mathcal{H}_N$ eines Wertpapierportfolios aus $N$ Wertpapieren $S^j$ $(j = 1,\ldots,N)$ dargestellt wird. Der Wert des Zahlungsprofils $X$ soll dann durch den Wert der nachbildenden Handelsstrategie $h$ definiert werden (siehe Abschnitt 3.3). Ein Zahlungsprofil $X \in \mathcal{W}$, für welches

(DP) $$X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$$

ist, also $X$ das bei der Abbildung $L$ sich ergebende Bild $L(h)$ einer Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ ist, wird als (mittels der Abbildung $L$ oder gemäß der Bedingung (DP)) **duplizierbar** (erreichbar, absicherbar; englisch: attainable, hedgeable, marketable) bezeichnet. Die Übereinstimmung der stochastischen Prozesse $X$ und $L(h)$ soll dabei für alle Zeitpunkte $t \in I$ und alle Zustände $\omega \in \Omega$ gelten und somit $P$-sicher[2] ($P$ ist das W-Maß auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ von $\Omega$) erfüllt sein:

$$X_t(\omega) = L_t(h)(\omega) \quad \forall\, t \in I,\ \omega \in \Omega.$$

Eine Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ mit $L(h) = X$ wird **Duplikationsstrategie** (Hedging-Strategie) von $X$ genannt.

Das Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ heißt **vollständig** (englisch: complete market model), wenn jedes Zahlungsprofil $X \in \mathcal{W}$ durch eine Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ duplizierbar ist, wenn also zum

---

[1] Das Duplikationsprinzip zur Preisfindung von Aktienoptionen geht zurück auf Fischer Sheffey Black (1938–1995), Myron Samuel Scholes (1941–) und Robert Cox Merton (1944–) zu Beginn der 1970er Jahre. Die Bezeichnung Duplikationsprizip findet man auch bei Korn (1999), S. 96, Hausmann et al. (2002), S. 417, Rudolph u. Schäfer (2010), S. 258, Korn (2014), S. 15, 133, Trautmann (2017), S. 16.

[2] Besondere Notationen und Sprechweisen der Wahrscheinlichkeitstheorie (W-Theorie) werden bei Bauer (2002) WT, S. 6f., angegeben. Wegen der in der Modellierung des Marktmodells gesicherten Eigenschaft $P(\omega) > 0\ \forall\ \omega \in \Omega$ ist hier die $P$-sichere Übereinstimmung gleichbedeutend mit der $P$-fast sicheren Übereinstimmung (mit Wahrscheinlichkeit Eins, englisch: almost sure, Abk.: f.s. oder a.s.), die auf einer $P$-Nullmenge nicht vorliegen muss. Die $P$-f.s. Übereinstimmung von stochastischen Prozessen mit den beiden verschiedenen Gleichheitsbegriffen ‚modifiziert‘ und ‚ununterscheidbar‘ wird verwendet bei überabzählbar unendlichem Zustandsraum $\Omega$ (Definitionen siehe Kremer (2011), S. 387, Hausmann et al. (2002), S. 370).

festgelegten Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ das Bild $L(\mathcal{H}_N)$ der Abbildung $L : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathcal{W}$ den gesamten Zielraum $\mathcal{W}$ ausfüllt:

(VS) $\qquad L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{W}.$

Es folgt nun ein Beispiel für einfache duplizierbare Zahlungsprofile und zwar für einperiodische Termingeschäfte (Forwardgeschäfte), die auch noch in Abschnitt 3.7.2 bei der Aufspannung des Unterraums $\mathcal{M}$ der Kapitalmarktgeschäfte verwendet werden.

**Beispiel 3.1 Die Duplizierbarkeit der zu den Finanzinstrumenten des Marktmodells gehörigen einperiodischen Termingeschäfte**

Zu den festen Indizes $t \in \{1,\ldots,T\}$ und $j \in J = \{1,\ldots,N\}$ und der dazu gebildeten speziellen (deterministischen) Handelsstrategie

$$h = (h_0,..,h_t,..,h_T)^\mathsf{T} = (0,..,0,\mathbf{e}_j,0,..,0)^\mathsf{T} = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{1}_{t,\Omega} =: \theta^{t,j} \in \mathcal{H}_N$$

mit $h_s = 0$ für $s \neq t$, $h_t = \mathbf{e}_j = (\delta_{j,k})_{k\in J} = (0,..,0,1,0,..,0)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^N$ gehören die Vermögenswerte

$$V_s(h) = S_s^\delta \cdot h_s = 0 \qquad \text{für } s \neq t,$$

$$V_t(h) = S_t^\delta \cdot h_t = S_t^\delta \cdot \mathbf{e}_j = S_t^{\delta,j} \qquad \text{für } s = t,$$

die Reinvestionswerte

$$R_s(h) = S_s \cdot h_{s+1} = 0 \qquad \text{für } s \neq t\text{-}1,$$

$$R_{t-1}(h) = S_{t-1} \cdot h_t = S_{t-1} \cdot \mathbf{e}_j = S_{t-1}^j \qquad \text{für } s = t\text{-}1,$$

die Portfolioauszahlungen

$$L_s(h) = V_s(h) - R_s(h) = 0 \qquad \text{für } s \neq t\text{-}1,\ t,$$

$$L_{t-1}(h) = -R_{t-1}(h) = -S_{t-1}^j \qquad \text{für } s = t\text{-}1,$$

$$L_t(h) = V_t(h) = S_t^{\delta,j} \qquad \text{für } s = t$$

und insgesamt das Zahlungsprofil

$$\begin{aligned} X = L(h) &= -S_{t-1}^j \cdot \mathbf{1}_{t-1,\Omega} + S_t^{\delta,j} \cdot \mathbf{1}_{t,\Omega} \\ &= \left(0,..,0,-S_{t-1}^j, S_t^{\delta,j}, 0,..,0\right)^\mathsf{T} \\ &=: T^{t,j}. \end{aligned}$$

Demnach ist das einperiodische stochastische Termingeschäft $T^{t,j}$, bei dem im Zeitpunkt $t$-1 das $j$-te Wertpapier $S^j$ des Marktmodells zum Preis $S_{t-1}^j$ gekauft und im Zeitpunkt $t$ zum Preis $S_t^{\delta,j}$ wieder verkauft wird, duplizierbar. Da bei der speziellen Handelsstrategie $h = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{1}_{t,\Omega} =: \theta^{t,j}$ wegen $t \geq 1$ der aufgewandte Startkapitaleinsatz $V_0(h)$ den Wert Null hat, liegt das Termingeschäft $T^{t,j}$ in dem in Abschnitt 3.7.1 noch weiter behandelten Unterraum $\mathcal{M} := L(\ker V_0)$ der Kapitalmarktgeschäfte. Falls nun im Marktmodell, d. h. genauer im Unterraum $L(\mathcal{H}_N)$, noch das LOP gültig ist, hat das Termingeschäft $T^{t,j}$ den Preis $\pi(T^{t,j}) = 0$. △

## 3.2 Berechnung einer Duplikationsstrategie

### 3.2.1 Rekursive Auflösung des gestaffelten linearen Gleichungssystems

Um für ein duplizierbares Zahlungsprofil $X \in L(\mathcal{H}_N)$ eine Duplikationsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ zu bestimmen, ist das gestaffelte inhomogene lineare Gleichungssystem

(DP) $\quad L(h) = X$

nach einer Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ aufzulösen. Dazu wird die $\mathcal{F}$-Vorhersehbarkeit von $h$ (d. h. $h_t$ ist auf jedem $A_{t\text{-}1,k} \in \mathcal{P}_{t\text{-}1}$ konstant) und die Staffelung des umgeformten Gleichungssystems bezüglich des Zeitindexes $t \in I$ und bezüglich der Partitionsmenge $A_{t\text{-}1,k} \in \mathcal{P}_{t\text{-}1}$ genutzt:

$$\begin{aligned} S_t^\delta \cdot h_t &= V_t(h) \;\; = L_t(h) + R_t(h) \\ &= X_t + S_t \cdot h_{t+1} =: Z_t \qquad\qquad (t = T,\ldots,0;\ h_{T+1} = 0). \end{aligned}$$

Zu festem $X \in L(\mathcal{H}_N)$ wird hier für die rechten Seiten des umgeschriebenen Gleichungssystems die Abkürzung $Z_t = Z_t(X_t, h_{t+1})$ verwendet. Die Bestimmung von $Z_t$ erfolgt also mit dem Ausdruck auf der rechten Seite aus $X_t$ und $h_{t+1}$:

$$\begin{aligned} Z_t(A_{t,m}) &= X_t(A_{t,m}) + S_t(A_{t,m})^\mathsf{T} h_{t+1}(A_{t,m}) \\ &= X_t(A_{t,m}) + \sum_{j=1}^{N} S_t^j(A_{t,m}) \cdot h_{t+1}^j(A_{t,m}) \,. \end{aligned}$$

Wegen der Vorgabe von $h_{T+1} = 0$ kann speziell für $t = T$ die rechte Seite $Z_T$ unabhängig von $h$ bestimmt werden: $Z_T = X_T$. Weiter sind bei der sukzessiven zeitlich rückwärts gerichteten Auflösung für die Zeitindizes $t = T,\ldots,0$ auf der rechten Seite die Größen $X_t$ und $h_{t+1}$ und damit $Z_t$ schon bekannt. Die Übereinstimmung von $Z_t$ mit der linken Seite $V_t(h) = S_t^\delta \cdot h_t$ wird dagegen zur Auflösung nach $h_t$ verwendet.

**Erster Schritt für** $t = T$: Mit der Auflösung des Gleichungssystems beginnt man also beim Zeitpunkt $t = T$ und löst zuerst den Gleichungsblock

$$S_T^\delta \cdot h_T = X_T$$

nach dem Portfoliovektor $h_T = (h_T(A_{T-1,1}),\ldots,h_T(A_{T-1,k_{T-1}}))^\mathsf{T}$ mit seinen $k_{T\text{-}1}$ Komponenten auf:

In der Gleichung ist nämlich zu beachten, dass auf der linken Seite für die Koordinaten der $\mathcal{F}_T$-messbaren reellwertigen Produktfunktion $S_T^\delta \cdot h_T$ aufgrund der Vorhersehbarkeit von $h$ die folgenden Übereinstimmungen gelten:

$$S_T^\delta(A_{T,m})^\mathsf{T} h_T(A_{T,m}) \;=\; S_T^\delta(A_{T,m})^\mathsf{T} h_T(A_{T-1,k}) \quad \text{für } A_{T,m} \subseteq A_{T\text{-}1,k}.$$

Somit treten bei der Bestimmung der $\mathcal{F}_{T\text{-}1}$-messbaren $\mathbb{R}^N$-wertigen Zustandsfunktion $h_T$ anstelle der $k_T = K$ Unbekannten $h_T(A_{T,m})$ $(m = 1,\ldots,k_T)$ tatsächlich nur die $k_{T\text{-}1}$ Unbekannten $h_T(A_{T-1,k})$ $(k = 1,\ldots,k_{T\text{-}1})$ auf. Damit erhält man für jeden Partitionsindex $k \in \{1,\ldots,k_{T\text{-}1}\}$ von $\mathcal{P}_{T\text{-}1}$ den Block der reellwertigen Gleichungen

(DP$A_{T\text{-}1,k}$) $\qquad S_T^\delta(A_{T,m})^\mathsf{T} h_T(A_{T-1,k}) = X_T(A_{T,m})\,, \qquad m \in \{1,\ldots,k_T\}$ mit $A_{T,m} \subseteq A_{T\text{-}1,k}$.

Diese Blöcke können für jeden Partitionsindex $k \in \{1,\ldots,k_{T\text{-}1}\}$ getrennt behandelt und ggf. (im Fall der Lösbarkeit) nach dem Portfoliovektor $h_T(A_{T-1,k}) \in \mathbb{R}^N$ aufgelöst werden. Zu je-

dem Index $k$ liegen dabei für den gesuchten Vektor $h_T(A_{T-1,k})$ genau so viele Gleichungen vor, wie das in $\mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$ liegende Molekül $A_{T\text{-}1,k}$ ($\in \mathcal{P}_{T\text{-}1} \subseteq \mathcal{F}_{T\text{-}1} \subseteq \mathcal{F}_T$) Atome $A_{T,m}$ ($= \{\omega_m\} \in \mathcal{P}_T = \mathcal{Z}(\mathcal{F}_T)$) enthält bzw. wie der Ausgangsknoten $A_{T\text{-}1,k}$ Nachfolgerknoten $A_{T,m} \subseteq A_{T\text{-}1,k}$ besitzt.

Beim Zeitpunkt $t = T$ beginnt man also mit dem Partitionsindex $k = 1$ bzw. mit dem Knoten $A_{T\text{-}1,1} \in \mathcal{P}_{T\text{-}1}$ des Informationsbaumes und den von diesem Ausgangsknoten aus durch Kanten erreichbaren Nachfolgerknoten $A_{T,m} \in \mathcal{P}_T$ ($A_{T,m} \subseteq A_{T\text{-}1,1}$). Hierfür löst man das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{N} S_T^{\delta,j}(A_{T,m}) \cdot h_T^j(A_{T-1,1}) = X_T(A_{T,m}) \qquad (A_{T,m} \subseteq A_{T\text{-}1,1})$$

mit den zu den Indizes $m \in \{1,\ldots,k_T\}$ mit $A_{T,m} = \{\omega_m\} \subseteq A_{T\text{-}1,1}$ gegebenen linearen Gleichungen nach den $N$ Unbekannten $h_T^j(A_{T-1,1}) \in \mathbb{R}$ ($j = 1,\ldots,N$) auf. Im Falle der Lösbarkeit erhält man als Lösung zum Ausgangsknoten $A_{T\text{-}1,1}$ den Portfoliovektor

$$h_T(A_{T-1,1}) = (h_T^1(A_{T-1,1}),\ldots,h_T^N(A_{T-1,1}))^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^N.$$

Ebenso verfährt man dann mit den weiteren Knoten $A_{T\text{-}1,k} \in \mathcal{P}_{T\text{-}1}$ bzw. Partitionsindizes $k = 2,\ldots,k_{T\text{-}1}$ der Partition $\mathcal{P}_{T\text{-}1}$, deren Gleichungssysteme ebenfalls für sich getrennt behandelt werden können. Im Falle der Lösbarkeit erhält man insgesamt für alle Knoten $A_{T\text{-}1,k} \in \mathcal{P}_{T\text{-}1}$ als Lösung die zum Zeitpunkt $T$ gehörige $\mathcal{F}_{T\text{-}1}$-messbare $\mathbb{R}^N$-wertige Portfoliovektor-Zustandsfunktion

$$h_T = (h_T(A_{T-1,1}),\ldots,h_T(A_{T-1,k_{T-1}}))^{\mathsf{T}}$$

mit den $k_{T\text{-}1}$ Funktionswerten $h_T(A_{T-1,k}) = (h_T^1(A_{T-1,k}),\ldots,h_T^N(A_{T-1,k}))^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^N$, $k = 1,\ldots,k_{T\text{-}1}$.

**Weitere Schritte für** $t = T\text{-}1,\ldots,0$: Beim rekursiven Berechnungsschema schreitet man dann zeitlich rückwärts fort zu den Zeitpunkten $t = T\text{-}1,\ldots,0$ und den jeweils zugehörigen Knoten $A_{t\text{-}1,k} \in \mathcal{P}_{t\text{-}1}$ ($k = 1,\ldots,k_{t\text{-}1}$) und löst zu festem Indexpaar $(t,k)$ unter Verwendung der Konstanz $h_t(A_{t,m}) = h_t(A_{t\text{-}1,k})$ für $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$ das lineare Gleichungssystem

$$(\mathrm{DP}A_{t\text{-}1,k}) \qquad S_t^{\delta}(A_{t,m})^{\mathsf{T}} h_t(A_{t-1,k}) = Z_t(A_{t,m}) \qquad (A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k})$$

bzw. ausgeschrieben

$$\sum_{j=1}^{N} S_t^{\delta,j}(A_{t,m}) \cdot h_t^j(A_{t-1,k}) = Z_t(A_{t,m}) \qquad (A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k})$$

mit den jeweils bereits bekannten rechten Seiten

$$\begin{aligned} Z_t(A_{t,m}) &= X_t(A_{t,m}) + R_t(h)(A_{t,m}) \\ &= X_t(A_{t,m}) + S_t(A_{t,m})^{\mathsf{T}} h_{t+1}(A_{t,m}) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

nach den $N$ Unbekannten $h_t^j(A_{t-1,k}) \in \mathbb{R}$ ($j = 1,\ldots,N$) auf. Im Falle der Lösbarkeit erhält man als Lösung zum Partitionsereignis $A_{t\text{-}1,k}$ den Portfoliovektor

$$h_t(A_{t-1,k}) = (h_t^1(A_{t-1,k}),\ldots,h_t^N(A_{T-1,k}))^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^N,$$

dessen Vermögenswert $V_t(h)(A_{t,m}) = S_t^{\delta}(A_{t,m})^{\mathsf{T}} h_t(A_{t-1,k})$ in den Nachfolgerknoten $A_{t,m}$ von $A_{t\text{-}1,k}$ mit den rechten Seiten $Z_t(A_{t,m})$ übereinstimmt. Die jeweilige rechte Seite ist dabei gege-

ben für den Zeitindex $t = T$ durch die Zahlungskomponente $X_T(\omega_m)$ und für die Zeitindizes $t = T\text{-}1,\ldots,0$ durch die Summe der Zahlungskomponente $X_t(A_{t,m})$ und des Reinvestitionswerts $R_t(h)(A_{t,m}) = S_t(A_{t,m})^\top h_{t+1}(A_{t,m})$ des Portfoliovektors $h_{t+1}(A_{t,m})$ bzw. der Duplikationsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$.

Die Anzahl der Gleichungen wird durch die **Aufspaltungsfunktion**[3] $\nu$ beschrieben, die für jede Partitionsmenge $A_{t\text{-}1,k} \in \mathcal{P}_{t\text{-}1}$ $(t = 1,\ldots,T)$ der Partition $\mathcal{P}_{t\text{-}1}$ zum Zeitpunkt $t$-1 die Anzahl $\nu(t\text{-}1,A_{t\text{-}1,k})$ der Partitionsmengen $A_{t,m}$ in der nachfolgenden Partition $\mathcal{P}_t$ angibt, in welche die Partitionsmenge $A_{t\text{-}1,k}$ zum darauffolgenden Zeitpunkt $t$ zerfällt:

$$\nu(t\text{-}1,A_{t\text{-}1,k}) := |\{A_{t,m} \in \mathcal{P}_t : A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}\}|.$$

Im Informationsbaum gibt der **Aufspaltungswert** $\nu(t\text{-}1,A_{t\text{-}1,k})$ die Anzahl der Nachfolgerknoten $A_{t,m}$ des Ausgangsknotens $A_{t\text{-}1,k}$ an. Das zu einem Ausgangsknoten $A_{t\text{-}1,k}$ gehörige Gleichungssystem (DP$A_{t\text{-}1,k}$) ist für *jede beliebige* rechte Seite $Z_t(A_{t,m})$ genau dann lösbar, wenn die Zeilenvektoren ($N$-Tupel)

$$S_t^\delta(A_{t,m})^\top,\ A_{t,m} \subseteq A_{T\text{-}1,k},\ \text{linear unabhängig}$$

sind, also die aus diesen Zeilen gebildete Matrix den vollen Zeilenrang (= $\nu(t\text{-}1,A_{t\text{-}1,k})$) besitzt. Eine notwendige Folge davon ist

$$\nu(t\text{-}1,A_{t\text{-}1,k}) \le N.$$

Die Lösbarkeit dieses Gleichungssystems für jede beliebige rechte Seite bedeutet die Vollständigkeit des zum Ausgangsknoten $A_{t\text{-}1,k}$ gehörigen Einperiodenmodells.[4]

Zusätzlich zur Staffelung des Gleichungssystems bezüglich des Zeitindexes $t$ kann auch noch jedes der zu den Knoten $A_{t\text{-}1,k} \in \mathcal{P}_{t\text{-}1}$ gehörigen Gleichungssysteme (DP$A_{t\text{-}1,k}$) getrennt für sich behandelt werden. Bei der rekursiven Lösung des Gleichungssystems wird die in Abschnitt 2.8.2 beschriebene obere Blockbidiagonalstruktur von $L$ und die Blockdiagonalstruktur von $B_t^\delta$ und $B_t$ genutzt. Insgesamt ergibt sich für alle $k = 1,\ldots,k_{t\text{-}1}$ im Falle der Lösbarkeit die zum Zeitpunkt $t$ gehörige Portfoliovektor-Zustandsfunktion

$$h_t = (h_t(A_{t-1,1}),\ldots,h_t(A_{t-1,k_{t-1}}))^\top,$$

deren Funktionswerte $h_t(A_{t-1,k})$ die zu den Ausgangsknoten $A_{t\text{-}1,k}$ gehörigen Portfoliovektoren sind. Die Abbildung 3.1 gibt eine schematische Darstellung für die hierbei auftretenden linearen Gleichungen.

---

[3] Die Definition der Aufspaltungsfunktion findet man bei Kremer (2017), S. 156. Außerdem wird dort der Aufspaltungsindex $\nu$ als das Maximum der Aufspaltungswerte $\nu(t\text{-}1,A_{t\text{-}1,k})$ $(t = 1,\ldots,T;\ A_{t\text{-}1,k} \in \mathcal{P}_{t\text{-}1})$ definiert.

[4] Eine ausführliche Behandlung der Vollständigkeit des Einperiodenmodells erfolgt in den Abschnitten 3.2.2 und 6.2.1.

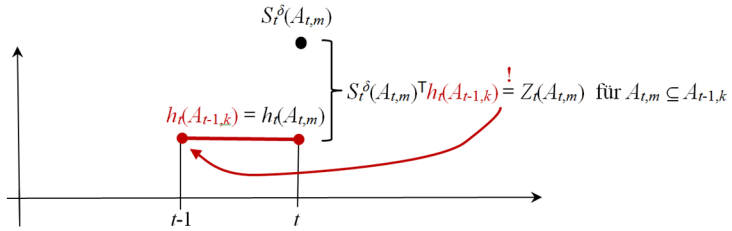



**Abb. 3.1** Schematische Darstellung der zu den Nachfolgerknoten $A_{t,m}$ von $A_{t-1,k}$ gehörigen linearen Gleichungen der Duplizierung zur Bestimmung des Portfoliovektors $h_t(A_{t-1,k})$ des Ausgangsknotens $A_{t-1,k}$ $(N = 1)$

**Beispielsweise erhält man für** $t = 1$ das zu dem einzigen Knoten $A_0 := A_{0,1} = \Omega \in \mathcal{P}_0$ (der Wurzel des Informationsbaums, $k_0 = 1$) und allen seinen Nachfolgerknoten $A_{1,m} \in \mathcal{P}_1$ $(m = 1,\ldots,k_1)$ gehörige Gleichungssystem

$$(\mathrm{DP}A_{0,1}) \qquad S_1^\delta(A_{1,m})^\mathsf{T} h_1(\Omega) = Z_1(A_{1,m}) = X_1(A_{1,m}) + S_1(A_{1,m})^\mathsf{T} h_2(A_{1,m}) \qquad (A_{1,m} \subseteq \Omega)$$

aus $\nu(0,\Omega) = k_1$ Gleichungen für die $N$ Unbekannten $h_1^j(\Omega)$ $(j = 1,\ldots,N)$. Mit der Matrix

$$D^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} S_1^\delta(A_{1,1})^\mathsf{T} \\ . \\ . \\ . \\ S_1^\delta(A_{1,k_1})^\mathsf{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1^{\delta,1}(A_{1,1}) & . & . & S_1^{\delta,N}(A_{1,1}) \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ S_1^{\delta,1}(A_{1,k_1}) & . & . & S_1^{\delta,N}(A_{1,k_1}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k_1 \times N}$$

und dem Spaltenvektor $Z_1 = (Z_1(A_{1,1}),\ldots,Z_1(A_{1,k_1}))^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{k_1}$ ergibt sich die Matrizenschreibweise des Gleichungssystems, die in Kapitel 6 bei der Behandlung des Einperiodenmodells verwendet wird:

$$D^\mathsf{T} h_1 = Z_1.$$

Im Falle der Lösbarkeit erhält man als Lösung den Portfoliovektor $h_1(\Omega) = (h_1^1(\Omega),\ldots,h_1^N(\Omega))^\mathsf{T}$. Für die nachfolgenden Zeitpunkte $t > 1$ sind aber für die Bestimmung der Zustandsfunktion $h_t = (h_t(A_{t-1,1}),\ldots,h_t(A_{t-1,k_{t-1}}))^\mathsf{T}$ im Allgemeinen gemäß der Anzahl $k_{t-1}$ der Ausgangsknoten $A_{t-1,k}$ $(k = 1,\ldots,k_{t-1})$ bzw. Anzahl der Einperiodenmodelle mehrere Gleichungssysteme zu lösen.

**Zuletzt erhält man für** $t = 0$ und den Knoten $A_{-1,1} = A_0 = \Omega$ noch die allein zum Knoten $A_0 = \Omega$ (ohne Nachfolgerknoten im Informationsbaum) gehörige einzige Gleichung

$$(\mathrm{DP}A_{-1,1}) \qquad S_0^\delta(\Omega)^\mathsf{T} h_0(\Omega) = Z_0(\Omega) = X_0(\Omega) + S_0(\Omega)^\mathsf{T} h_1(\Omega)$$

für die Berechnung der $N$ Unbekannten $h_0^j(\Omega)$ $(j = 1,\ldots,N)$ des Startportfoliovektors $h_0(\Omega) \in \mathbb{R}^N$ oder für die unmittelbare Berechnung des Vermögenswertes

$$V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = Z_0(X_0,h_1) = X_0 + S_0^\mathsf{T} h_1$$

aus $X_0$ und dem bereits berechneten $h_1$. Wegen der mathematisch-technischen Voraussetzung $(\mathrm{AWS}^\delta)$ $S_0^\delta \neq 0$ ist die Gleichung *für beliebige* $X_0 \in \mathbb{R}$ und $h_1 \in \mathbb{R}^N$ stets nach $h_0(\Omega) \in \mathbb{R}^N$ auflösbar. Die Duplizierbarkeit eines Zahlungsprofils $X = (X_0,X_1,\ldots,X_T)^\mathsf{T} \in \mathcal{W}$ ist also unabhängig von der deterministischen Komponente $X_0$. Dies entspricht der Aussage von Abschnitt

3.7.3, dass unter der Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) mit einem $L$-duplizierbaren Zahlungsstrom $X \in L(\mathcal{H}_N)$ auch der in der 0-ten Komponente abgeänderte Zahlungsstrom $Y = X + p\cdot\mathbf{1}_{0,\Omega} = (X_0 + p, X_1, \ldots, X_T)^{\mathsf{T}}$, $p \in \mathbb{R}$, $L$ -duplizierbar ist:

Unter der Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) gilt:
$$X \in L(\mathcal{H}_N) \Rightarrow Y = X + p\cdot\mathbf{1}_{0,\Omega} \in L(\mathcal{H}_N) \text{ für beliebiges } p \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere folgt
$$X = (X_0, X_1, \ldots, X_T)^{\mathsf{T}} \in L(\mathcal{H}_N) \Leftrightarrow Y = (0, X_1, \ldots, X_T)^{\mathsf{T}} \in L(\mathcal{H}_N).$$
Begründung von „⇒“ mit $p = -X_0$ und von „⇐“ mit $p = X_0$.
Weiter folgt daraus auch die in Abschnitt 2.8.4 unter der Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) bewiesene Inzidenz

(DP$\mathbf{1}_{0,\Omega}$) $\quad \mathbf{1}_{0,\Omega} \in L(\mathcal{H}_N)$

bzw. Inklusion $\mathfrak{E} := \operatorname{lin} \mathbf{1}_{0,\Omega} \subseteq L(\mathcal{H}_N)$. Begründung: $X = 0 = (0,\ldots,0)^{\mathsf{T}} \in L(\mathcal{H}_N)$, $p = 1 \Rightarrow Y = \mathbf{1}_{0,\Omega} = 0 + 1\cdot\mathbf{1}_{0,\Omega} \in L(\mathcal{H}_N)$.

Als weitere Folgerung ergibt sich speziell im Einperiodenmodell ($T = 1$) die Äquivalenz der verschiedenen Begriffe der Duplizierbarkeit und der Vollständigkeit (siehe Abschnitt 3.2.2 und 6.2.1). Im Falle $N > 1$ ist dabei der Portfoliovektor $h_0(\Omega) \in \mathbb{R}^N$ durch die einzige reellwertige Gleichung $S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = Z_0$ nicht eindeutig bestimmt.

Aufgrund dieser letzten Gleichung (DP$A_{-1,1}$) für $t = 0$ kann das Law of One Price (Abk.: LOP, Definition folgt noch in Abschnitt 3.3.2 bei der Bewertung nach dem Duplikationsprinzip) also auch folgendermaßen formuliert werden:

(LOP1) $\quad$ Für jedes $X \in L(\mathcal{H}_N)$ gilt: $S_0{}^{\mathsf{T}} h_1$ konstant $\forall\, h \in L^{-1}(\{X\})$.

Im Falle der Duplizierbarkeit von $X$ erhält man eine Duplikationsstrategie $h = (h_0,\ldots,h_T)^{\mathsf{T}}$. Falls noch das LOP gültig ist, liefert
$$\pi(X) := S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = V_0(h) = L_0(h) + R_0(h) = X_0 + S_0{}^{\mathsf{T}} h_1$$
den Preis des Zahlungsprofils $X$.

Die hier dargestellte zeitlich rückwärts verlaufende schrittweise Auflösung des gestaffelten Gleichungssystems entspricht auch dem Vorgehen von Kremer (2011), S. 164–166, der das Mehrperiodenmodell in seine Einperiodenmodelle zerlegt und sukzessive rückwärts für die Zeitpunkte $t = T,\ldots,1$ die zu den Knoten $A_{t-1,k} \in \mathcal{P}_{t-1}$ des Informationsbaumes gehörigen einperiodischen Gleichungssysteme (DP$A_{t-1,k}$) in der speziellen Schreibweise des Einperiodenmodells löst.[5] Für das zum fest gedachten Ausgangsknoten $A_{t-1,k} \in \mathcal{P}_{t-1}$ und seinen Nachfolgerknoten $A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}$ gehörige Einperiodenmodell werden dabei nur Zahlungsprofile zum einzigen Zeitpunkt $t$ (anstelle der Zeitpunkte $t$-1 und $t$), also Zustandsfunktionen $Z_t$ auf $A_{t-1,k}$ in Abhängigkeit von den $A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}$ betrachtet. In den nächsten Abschnitten folgen nun noch einige Betrachtungen zu den im Mehrperiodenmodell enthaltenen Einperiodenmodellen und zwar hinsichtlich Duplizierbarkeit, Vollständigkeit und Law of One Price.

---

[5] Eine ausführliche Behandlung des Einperiodenmodells in seiner speziellen Schreibweise in den niedrigerdimensionalen Räumen $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ und die Betrachtung der speziellen Zahlungsprofile $X_1 \in \mathbb{R}^K$ zum Endzeitpunkt $t = 1$ erfolgt auch in der vorliegenden Abhandlung noch in Abschnitt 6.2.

Nachfolgend wird ein Zahlenbeispiel zur Bestimmung einer Duplikationsstrategie $h$ für ein vorgegebenes Zahlungsprofil $X$ gerechnet. In der zugehörigen Abbildung 3.2 sind zum vorgegebenen Preisprozess $S$ des Marktmodells der Informationsbaum des Mehrperiodenmodells und die gestrichelt umrandeten einperiodischen Teilgraphen der enthaltenen Einperiodenmodelle dargestellt.

**Beispiel 3.2 Die Bestimmung einer Duplikationsstrategie und des Preises eines Zahlungsprofils in einem Zwei Perioden-Vier Zustände-Zwei Finanzinstrumente-Modell**

In dem folgenden Zahlenbeispiel eines Marktmodells ist die Anzahl der dividendenlosen ($\delta = 0$) Finanzinstrumente $N = 2$, die Anzahl der Zeitperioden $T = 2$ und die Anzahl der Zustände $|\Omega| = K = 4$. Die Knoten des Informationsbaums zum Preisprozess

$$S^\circ = S = (S_t^j(A_t))_{t=0,1,2;\, A_t \in \mathcal{P}_t;\, j=1,2}$$

sind $A_0 := A_{01} = \Omega$, $A_{11} = \{\omega_1,\omega_2\}$, $A_{12} = \{\omega_3,\omega_4\}$, $A_{2k} = \{\omega_k\}$ für $k = 1,\ldots,4$. Die Filtration $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_t)_{t=0,1,2}$ der Partitionen ist gegeben durch

$$\mathcal{P}_0 = \{A_0\},$$
$$\mathcal{P}_1 = \{A_{11},A_{12}\},$$
$$\mathcal{P}_2 = \{A_{21},A_{22},A_{23},A_{24}\} = \{\{\omega_1\},\{\omega_2\},\{\omega_3\},\{\omega_4\}\}.$$

Der $\mathcal{P}$-adaptierte Preisprozess $S \in \mathcal{W}_2$ ist gegeben durch

$$S_0^\top = S_0(A_0)^\top = (80,100),$$
$$S_1^\top = (S_1(A_{11})^\top;S_1(A_{12})^\top) = (64,110;96,90),$$
$$S_2^\top = (S_2(\omega_1)^\top;S_2(\omega_2)^\top;S_2(\omega_3)^\top;S_2(\omega_4)^\top) = (58,132;29,106;76.8,99;105.6,81).$$

Das zu bewertende $\mathcal{P}$-adaptierte reellwertige Zahlungsprofil sei $X = (X_0,X_1,X_2)^\top \in \mathcal{W} = \mathcal{W}_1$ mit

$$X_0 = X_0(\Omega) = 0,$$
$$X_1 = (X_1(A_{11}),X_1(A_{12}))^\top = (0,0)^\top,$$
$$X_2 = (X_2(\omega_1),X_2(\omega_2),X_2(\omega_3),X_2(\omega_4))^\top = (32,6,0,0)^\top.$$

Das zur Bestimmung einer Duplikationsstrategie $h$ zu lösende gestaffelte lineare Gleichungssystem (DP) $L(h) = X$ lässt sich in drei Teile zerlegen:

(DP$A_{1,k}$) $S_2(A_{2,m})^\top h_2(A_{1,k}) = X_2(A_{2,m})$ für $A_{2,m} \subseteq A_{1,k} \in \mathcal{P}_1$, $k = 1, 2$,

(DP$A_{0,1}$) $S_1(A_{1,m})^\top h_1(A_0) = Z_1(A_{1,\mathrm{m}}) = X_1(A_{1,m}) + S_1(A_{1,m})^\top h_2(A_{1,m})$ für $A_{1,m} \subseteq A_0 \in \mathcal{P}_0$,

(DP$A_{\text{-}1,1}$) $S_0(A_0)^\top h_0(A_0) = Z_0(A_0) = X_0(A_0) + S_0(A_0)^\top h_1(A_0)$.

Der erste Teil wird in der Abbildung 3.4 durch die gelb und grün umrandeten Teilgraphen veranschaulicht, der zweite Teil durch den blau umrandeten Teilgraphen. Der dritte Teil liefert im Knoten $A_0$ den Startkapitalwert $Z_0(A_0) = V_0(h)$ und die Bemerkung, dass der Portfoliovektor $h_0$ nicht eindeutig bestimmt ist.

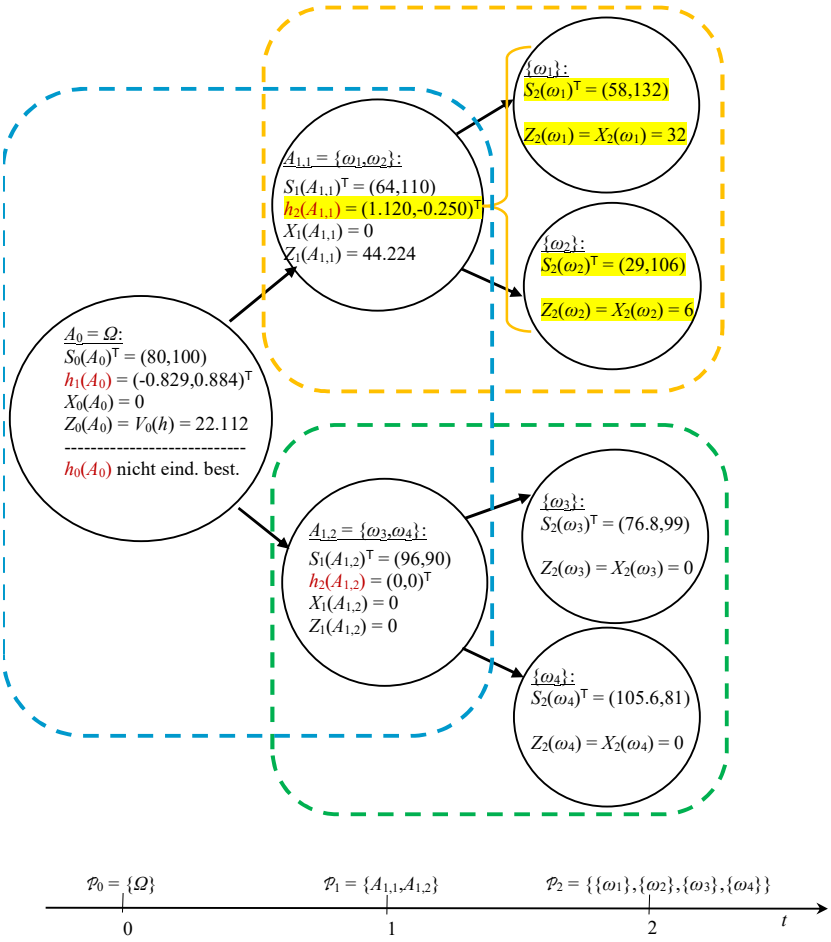



**Abb. 3.2** Der Informationsbaum des zur Filtration $\mathcal{P}$ adaptierten Preisprozesses $S^\delta = S(\delta = 0, N = 2, T = 2, K = 4)$ und die gestrichelt umrandeten Teilgraphen der enthaltenen Einperiodenmodelle. In den Knoten sind neben dem Preisprozesswert $S_t(A_{t,k})$ noch der Zahlungswert $X_t(A_{t,k})$ des $\mathcal{P}$-adaptierten Zahlungsprofil $X = (X_0,X_1,X_2)^\top$, die rechte Seite $Z_t(A_{t,k})$ des jeweiligen Gleichungssystems und in den Ausgangsknoten $A_{t,k}$ ($t = 0,1$) von Einperiodenmodellen noch der gesuchte Portfoliovektor $h_{t+1}(A_{t,k})$ der $\mathcal{P}$-vorhersehbaren Duplikationsstrategie $h = (h_0,h_1,h_2)^\top$ aufgeführt.

1) Mit der Auflösung der Gleichungssysteme beginnt man beim ersten Knoten $A_{1,1} = \{\omega_1,\omega_2\}$ der Partition $\mathcal{P}_1$. Zu diesem Knoten $A_{1,1} \in \mathcal{P}_1$ und seinen durch Kanten erreichbaren Nachfolgerknoten $A_{2,1} = \{\omega_1\}$, $A_{2,2} = \{\omega_2\} \in \mathcal{P}_2$, $(A_{2,1}, A_{2,2} \subseteq A_{1,1})$ des Informationsbaums gehört der in der Abbildung 3.4 gelb gestrichelt umrandete Teilgraph eines Einperiodenmodells. In diesem ist der Portfoliovektor $h_2(A_{1,1}) = \left(h_2^1(A_{1,1}),h_2^2(A_{1,1})\right)^\top$ zu bestimmen. Das hierfür vorliegende Gleichungssystem besitzt in der Komponentenschreibweise die zu den Nachfolgerknoten $A_{2,1}$, $A_{2,2} \subseteq A_{1,1}$ gehörigen Zeilen

(DP$A_{1,1}$)
$$S_2^1(\omega_1)h_2^1(A_{1,1}) + S_2^2(\omega_1)h_2^2(A_{1,1}) = X_2(\omega_1),$$
$$S_2^1(\omega_2)h_2^1(A_{1,1}) + S_2^2(\omega_2)h_2^2(A_{1,1}) = X_2(\omega_2).$$

In der Matrizenschreibweise erhält man

$$\begin{pmatrix} S_2^1(\omega_1) & S_2^2(\omega_1) \\ S_2^1(\omega_2) & S_2^2(\omega_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_2^1(A_{1,1}) \\ h_2^2(A_{1,1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2(\omega_1) \\ X_2(\omega_2) \end{pmatrix}$$

und mit den verwendeten Zahlenwerten

$$\begin{pmatrix} 58 & 132 \\ 29 & 106 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_2^1(A_{1,1}) \\ h_2^2(A_{1,1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Im gelb umrandeten Einperiodenmodell zum Ausgangsknoten $A_{11} \in \mathcal{P}_1$ hat man hier für die $N = 2$ Unbekannten $h_2^1(A_{1,1})$ und $h_2^2(A_{1,1})$ also $v(1,A_{1,1}) = |M(A_{1,1})| = 2$ inhomogene lineare Gleichungen, wobei die Indexmenge $M(A_{1,1}) := \{m \in \{1,\ldots,k_2\} : A_{2,m} \subseteq A_{11}\} = \{1, 2\}$ die Nachfolgerknoten $A_{2,m}$ von $A_{11}$ beschreibt. Als Lösung erhält man den Portfoliovektor

$$h_2(A_{1,1}) = \left(h_2^1(A_{1,1}), h_2^2(A_{1,1})\right)^\top = (1.120,-0.250)^\top.$$

Analog ergibt sich im grün umrandeten Teilgraphen für den zum Knoten $A_{1,2} \in \mathcal{P}_1$ gehörigen Portfoliovektor die Lösung

$$h_2(A_{1,2}) = \left(h_2^1(A_{1,2}), h_2^2(A_{1,2})\right)^\top = (0;0)^\top.$$

Insgesamt erhält man die Zustandsfunktion

$$h_2 = \left(h_2^1(A_{1,1}), h_2^2(A_{1,1}); h_2^1(A_{1,2}), h_2^2(A_{1,2})\right)^\top = (1.120,-0.250;0,0)^\top.$$

2) Nach dieser Bearbeitung aller Knoten der Partition $\mathcal{P}_1$ gelangt man zum Knoten $A_0$ der Partition $\mathcal{P}_0$. Zum Knoten $A_0 = \Omega \in \mathcal{P}_0$ und seinen Nachfolgerknoten $A_{1,1}, A_{1,2} \in \mathcal{P}_1$ ($A_{1,1}, A_{1,2} \subseteq A_0$) im blau umrandeten Teilgraphen wird der Portfoliovektor $h_1(A_0) = \left(h_1^1(A_0), h_1^2(A_0)\right)^\top$ gesucht. Zur Bestimmung verwendet man das Gleichungssystem mit den zu den Nachfolgerknoten $A_{1,1}, A_{1,2} \subseteq A_0$ gehörigen Zeilen

(DP$A_{0,1}$)
$$S_1^1(A_{1,1})h_1^1(A_0) + S_1^2(A_{1,1})h_1^2(A_0) = Z_1(A_{1,1}),$$
$$S_1^1(A_{1,2})h_1^1(A_0) + S_1^2(A_{1,2})h_1^2(A_0) = Z_1(A_{1,2})$$

mit den jetzt bekannten rechten Seiten

$$Z_1(A_{1,1}) = X_1(A_{1,1}) + S_1^1(A_{1,1})h_2^1(A_{1,1}) + S_1^2(A_{1,1})h_2^2(A_{1,1}),$$
$$Z_1(A_{1,2}) = X_1(A_{1,2}) + S_1^1(A_{1,2})h_2^1(A_{1,2}) + S_1^2(A_{1,2})h_2^2(A_{12}).$$

Das Gleichungssystem lautet in der Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} S_1^1(A_{1,1}) & S_1^2(A_{1,1}) \\ S_1^1(A_{1,2}) & S_1^2(A_{1,2}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1^1(A_0) \\ h_1^2(A_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1(A_{1,1}) \\ Z_1(A_{1,2}) \end{pmatrix}$$

und mit den verwendeten Zahlenwerten

$$\begin{pmatrix} 64 & 110 \\ 96 & 90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1^1(A_0) \\ h_1^2(A_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44.224 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es besitzt als Lösung den Portfoliovektor bzw. die Zustandsfunktion

$$h_1 = h_1(A_0) = \left(h_1^1(A_0), h_1^2(A_0)\right)^\top = (-0.8292, 0.88448)^\top.$$

3) Zum Zeitpunkt $t = 0$ (und allein zum Knoten $A_{-1} = A_0 = \Omega$ ohne Nachfolgerknoten im Informationsbaum) erhält man für den Portfoliovektor $h_0(A_0) = \left(h_0^1(A_0), h_0^2(A_0)\right)^\mathsf{T}$ nur die einzige reellwertige Gleichung

(DP$A_{-1,1}$) $\qquad S_0(A_0)^\mathsf{T} h_0(A_0) = Z_0(A_0)$

mit der jetzt bereits bekannten rechten Seite

$$\begin{aligned} Z_0(A_0) &= X_0(A_0) + S_0(A_0)^\mathsf{T} h_1(A_0) \\ &= 0 + 80\cdot(-0.8292) + 100\cdot 0.88448 = 22.112. \end{aligned}$$

Diese Gleichung

$$80 \cdot h_0^1(A_0) + 100 \cdot h_0^2(A_0) = 22.112$$

ist nach $h_0$ auflösbar. Die Lösung ist aber nicht eindeutig bestimmt. Eine mögliche Lösung ist der Portfoliovektor $h_0 = (0.0014, 0.22)^\mathsf{T}$, also ein Portfolio mit 0.0014 Einheiten von $S^1$ und mit 0.22 Einheiten von $S^2$. Damit ergibt sich eine mögliche Duplikationsstrategie für $X$ mit

$$h = (h_0; h_1; h_2)^\mathsf{T} = (0.0014, 0.22;\ -0.829, 0.884;\ 1.120, -0.250; 0, 0)^\mathsf{T}.$$

Der Preis des Zahlungsprofils $X$ (Definition des Preises folgt in Abschnitt 3.3.2) ist hier jedoch eindeutig bestimmt und beträgt

$$\pi(X) = V_0(h) = S_0^\mathsf{T} h_0 = 22.112. \qquad \triangle$$

**Anmerkung zur Duplizierung bei unvollkommenem Kapitalmarkt**

Bei der Lösung der Duplikationsgleichung (DP) könnte auch ein Verallgemeinerungsversuch zur Bewertung auf unvollkommenem Kapitalmarkt ansetzen, indem ein System aus Investitionen zum Geldkurs und Finanzierungen zum Briefkurs verwendet wird. Dies bedeutet, dass bei den Preisprozessen der Finanzinstrumente $S^j$ zwischen dem höheren Briefkurs $S^{j,B}$ für den Kauf des Wertpapiers und dem niedrigeren Geldkurs $S^{j,G}$ für den Verkauf des Wertpapiers auf dem Markt zu unterscheiden ist.

Bei der Berechnung einer Duplikationsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ für ein Zahlungsprofil $X \in \mathcal{W}$ ist dann das oben für den vollkommenen Kapitalmarkt angegebene Gleichungssystem derart abzuändern, dass bei nichtnegativer Stückzahl $h_t^j$ der Briefkurs und bei negativer Stückzahl $h_t^j$ der Geldkurs zu nehmen ist. Man erhält dann ein Gleichungssystem, dessen Matrixelemente $S_t^{\delta,j,E(j,t-1,k)}(A_{t,m})$ vom Vorzeichen der Unbekannten $h_t^j(A_{t-1,k})$ ($j = 1,\ldots,N$) abhängen. Das gestaffelte inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{N} S_t^{\delta,j,E(j,t\text{-}1,k)}(A_{t,m}) \cdot h_t^j(A_{t-1,k}) = Z_t(A_{t,m}),$$

$t = T,\ldots,0$, $k \in \{1,\ldots,k_{t\text{-}1}\}$, $m \in \{1,\ldots,k_t\}$ mit $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$, besitzt die rechten Seiten

$$Z_t(A_{t,m}) := X_t(A_{t,m}) + \sum_{j=1}^{N} S_t^{j,E(j,t,m)}(A_{t,m}) \cdot h_{t+1}^j(A_{t,m}),$$

die bei der für die Zeitindizes $t = T,\ldots,0$ rückwärts gerichteten sukzessiven Auflösung jeweils bereits bekannt sind. Im Gegensatz zum vollkommenen Kapitalmarkt enthält es jetzt auf der linken Seite in den Matrixelementen die Kursartindizes

$$E(j,t\text{-}1,k) = \begin{cases} B & \text{für } h_t^j(A_{t-1,k}) \geq 0, \\ G & \text{für } h_t^j(A_{t-1,k}) < 0, \end{cases}$$

welche die jeweilige Kursart ($B$ für Briefkurs $S_t^{\delta,j,B}$ oder $G$ für Geldkurs $S_t^{\delta,j,G}$ von $S^j$ zum Zeitpunkt $t_-$ vor der Dividendenzahlung) der Finanzinstrumente in Abhängigkeit vom Vorzeichen der gesuchten Unbekannten $h_t^j(A_{t-1,k})$ bestimmen. Auf der rechten Seite des Gleichungssystems befinden sich die Kursartindizes

$$E(j,t,m) = \begin{cases} B & \text{für } h_{t+1}^j(A_{t,m}) \geq 0, \\ G & \text{für } h_{t+1}^j(A_{t,m}) < 0, \end{cases}$$

die bei der sukzessiven Auflösung des Gleichungssystems von $t = T$ bis $t = 0$ schon im vorhergehenden $t$-Schritt zusammen mit den Werten $h_{t+1}^{j}(A_{t,m})$ bestimmt wurden. Bei deterministischen Zahlungsströmen wird ein derartiges Problem bei Pleier (2021) behandelt. Für spezielle Supplementsysteme aus Investitionen und Finanzierungen des unvollkommenen Kapitalmarkts kann dort die eindeutige Duplizierung durch die iterative Nullstellenbestimmung einer Hilfsfunktion berechnet werden. Dieses Problem wird hier aber für die stochastischen Zahlungsströme nicht weiter verfolgt.

### 3.2.2 Duplizierbarkeit und Vollständigkeit im Einperiodenmodell

**Duplizierbarkeit im Einperiodenmodell**

Im Spezialfall $T = 1$ des Einperiodenmodells sind für die Duplizierung eines Zahlungsprofils $X = (X_0,X_1)^\mathsf{T} = (L_0(h),L_1(h))^\mathsf{T} \in L(\mathcal{H}_N)$ nacheinander die beiden Gleichungssysteme zu lösen:

(DP$A_{0,1}$) $\quad D^\mathsf{T}h_1 = Z_1,$

(DP$A_{-1,1}$) $\quad S_0^{\delta\mathsf{T}}h_0 = Z_0$

mit der oben angegebenen Matrix $D^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{K\times N}$ und den zu $X$ gehörigen rechten Seiten $Z_1 = X_1 + S_1h_2 = X_1$ ($h_2 = 0$ bei $T = 1$) und $Z_0 = X_0 + S_0h_1$. Da die zweite Gleichung (DP$A_{-1,1}$) unter der mathematisch-technischen Voraussetzung (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$ für beliebiges $Z_0 \in \mathbb{R}$ und damit *für beliebige* $X_0 \in \mathbb{R}$ und $h_1 \in \mathbb{R}^N$ stets lösbar ist, ist die $L$-Duplizierbarkeit von $X = (X_0,X_1)^\mathsf{T} \in \mathcal{W}$,

(DP) $\quad X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N),$

dann gleichbedeutend zur $S_1^\delta$- bzw. $D^\mathsf{T}$-Duplizierbarkeit des zum Endzeitpunkt $t = 1$ gehörigen Zahlungsprofils $Z_1 = X_1$:

(DP$D^\mathsf{T}$) $\quad X_1 = S_1^\delta h_1 = D^\mathsf{T}h_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N).$

Die Voraussetzung (AWS$^\delta$) wird dabei für die Beweisrichtung (DP$D^\mathsf{T}$) $\Rightarrow$ (DP) benötigt. Demzufolge sind speziell im Einperiodenmodell unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$)

- die $L$-Duplizierbarkeit (DP) eines Zahlungsprofils $X = (X_0,X_1)^\mathsf{T} \in \mathcal{W} = \mathbb{R}^{1+K}$ mit beliebigem $X_0 \in \mathbb{R}$,
- die sf-Duplizierbarkeit (DPsf) des endfälligen Zahlungsprofils $X = (0,X_1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{1+K}$ (mit $X_0 = 0$) mittels einer sog. selbstfinanzierenden Handelsstrategie (sf-Handelsstrategie) $h \in \mathcal{H}_N^{sf} = \mathbb{R}^{2N} \cap \{L_0(h) = 0\}$ und der Abbildung $L : \mathcal{H}_N^{sf} \longrightarrow \mathbb{R}^{1+K}$ und
- die (nach Abschnitt 5.1.1 zu (DPsf) äquivalente) sf-Duplizierbarkeit (DPsfT) des zum Zeitpunkt $t = 1$ gehörigen Zahlungsprofils $X_1 \in \mathbb{R}^K$ ($= \mathbb{R}^\Omega = \mathcal{W}_{T,1}$ nach Abschnitt 5.1) mittels der Abbildung $L_1 = V_1 : \mathcal{H}_N^{sf} \longrightarrow \mathbb{R}^K$ (eine ausführlichere Begründung erfolgt noch in Abschnitt 6.2.1; die Definition der sf-Duplizierbarkeit für beliebiges $T \in \mathbb{N}$ erfolgt in den Abschnitten 5.1 und 5.2)

jeweils äquivalent zur $D^\mathsf{T}$-Duplizierbarkeit (DP$D^\mathsf{T}$) des zum Endzeitpunkt $t = 1$ gehörigen Zahlungsprofils $X_1 \in \mathbb{R}^K$ und dann auch untereinander äquivalent. Es gelten somit die Äquivalenzen:

$$
\begin{aligned}
&\text{(DP)} && X = (X_0,X_1)^\mathsf{T} &&= L(h) \in L(\mathcal{H}_N) \text{ mit beliebigem } X_0 \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow\ &\text{(DP}D^\mathsf{T}\text{)} && X_1 = S_1^\delta h_1 &&= D^\mathsf{T}h_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) \\
\Leftrightarrow\ &\text{(DPsf)} && X = (0,X_1)^\mathsf{T} &&= L(h) \in L(\mathcal{H}_N^{sf}) \\
\Leftrightarrow\ &\text{(DPsfT)} && X_1 = L_1(h) &&= V_1(h) = S_1^\delta h_1 \in V_1(\mathcal{H}_N^{sf}) .
\end{aligned}
$$

Zu beachten ist, dass in den Bedingungen (DPsf) und (DPsfT) neben der $D^{\mathsf{T}}$-Duplizierung (DP$D^{\mathsf{T}}$) ≡ (DP$A_{0,1}$) $X_1 = D^{\mathsf{T}}h_1$ von $X_1$ auch noch die Bedingung (DP$A_{-1,1}$) $S_0^{\delta\,\mathsf{T}}h_0 = 0 + S_0{}^{\mathsf{T}}h_1$ (für $X_0 = 0$) bzw. die Selbstfinanzierungsbedingung (SF) $L_0(h) = V_0(h) - R_0(h) = 0$ erfasst ist. Da im Einperiodenmodell die Bedingung (SF) $S_0^{\delta\,\mathsf{T}}h_0 = S_0{}^{\mathsf{T}}h_1$ unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) aber stets erfüllbar ist, wird diese meist nicht weiter berücksichtigt und salopp die $D^{\mathsf{T}}$-Duplizierbarkeit (DP$D^{\mathsf{T}}$) auch als Duplizierbarkeit bezeichnet.

**Vollständigkeit des Einperiodenmodells**
Weiter ist dann im Einperiodenmodell unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) die allgemeine Vollständigkeit (VS) gleichbedeutend zur $D^{\mathsf{T}}$-Vollständigkeit (VS$D^{\mathsf{T}}$) und zur sf-Vollständigkeit (VSsf) bzw. (VSsfT):

$$\begin{aligned}
&\text{(VS)} && L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{W}\\
\Leftrightarrow\ &\text{(VS}D^{\mathsf{T}}\text{)} && D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^K\\
\Leftrightarrow\ &\text{(VSsf)} && L(\mathcal{H}_N^{sf}) = \mathcal{W}(1) := \mathcal{W} \cap \{X_0 = 0\} = O \times \mathbb{R}^K\\
\Leftrightarrow\ &\text{(VSsfT)} && L_1(\mathcal{H}_N^{sf}) = V_1(\mathcal{H}_N^{sf}) = \mathbb{R}^K.
\end{aligned}$$

Die Voraussetzung (AWS$^\delta$) wird dabei für den Schluss (DP$D^{\mathsf{T}}$) ⇒ (DP) und damit für (VS$D^{\mathsf{T}}$) ⇒ (VS) verwendet. Bei vorliegender sf-Vollständigkeit können alle endfälligen Zahlungsprofile $X = (0,X_1)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{W}(1)$ bzw. alle zum Zeitpunkt $t = 1$ gehörigen Zahlungsprofile $X_1 \in \mathbb{R}^\Omega$ mit den selbstfinanzierenden Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ erreicht ($L$- bzw. $V_1$-dupliziert) werden. Wie bei den Bedingungen (DPsf) und (DPsf1) ist auch in den Bedingungen (VSsf) und (VSsf1) neben der $D^{\mathsf{T}}$-Duplizierbarkeit (DP$D^{\mathsf{T}}$) $X_1 = D^{\mathsf{T}}h_1$ noch die Selbstfinanzierungsbedingung (SF) $L_0(h) = 0$ erfasst. Da (SF) im Einperiodenmodell unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) stets erfüllbar ist, wird die $D^{\mathsf{T}}$-Vollständigkeit (VS$D^{\mathsf{T}}$) salopperweise auch als Vollständigkeit bezeichnet. Aufgrund dieser Äquivalenz der allgemeinen Vollständigkeit (VS) zur $D^{\mathsf{T}}$-Vollständigkeit (VS$D^{\mathsf{T}}$) wird im Einperiodenmodell meist nur die einfacher nachzuweisende spezielle $D^{\mathsf{T}}$-Vollständigkeit betrachtet. Beispielsweise erfolgt dies bei den Beweisen für die Sätze 3.1 und 5.6, die jeweils einen Zusammenhang zwischen den Vollständigkeitsbegriffen (VS) bzw. (VSsf) im Mehrperiodenmodell und der $D^{\mathsf{T}}$-Vollständigkeit (VS$D^{\mathsf{T}}$) in allen enthaltenen Einperiodenmodellen beschreiben.

### 3.2.3 Äquivalenz der Duplizierbarkeit eines festen Zahlungsprofils $X$ im Mehrperiodenmodell zur Duplizierbarkeit bestimmter Zahlungsprofile $Z_t$ in den enthaltenen Einperiodenmodellen

Aus der Zerlegbarkeit des Gleichungssystems (DP) in seine Blöcke (DP$A_{t-1,k}$) ($t \in I$, $k \in \{1,\ldots,k_{t-1}\}$, $k_0 = k_{-1} = 1$, $A_0 := A_{0,1} = \Omega$, $A_{-1} := A_{-1,1} = \Omega$) ergibt sich, dass ein *fest vorgegebener* Prozess $X \in \mathcal{W}$ genau dann mittels $L$ duplizierbar ist, wenn es eine Folge von $\mathcal{F}_{t-1}$-messbaren Zustandsfunktionen $h_t$ ($t = T,\ldots,0$) mit den zugehörigen rechten Seiten $Z_t = F_t(X_t) := X_t + S_t \cdot h_{t+1}$ der Gleichungssysteme (DP$A_{t-1,k}$) gibt, sodass sukzessive für die Zeitindizes $t = T,\ldots,0$ und jeden Ausgangsknoten $A_{t-1,k} \in \mathcal{P}_{t-1}$ die auf den Nachfolgerknoten $A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}$ definierte Zustandsfunktion $Z_t$ mittels der Abbildung $A_{t,m} \mapsto V_t(h)(A_{t,m})$ duplizierbar ist. Speziell auf den $A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}$ erfolgt die Duplizierung der Zustandsfunktion $Z_t$ durch die Abbildung

$$V_t(h)\big|_{A_{t-1,k}} = S_t^{\delta}\Big|_{A_{t-1,k}} \cdot h_t(A_{t-1,k}) \;:A_{t,m}\,(\subseteq A_{t\text{-}1,k}) \mapsto S_t^{\delta}(A_{t,m})^{\mathsf{T}} h_t(A_{t-1,k})$$

mit dem auf $A_{t\text{-}1,k}$ konstanten Portfoliovektor $h_t(A_{t\text{-}1,k}) \in \mathbb{R}^N$. Dabei besitzt die duplizierende Zustandsfunktion $V_t(h)$ für ihre Argumente $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$ die folgenden Funktionswerte:

$$V_t(h)(A_{t,m}) = S_t^{\delta}(A_{t,m}) \cdot h_t(A_{t,m}) = S_t^{\delta}(A_{t,m})^{\mathsf{T}} h_t(A_{t-1,k}) .^{6}$$

Für einen Zeitpunkt $t > 0$ beschreibt jeder Gleichungsblock (DP$A_{t\text{-}1,k}$) mit dem vorgegebenen $Z_t \in \mathcal{W}_{t,1}$ also die Duplizierung in einem Einperiodenmodell, genau genommen die $D^{\mathsf{T}}$-Duplizierung eines zum Zeitpunkt $t$ gehörigen Zahlungsprofils $Z_t(A_{t,m})$ auf den Knoten $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$. Eine grafische Darstellung dieses Einperiodenmodells und der zugehörigen Duplizierung erfolgt in Abbildung 3.2. Speziell für den Zeitpunkt $t = 0$ hat man die unter der Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) stets nach $h_0$ auflösbare Gleichung (DP$A_{\text{-}1,1}$), die nur zum Knoten $A_0$ und zu keinem Einperiodenmodell gehört.

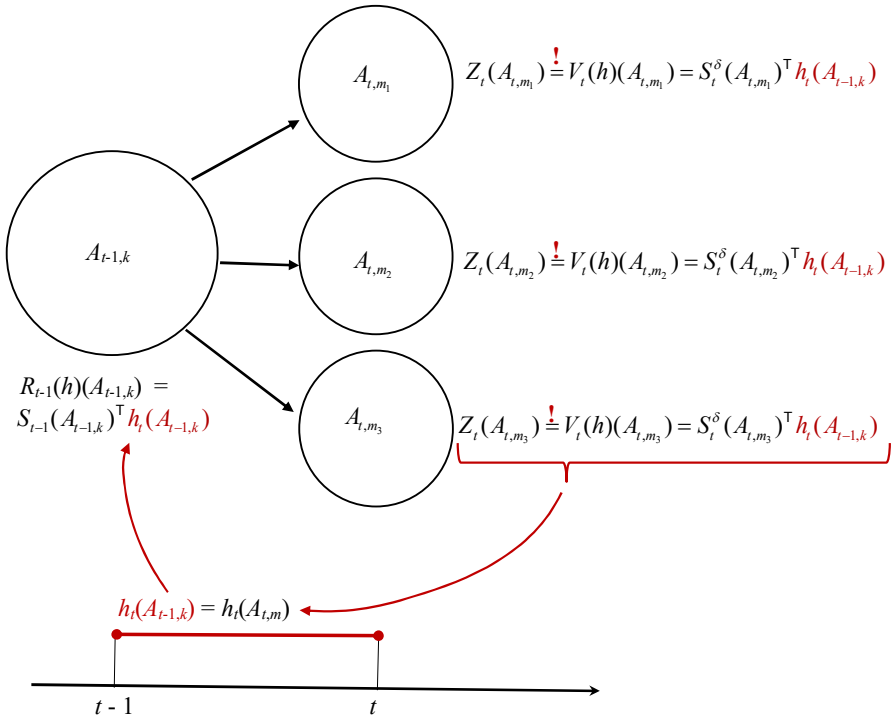



**Abb. 3.3** Das Einperiodenmodell mit dem Ausgangsknoten $A_{t\text{-}1,k}$ und den Nachfolgerknoten $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$. Schematische Darstellung der $D^{\mathsf{T}}$-Duplizierung des für die Ereignisse $A_{t,m}$ im Zeitpunkt $t$ definierten Zahlungsprofils $Z_t$ mittels passendem Duplikationsportfoliovektor $h_t(A_{t\text{-}1,k})$ und der Berechnung des Reinvestitionswerts $R_{t\text{-}1}(h)(A_{t\text{-}1,k})$.

---

6 Fasst man die Zeilenvektoren $S_t^{\delta}(A_{t,m})^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^N$ der $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$ zu einer Matrix zusammen, so erhält man die in Kapitel 6 mit $D^{\mathsf{T}}$ bezeichnete Matrix bzw. Abbildung für die Duplizierung im Einperiodenmodell.

Nach der Bestimmung des Portfoliovektors $h_t(A_{t\text{-}1,k})$ für die Duplizierung von $Z_t$ erhält man auch den Reinvestitionswert

$$R_{t\text{-}1}(h)(A_{t\text{-}1,k}) = S_{t-1}(A_{t-1,k})^{\mathsf{T}} h_t(A_{t-1,k})$$

als Startkapitalwert des Portfolios $h_t(A_{t\text{-}1,k})$ im Ereignis $A_{t\text{-}1,k}$, aus dem sich rein zufallsabhängig der Vermögenswert $V_t(h)(A_{t,m})$ in einem der Nachfolgeereignisse $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$ entwickelt. Dieser (Re-)Investitionswert $R_{t\text{-}1}(h)(A_{t\text{-}1,k})$ wird als Wert des Zahlungsprofils $Z_t$ der Nachfolgeereignisse $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$ angesehen und ist im Allgemeinen noch vom Portfoliovektor abhängig. Dieser Investitionswert wird im Gleichungssystem zu $X_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k})$ addiert und ergibt dann mit $Z_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k}) = X_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k}) + R_{t\text{-}1}(h)(A_{t\text{-}1,k})$ eine der rechten Seiten eines Gleichungsblocks zum vorhergehenden Zeitpunkt $t$ - 1.

### 3.2.4 Charakterisierung des Law of One Price in einem enthaltenen Einperiodenmodell

Nur bei gültigem Law of One Price (LOP)[7] im Einperiodenmodell zum Ausgangsknoten $A_{t\text{-}1,k}$ ist der Wert $R_{t\text{-}1}(h)(A_{t\text{-}1,k})$ konstant für alle Duplikationsportfoliovektoren $h_t(A_{t\text{-}1,k})$: In Abschnitt 6.2.2 wird nämlich begründet, dass im Einperiodenmodell das LOP äquivalent ist zur Bedingung LOP$D^{\mathsf{T}}$, nach der für die $D^{\mathsf{T}}$-duplizierbaren Zahlungsprofile $X_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ der Reinvestitionswert $R_0(h) = S_0{}^{\mathsf{T}} h_1$ konstant für alle $D^{\mathsf{T}}$-Duplikationsstrategien $h_1$ von $X_1$ ist. Weiter gilt im Einperiodenmodell das LOP genau dann, wenn der für die Berechnung des (Re-)Investitionswerts $R_{t\text{-}1}(h)(A_{t\text{-}1,k})$ verwendete Vektor $S_t(A_{t\text{-}1,k})$ linear abhängig ist von den für die $D^{\mathsf{T}}$-Duplizierung der $Z_t(A_{t,m})$ zuständigen Vektoren $S_t^{\delta}(A_{t,m})$, $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$, also linear abhängig ist von den Zeilenvektoren $S_t^{\delta}(A_{t,m})^{\mathsf{T}}$ des inhomogenen linearen Gleichungssystems (DP$A_{t\text{-}1,k}$). Fasst man die Zeilenvektoren $S_t^{\delta}(A_{t,m})^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^N$ der $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$ zur Matrix $D^{\mathsf{T}}$ bzw. die Spaltenvektoren $S_t^{\delta}(A_{t,m}) \in \mathbb{R}^N$ der $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$ zur Matrix $D$ zusammen, so ist das LOP gleichbedeutend zur Existenz einer Lösung $\psi_t$ (mit den Komponenten $\psi_t(A_{t,m})$, $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$) des Gleichungssystems

$$D\psi_t = S_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k}),$$

eines sog. Bewertungsvektors $\psi_t = (\psi_t(A_{t,m}))$ des Einperiodenmodells (siehe Satz 6.3, 19 in Abschnitt 6.2.2). Geometrisch bedeutet dies, dass der für die Reinvestition zuständige Preisvektor $S_t(A_{t\text{-}1,k})$ im Zeilenraum der Matrix $D^{\mathsf{T}}$ bzw. im Spaltenraum von $D$ liegt:

$$S_t(A_{t\text{-}1,k}) \in \text{ lin } \{ S_t^{\delta}(A_{t,m}) : A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}\} =: \mathcal{S}(A_{t\text{-}1,k}) = \text{Im } D$$

Da der lineare Lösungsraum

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}(A_{t-1,k}) &:= \{h_t(A_{t\text{-}1,k}) \in \mathbb{R}^N\colon S_t^{\delta}(A_{t,m})^{\mathsf{T}} h_t(A_{t-1,k}) = 0 \text{ für } A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}\} \\ &= \ker D^{\mathsf{T}}\end{aligned}$$

des zu (DP$A_{t\text{-}1,k}$) gehörigen homogenen Gleichungssystems $S_t^{\delta}(A_{t,m})^{\mathsf{T}} h_t(A_{t-1,k}) = 0$ ($A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$) das orthogonale Komplement des Spaltenraums $\mathcal{S}(A_{t\text{-}1,k})$ ist,

$$\hat{\mathcal{L}}(A_{t-1,k}) = \mathcal{S}(A_{t\text{-}1,k})^{\perp} = (\text{Im } D)^{\perp} = \ker D^{\mathsf{T}} \text{ bzw.}$$

---

[7] Die Definition des LOP und die Charakterisierung durch die Bedingung LOP1 folgt in Abschnitt 3.3.2, die Behandlung des LOP im Einperiodenmodell erfolgt in Abschnitt 6.2.2.

$$\mathcal{S}(A_{t\text{-}1,k}) = \hat{\mathcal{L}}(A_{t-1,k})^{\perp} = (\ker D^{\mathsf{T}})^{\perp} = \operatorname{Im} D,$$

ist $S_t(A_{t\text{-}1,k})$ orthogonal zum Unterraum $\hat{\mathcal{L}}(A_{t-1,k}) = \ker D^{\mathsf{T}}$. Der Vektor $S_t(A_{t\text{-}1,k})$ steht daher auch senkrecht auf dem affinen Lösungsraum $\mathcal{L}(A_{t\text{-}1,k}, Z_T)$ ($\subseteq \mathbb{R}^N$) von (DP$A_{t\text{-}1,k}$):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(A_{t\text{-}1,k}, Z_t) &= \{h_t(A_{t\text{-}1,k}) \in \mathbb{R}^N\text{: (DP}A_{t\text{-}1,k})\} \\ &= h_t\text{‘}(A_{t\text{-}1,k}) + \hat{\mathcal{L}}(A_{t-1,k}) = h_t\text{‘}(A_{t\text{-}1,k}) + \ker D^{\mathsf{T}}\end{aligned}$$

mit einer speziellen Lösung $h_t\text{‘}(A_{t\text{-}1,k})$ des inhomogenen linearen Gleichungssystems (DP$A_{t\text{-}1,k}$). Die mit dem Vektor $S_t(A_{t\text{-}1,k})$ gebildete Linearform $S_t(A_{t\text{-}1,k})^{\mathsf{T}} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ ist somit konstant auf dem affinen Unterraum[8] $\mathcal{L}(A_{t\text{-}1,k}, Z_t)$ der Duplikationsportfoliovektoren $h_t(A_{t\text{-}1,k})$ der Zustandsfunktion $Z_t(A_{t,m})$ ($A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$):

$$S_t(A_{t\text{-}1,k})^{\mathsf{T}}(\mathcal{L}(A_{t\text{-}1,k}, Z_t)) = S_t(A_{t\text{-}1,k})^{\mathsf{T}} h_t\text{‘}(A_{t\text{-}1,k}) \in \mathbb{R}.$$

Die gegenseitige Lage der hier verwendeten Unterräume und des Vektors $S_t(A_{t\text{-}1,k})$ wird in der nachfolgenden Abbildung 3.3 dargestellt. Eine entsprechende Abbildung wird bei der Behandlung des Einperiodenmodells mit Abbildung 6.4 von Abschnitt 6.2.2 gegeben. Diese Überlegungen zur Gültigkeit des LOP in einem enthaltenen Einperiodenmodell werden beim Beweis von Satz 5.7, b) in Abschnitt 5.2 verwendet, wo unter der Voraussetzung des LOP ein Zusammenhang zwischen der sf-Vollständigkeit für endfällige Zahlungen im Mehrperiodenmodell und der Vollständigkeit in allen enthaltenen Einperiodenmodellen beschrieben wird.

---

[8] Im Lexikon der Mathematik, Band 1 (2000), S. 30–31, wird ein affiner Unterraum (affiner Teilraum) definiert als Teilmenge $Y \subseteq X$ eines affinen Raums $X$, für welchen es einen Punkt $x \in X$ und einen Untervektorraum $U \subseteq V$ des zum affinen Raum gehörigen Vektorraums (Translationsvektorraums) $V$ gibt, sodass $Y = \{y \in X : \overrightarrow{xy} \in U\}$ ($\overrightarrow{xy} \in V$ ist der eindeutig bestimmte Verbindungsvektor zweier Punkte $x, y \in X$). Im Spezialfall, dass $X$ ein Vektorraum ist, ist $Y = \{y \in X : y - x \in U\} = x + U$ eine sog. Restklasse von $U$.

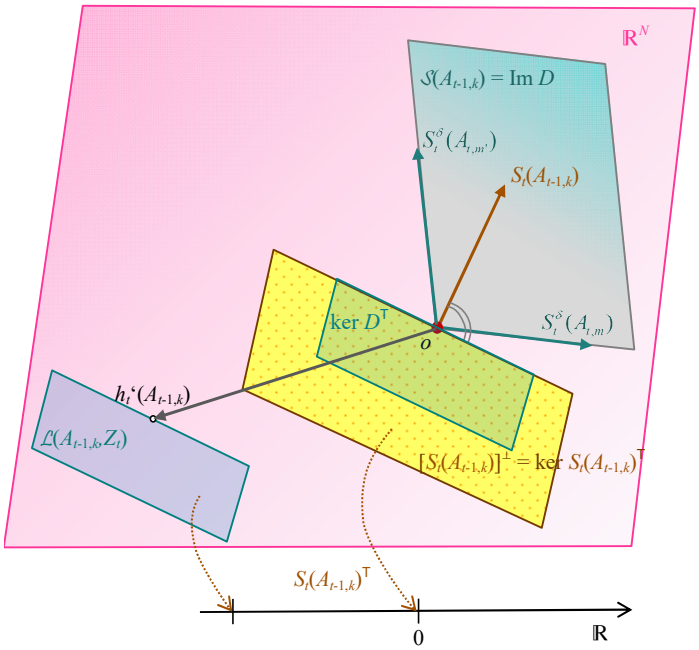



**Abb. 3.4** Die Lage des Vektors $S_t(A_{t-1,k})$ und der zum Gleichungssystem (DP$A_{t-1,k}$) gehörigen Unterräume $\operatorname{Im} D$, $\ker D^\mathsf{T}$ und des affinen Lösungsraums $\mathcal{L}(A_{t-1,k},Z_t) = h_t'(A_{t-1,k}) + \ker D^\mathsf{T}$ von (DP$A_{t-1,k}$) bei gültigem LOP im Einperiodenmodell zum Ausgangsknoten $A_{t-1,k}$.

### 3.2.5 Äquivalenz der Vollständigkeit des Mehrperiodenmodells zur Vollständigkeit aller enthaltenen Einperiodenmodelle

Weiter gilt, dass das Gleichungssystem (DP) genau dann für *jeden* beliebigen Prozess $X \in \mathcal{W}$ lösbar ist, wenn jeder Gleichungssystemblock (DP$A_{t-1,k}$) für *jedes* beliebige $X_t \in \mathcal{W}_{t,1}$ und für jede bei der vorhergehenden Rekursion sich ergebende Zustandsfunktion $h_{t+1} \in \mathcal{H}_{t+1,N} = \mathcal{W}_{t,N}$ lösbar sind. Bei der Betrachtung eines festen Gleichungsblocks (DP$A_{t-1,k}$) ist auf der rechten Seite der Summand $S_t \cdot h_{t+1}$ bereits festgelegt. Da nun bei fest gedachtem $t \in \{1,\ldots,T\}$ und zu fest vorgegebem $h_{t+1}$ der Operator

$$F_t : X_t \in \mathcal{W}_{t,1} \mapsto F_t(X_t) = X_t + S_t \cdot h_{t+1} \in \mathcal{W}_{t,1}$$

eine bijektive Selbstabbildung (genauer eine Translation mit dem Verschiebungsvektor $S_t \cdot h_{t+1}$) der Menge $\mathcal{W}_{t,1}$ der $\mathcal{F}_t$-messbaren reellwertigen Funktionen ist, ist das Gleichungssystem

$$(\mathrm{DP}A_{t-1,k}) \qquad S_t^\delta(A_{t,m})^\mathsf{T} h_t(A_{t-1,k}) = X_t(A_{t,m}) + S_t(A_{t,m})^\mathsf{T} h_{t+1}(A_{t,m}) \qquad (A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k})$$

genau dann für beliebiges $X_t \in \mathcal{W}_{t,1}$ lösbar, wenn das Gleichungssystem

$$S_t^\delta(A_{t,m})^\mathsf{T} h_t(A_{t-1,k}) = Z_t(A_{t,m})$$

für beliebiges $Z_t \in \mathcal{W}_{t,1}$ lösbar ist.

Für einen Zeitindex $t \in \{1,\ldots,T\}$ bedeutet die Lösbarkeit des Gleichungssystems für beliebiges $Z_t \in \mathcal{W}_{t,1}$ die Vollständigkeit des zugehörigen Einperiodenmodells, genau genommen die $D^{\mathsf{T}}$-Vollständigkeit (VS$D^{\mathsf{T}}$), die aber nach Abschnitt 3.2.2 unter der Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) äquivalent zur allgemeinen Vollständigkeit (VS) des Einperiodenmodells ist.
Für den Zeitindex $t = 0$ dagegen ist wegen der Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) $S_0^{\delta} \neq 0$ bei beliebig vorgegebenem Startkapitaleinsatz $Z_0(\Omega)$ die letzte Gleichung (DP$_{A_{-1,1}}$) $S_0^{\delta}(\Omega)^{\mathsf{T}} h_0(\Omega) = Z_0(\Omega)$ von (DP) nach dem Startportfoliovektor $h_0(\Omega)$ stets auflösbar und daher keine weiter einschränkende Bedingung für $h_0$ bzw. $h$.
Demzufolge ist die Vollständigkeit des Mehrperiodenmodells, also die Lösbarkeit von (DP) für beliebiges $X \in \mathcal{W}$, gleichbedeutend zur Vollständigkeit aller enthaltenen Einperiodenmodelle zu den Ausgangsknoten $A_{t-1,k}$, $t \in \{1,\ldots,T\}$, $k \in \{1,\ldots,k_{t-1}\}$.[9] Diese Aussage wird noch im folgenden Satz festgehalten. Bei der obigen Begründung wird verwendet, dass im Einperiodenmodell nach Abschnitt 3.2.2 unter der Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) die spezielle $D^{\mathsf{T}}$-Vollständigkeit (VS$D^{\mathsf{T}}$) hinsichtlich der endfälligen Zahlungen äquivalent ist zur allgemeinen Vollständigkeit (VS). Dabei wird die Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) für den Schluss „(VS$D^{\mathsf{T}}$) $\Rightarrow$ (VS)“ verwendet.

**Satz 3.1 Äquivalenz der Vollständigkeit des Mehrperiodenmodells zur Vollständigkeit aller enthaltenen Einperiodenmodelle**

Das Mehrperiodenmodell ist genau dann vollständig (gemäß VS), wenn jedes seiner enthaltenen Einperiodenmodelle $D^{\mathsf{T}}$-vollständig.
Unter der Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) sind die $D^{\mathsf{T}}$-vollständigen Einperiodenmodelle auch allgemein vollständig gemäß VS.

## 3.3 Definition der Bewertung eines Zahlungsprofils

### 3.3.1 Bewertung einer Handelsstrategie

Die linearen Abbildungen $L$, $\breve{V}$ und $\breve{L}$ werden als Abbildungen des Vektorraums $\mathcal{H}_N$ ($\subseteq \mathcal{S}_N$) der $\mathbb{R}^N$-wertigen Handelsstrategien in den Zielraum $\mathcal{W}$ der $\mathcal{F}$-adaptierten reellwertigen Prozesse betrachtet. Dabei ist $\mathcal{H}_N$ mit dem oben definierten Skalarprodukt $\langle g,h\rangle_{\mathcal{H}_N}$ und der zugehörigen Orthonormalbasis $h_{t,A_{t-1},j} = \mathbf{1}_{t,A_{t-1},j}$, $(t,A_{t-1},j) \in I(\mathcal{H}_N)$, und $\mathcal{W}$ mit dem Skalarprodukt $\langle X,Y\rangle_{\mathcal{W}}$ und der Orthonormalbasis $w_{t,A_t} = \mathbf{1}_{t,A_t}$, $(t,A_t) \in I(\mathcal{W})$, ausgestattet.
Eine wichtige Rolle bei den nachfolgenden Charakterisierungen des Law of One Price und der Arbitragefreiheit im Mehrperiodenmodell spielt die

**deterministische Handelsstrategie**

$$b := (S_0^{\delta})_{0,\Omega} \in \mathcal{H}_N$$

[9] Die Äquivalenz der Vollständigkeit eines Mehrperiodenmodells zur Vollständigkeit aller seiner enthaltenen Einperiodenmodelle findet man bei Kremer (2011), S. 165 in Satz 3.45 und (2017), S. 67 in Lemma 2.19.

mit ihren $T$+1 deterministischen $\mathbb{R}^N$-wertigen Zustandsfunktionen

$$b_0 = S_0^\delta(\omega) = S_0^\delta \in \mathbb{R}^N,$$
$$b_t = b_t(\omega) = 0 \in \mathbb{R}^N \qquad \text{für } t = 1,\ldots,T,\ \omega \in \Omega,$$

und dem ebenfalls mit $b$ bezeichneten zugehörigen Koordinaten-$m$-Tupel

$$b = (S_0^\delta, 0, \ldots, 0)^\top \in \mathbb{R}^m$$

bezüglich der $\mathcal{H}_N$-Basis ($m = N\cdot(k_{-1}+k_0+k_1+\ldots+k_{T-1})$, $k_{-1} = k_0 = 1$, zur Schreibweise von $b$ siehe Abschnitt 2.6.2). Sie steht im engen Zusammenhang mit dem $\mathcal{W}$-Unterraum $\mathcal{M} = L(\ker V_0) = L(\ker b^\top) = L(b^\perp)$ der Kapitalmarktgeschäfte (Begründung der Bezeichnung in Abschnitt 3.7.1). Mit dieser Handelsstrategie $b$ berechnet sich für eine beliebige Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ bzw. das zugehörige Koordinaten-$m$-Tupel $h = (h_0, h_1, \ldots, h_T)^\top$ der **Startkapitaleinsatz** $V_0(h)$ zum Zeitpunkt $t = 0_-$ als das Skalarprodukt von $b$ und $h$:

$$\begin{aligned} V_0(h) &= S_0^{\delta\top} h_0 = b_0(\Omega)^\top h_0(\Omega) \\ &= \sum_{t=0}^{T} \sum_{k=1}^{k_{t-1}} b_t\,(A_{t-1,k})^\top h_t\,(A_{t-1,k}) \qquad (b_t = 0 \text{ für } t \geq 1) \\ &= \langle b, h \rangle_{\mathcal{H}_N} \\ &= b^\top h \end{aligned}$$

($k_{-1} = k_0 = 1$, $A_{-1,1} = A_{-1} = A_{0,1} = A_0 = \Omega$). Bei der Berechnung von $V_0(h)$ als Skalarprodukt von $b$ und $h$ wird aus der Handelsstrategie $h$ der Portfoliovektor $h_0$ herausgepickt und mit diesem der Portfoliostartwert $V_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0$ bestimmt, der bei der Anwendung dieser Handelsstrategie $h$ zum Zeitpunkt $t = 0_-$ schon als Kapital im Portfolio vorliegen soll. Der bei der Handelsstrategie $h$ zum Zeitpunkt $t = 0_-$ vom Portfolioinhaber als Startkapitaleinsatz aufzubringende deterministische (von den $\omega \in \Omega$ unabhängige) Vermögenswert

$$V_0(h) = S_0^\delta(\Omega)^\top h_0(\Omega) \in \mathbb{R}$$

kann als **Wert der Handelsstrategie** $h$ angesehen werden.
Die Zuordnungsvorschrift $V_0(h)$ liefert eine lineare Abbildung

$$V_0 : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathbb{R}$$

von $\mathcal{H}_N$ nach $\mathbb{R}$, eine sog. Linearform bzw. ein lineares Funktional. Die entsprechende Abbildung für die Koordinaten-$m$-Tupel

$$V_0 = b^\top : h \in \mathbb{R}^m \mapsto b^\top h \in \mathbb{R}$$

von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}$ besitzt die $1 \times m$-Darstellungsmatrix $b^\top$. Der Kern $\ker V_0$ dieser Abbildung $V_0 : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. der Kern $\ker \breve{V}$ von $\breve{V} : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathcal{W}$ ist die (lineare, homogene) Hyperebene in $\mathcal{H}_N$, die $b$ als Normalenvektor besitzt:

$$\begin{aligned} \ker \breve{V} &= \ker V_0 = \{h \in \mathcal{H}_N : V_0(h) = b^\top h = 0\} \\ &= \{b\}^\perp = \mathcal{B}^\perp \ (\subseteq \mathcal{H}_N) \qquad (\mathcal{B} := \operatorname{lin}\{b\}). \end{aligned}$$

Geometrisch gesehen ist der bei der Handelsstrategie $h$ zum Zeitpunkt $0_-$ erbrachte Startkapitaleinsatz $V_0(h)$ bis auf den Faktor $1/\|b\|$ ($\|b\| = \sqrt{\langle b, b \rangle_{\mathcal{H}_N}} = (b^\top b)^{1/2} = (b_0^\top b_0)^{1/2} = (S_0^{\delta\top} S_0^\delta)^{1/2} > 0$) der orientierte euklidische Abstand

$$\delta(h) := b^\top h / \|b\|$$

des Punktes $h \in \mathcal{H}_N$ von der Hyperebene

$$\mathcal{B}^\perp = \{b\}^\perp = \{h \in \mathcal{H}_N : b^\top h = 0\}$$

in $\mathcal{H}_N$. Der mit der Handelsstrategie $h$ verbundene Startkapitaleinsatz $V_0(h)$ für das Portfolio zum Zeitpunkt $t = 0_-$ beschreibt also die Abweichung der Handelsstrategie $h$ von der Menge $\mathcal{B}^\perp = \{b\}^\perp = \ker V_0$ der Handelsstrategien $g$, deren Startkapitaleinsätze $V_0(g) = 0$ sind und deren $L$-Bilder $Z = L(g)$ die Menge

$$\mathcal{M} = L(\ker V_0) = L(\mathcal{B}^\perp)$$

der Kapitalmarktgeschäfte bilden.

Verwendet man die Linearform $V_0(h) = b^\top h$ als Nutzenfunktion für die Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N$, so wird damit eine Präferenzordnung $\succcurlyeq = \succcurlyeq_{\mathcal{H}_N}$ auf $\mathcal{H}_N$ beschrieben.[10] Der Prozess $b \in \mathcal{H}_N$ kann daher als ein **Bewertungsprozess** für die Handelsstrategien angesehen werden. Mit dem Bewertungsprozess $b$ bzw. der Nutzenfunktion $V_0 = b^\top$ können alle Handelsstrategien $h$ und $g$ miteinander verglichen werden:

**Vergleich der Handelsstrategien** $h, g \in \mathcal{H}_N$:

$$h \succcurlyeq g \quad (h \text{ ist vorteilhafter als } g \text{ oder ebenso vorteilhaft wie } g)$$
$$:\Leftrightarrow b^\top h \geq b^\top g.$$

Weiter kann jede Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ jeweils für sich durch ihren Wert $V_0(h) = b^\top h$ als vorteilhaft ($b^\top h > 0$), indifferent (neutral: $b^\top h = 0$) oder unvorteilhaft ($b^\top h < 0$) beurteilt werden. Wie nun die Nutzenfunktion $V_0(h) = b^\top h$ der Handelsstrategien auch zur Bewertung der duplizierbaren Zahlungsprofile $X \in L(\mathcal{H}_N)$ verwendet werden kann, wird im nächsten Abschnitt behandelt.

### 3.3.2 Preis eines Zahlungsprofils und Law of One Price

Der bei einer Handelsstrategie $h$ zum Zeitpunkt $t = 0_-$ als Startkapitaleinsatz in das Portfolio einzubringende deterministische (von den $\omega \in \Omega$ unabhängige) Vermögenswert

$$V_0(h) = S_0^\delta(\Omega)^\top h_0(\Omega) \in \mathbb{R}$$

kann als Wert der Handelsstrategie $h$ und damit auch als der zunächst noch von $h$ abhängige Wert des mittels $h$ gebildeten Zahlungsprofil $L(h)$ angesehen werden.

Falls nun aber für ein festes $X \in L(\mathcal{H}_N)$ der Startkapitaleinsatz $V_0(h)$ bei $t = 0$ für alle Duplikationsstrategien $h$ von $X$ konstant ist, kann der **Preis** $\pi(X)$ von $X$ bzw. der Wert von $X$ zum Zeitpunkt $t = 0$ durch den Startkapitaleinsatz $V_0(h)$ der Duplikationsstrategien $h$ definiert werden:

[10] Eine zu einer linearen Nutzenfunktion gehörige Präferenzordnung (das ist eine totale, reflexive und transitive Relation) ist eine bezüglich Addition und nichtnegativer Skalarmultiplikation abgeschlossene Präferenzordnung (Begründung mit Zusatz 8.1.3 bei Pleier (2021) S. 369).

**Definition des Preises eines Zahlungsprofils** $X \in L(\mathcal{H}_N)$:

$$\pi(X) := V_0(L^{-1}(\{X\})) := V_0(h\text{`}) \text{ mit einem } h\text{`} \in L^{-1}(\{X\}),^{11}$$
falls $V_0(h)$ konstant $\forall\, h \in L^{-1}(\{X\})$ $(\neq \emptyset)$.

Die Bewertung von $X$ erfolgt somit gemäß dem **Duplikationsprinzip** („Pricing by Duplication"), indem $X$ als das Zahlungsprofil $L(h)$ einer geeigneten Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ eines Wertpapierportfolios dupliziert wird und der Preis $\pi(X)$ von $X$ durch den Startkapitaleinsatz $V_0(h)$ der Handelsstrategie $h$ definiert wird.

**Algebraische Berechnung des Preises eines Zahlungsprofils mittels einer Duplikationsstrategie**

Zur Berechnung des Preises $\pi(X)$ ist also zuerst eine Duplikationsstrategie $h$ und dann deren Startkapitaleinsatz zu bestimmen, wie dies in Abschnitt 3.2.1 mit einem Beispiel gezeigt wird. Aufgrund der hier verwendeten $P$-sicheren Definition der Duplizierbarkeit (DP) kann durch das Lösen des auf allen $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$ $(t \in I)$ gültigen endlichen linearen Gleichungssystems $L(h) = X$,

(DP) $$X_t(A_{t,k}) = L_t(h)(A_{t,k}) \quad \forall\, t \in I,\, A_{t,k} \in \mathcal{P}_t,$$

bzw. des zu Beginn von Abschnitt 3.2 erhaltenen Gleichungssystems

(DP$A_{t\text{-}1,k}$) $$S_t^{\delta}(A_{t,m})^{\top} h_t(A_{t-1,k}) = X_t(A_{t,m}) + S_t(A_{t,m})^{\top} h_{t+1}(A_{t,m}) \qquad (A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}),$$

$t = T,\ldots,0$, $A_{t\text{-}1,k} \in \mathcal{P}_{t\text{-}1}$ bzw. $k = 1,\ldots,k_{t\text{-}1}$, eine Duplikationsstrategie $h$ für alle Ereignisse $A_{t\text{-}1,k} \in \mathcal{P}_{t\text{-}1}$ $(t \in I)$ und damit für alle Zustände $\omega \in \Omega$ (also $P$-sicher) eindeutig bestimmt werden. Für diese Duplikationsstrategie $h$ ist dann noch der deterministische Portfoliowert

$$V_0(h) = V_0(h)(\Omega) = S_0^{\delta}(\Omega)^{\top} h_0(\Omega)$$

zu berechnen. Da somit bei vorausgesetzter Konstanz der deterministischen Startkapitaleinsätze $V_0(h)$ der Duplikationsstrategien für die Bewertung eines Zahlungsprofils $X \in L(\mathcal{H}_N)$ die tatsächlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten $P(\omega)$ der Zustände $\omega \in \Omega$ nicht eingehen, erfolgt die Bewertung (Preisbestimmung) nicht wahrscheinlichkeitstheoretisch[12], sondern $P$-sicher und algebraisch mittels linearer Algebra. Auch die in den nächsten Abschnitten angegebenen Charakterisierungen der Begriffe Law of One Price, Vollständigkeit und Arbitragefreiheit werden im Wesentlichen nur mit linearer Algebra hergeleitet. Lediglich bei der Cha-

---

[11] Im Allgemeinen bedeutet $V_0(L^{-1}(\{X\}))$ das $V_0$-Bild der Menge $L^{-1}(\{X\})$, also die Menge $\{V_0(h) : h \in L^{-1}(\{X\})\}$ aller $V_0$-Funktionswerte auf $L^{-1}(\{X\})$. Wenn nun diese Funktionswerte konstant sind, kann man mit $V_0(L^{-1}(\{X\}))$ auch den gemeinsamen Wert von $V_0$ auf der Menge $L^{-1}(\{X\})$ oder den $V_0$-Wert für diese Menge bezeichnen. Die jeweilige Bedeutung geht aus dem Zusammenhang hervor.

[12] Ein Begriff oder eine Eigenschaft einer Zufallsvariablen $X$ wird bei Bauer (2002) WT, S. 15f, als wahrscheinlichkeitstheoretisch (w-theoretisch) bezeichnet, wenn sie sich mittels ihrer (Wahrscheinlichkeits-)Verteilung (des W-Gesetzes, Bildmaßes Vert$(X) = X(P) = P_X$) formulieren lässt. Beispiele sind der Erwartungswert $E(X) = \int X\,dP = \int id\,dP_{id} = \int id\,P_{id}\,dx$ $(id(x) = x)$, das zentrale $p$-te Moment $E(X^p)$, das absolute $p$-te Moment $E(|X|^p)$, das in $\alpha \in \mathbb{R}$ zentrierte bzw. zentrierte absolute $p$-te Moment $E((X - \alpha)^p)$ bzw. $E(|X - \alpha|^p)$, die Varianz $V(X) = E([X - E(X)]^2)$, die beiden Parameter $\alpha$ und $\sigma^2$ der Gaußschen Glockenkurve und die Unabhängigkeit einer Familie von Zufallsvariablen (Bauer (2002) WT, S. 16, 18f, 29, 51).

rakterisierung der Arbitragefreiheit wird noch zusätzlich ein Alternativsatz der konvexen Analysis benötigt.

**Law of One Price**

Falls nun diese Eigenschaft der Konstanz des Startkapitaleinsatzes aller Duplikationsstrategien zumindest für ein $X \in L(\mathcal{H}_N)$ erfüllt ist, so kann gezeigt werden (siehe Satz 3.3 in Abschnitt 3.4.1 mit den Charakterisierungen des LOP), dass sie dann auch für alle $X \in L(\mathcal{H}_N)$ erfüllt ist und im Unterraum $L(\mathcal{H}_N)$ ($\subseteq \mathcal{W} \subseteq \mathcal{S}$) des Marktmodells das sogenannte Gesetz des eindeutig bestimmten Preises (englisch: Law of One Price[13], Abk.: LOP) gilt:

| | |
|---|---|
| (LOP) | Für jedes $X \in L(\mathcal{H}_N)$ gilt: $V_0(h) = S_0^{\delta\,\mathsf{T}} h_0$ konstant $\forall\, h \in L^{-1}(\{X\})$. |
| | Der Wert $\pi(X) := V_0(h)$, $h \in L^{-1}(\{X\})$, wird dann als **Preis** von $X$ bezeichnet. |

In Abschnitt 3.2 wurde bereits mit der zum Zeitindex $t = 0$ gehörigen Duplikationsgleichung

$$S_0^{\delta} \cdot h_0 = V_0(h) = L_0(h) + R_0(h)$$
$$= X_0 + S_0 \cdot h_1$$

begründet, dass das mit dem Portfoliovektor $h_0$ des Startzeitpunkts $t = 0$ formulierte LOP auch äquivalent ist zur folgenden Bedingung mit dem Portfoliovektor $h_1$ des ersten Zeitintervalls [0,1]:

| | |
|---|---|
| (LOP1) | Für jedes $X \in L(\mathcal{H}_N)$ gilt: $R_0(h) = S_0^{\mathsf{T}} h_1$ konstant $\forall\, h \in L^{-1}(\{X\})$. |

Dieses Gesetz ist notwendig und hinreichend für diese Preisdefinition in $L(\mathcal{H}_N)$ mittels des Startkapitaleinsatzes $V_0(h)$ der Duplikationsstrategien zum Zeitpunkt $t = 0$. Damit liefert das LOP mittels der Nutzenfunktion $V_0 = b^{\mathsf{T}}$ der Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N$ auch eine Nutzenfunktion $\pi$ für die duplizierbaren Zahlungsprofile $X \in L(\mathcal{H}_N)$. Die Eigenschaft (LOP) hat auch weitreichende Folgen für die Struktur der Unterräume von $\mathcal{W}$ und $\mathcal{H}_N$ und insbesondere für die Existenz eines sogenannten Bewertungsprozesses $\Psi \in \mathcal{W}$, der auch noch eine von einer Duplikationsstrategie $h$ unabhängige Berechnung des Preises $\pi(X)$ gestattet (siehe Abschnitte 3.3.3 und 3.4.1).

Da die Bewertung nach dem Duplikationsprinzip unter Verwendung der Abbildungen $L$ und $V_0$ in Abhängigkeit von der modellierten Kursentwicklung der zugrunde gelegten Wertpapiere $S^j$ ($j = 1,\ldots,N$) erfolgt, handelt es sich hierbei um einen relativen Bewertungsansatz. Die Relativität der Bewertung resultiert dabei aus der speziellen Auswahl bestimmter Wertpapiere $S^j$ und der Einschränkung der Bewertung auf Zahlungsprofile $X \in L(\mathcal{H}_N) \subseteq \mathcal{W}(\mathcal{F})$, die mittels ($\mathcal{F}$-vorhersehbarer) Handelsstrategien duplizierbar sind, wobei $\mathcal{F}$ die natürliche Filtration des dem Marktmodell zugrundeliegenden Preisprozesses $S$ ist. Die Tatsache, dass bei der Preisberechnung eines Zahlungsprofils $X \in L(\mathcal{H}_N)$ die tatsächlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten $P(\omega)$ der Zustände $\omega \in \Omega$ nicht benötigt werden, wird auch noch in Kapitel 4 bei

[13] Der Begriff ‚Law of One Price' wurde schon 1866 formuliert von William Stanley Jevons (1835–1882), einem englischen Ökonomen und Philosophen. Dieses Gesetz der Mikroökonomie besagt, dass in dem theoretischen Modell eines sogenannten vollkommenen Marktes identische Wirtschaftsgüter denselben Preis aufweisen.

den verschiedenen Interpretationen der vorliegenden Bewertung verdeutlicht. Auch dort zeigt sich, dass bei der Bewertung nur Größen verwendet werden, die innerhalb des Marktmodells berechnet werden und unabhängig von den tatsächlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten sind. Es sind dies der Bewertungsprozess $\Psi$, der Diskontierungsprozess $\Phi$, die formalen (synthetischen) Wahrscheinlichkeitsmaße $Q_t$, das Preismaß $Q$ und der deterministische Diskontierungsvektor (deterministische Preisvektor).

### 3.3.3 Charakterisierung des Law of One Price durch die Existenz eines Bewertungsprozesses

Bei gültigem LOP wird nachfolgend aus der Linearität der Abbildungen $V_0$ und $L$ auch die Linearität der Abbildung

$$\pi : L(\mathcal{H}_N) \longrightarrow \mathbb{R}$$

hergeleitet. Die auf $L(\mathcal{H}_N)$ definierte Preisfunktion $\pi$ ist also eine Linearform bzw. ein lineares Funktional. Die zur linearen Nutzenfunktion $\pi$ gehörige Präferenzordnung $\succeq = \succeq_{L(\mathcal{H}_N)}$ auf $L(\mathcal{H}_N)$ ist somit eine bezüglich Addition und nichtnegativer Skalarmultiplikation abgeschlossene Präferenzordnung.[14] Mit der Nutzenfunktion $\pi$ können alle duplizierbaren Zahlungsprofile $X$ und $Y$ miteinander verglichen werden,

$$X \succeq Y \ (X \text{ ist mindestens so vorteilhaft wie } Y) \\ :\Leftrightarrow \pi(X) \geq \pi(Y),$$

und jeweils für sich durch ihren Wert $\pi(X)$ als vorteilhaft ($\pi(X) > 0$), indifferent (neutral: $\pi(X) = 0$) oder unvorteilhaft ($\pi(X) < 0$) beurteilt werden.
Aus der Linearität der Preisfunktion $\pi : L(\mathcal{H}_N) \longrightarrow \mathbb{R}$ folgt nach dem Rieszschen Darstellungssatz[15] die Darstellung der Preise $\pi(X)$ auf $L(\mathcal{H}_N)$ jeweils durch das Skalarprodukt

$$\pi(X) = \langle \vartheta, X \rangle_{\mathcal{W}} = \vartheta^{\mathsf{T}} X \ \forall\, X \in L(\mathcal{H}_N)$$

von $\vartheta$ und $X$ mit einem eindeutig bestimmten stochastischen Prozess $\vartheta \in L(\mathcal{H}_N)$. Bei gültigem LOP existiert also genau ein *duplizierbarer* **Bewertungsprozess** $\vartheta$, mit dem die Preise $\pi(X)$ der duplizierbaren Zahlungsprofile $X \in L(\mathcal{H}_N)$ als Skalarprodukt $\pi(X) = \vartheta^{\mathsf{T}} X$ berechnet werden können. Mit dem Bewertungsprozess $\vartheta$ gelten die **Preisgleichungen**

$$(\mathrm{PG}\,\vartheta) \qquad \vartheta^{\mathsf{T}} L(h) = v_0(h) \ \forall\, h \in \mathcal{H}_N \qquad (v_0(h) = b^{\mathsf{T}} h = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0\ ).$$

Umgekehrt folgt aus der Existenz eines Bewertungsprozesses $\vartheta \in \mathcal{W}$ mit gültigen Preisgleichungen auch das LOP in $L(\mathcal{H}_N)$. Man erhält also mit der **Menge**

---

[14] Begründung mit Zusatz 8.1.3 bei Pleier (2021), S. 369.

[15] Im Rieszschen Darstellungssatz (benannt nach dem ungarischen Mathematiker F. Riesz 1880–1956) wird die eindeutige Darstellung einer auf einem beliebigen endlichdimensionalen euklidischen reellen Vektorraum $V$ definierten Linearform $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ mittels des Skalarprodukts $\langle .,. \rangle$ beschrieben: $\varphi(v) = \langle \psi, v \rangle$ mit einem eindeutig bestimmten Vektor $\psi \in V$. Ein Beweis wird bei Kremer (2006), S. 421, und auch nachfolgend noch angegeben. Für die Darstellung des Preisfunktionals $\pi$ wird hier auf $L(\mathcal{H}_N)$ das auf $\mathcal{W}$ definierte Skalarprodukt $\langle .,. \rangle_{\mathcal{W}}$ genommen.

$$\mathcal{A} := \{\Psi \in \mathcal{W} : (\mathrm{PG}\Psi)\ \Psi^{\mathsf{T}} L(h) = v_0(h)\ \forall\ h \in \mathcal{H}_N\}$$

**der Bewertungsprozesse** für die Zahlungsprofile $X \in L(\mathcal{H}_N)$ die folgenden LOP-Charakterisierungen:

**Charakterisierung des LOP:**

$$\begin{aligned}\mathrm{LOP} &\Leftrightarrow \exists\, \vartheta \in \mathcal{W} \text{ mit gültigen Preisgleichungen } (\mathrm{PG}\vartheta)\\ &\Leftrightarrow \mathcal{A} \neq \emptyset\\ &\Leftrightarrow \exists_1\, \vartheta \in \mathcal{A} \cap L(\mathcal{H}_N).\end{aligned}$$

**Beweis:** a) Beweis der Linearität der Preisfunktion $\pi : L(\mathcal{H}_N) \longrightarrow \mathbb{R}$: Für $X = L(h)$, $Y = L(g) \in L(\mathcal{H}_N)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt nämlich wegen der Linearität von $L$

$$X + Y = L(h) + L(g) = L(h+g) \text{ mit } h + g \in \mathcal{H}_N,$$
$$\lambda X = \lambda L(h) = L(\lambda h) \text{ mit } \lambda h \in \mathcal{H}_N$$

und wegen der Gültigkeit des LOP und der Linearität von $V_0$

$$\pi(X + Y) = V_0(h+g) = V_0(h) + V_0(g) = \pi(X) + \pi(Y)$$

und

$$\pi(\lambda X) = V_0(\lambda h) = \lambda V_0(h) = \lambda \pi(X).$$

b) Beweis des Rieszschen Darstellungssatzes hier im Raum $L(\mathcal{H}_N)$:

i) Zum Nachweis der Existenz von $\vartheta$ mit der Eigenschaft $\pi = \langle \vartheta, . \rangle_{\mathcal{W}}$ verwendet man eine Orthonormalbasis $Y^i$ ($i = 1, \ldots, q = \dim L(\mathcal{H}_N)$) von $L(\mathcal{H}_N)$. Für ein beliebiges $X \in L(\mathcal{H}_N)$ erhält man dann aus dessen Koordinatendarstellung

$$X = \sum_{i=1}^{q} x^i Y^i\ .$$

bezüglich der Basis $Y^1,\ldots,Y^q$ das $\pi$-Bild $\pi(X)$ zu

$$\pi(X) = \pi\left(\sum_{i=1}^{q} x^i Y^i\right) = \sum_{i=1}^{q} x^i \pi(Y^i) \qquad (\pi \text{ linear})$$

mit den $\pi$-Bildern $\pi(Y^i)$ der Basisvektoren $Y^i$. Definiert man nun $\vartheta \in L(\mathcal{H}_N)$ durch die Koordinatendarstellung[16]

$$\vartheta := \sum_{i=1}^{q} \pi(Y^i) Y^i\ ,$$

so erhält man für das Skalarprodukt von $\vartheta$ und $X$

$$\begin{aligned}\langle \vartheta, X \rangle_{\mathcal{W}} &= \left\langle \sum_{i=1}^{q} \pi(Y^i) Y^i, \sum_{r=1}^{q} x^r Y^r \right\rangle_{\mathcal{W}}\\ &= \sum_{i=1}^{q}\sum_{r=1}^{q} \pi(Y^i) x^r \left\langle Y^i, Y^r \right\rangle_{\mathcal{W}} \qquad (\langle .,. \rangle_{\mathcal{W}} \text{ bilinear})\end{aligned}$$

---

[16] Das Koordinaten-$q$-Tupel $(\pi(Y^1),\ldots,\pi(Y^q))$ ($q = \dim L(\mathcal{H}_N)$) als Zeilenvektor ist die $1\times q$-Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $\pi$ bezüglich der Basis $Y^i$ ($i = 1, \ldots, q$) des Originalraums $L(\mathcal{H}_N)$ und der Basis $e_1 = 1$ des Zielraums $\mathbb{R}$. Für die Darstellung von $\pi$ mit dem Skalarprodukt $\langle \vartheta, X \rangle_{\mathcal{W}} = \vartheta^{\mathsf{T}} X$ von $\mathcal{W}$ bzw. $\mathbb{R}^{n_1}$ wird aber der Prozess $\vartheta \in L(\mathcal{H}_N) \subseteq \mathcal{W}$ bzw. das zugehörige Koordinaten-$n_1$-Tupel $\vartheta$ bzgl. der $\mathcal{W}$-Basis $\mathbf{1}_{t,A_t}$ ($t \in I$, $A_t \in \mathcal{P}_t$) verwendet.

$$= \sum_{i=1}^{q} \pi(Y^i)x^i \qquad (Y^i \text{ Orthonormalbasis: } \left\langle Y^i, Y^r \right\rangle_{\mathcal{W}} = \delta_{i,r})$$

$$= \pi\left(\sum_{i=1}^{q} x^i Y^i\right) = \pi(X) \qquad (\pi \text{ linear}).$$

ii) Zum Nachweis der Unität (Einzigkeit) eines derartigen $\vartheta$ nimmt man an, dass es ein weiteres $\vartheta' \in L(\mathcal{H}_N)$ mit $\pi(X) = \vartheta'^{\top}X \; \forall \, X \in L(\mathcal{H}_N)$ gibt, und erhält für die Differenz $\Delta := \vartheta' - \vartheta \in L(\mathcal{H}_N)$ die Eigenschaft

$$\langle \Delta, X \rangle_{\mathcal{W}} \quad = \Delta^{\top}X = \vartheta'^{\top}X - \vartheta^{\top}X = \pi(X) - \pi(X) = 0$$

für alle $X \in L(\mathcal{H}_N)$. Wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts ergibt sich (durch Einsetzen von $X = \Delta$) $\Delta = 0$ bzw. $\vartheta' = \vartheta$.

Ein weiterer Beweis zur Existenz von genau einem duplizierbaren Bewertungsprozess $\vartheta \in L(\mathcal{H}_N)$ wird noch in Beweisteil M von Satz 3.3 gegeben. □

**Inklusionen und Darstellungen für die Menge $\mathcal{A}$ der Bewertungsprozesse**

Das Konstruktionsverfahren im obigen Beweis des Rieszschen Darstellungssatzes liefert bei gültigem LOP zur linearen Preisfunktion $\pi$ und zu einer Orthonormalbasis von $L(\mathcal{H}_N)$ mittels der $\pi$-Bilder $\pi(Y^i)$ der Basisvektoren $Y^i$ den speziellen eindeutig bestimmten $L$-duplizierbaren Bewertungsprozess $\vartheta \in L(\mathcal{H}_N)$ und die Skalarproduktdarstellung $\pi(X) = \vartheta^{\top}X$ von $\pi$.

Aus der Gültigkeit der Preisgleichungen speziell für die Handelsstrategien $g \in \ker V_0$ mit Startkapitaleinsatz $V_0(g) = 0$ bzw. für die Kapitalmarktgeschäfte $Z = L(g) \in L(\ker V_0) = \mathcal{M}$,

$$\Psi^{\top}Z = 0 \; \forall \, Z \in \mathcal{M},$$

folgt zunächst für jeden Bewertungsprozess $\Psi \in \mathcal{A}$ die Inzidenz $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp}$ und für die Menge $\mathcal{A}$ der Bewertungsprozesse die Inklusion

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}^{\perp}.$$

Es werden jetzt verschiedene Darstellungen der Menge $\mathcal{A}$ der Bewertungsprozesse $\Psi$ für die Zahlungsprofile $X \in L(\mathcal{H}_N)$ $(\subseteq \mathcal{W})$ bewiesen, nämlich die Darstellung 1) als affiner Unterraum durch die Summe eines festen Bewertungsprozesses $\vartheta$ und des linearen $\mathcal{W}$-Unterraums $\ker L^*$, 2) als $L^*$-Urbildmenge der deterministischen Handelsstrategie $b = S_0^{\delta} 1_{0,\Omega}$ und 3) unter der Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) noch als affiner Unterraum $\mathcal{M}^{\perp 1} = \mathcal{M}^{\perp} \cap \{X_0 = 1\}$ durch eine Gleichungsdarstellung. Dass für diese spezielle Darstellung $\mathcal{A} = \mathcal{M}^{\perp 1}$ die Bedingung (AWS$^{\delta}$) $S_0^{\delta} \neq 0$ auch notwendig ist, wird mit der anschließenden Behandlung des Sonderfalls $S_0^{\delta} = 0$ ($\Leftrightarrow b = 0$) deutlich, da hierfür $\mathcal{A} = L^{*-1}(\{b\}) = \ker L^* = \mathcal{M}^{\perp} \neq \mathcal{M}^{\perp 1}$ ist ($0 \in \mathcal{M}^{\perp} \setminus \mathcal{M}^{\perp 1}$).

Gemäß dem nachfolgenden Beweisteil 3a und gemäß der obigen Überlegung gelten stets die Inklusionen

$$\mathcal{M}^{\perp 1} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}^{\perp},$$

wobei der affine Unterraum $\mathcal{M}^{\perp 1}$ eine echte Teilmenge des linearen Unterraums $\mathcal{M}^{\perp}$ ist ($\mathcal{M}^{\perp 1} \subsetneq \mathcal{M}^{\perp}$). Für die genaue Zuordnung von $\mathcal{A}$ zu $\mathcal{M}^{\perp 1}$ oder $\mathcal{M}^{\perp}$ werden nachfolgend die Fälle i) (AWS$^{\delta}$) $S_0^{\delta} \neq 0$ und ii) $S_0^{\delta} = 0$ unterschieden.

Als Folgerung der Inklusion $\mathcal{M}^{\perp 1} \subseteq \mathcal{A}$ ergibt sich, dass aus der Existenz eines normierten $\mathcal{M}$-Normalenvektors $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1}$ (wie dies beispielsweise nach Abschnitt 3.6.1 bei vorliegender Arbitragefreiheit (AF) der Fall ist) folgt, dass $\mathcal{A}$ nichtleer ist und somit das LOP gilt. Umge-

kehrt kann aus dem LOP bzw. aus $\mathcal{A} \neq \emptyset$ auch $\mathcal{M}^{\perp 1} \neq \emptyset$ geschlossen werden: Im Fall i) $S_0^\delta \neq 0$ ist nämlich nach Beweisteil 3 bei gültigem LOP $\mathcal{M}^{\perp 1} = \mathcal{A} \neq \emptyset$ und im Fall ii) $S_0^\delta = 0$ nach Abschnitt 2.8.4 mit dem Nachweis von Fall $\beta$) (KAG$\mathbf{1}_{0,\Omega}$) $\mathcal{E} \cap \mathcal{M} = O$ stets ebenfalls $\mathcal{M}^{\perp 1} \neq \emptyset$. Damit ist die Relation $\mathcal{M}^{\perp 1} \neq \emptyset$ eine Charakterisierung des LOP. Bei gültigem LOP ist im Fall i) $S_0^\delta \neq 0$ jeder Bewertungsprozess $\Psi \in \mathcal{A}$ normiert und im Sonderfall ii) $S_0^\delta = 0$ existiert sowohl ein normierter Bewertungsprozess als auch ein Bewertungsprozess $\Psi$ mit $\Psi_0 = 0$ (z. B. $\Psi = 0$). Dabei erfolgt im Sonderfall die Bewertung aber stets mit der Null-Preisfunktion $\pi(X) = \Psi^\mathsf{T} X = 0 \; \forall \, X \in L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{M}$.

Analoge Darstellungen der Menge $\mathcal{A}_T$ der Bewertungsvektoren $\Psi_T$ für die endfälligen Zahlungsprofile $X_T \in \mathcal{V}_T = V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ $(\subseteq \mathbb{R}^K)$ findet man in Abschnitt 5.3.8 und speziell für das Einperiodenmodell in Abschnitt 6.2.2.

**Inklusionen und Darstellungen für die Menge $\mathcal{A}$ der Bewertungsprozesse:**

Für die Menge $\mathcal{A}$ der Bewertungsprozesse gelten die Inklusionen

$$\mathcal{M}^{\perp 1} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}^{\perp}$$

und die Darstellungen

$\mathcal{A} = \vartheta + \ker L^*$ mit einem festen $\vartheta \in \mathcal{A}$ (affiner Unterraum m. addit. Zerl.),

$\mathcal{A} = L^{*-1}(\{b\})$ ($L^*$-Urbildmenge von $b$).

Im Fall i) $S_0^\delta \neq 0$ hat man für $\mathcal{A}$ die Darstellung als affiner Unterraum:

$\mathcal{A} = \mathcal{M}^{\perp 1} = \mathcal{M}^{\perp} \cap \{X_0 = 1\}$ (Gleichungsdarstellung).

Im Sonderfall ii) $S_0^\delta = 0$ liegt stets der Fall (KAG$\mathbf{1}_{0,\Omega}$) $\mathcal{E} \cap \mathcal{M} = O$ mit

$$\mathcal{M}^{\perp 1} \neq \emptyset$$

vor und gilt das LOP. Für $\mathcal{A}$ hat man die Darstellung als linearer Unterraum:

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}^{\perp} \; (\neq \emptyset).$$

**Charakterisierung des LOP:**

Ohne die Voraussetzung (AWS$^\delta$) erhält man die Charakterisierung des LOP auch durch die Existenz eines normierten $\mathcal{M}$-Normalenvektors:

$$\text{LOP} \Leftrightarrow \mathcal{A} \neq \emptyset$$
$$\Leftrightarrow \emptyset \neq \mathcal{M}^{\perp 1} \; (\subseteq \mathcal{A}).$$

**Beweis:** 1) „$\mathcal{A} = \vartheta + \ker L^*$“: a) „$\subseteq$“: Für $\Psi, \vartheta \in \mathcal{A}$ ist $\Delta := \Psi - \vartheta \in \mathcal{W}$ mit

$$\Delta^\mathsf{T} L(h) = \Psi^\mathsf{T} L(h) - \vartheta^\mathsf{T} L(h)$$
$$= b^\mathsf{T} h - b^\mathsf{T} h = 0 \; \forall \, h \in \mathcal{H}_N \qquad (\Psi, \vartheta \text{ erfüllen (PG}\Psi\text{)}),$$

also $\Delta \in L(\mathcal{H}_N)^\perp = \ker L^*$. Daher ist $\Psi \in \vartheta + \ker L^*$ und $\mathcal{A} \subseteq \vartheta + \ker L^*$.

b) „$\supseteq$“: Für $\vartheta \in \mathcal{A}$, beliebiges $\Delta \in \ker L^*$, $\Psi := \vartheta + \Delta \in \vartheta + \ker L^*$ und beliebiges $h \in \mathcal{H}_N$ ist

$$\Psi^\mathsf{T} L(h) = \vartheta^\mathsf{T} L(h) + \Delta^\mathsf{T} L(h)$$
$$= b^\mathsf{T} h + L^*(\Delta)^\mathsf{T} h \qquad (\vartheta \in \mathcal{A}, L^* \text{ adj. zu } L)$$
$$= b^\mathsf{T} h \qquad (\Delta \in \ker L^*),$$

sodass $\Psi$ die Preisgleichungen (PG$\Psi$) erfüllt, $\Psi \in \mathcal{A}$ und $\vartheta + \ker L^* \subseteq \mathcal{A}$ gilt.

c) Zweiter Beweis von 1): Nach 2) ist

$$\mathcal{A} = L^{*-1}(\{b\}) = \vartheta + \ker L^*$$

mit einem speziellen $\vartheta \in L^{*-1}(\{b\}) = \mathcal{A}$.

d) Im Sonderfall $S_0^\delta = 0$ bzw. $b = 0$ ist $\vartheta = 0$ ein spezieller Bewertungsprozess,

$$\vartheta^\top L(h) = 0^\top L(h) = 0 = 0^\top h = b^\top h \;\forall\, h \in \mathcal{H}_N,$$

und daher

$$\mathcal{A} = 0 + \ker L^* = \ker L^*.$$

2) „$\mathcal{A} = L^{*-1}(\{b\})$“: a) „$L^{*-1}(\{b\}) \subseteq \mathcal{A}$“: Für $\Psi \in L^{*-1}(\{b\})$ gilt $L^*(\Psi) = b$, sodass mit $\Psi$ die Preisgleichungen (PG$\Psi$) für die duplizierbaren $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ erfüllt sind,

$$\Psi^\top L(h) = L^*(\Psi)^\top h = b^\top h \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_N,$$

und demnach $\Psi \in \mathcal{A}$ gilt. Es ist also $L^{*-1}(\{b\}) \subseteq \mathcal{A}$ gezeigt.

b) „$\mathcal{A} \subseteq L^{*-1}(\{b\})$“: Umgekehrt folgt für ein $\Psi \in \mathcal{A}$, also für ein $\Psi \in \mathcal{W}$, mit dem für alle $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ die Preisgleichungen (PG$\Psi$)

$$L^*(\Psi)^\top h = \Psi^\top L(h) = b^\top h \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_N$$

erfüllt sind, zunächst die Bedingung $(L^*(\Psi) - b)^\top h = 0 \;\forall\, h \in \mathcal{H}_N$ und wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts (indem man $h = L^*(\Psi) - b$ einsetzt) dann $L^*(\Psi) - b = 0$ bzw. $L^*(\Psi) = b$ und $\Psi \in L^{*-1}(\{b\})$. Daher ist auch $\mathcal{A} \subseteq L^{*-1}(\{b\})$ gezeigt. Die Bewertungsprozesse $\Psi \in \mathcal{A}$ mit ihren Preisgleichungen stimmen also mit den $L^*$-Urbildern von $b$ überein.

c) Im Sonderfall $S_0^\delta = 0$ bzw. $b = 0$ ist nach 2) $\mathcal{A} = L^{*-1}(\{0\}) = \ker L^*$.

3) „$\mathcal{A} = \mathcal{M}^{\perp 1}$ im Fall i) $S_0^\delta \neq 0$“: a) „$\mathcal{M}^{\perp 1} \subseteq \mathcal{A}$“: Es sei $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1}$ und $X \in L(\mathcal{H}_N)$ beliebig. Nach Abschnitt 2.8.4 ist dann

$$X = L(h) = \breve{V}(h) + \breve{L}(h)$$

mit $h \in \mathcal{H}_N$, $\breve{V}(h) \in \mathcal{V}$, $\breve{L}(h) \in \mathcal{M}$. Daher ist

$$\begin{aligned}\Psi^\top X &= \Psi^\top \breve{V}(h) + \Psi^\top \breve{L}(h)\\ &= \Psi^\top V_0(h)\mathbf{1}_{0,\Omega} + 0 && (\Psi \in \mathcal{M}^\perp)\\ &= \Psi_0 V_0(h) = V_0(h) = b^\top h && (\Psi_0 = 1),\end{aligned}$$

sodass $\Psi$ die Preisgleichungen (PG$\Psi$) erfüllt und $\Psi \in \mathcal{A}$ gilt. Damit ist $\mathcal{M}^{\perp 1} \subseteq \mathcal{A}$ bewiesen.

b) „$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}^{\perp 1}$“: Unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$ ist nach Abschnitt 2.8.2 das spezielle deterministische Zahlungsprofil $\mathbf{1}_{0,\Omega} = (1,0,\ldots,0)^\top \in \mathcal{W}$ duplizierbar mit einer Handelsstrategie $g = (g_0,0,\ldots,0)^\top \in \mathcal{H}_N$ und dem Startkapitaleinsatz $V_0(g) = S_0^{\delta\top} g_0 = 1$:

$$\mathbf{1}_{0,\Omega} = L(g) \text{ mit } g \in \mathcal{H}_N \text{ und } V_0(g) = 1.$$

In diesem Fall erhält man für jeden Bewertungsprozess $\Psi \in \mathcal{A}$ mit der Preisgleichung (PG$\Psi$) notwendig die 0-te Komponente

$$\Psi_0 = \Psi^\top \mathbf{1}_{0,\Omega} = \Psi^\top L(g) = V_0(g) = 1.$$

Damit ist $\mathcal{A} \subseteq \{X_0 = 1\}$ gezeigt. Da oben schon $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}^\perp$ begründet wurde, hat man für die Menge $\mathcal{A}$ unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) insgesamt auch die Inklusion $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}^{\perp 1}$. Bei gültigem LOP ist $\mathcal{A} \neq \emptyset$ und dann auch $\mathcal{M}^{\perp 1} \neq \emptyset$.

c) Eine weitere Begründung für $\mathcal{A} = \mathcal{M}^{\perp 1}$ ergibt sich aus 2) $\mathcal{A} = L^{*-1}(\{b\})$ mit der in Satz 2.1, 12) unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) angegebenen Identität $L^{*-1}(\{b\}) = \mathcal{M}^{\perp 1}$.

d) „$\mathcal{A} = \mathcal{M}^\perp$ im Sonderfall ii) $S_0^\delta = 0$ bzw. $b = 0$“: Mit dem gleichen Beweisweg wie in 3a) kann die Darstellung

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}^\perp$$

gezeigt werden: Die Inklusion „$\subseteq$“ wurde dabei oben schon allgemein begründet. Für die umgekehrte Inklusion „$\supseteq$“ wird für $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp}$ und $X \in L(\mathcal{H}_N)$ wie in 3a) mit der additiven Zerlegung $X = L(h) = \breve{V}(h) + \breve{L}(h)$, jetzt aber mit $b = 0$ und ohne $\Psi_0 = 1$, die Preisgleichung (PG$\Psi$) und damit $\Psi \in \mathcal{A}$ nachgewiesen:

$$\begin{aligned} \Psi^{\top}X &= \Psi^{\top}\breve{V}(h) + \Psi^{\top}\breve{L}(h) \\ &= \Psi^{\top}(b^{\top}h)\mathbf{1}_{0,\Omega} + 0 && (\Psi \in \mathcal{M}^{\perp}) \\ &= \Psi_0 0^{\top}h = 0 = 0^{\top}h = b^{\top}h && (\Psi^{\top}\mathbf{1}_{0,\Omega} = \Psi_0,\ b = 0). \end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{A} = \mathcal{M}^{\perp}$ ($\neq \emptyset$ und $\neq \mathcal{M}^{\perp 1}$) im Sonderfall ii) nachgewiesen. Es gilt das LOP mit der Null-Preisfunktion $\pi(X) = \Psi^{\top}X = 0 \ \forall\, X \in L(\mathcal{H}_N)$ ($\Psi \in \mathcal{M}^{\perp}$ beliebig). Die Menge $\mathcal{A}$ der Bewertungsprozesse ist hier der lineare Unterraum $\mathcal{M}^{\perp}$, stets nichtleer und vom affinen Unterraum $\mathcal{M}^{\perp 1}$ verschieden ($0 \in \mathcal{M}^{\perp} \setminus \mathcal{M}^{\perp 1}$). Somit hat man in Punkt 3) also unterschiedliche Darstellungen von $\mathcal{A}$ für die Fälle i) (AWS$^{\delta}$) $S_0^{\delta} \neq 0$ und ii) $S_0^{\delta} = 0$.

Weiterer Beweis für die Darstellung $\mathcal{A} = \mathcal{M}^{\perp}$ im Sonderfall $S_0^{\delta} = 0$ bzw. $b = 0$: In diesem Fall ist nach Beweisteil 2) und nach Abschnitt 2.8.4

$$\mathcal{A} = L^{*-1}(\{0\}) = \ker L^{*} = \mathcal{M}^{\perp}.$$

e) Die Charakterisierung des LOP durch die Relation $\mathcal{M}^{\perp 1} \neq \emptyset$ wurde schon oben begründet. □

**Weitere Beweise für die Existenz eines Bewertungsprozesses**

Neben dem Nachweis eines Bewertungsprozesses bei gültigem LOP durch die Anwendung des Rieszschen Darstellungssatzes auf die lineare Preisfunktion $\pi(X)$ wird bei den in Abschnitt 3.4.1 folgenden Charakterisierungen des LOP noch auf weiteren Beweiswegen die Existenz eines Bewertungsprozesses $\Psi$ gezeigt, mit dem der Preis $\pi(X)$ auf $L(\mathcal{H}_N)$ als Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \pi(X) = \Psi^{\top}X &= \sum_{t=0}^{T}\Psi_t^{\top}X_t = \sum_{t=0}^{T}\sum_{k=1}^{k_t}\Psi_t(A_{t,k})X_t(A_{t,k}) \\ &= \Psi_0(\Omega)X_0(\Omega) + \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{k_t}\Psi_t(A_{t,k})X_t(A_{t,k}) \end{aligned}$$

von $\Psi$ und $X$ beschrieben werden kann. Ein derartiger Bewertungsprozess $\Psi$ für die duplizierbaren Zahlungsprofile gestattet dann eine von den Duplikationsstrategien unabhängige Berechnung des Preises und charakterisiert die Gültigkeit des LOP. Aus dieser Darstellung des Preises $\pi(X)$ von $X$ als Skalarprodukt von $\Psi$ und $X$ folgt dann auch wieder die Linearität der Preisfunktion $\pi(X)$.

In Beweisteil B von Satz 3.3 in Abschnitt 3.4.1 wird vom gültigen LOP aus mittels der Struktur der Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems $L(h) = X$ als affiner Unterraum auf die Inklusion der Kerne der linearen Abbildungen $L$ und $V_0$ und dann in Beweisteil C mittels der Eigenschaften des orthogonalen Komplements auf die Existenz eines $L^{*}$-Urbilds $\Psi$ von $b$ und damit eines Bewertungsprozesses $\Psi \in \mathcal{A}$ geschlossen.

In Beweisteil F wird aus dem LOP zunächst der triviale Durchschnitt $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ der linearen Unterräume $\mathcal{V}$ und $\mathcal{M}$ von $L(\mathcal{H}_N)$ hergeleitet. Dann wird in Beweisteil G vom trivialen Durchschnitt $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ aus (auch ohne die Voraussetzung (AWS$^{\delta}$)) auf den trivialen Durchschnitt $\mathcal{E} \cap \mathcal{M} = O$ und die Nichtinklusion $\mathcal{E} \not\subseteq \mathcal{M}$ der linearen Unterräume $\mathcal{E}$ und $\mathcal{M}$, weiter mittels der Eigenschaften des orthogonalen Komplements auf die nichtleere Menge $\mathcal{M}^{\perp} \setminus \mathcal{E}^{\perp}$

$= \mathcal{M}^{\perp} \cap \{X_0 \neq 0\}$ und schließlich auf einen normierten $\mathcal{M}$-Normalenvektor $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1}$ $= \mathcal{M}^{\perp} \cap \{X_0 = 1\}$ ($\subseteq \mathcal{A}$), also einen Bewertungsprozess $\Psi \in \mathcal{A}$ geschlossen.

In Beweisteil J wird vom trivialen Durchschnitt $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ aus (auch ohne die Voraussetzung (AWS$^{\delta}$)) auf den trivialen Durchschnitt $\mathcal{E} \cap \mathcal{M} = O$ und dann mittels eines Alternativsatzes ebenfalls auf einen normierten $\mathcal{M}$-Normalenvektor $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1}$ ($\subseteq \mathcal{A}$), also einen Bewertungsprozess $\Psi \in \mathcal{A}$ geschlossen.

In Beweisteil I wird unter der Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) und mittels des Dimensionssatzes für lineare Unterräume eine direkte Zerlegung des Unterraums $\mathcal{M}^{\perp}$, ein normierter $\mathcal{M}$-Normalenvektor $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1}$ ($\subseteq \mathcal{A}$) und damit ein Bewertungsprozess $\Psi$ hergeleitet.

## 3.4 Charakterisierungen des Law of One Price (LOP)

Bei der Bewertung nach dem Duplikationsprinzip sind neben dem Law of One Price (LOP) noch die Begriffe der Vollständigkeit (VS) (Definition in Abschnitt 3.1) und der Arbitragefreiheit (AF) (Definition in Abschnitt 3.6), die Voraussetzung ($DP_\xi^{\mu,C}$) der Existenz von bestimmten Arrow-Debreu-Papieren (Definition in Abschnitt 3.8.1), die Bedingung (FH) der Existenz von sogenannten festverzinslichen Handelsstrategien und spezieller die Bedingung (FF) der Existenz eines festverzinslichen Finanzinstruments im Marktmodell von Bedeutung (Definition von (FH) und (FF) in Abschnitt 3.9.1). In den Abschnitten 3.4, 3.5 und 3.6 werden nun zunächst Charakterisierungen dieser ersten drei Begriffe direkt im Mehrperiodenmodell bewiesen. Im anschließenden Abschnitt 3.7 werden dann Folgerungen aus dem LOP und aus der Arbitragefreiheit hinsichtlich der Beschreibung der Menge der Kapitalmarktgeschäfte, der Bewertung von Finanzgeschäften und der Existenz formaler W-Maße im Marktmodell hergeleitet. In den Abschnitten 3.8 und 3.9 werden die oben erwähnten zusätzlichen Voraussetzungen näher untersucht und daraus Folgerungen hinsichtlich der Existenz bestimmter Diskontierungsfaktoren, der Existenz eines sog. Preismaßes im Marktmodell, der Martingaleigenschaft für die diskontierten Preisprozesse der dividendenlosen Finanzinstrumente und der sog. risikoneutralen Bewertung der $X \in L(\mathcal{H}_N)$ mit diesem Preismaß begründet.

Beispielsweise ist die Vollständigkeit des Marktmodells äquivalent zur Injektivität der zu $L$ adjungierten Abbildung $L^*$. Das LOP ist gleichbedeutend zur Existenz eines (nicht notwendig positiven) Bewertungsprozesses $\Psi \in \mathcal{W}$. Die Arbitragefreiheit des Marktmodells wird in dem Fundamentalsatz der Preistheorie dadurch charakterisiert, dass ein strikt positiver Diskontierungsprozess $\Phi \in \mathcal{W}$ existiert. Weiter wird gezeigt, dass die Arbitragefreiheit auch hinreichend für die Gültigkeit des LOP auf $L(\mathcal{H}_N)$ ist. Kremer[17] führt die Charakterisierung dieser Begriffe des Mehrperiodenmodells durch sog. Lokalisierung des Zahlungsprofils auf die enthaltenen Einperioden-Teilmodelle zurück. In der vorliegenden Arbeit werden aber diese und weitere Charakterisierungen ohne Rückführung auf die Einperiodenmodelle direkt im Mehrperiodenmodell bewiesen. Dies geschieht mit Hilfe der die Zahlungsprofile $L(h)$ der Handelsstrategien $h$ beschreibenden linearen Abbildung $L : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathcal{W}$, der dazu adjungierten Abbildung $L^* : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{H}_N$ und deren Zerlegungen in deterministischen und stochastischen Anteil.

### 3.4.1 Verschiedene Charakterisierungen des LOP

Bevor nun verschiedene Charakterisierungen des LOP in einem mathematischen Satz zusammengestellt und bewiesen werden, wird noch ein Alternativsatz[18] aus der konvexen Ge-

---

[17] Kremer (2011) verwendet die Lokalisierung des Zahlungsprofils hinsichtlich der Vollständigkeit auf S. 164–166, für das LOP auf S. 171–173 und für die Arbitragefreiheit auf S. 175–177.

[18] Einen Beweis dieses Alternativsatzes findet man noch etwas allgemeiner für einen abgeschlossenen konvexen linearen Kegel $T$, den dazu polaren Kegel $T^{\mathsf{P}}$ und verallgemeinerten schwach positiven und strikt positiven Orthanten auf der Autorenwebsite www.pleier-r.de bei den Downloadthemen. Neben der Herleitung aus einem allgemeineren Alternativsatz wird dort auch noch ein

ometrie bereitgestellt, der die Disjunktheit eines linearen Unterraums $T$ und des punktierten Strahls

$$E_{>0} := \text{ray } e_1 \setminus \{o\} = \{\lambda e_1 : \lambda > 0\}$$

des ersten Standardbasisvektors $e_1 = (1,0,\ldots,0)^\top$ des $\mathbb{R}^n$ dadurch charakterisiert, dass ein Vektor $a = (a_1,\ldots,a_n)^\top$ im orthogonalen Komplement $T^\perp$ von $T$ mit positiver erster Komponente $a_1$ existiert. In der zugehörigen Abbildung 3.5 wird eine grafische Darstellung dieser Situation gegeben. Bei der zweidimensionalen Darstellung trifft die Gerade $T$ den punktierten Strahl $E_{>0} = \text{ray } e_1 \setminus \{0\}$ genau dann nicht, wenn sie einen Normalenvektor in der rechten Halbebene $\{x_1 > 0\}$ besitzt. Dieser Alternativsatz kann aufgrund der Isomorphie des $n_1$-dimensionalen euklidischen Vektorraums $\mathcal{W}$ zum $\mathbb{R}^{n_1}$ auch im Vektorraum $\mathcal{W}$ angewandt werden. Mit ihm lässt sich im Beweisteil J des Satzes 3.3 das LOP durch die Existenz eines normierten $\mathcal{M}$-Normalenvektors $\Psi \in \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\} =: \mathcal{M}^{\perp 1}$ und damit eines Bewertungsprozesses $\Psi$ charakterisieren. Weitere Beweiswege zur Existenz eines Bewertungsprozesses werden am Ende von Abschnitt 3.3.3 beschrieben.

**Satz 3.2 Alternativsatz zur Disjunktheit eines linearen Unterraums und des punktierten Strahls des ersten Standardbasisvektors**

Der lineare Unterraum $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und der punktierte Strahl $E_{>0} := \text{ray } e_1 \setminus \{o\} = \{\lambda e_1 : \lambda > 0\}$ des ersten Standardbasisvektors $e_1 = (1,0,\ldots,0)^\top$ des $\mathbb{R}^n$ sind genau dann disjunkt, wenn es einen Vektor $a = (a_1,\ldots,a_n)^\top$ im orthogonalen Komplement $T^\perp$ mit positiver erster Komponente $a_1$ gibt:

$$T \cap \text{ray } e_1 \setminus \{o\} = \emptyset \Leftrightarrow T^\perp \cap \{x_1 > 0\} \neq \emptyset.$$

In diesem Fall liegt $T$ in der (linearen, homogenen) Hyperebene $H_{a,0} = \{a^\top x = 0\}$ und $E_{>0} = \text{ray } e_1 \setminus \{o\}$ im offenen linearen (homogenen) Halbraum $H^{>}_{a,0} = \{a^\top x > 0\}$ mit Normalenvektor $a$.

Von den beiden folgenden Aussagen gilt also entweder (1) oder (2):

(1) $T \cap \text{ray } e_1 \setminus \{o\} \neq \emptyset$;

(2) $T^\perp \cap \{x_1 > 0\} \neq \emptyset$.

einfacher elementarer Beweis mittels der Eigenschaften des polaren Kegel $T^\mathsf{P}$ bzw. des orthogonalen Komplements $T^\perp$ angegeben.

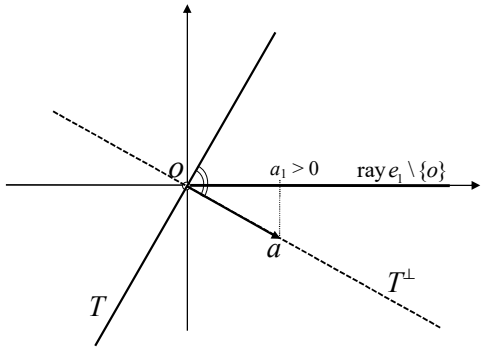



**Abb. 3.5** Ein linearer Unterraum $T \subseteq \mathbb{R}^n$, der zum punktierten Strahl ray $e_1 \setminus \{o\}$ des ersten Standardbasisvektors $e_1$ disjunkt ist, und ein in der ersten Komponente positiver Vektor $a$ im orthogonalen Komplement $T^\perp$ von $T$

**Satz 3.3 Charakterisierungen des Law of One Price im Mehrperiodenmodell mit den Räumen $\mathcal{H}_N$ und $\mathcal{W}$**

Es sei (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$ vorausgesetzt für die Punkte 13–16, 19, 26, 27. Das Law of One Price (LOP) gilt im Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1) (LOP) $\forall X \in L(\mathcal{H}_N) : V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0$ konstant für alle $h \in \mathcal{H}_N$ mit $L(h) = X$
2) (LOP1) $\forall X \in L(\mathcal{H}_N) : R_0(h) = S_0^{\mathsf{T}} h_1$ konstant für alle $h \in \mathcal{H}_N$ mit $L(h) = X$
3) $\exists X \in L(\mathcal{H}_N)$: $V_0(h)$ konstant für alle $h \in L^{-1}(\{X\})$
4) $V_0(f) = b^{\mathsf{T}} f = 0$ für alle $f \in \mathcal{H}_N$ mit $L(f) = 0$ (Bed. 3 für $X = 0 = L(0) \in L(\mathcal{H}_N)$)
5) $\ker L \subseteq \ker V_0 = \{b\}^\perp = \mathcal{B}^\perp$ (Inklusion der Kerne; z. B. bei inj. $L$ bzw. $\ker L = O$)
6) $b \in (\ker L)^\perp = L^*(\mathcal{W})$ ($b$ ist $L^*$-Bild)
7) $\mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{W})$ (Inklusion von $\mathcal{B}$ im $L^*$-Bildraum)
8) $\exists\, \Psi \in \mathcal{W}$ mit $L^*(\Psi) = b$ ($L^*$-Urbild von $b$)
9) $\exists\, \Psi \in \mathcal{M}^\perp$ mit $L^*(\Psi) = b$ ($L^*$-Urbild von $b$)
10) $\exists\, \Psi \in \mathcal{M}^\perp \setminus \mathcal{E}^\perp = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 \neq 0\}$ (nichtleere Differenz)
11) $\exists\, \Psi \in \mathcal{M}^\perp$ mit $\Psi_0 = 1$ (norm. $\mathcal{M}$-Normalenvektor)
12) $\exists_1\, \vartheta \in L(\mathcal{H}_N)$ mit $L^*(\vartheta) = b$ (dupliz. $L^*$-Urbild von $b$)
13) $\exists_1\, \vartheta \in L(\mathcal{H}_N) \cap \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\}$ (dupliz. norm. $\mathcal{M}$-Normalenv.)
14) $\exists\, \Psi \in \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^*$ (mit $\mathcal{M}^\perp = \ker L^* \oplus \operatorname{lin}\{\Psi\}$) $[\Psi_0 = 1]$ (nichtleere Differenz)
15) $\dim \ker L^* = \dim \mathcal{M}^\perp - 1$ (Dimensionsgleichung)
16) $\ker L^*$ ist eine Hyperebene von $\mathcal{M}^\perp$ (echte Teilmenge von $\mathcal{M}^\perp$)
17) $L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B}$ (Maximalität u. Eindimens. von $L^*(\mathcal{M}^\perp)$)
18) $L^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B} \oplus L^*(\mathcal{M})$ ($L^*(\mathcal{W})$ als direkte Summe)
19) $L^*(\mathcal{M})$ ist Hyperebene von $L^*(\mathcal{W})$ (echte Teilmenge von $L^*(\mathcal{W})$)
20) $\forall X \in L(\mathcal{H}_N)$ $\exists_1$ additive Zerlegung $X = Y + Z$ mit $Y \in \mathcal{V}$, $Z \in \mathcal{M}$ (Einz. d. add. Zerl.)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 21) | $\exists X \in L(\mathcal{H}_N)$: $\exists_1$ additive Zerlegung $X = Y + Z$ mit $Y \in \mathcal{V}, Z \in \mathcal{M}$ | | | | (Einz. d. add. Zerl.) |
| 22) | $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ | | | | (trivialer Durchschnitt) |
| 23) | $\mathcal{E} \not\subseteq \mathcal{M}$ | | | | (Nichtinklusion) |
| 24) | $\mathcal{M}^\perp \not\subseteq \mathcal{E}^\perp = \{X_0 = 0\}$ | | | | (Nichtinklusion) |
| 25) | $\mathcal{M}^\perp \not\subseteq \mathcal{E}^\perp \cap \mathcal{M}^\perp$ bzw. $\mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 \neq 0\} = \mathcal{M}^\perp \setminus \mathcal{E}^\perp \neq \emptyset$ | | | | (nichtleere Differenz) |
| 26) | $\dim L(\mathcal{H}_N) = \dim \mathcal{M} + 1$ | | | | (Dimensionsgleichung) |
| 27) | $\mathcal{M}$ ist Hyperebene von $L(\mathcal{H}_N)$ | | | | (echte Teilmenge von $L(\mathcal{H}_N)$) |
| 28) | $L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{M}$ | | | | (Struktur von $L(\mathcal{H}_N)$ als direkte Summe) |
| 29) | (PGΨ) | $\exists \Psi \in \mathcal{W}$ mit $\Psi^\top L(h) = b^\top h$ | $\forall h \in \mathcal{H}_N$ | | (Bew.proz. m.Prgl.) |
| 30) | (KPGΨ) | $\exists \Psi \in \mathcal{W}$ mit $\Psi^\top \breve{L}(h) = 0$ | $\forall h \in \mathcal{H}_N$, | $\Psi_0 = 1$ | (norm. $\mathcal{M}$-Norm.v.) |
| 31) | | $\exists \Psi \in \mathcal{W}$ mit $\Psi^\top L(h) = 0$ | $\forall h \in \ker V_0$, | $\Psi_0 = 1$ | (norm. $\mathcal{M}$-Norm.v.) |
| 32) | | $\exists \Psi \in \mathcal{W}$ mit $\Psi^\top Z = 0$ | $\forall Z \in \mathcal{M}$, | $\Psi_0 = 1$ | (norm. $\mathcal{M}$-Norm.v.) |
| 33) | | $\exists \Psi \in \mathcal{W}$ mit $\breve{L}^*(\Psi) = 0$, | | $\Psi_0 = 1$ | (norm. $\mathcal{M}$-Norm.v.) |
| 34) | $L^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B} \oplus \breve{L}^*(\mathcal{W})$ | | | | ($L^*(\mathcal{W})$ als direkte Summe) |

**Erläuterungen zum Satz 3.3 und zu den nachfolgenden Abbildungen**

Der Beweis des Satzes 3.3 erfolgt im Anschluss an diese Erläuterungen. In diesem Satz werden zur Charakterisierung des LOP nicht nur Preisgleichungen (in den Punkten 29 – 32) für die Zahlungsprofile $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ und $Z = L(g) \in L(\ker V_0) = \mathcal{M}$ angegeben, sondern auch Lagebeziehungen bestimmter Unterräume von $\mathcal{W}$ und $\mathcal{H}_N$. Die gegenseitige Lage der wichtigen Unterräume im Raum $\mathcal{W}$ der $\mathcal{F}$-adaptierten reellwertigen Zahlungsprofile, nämlich $L(\mathcal{H}_N)$, $\ker L^*$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{V}^\perp$ und $\mathcal{M}^\perp$, und die gegenseitige Lage der wichtigen Unterräume im Raum $\mathcal{H}_N$ der ($\mathcal{F}$-vorhersehbaren) Handelsstrategien, nämlich $L^*(\mathcal{W})$, $\ker L$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^\perp$, $L^*(\mathcal{M})$ und $L^*(\mathcal{M}^\perp)$, wird bei ungültigem LOP in der Abbildung 3.6 und bei gültigem LOP in der Abbildung 3.7 dargestellt. Der Vorteil derjenigen Charakterisierungen des LOP in Satz 3.3, welche die Struktur und Lagebeziehungen von Vektorunterräumen beschreiben, besteht nun darin, dass sie geometrisch visualisiert werden können. Andererseits kann die geometrische Veranschaulichung auch als Quelle für Vermutungen über weitere neue Erkenntnisse dienen.

Allgemein lässt sich der Vektorraum $\mathcal{W}$ der $\mathcal{F}$-adaptierten stochastischen Prozesse darstellen als direkte Summe der orthogonalen Komplemente $L(\mathcal{H}_N)$ und $\ker L^*$ und auch als direkte Summe der orthogonalen Komplemente $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}^\perp$. Dabei liegt stets $\mathcal{M}$ in $L(\mathcal{H}_N)$ und $\ker L^*$ in $\mathcal{M}^\perp$. Weiter wird der Raum $\mathcal{H}_N$ der Handelsstrategien dargestellt als direkte Summe der orthogonalen Komplemente $L^*(\mathcal{W})$ und $\ker L$ und auch als direkte Summe von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}^\perp$. Hierbei liegt aber im Allgemeinen nicht $\mathcal{B}$ in $L^*(\mathcal{W})$ bzw. $\ker L = L^*(\mathcal{W})^\perp$ in $\mathcal{B}^\perp$.

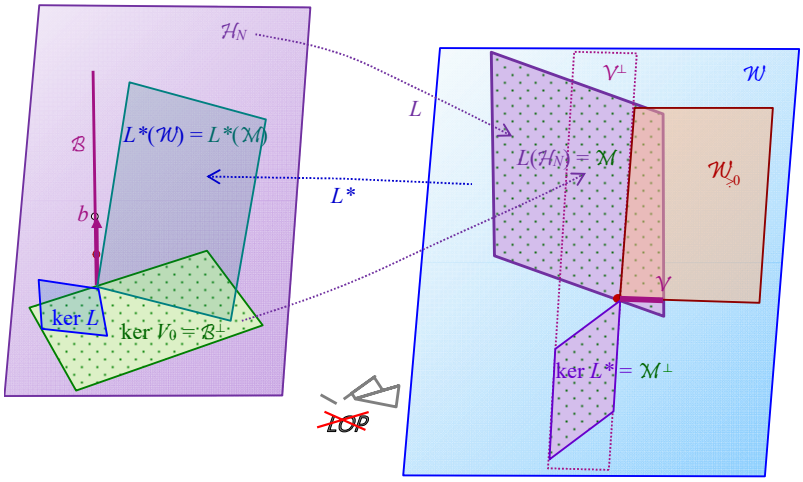



**Abb. 3.6** Die verschiedenen Unterräume von $\mathcal{H}_N$ und $\mathcal{W}$, der schwach positive Orthant $\mathcal{W}_{\geq 0}$ von $\mathcal{W}$ und die linearen Abbildungen $L$ und $L^*$ bei ungültigem LOP

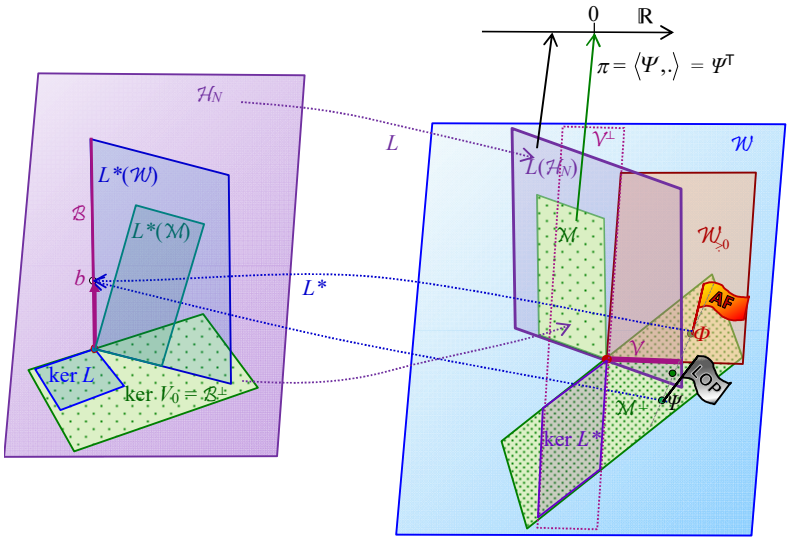



**Abb. 3.7** Die verschiedenen Unterräume von $\mathcal{H}_N$ und $\mathcal{W}$, der schwach positive Orthant $\mathcal{W}_{\geq 0}$ von $\mathcal{W}$, die linearen Abbildungen $L$, $L^*$ und $\pi$, der Bewertungsprozess $\Psi$ bei gültigem LOP und der Diskontierungsprozess $\Phi$ bei Arbitragefreiheit (AF) ($\mathcal{B} = \text{lin}\{b\}$, $\mathcal{V} = L(\mathcal{B})$, $\mathcal{M} = L(\mathcal{B}^\perp)$)

Beim Vergleich der Situation der Unterräume in $L(\mathcal{H}_N)$ bzw. in $L^*(\mathcal{W})$ bei nichtgültigem LOP mit der Situation bei gültigem LOP ist die Dimension von $L(\mathcal{H}_N)$ und $L^*(\mathcal{W})$ konstant ($\dim L(\mathcal{H}_N) = \dim L^*(\mathcal{W})$ nach Abschnitt 2.10.1). Die Abbildung 3.6 veranschaulicht, dass

in $\mathcal{W}$ bei **Nichtgültigkeit des LOP** nach Satz 3.3, 22) der nichttriviale Durchschnitt $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} \neq O$ vorliegt, demnach auch $\mathcal{V} \neq O$, $\mathcal{V} = \mathcal{E} = \text{lin}\{\mathbf{1}_{0,\Omega}\} \subseteq \mathcal{M}$ und

$$\mathcal{M} = \mathcal{V} + \mathcal{M} = L(\mathcal{H}_N)$$

gilt, also $\mathcal{M}$ den ganzen $L$-Bildraum $L(\mathcal{H}_N)$ ausfüllt, und dass

$$\ker L^* = \mathcal{M}^\perp$$

gilt, also der Kern $\ker L^*$ der Abbildung $L^*$ den gesamten Unterraum $\mathcal{M}^\perp$ ausfüllt. Jedes duplizierbare Zahlungsprofil $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{M}$ kann dann auch mit einem Startkapitaleinsatz $V_0(h) = 0$ dupliziert werden. Insbesondere existiert in $\mathcal{V} = \mathcal{E} (\subseteq \mathcal{M})$ die spezielle Arbitragegelegenheit (Definition in Abschnitt 3.6.1) $\mathbf{1}_{0,\Omega} = (1,0,\ldots,0)^\top \in \mathcal{M} \cap \mathcal{W}_{\gneq 0}$ . Damit ist schon begründet, dass das LOP eine notwendige Folgerung aus der Arbitragefreiheit (AF) ist. Eine weitere mengentheoretische Begründung dieser Aussage erfolgt noch in Abschnitt 3.6.1.

Arbitragefreiheit (AF) ⇒ (LOP)

Weiter zeigt die Abbildung 3.6, dass in $\mathcal{H}_N$ bei nichtgültigem LOP der eindimensionale Unterraum $\mathcal{B}$ von $\mathcal{H}_N$, der vom Bewertungsprozess $b$ der Handelsstrategien aufgespannt wird, nicht im $L^*$-Bildraum $L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M})$ liegt und der Unterraum $\ker L = L^*(\mathcal{W})^\perp$ nicht in $\mathcal{B}^\perp = \ker V_0$ liegt. Mit dieser Relation

$$\ker L \not\subseteq \ker V_0$$

kann man auch nochmal die bereits oben erwähnte Übereinstimmung $L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{M}$ begründen: Jedes Zahlungsprofil $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ lässt sich nämlich auch als ein Zahlungsprofil $L(g) \in L(\ker V_0) = \mathcal{M}$ darstellen, da mit einem $f \in \ker L \setminus \ker V_0$ $(\neq \emptyset)$ die Handelsstrategie $g := h - f \cdot V_0(h)/V_0(f) \in \mathcal{H}_N$ die folgenden Funktionswerte $L(g)$ und $V_0(g)$ besitzt:

$$L(g) = L(h) - 0 = L(h) = X \text{ und}$$
$$V_0(g) = V_0(h) - V_0(f) \cdot V_0(h)/V_0(f) = 0$$

Die Abbildung 3.7 dagegen illustriert, dass mit der **Einstellung des LOP** im Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ bzw. im $L$-Bildraum $L(\mathcal{H}_N)$ der Unterraum $\mathcal{M}$ genau um eine Dimension kleiner ausfällt als der Unterraum $L(\mathcal{H}_N)$ und dann $L(\mathcal{H}_N)$ die direkte Summe des eindimensionalen Unterraums $\mathcal{V} = L(\mathcal{B})$ und des Unterraums $\mathcal{M} = L(\mathcal{B}^\perp)$ ist:

$$L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{M}.$$

Im nachfolgenden Beweisteil E für die Aussage „22) ⇔ 20)“ wird nämlich gezeigt, dass der triviale Durchschnitt $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ der Unterräume $\mathcal{V}$ und $\mathcal{M}$ bedeutet, dass jedes duplizierbare Zahlungsprofil

$$\begin{aligned} X &= L(h) = \breve{V}(h) + \breve{L}(h) \\ &= V_0(h) \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} + \breve{L}(h) \\ &\in \mathcal{V} \oplus \mathcal{M} = L(\mathcal{H}_N) \end{aligned}$$

nur eine einzige additive Zerlegung $X = Y + Z$ mit $Y \in \mathcal{V}$ und $Z \in \mathcal{M}$ besitzt, nämlich mit

$$Y = \pi(X) \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} \in \mathcal{V} \text{ und } Z = X - Y \in \mathcal{M}.$$

Die Einzigkeit dieser additiven Zerlegung der duplizierbaren Zahlungsprofile $X \in L(\mathcal{H}_N)$ beinhaltet auch die Konstanz des Startkapitaleinsatzes $V_0(h)$ aller Duplikationsstrategien $h$

von $X$, also die Gültigkeit des LOP, mit der daraus resultierenden Möglichkeit der Preisdefinition nach dem Duplikationsprinzip. Diese Eigenschaft wird auch noch in Abschnitt 4.2 bei der Interpretation der Bewertung mittels des Duplizierungskonzeptes (mit Beurteilungskurve und Supplement vom Kapitalmarkt) verwendet.

Bei gültigem LOP wird unter der Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) der $L$-Bildraum $L(\mathcal{H}_N)$ direkt zerlegt in den eindimensionalen Unterraum $\mathcal{V} = \mathcal{E}$ für die Beschreibung des Startkapitaleinsatzes und den Unterraum $\mathcal{M}$ der indifferenten (mit dem Preis Null neutral bewerteten) Kapitalmarktgeschäfte. Mit der Einengung von $\mathcal{M}$ auf eine Hyperebene des Raums $L(\mathcal{H}_N)$ vergrößert sich im Gegenzug in $\mathcal{W}$ das orthogonale Komplement $\mathcal{M}^{\perp}$ ausgehend von $\ker L^* = \mathcal{M}^{\perp} \cap \{X_0 = 0\}$ genau um eine Dimension und enthält dann einen Prozess

$$\Psi \in \mathcal{M}^{\perp} \setminus \ker L^* = \mathcal{M}^{\perp} \cap \{X_0 \neq 0\},$$

o. E. mit $\Psi_0 = 1$, sodass $\mathcal{M}^{\perp}$ die direkte Summe des Unterraums $\ker L^*$ und des eindimensionalen Unterraums $\operatorname{lin}\{\Psi\}$ ist:

$$\mathcal{M}^{\perp} = \ker L^* \oplus \operatorname{lin}\{\Psi\}.$$

Der Unterraum $\ker L^*$ ist dann eine Hyperebene des Unterraums $\mathcal{M}^{\perp}$. Mit einem Prozess

$$\Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1} = \mathcal{M}^{\perp} \cap \{X_0 = 1\} = L^{*-1}(\{b\})$$

(Begründung von $\mathcal{M}^{\perp 1} = L^{*-1}(\{b\})$ in Abschnitt 3.3.3 bei den Darstellungen von $\mathcal{A}$) berechnet sich der Wert der auf $\mathcal{H}_N$ definierten deterministischen linearen Nutzenfunktion

$$V_0(h) = b^{\mathsf{T}} h = S_0^{\delta \mathsf{T}} h_0$$

für alle Duplikationsstrategien $h$ von $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ als das Skalarprodukt von $\Psi$ und $X$, also nur abhängig vom Zahlungsprofil $X$ und unabhängig von den Duplikationsstrategien $h \in L^{-1}(\{X\})$:

$$b^{\mathsf{T}} h = L^*(\Psi)^{\mathsf{T}} h = \Psi^{\mathsf{T}} L(h) = \Psi^{\mathsf{T}} X.$$

**Algebraische Berechnung des Preises eines Zahlungsprofils mittels eines Bewertungsprozesses**

Mit einem bereits bestimmten Prozess $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1}$ kann für ein duplizierbares Zahlungsprofil $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ aus der eindeutigen additiven Zerlegung $X = V_0(h)\mathbf{1}_{0,\Omega} + \breve{L}(h) \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{M}$ durch Linksmultiplikation mit dem Zeilenvektor $\Psi^{\mathsf{T}}$ das Startkapital $V_0(h)$ der Duplikationsstrategie $h$ gewonnen werden:

$$\Psi^{\mathsf{T}} X = \Psi^{\mathsf{T}} \mathbf{1}_{0,\Omega} V_0(h) + \Psi^{\mathsf{T}} \breve{L}(h) = \Psi_0 V_0(h) = V_0(h) = \pi(X).$$

Somit kann der Preis $\pi(X)$ von $X \in L(\mathcal{H}_N)$ eindeutig durch den deterministischen Startkapitaleinsatz $V_0(h)$ seiner Duplikationsstrategien definiert werden und als Skalarprodukt von $\Psi$ und $X$ unabhängig von einer Duplikationsstrategie berechnet werden:

$$\begin{aligned} \pi(X) &= \Psi^{\mathsf{T}} X = \sum_{t=0}^{T} \sum_{k=1}^{k_t} \Psi_t(A_{t,k}) X_t(A_{t,k}) \\ &= 1 \cdot X_0(\Omega) + \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{k_t} \Psi_t(A_{t,k}) X_t(A_{t,k}) \end{aligned}$$

Die Linearform (das lineare Funktional)

$$\pi = \langle \Psi, . \rangle_{\mathcal{W}} = \Psi^{\mathsf{T}} : X \in \mathcal{W} \mapsto \pi(X) = \langle \Psi, X \rangle_{\mathcal{W}} = \Psi^{\mathsf{T}} X \in \mathbb{R}$$

ist zwar als lineare Nutzenfunktion auf ganz $\mathcal{W}$ definiert, liefert aber nur auf $L(\mathcal{H}_N)$ den eindeutig bestimmten Preis von $X = L(h)$ gemäß der **Preisgleichung**

(PGΨ) $\quad \Psi^{\mathsf{T}} L(h) = b^{\mathsf{T}} h.$

Für den Prozess $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1}$ liefert die zugehörige Linearform $\pi = \Psi^{\mathsf{T}}$ nur auf dem Unterraum $\mathcal{M}$ der Kapitalmarktgeschäfte den Preis Null, ansonsten auf $L(\mathcal{H}_N) \setminus \mathcal{M}$ von Null verschiedene Preise. Bei der Wahl eines Prozesses $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp} \cap \{X_0 = 0\} = \ker L^* = L(\mathcal{H}_N)^{\perp}$ würde dagegen die Linearform $\pi = \Psi^{\mathsf{T}}$ alle duplizierbaren Zahlungsprofile $X \in L(\mathcal{H}_N)$ mit dem Wert Null bewerten und keine Unterscheidung zulassen.

Die Charakterisierung des LOP durch die Existenz eines Prozesses $\Psi \in \mathcal{W}$ mit den zugehörigen Preisgleichungen (PGΨ) $\Psi^{\mathsf{T}} L(h) = V_0(h)$ $(\forall\, h \in \mathcal{H}_N,\, X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N))$ findet man bei Kremer[19], wobei dort $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0$ als Skalarprodukt der $N$-Tupel $S_0^{\delta}$, $h_0 \in \mathbb{R}^N$ und noch nicht die Darstellung des Startkapitaleinsatzes $V_0(h) = b^{\mathsf{T}} h$ als Skalarprodukt der Handelsstrategien $b$, $h \in \mathcal{H}_N$ im Mehrperiodenmodell verwendet wird. Der Beweis wird dort durch die Rückführung (sog. Lokalisierung) auf die im Mehrperiodenmodell enthaltenen Einperiodenmodelle geführt.

Der Wert $\pi(X) = \Psi^{\mathsf{T}} X$ ist speziell für die $X \in L(\mathcal{H}_N)$ auch unabhängig von der Wahl der Lösung $\Psi$ der Gleichung $L^*(\Psi) = b$: Für die allgemeine Lösung $\Psi$ der inhomogenen linearen Gleichung $L^*(\Psi) = b$, also für

$$\Psi \in L^{*-1}(\{b\}) = \Psi' + \ker L^*$$

mit einer speziellen Lösung $\Psi'$ von $L^*(\Psi) = b$, ist nämlich mit einer festen Duplikationsstrategie $h' \in L^{-1}(\{X\})$ der Wert

$$\begin{aligned} \Psi^{\mathsf{T}} X &= \Psi^{\mathsf{T}} L(h') = L^*(\Psi)^{\mathsf{T}} h' = L^*(\Psi')^{\mathsf{T}} h' \\ &= \Psi'^{\mathsf{T}} L(h') \\ &= \Psi'^{\mathsf{T}} X \end{aligned}$$

gleich für $\Psi$, $\Psi' \in L^{*-1}(\{b\})$. Bei gültigem LOP erhält man also durch $\pi(X) = \Psi^{\mathsf{T}} X$ mit beliebigem $\Psi \in L^{*-1}(\{b\})$ ein auf $L(\mathcal{H}_N)$ eindeutig bestimmtes **Bewertungsfunktional** $\pi$.

Zur deutlicheren Unterscheidung von dem bei der nachfolgenden Charakterisierung der Arbitragefreiheit in Abschnitt 3.6.1 auftretenden *positiven* Diskontierungsprozess $\Phi \in \mathcal{W}$ wird hier der (nur in der ersten Zeitkomponente $\Psi_0$ positive und insgesamt nicht notwendig positive) Prozess $\Psi \in L^{*-1}(\{b\}) = \mathcal{M}^{\perp 1}$ auch mit einem Namen ausgestattet und als **Bewertungsprozess** der duplizierbaren $\mathcal{F}$-adaptierten Zahlungsprofile $X \in L(\mathcal{H}_N)$ bezeichnet. Falls nun ein Bewertungsprozess $\Psi \in \mathcal{W}$ bereits bestimmt ist, berechnet sich für ein Zahlungsprofil $X \in L(\mathcal{H}_N)$ der Preis zu $\pi(X) = \Psi^{\mathsf{T}} X$.

Wie schon in Abschnitt 3.3.2 bei der Definition des Preises $\pi(X)$ mittels des LOP erwähnt wurde, so ist auch hier wieder ersichtlich, dass in die Preisbestimmung die tatsächlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten der Ereignisse $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$, die bei der mathematischen Modellierung des Preisprozesses $S$ auftreten, nicht eingehen. Es wird hier nur der innerhalb des

---

[19] Preisgleichungen werden verwendet bei Kremer (2011), S. 29, 171, 175, 176 und (2017), S. 31, 72.

Marktmodells ermittelte Bewertungsprozess $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp} \setminus \ker L^* \subseteq \mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathcal{F})$ ($\Psi_0 = 1$) verwendet.

Mit der Einstellung des LOP vergrößert sich im Vektorraum $\mathcal{H}_N$ das $L^*$-Bild $L^*(\mathcal{M}^{\perp})$ von $\mathcal{M}^{\perp}$ durch die Hinzunahme des Vektors

$$L^*(\Psi) = b \neq 0$$

vom Nullraum $O$ aus auf den eindimensionalen Unterraum $\mathcal{B} = \text{lin}\{b\}$. Mit der Aufnahme von $\mathcal{B}$ als $L^*(\mathcal{M}^{\perp})$ in den $L^*$-Bildraum $L^*(\mathcal{W})$ und der damit einhergehenden Verschiebung von $L^*(\mathcal{W})$ (siehe Übergang von der Abbildung 3.6 zur Abbildung 3.7) verkleinert sich im Gegenzug wegen der Dimensionserhaltung von $L^*(\mathcal{W})$ und wegen des stets gültigen Verdrängungseffekts von $\mathcal{B}$ auf $L^*(\mathcal{M})$ ($\mathcal{B} \cap L^*(\mathcal{M}) = O$ nach Satz 2.1, 14) das Bild $L^*(\mathcal{M})$ ausgehend von $L^*(\mathcal{W})$ genau um eine Dimension auf eine Hyperebene von $L^*(\mathcal{W})$. Der gesamte $L^*$-Bildraum $L^*(\mathcal{W})$ ist dann die direkte Summe des Unterraums $L^*(\mathcal{M})$ und des eindimensionalen Unterraums $\mathcal{B}$:

$$L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M}) \oplus \mathcal{B}.$$

Der damit vorliegenden Inklusion $\mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{W})$ entspricht die umgekehrte Inklusion der zugehörigen orthogonalen Komplemente:

$$\ker L = L^*(\mathcal{W})^{\perp} \subseteq \mathcal{B}^{\perp} = \ker V_0 .$$

Diese Bedingung $\ker L \subseteq \ker V_0$ bedeutet zunächst, dass das spezielle Zahlungsprofil $X = 0 \in \mathcal{W}$ nur durch ein Kapitalmarktgeschäft $L(g) \in L(\ker V_0) = \mathcal{M}$ nachgebildet werden kann, also nur mittels einer Handelsstrategie $g$ ohne Startkapitaleinsatz ($V_0(g) = 0$) dupliziert werden kann. Weiter bedeutet diese Relation, dass ein beliebiges Zahlungsprofil $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ nur durch ein Zahlungsprofil $L(k) \in L(\mathcal{H}_N)$ nachgebildet werden kann, dessen Startkapitaleinsatz $V_0(k)$ mit dem Startkapitaleinsatz $V_0(h)$ der Duplikationsstrategie $h$ von $X$ übereinstimmt, dass also das LOP gilt: Mit $f := k - h$ folgt nämlich aus $L(k) - L(h) = L(f) = 0$ wegen $\ker L \subseteq \ker V_0$ auch $V_0(k) - V_0(h) = V_0(f) = 0$.

Ein Spezialfall für die Gültigkeit des LOP ist der Fall, dass die lineare Abbildung $L$ injektiv ist: Aus $\ker L = O$ folgt nämlich $\ker L = O \subseteq \ker V_0$ und damit das LOP. In diesem Spezialfall besitzt jedes duplizierbare Zahlungsprofil $X \in L(\mathcal{H}_N)$ nur eine einzige Duplikationsstrategie $h$.

**Beweis des Satzes 3.3**: A) „1) LOP ⇔ 2) LOP1“:
Die Äquivalenz dieser beiden Aussagen 1) und 2) wird bereits zu Beginn von Abschnitt 3.2 begründet.

B) „1) LOP ⇔ 3) ⇔ 4) ⇔ 5) $\ker L \subseteq \mathcal{B}^{\perp}$“:
Zu beliebigem fest vorgegebenen $X \in L(\mathcal{H}_N)$ ist die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Gleichung

$$L(h) = X$$

gegeben durch die Menge aller

$$h = h' + f \in \mathcal{H}_N$$

mit einer speziellen Lösung $h' \in \mathcal{H}_N$ der inhomogenen Gleichung $L(h') = X$ und der allgemeinen Lösung $f \in \mathcal{H}_N$ der homogenen Gleichung

$$L(f) = 0.$$

Die Struktur der Lösungsmenge der linearen Gleichung $L(h) = X$ wird damit als affiner Unterraum $h' + \ker L$ von $\mathcal{H}_N$ beschrieben.

„⇒": „1) ⇒ 3)": Bei Gültigkeit des LOP (Bedingung 1) auf $L(\mathcal{H}_N)$ ist zumindest für ein festes $X \in L(\mathcal{H}_N)$ ($\neq \emptyset$ als Vektorunterraum von $\mathcal{W}$) für alle Duplikationsstrategien $h = h' + f$ von $X$ mit festem $h' \in L^{-1}(\{X\})$ und beliebigem $f \in L^{-1}(\{0\}) = \ker L$ der zum Zeitpunkt $t = 0$ in das Portfolio eingebrachte Startkapitaleinsatz $V_0(h) = b^\top h$ konstant (Bed. 3):

$$V_0(h') + V_0(f) = V_0(h) = V_0(h') \quad \forall\, h = h' + f \in L^{-1}(\{X\}) \text{ bzw.}$$
$$V_0(f) = 0 \;\forall\, f \in \ker L$$

In der Mengenschreibweise bedeutet die Bed. 3 die Inklusion für die Lösungsmengen von $L(h) = X$ und von $V_0(h) = V_0(h')$:

$$h' + \ker L \subseteq h' + \ker V_0 \ .$$

„3) ⇔ 4)": Die Bed. 3 ist wiederum äquivalent dazu, dass für jede Lösung $f \in \mathcal{H}_N$ der homogenen linearen Gleichung

$$L(f) = 0,$$

also für jedes $f \in \ker L$, auch $V_0(f)$ konstant $V_0(0) = 0$ ist, also $f$ eine Lösung der homogenen linearen Gleichung

$$V_0(f) = 0$$

ist (Bed. 4). Die Bed. 4 [$V_0(f) = V_0(0) = 0 \;\forall\, f \in \mathcal{H}_N$ mit $L(f) = 0$] entspricht der Bed. 3 für das spezielle $X = 0 = L(0) \in L(\mathcal{H}_N)$ mit $h' = 0$.

„4) ⇔ 5)": In der Mengenschreibweise bedeutet die Bed. 4 für die Kerne der Abbildungen $L$ und $V_0 = b^\top$ die Inklusion (Bed. 5)

$$\ker L \subseteq \ker V_0 = \{b\}^\perp = \mathcal{B}^\perp.$$

„⇐": „5) ⇒ 1)": Umgekehrt gilt beim Vorliegen dieser Bed. 5) $\ker L \subseteq \ker V_0$ dann auch bei jedem beliebigen $X = L(h') \in L(\mathcal{H}_N)$ für alle Duplikationsstrategien $h \in L^{-1}(\{X\})$ die Inzidenz

$$h \in h' + \ker L \subseteq h' + \ker V_0,$$

sodass der Startkapitaleinsatz $V_0(h) = V_0(h')$ konstant ist und demnach das LOP (Bed. 1) gültig ist.

C) „5) $\ker L \subseteq \mathcal{B}^\perp \Leftrightarrow$ 7) $\mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{W}) \Leftrightarrow$ 6) $b \in L^*(\mathcal{W}) \Leftrightarrow$ 8) $L^*(\Psi) = b$ für ein $\Psi \in \mathcal{W}$":

Die Inklusion $\ker L \subseteq \ker V_0 = \mathcal{B}^\perp$ (Bed. 5) ist wegen der Eigenschaften des orthogonalen Komplements gleichbedeutend zur Inklusion (Bed. 7)

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^{\perp\perp} \subseteq (\ker L)^\perp = L^*(\mathcal{W}),^{20}$$

zur Inzidenz $b \in (\ker L)^\perp = L^*(\mathcal{W})$ (Bed. 6) und zur Existenz eines $\Psi \in \mathcal{W}$ mit $L^*(\Psi) = b$ (Bed. 8).

D) „1) LOP ⇔ 20) In $L(\mathcal{H}_N)$ elementweise einzige additive Zerlegung mit Paaren von $\mathcal{V} \times \mathcal{M}$":

a) „⇐": Für jedes $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$, $h \in \mathcal{H}_N$, hat man nach Abschnitt 2.8.3 die additive Zerlegung

$$L(h) = \breve{V}(h) + \breve{L}(h)$$

mit $\breve{V}(h) \in \breve{V}(\mathcal{H}_N) = \mathcal{V}$ und $\breve{L}(h) \in \breve{L}(\mathcal{H}_N) = \mathcal{M}$, bei der jetzt voraussetzungsgemäß (durch die Bed. 20) auch der spezielle Anteil $\breve{V}(h) = V_0(h) \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega}$ von $X = L(h)$ bzw. der Startkapitaleinsatz $V_0(h)$ für alle Duplikationsstrategien $h$ von $X$ durch $X = L(h)$ eindeutig bestimmt ist. Also gilt in $L(\mathcal{H}_N)$ das LOP.

b) „⇒": Für $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$, $h \in \mathcal{H}_N$, hat man nach Abschnitt 2.8.3 zumindest die additive Zerlegung

---

[20] Bei einem endlich erzeugbaren Unterraum $U$ eines Vektorraums gilt für die Bildung des orthogonalen Komplements $U^\perp$ die involutorische (selbstinverse) Eigenschaft $U^{\perp\perp} := (U^\perp)^\perp = U$. Für endlichdimensionale Unterräume $U$ und $W$ ist $U \subseteq W$ äquivalent zu $U^\perp \supseteq W^\perp$. Literatur: Kowalsky (1967), S. 134, Satz 20.8, Wagner (1981), S. 182.

$$X = L(h) = \breve{V}(h) + \breve{L}(h)$$

mit $\breve{V}(h) \in \mathcal{V}$, $\breve{L}(h) \in \mathcal{M}$. Für jede weitere Zerlegung

$$X = Y + Z$$

mit $Y \in \mathcal{V}$, $Z \in \mathcal{M}$ ist zu zeigen, dass bei gültigem LOP $Y = \breve{V}(h)$ und $Z = \breve{L}(h)$ ist und somit die Zerlegung eindeutig bestimmt ist. Es ist

$$Y = \breve{V}(g) = V_0(g)\mathbf{1}_{0,\Omega} = S_0^{\delta\mathsf{T}} g_0 \mathbf{1}_{0,\Omega} = (Y_0, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}}$$

($Y_0 := S_0^{\delta\mathsf{T}} g_0 \mathbf{1}_{0,\Omega}$) mit einem $g = (g_0, g_1, \ldots, g_T)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{H}_N$. Mit der dazu gebildeten deterministischen Handelsstrategie $\breve{g} = (g_0, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{H}_N$ gilt ebenfalls

$$\breve{V}(\breve{g}) = S_0^{\delta\mathsf{T}} g_0 \mathbf{1}_{0,\Omega} = \breve{V}(g) = Y$$

und nach Abschnitt 2.8.3 noch

$$L(\breve{g}) = \breve{V}(g) = Y.$$

Die Handelsstrategie $\breve{g}$ ist also eine Duplikationsstrategie von $Y$.

Man vergleiche dazu den Beweis der Inklusionen $\mathcal{E} \subseteq \breve{V}(\mathcal{H}_N)$ und $\mathcal{E} \subseteq L(\mathcal{H}_N)$ in Abschnitt 2.8.4, wo $Y = p \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} \in \mathcal{E}$ mit beliebigem $p \in \mathbb{R}$ vorgegeben ist und die Komponente $g_0$ von $\breve{g}$ unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$ erst als Lösung der linearen Gleichung $S_0^{\delta\mathsf{T}} g_0 = p$ bestimmt wird. Bei dem hier im Beweisteil b) vorgegebenen $Y = \breve{V}(g) \in \mathcal{V}$ kann dagegen $g_0$ aus der Handelsstrategie $g$ entnommen werden und zur Bildung von $\breve{g}$ verwendet werden. Daher wird (AWS$^\delta$) hier nicht benötigt.

Weiter hat man nach dem Beweis von $\mathcal{M} = \breve{L}(\mathcal{H}_N)$ in Abschnitt 2.8.4 für $Z$ die Darstellung

$$Z = \breve{L}(f) = L(\hat{f})$$

mit einem $f = (f_0, f_1, \ldots, f_T)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{H}_N$ und dem zugehörigen $\hat{f} = (0, f_1, \ldots, f_T)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{H}_N$. Daraus erhält man für $X$ die Darstellung

$$X = Y + Z = L(\breve{g}) + L(\hat{f}) = L(\breve{g} + \hat{f}) = L(k)$$

mit der Duplikationsstrategie $k = \breve{g} + \hat{f} = (g_0, f_1, \ldots, f_T)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{H}_N$, $\breve{k} = \breve{g}$, $\hat{k} = \hat{f}$ und dem Startkapitaleinsatz

$$\breve{V}(k) = \breve{V}(\breve{k}) = \breve{V}(\breve{g}) = \breve{V}(g).$$

Die beiden Handelsstrategien $k$ und $g$ haben also den gleichen Startkapitaleinsatz. Außerdem haben auf Grund der Gültigkeit des LOP auch die beiden Duplikationsstrategien $k$ und $h$ von $X$ den gleichen Startkapitaleinsatz:

$$\breve{V}(k) = \breve{V}(h).$$

Insgesamt folgt dann

$$Y = \breve{V}(g) = \breve{V}(k) = \breve{V}(h)$$

und nach Abschnitt 2.8.3 noch

$$Z = X - Y = L(h) - \breve{V}(h) = \breve{L}(h).$$

Damit ist die Einzigkeit einer derartigen additiven Zerlegung von $X \in L(\mathcal{H}_N)$ gezeigt (Bed. 20).

E) „20) In $L(\mathcal{H}_N)$ einzige add. Zerl. $\Leftrightarrow$ 21) $\exists\, X \in L(\mathcal{H}_N)$ mit einz. add. Zerl. $\Leftrightarrow$ 22) $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$“:
Die hier für die speziellen Unterräume $\mathcal{V}$ und $\mathcal{M}$ formulierte Aussage gilt allgemein für die Summe $\mathcal{V} + \mathcal{M}$ zweier beliebiger Unterräume $\mathcal{V}$ und $\mathcal{M}$ eines Vektorraums.[21] Wenn der Durchschnitt der Unterräume $\mathcal{V}$ und $\mathcal{M}$ trivial ist, also

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$$

gilt, dann wird die Summe $\mathcal{V} + \mathcal{M}$ eine direkte Summe der Unterräume genannt und mit $\mathcal{V} \oplus \mathcal{M}$ bezeichnet. Für zwei additive Zerlegungen

$$X = Y + Z = Y' + Z'$$

von $X$ mit $Y, Y' \in \mathcal{V}, Z, Z' \in \mathcal{M}$ ist

$$\Delta := Y - Y' = Z' - Z \in \mathcal{V} \cap \mathcal{M}.$$

Mit einem $\Delta \in (\mathcal{V} \cap \mathcal{M}) \setminus O$ erhält man neben der Zerlegung $(Y,Z) \in \mathcal{V} \times \mathcal{M}$ von $X$ auch noch die davon verschiedene Zerlegung $(Y',Z') \in \mathcal{V} \times \mathcal{M}$ mit $Y' = Y - \Delta$ , $Z' = Z + \Delta$. Daher bedeutet die Einzigkeit dieser additiven Zerlegung für *irgendein* festes $X \in \mathcal{V} + \mathcal{M}$ (Bed. 21), dass es kein $\Delta \in (\mathcal{V} \cap \mathcal{M}) \setminus O$ gibt, also $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ ist (Bed. 22). Umgekehrt folgt aus $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ dann aber auch die Einzigkeit der Zerlegung für *jedes* $X \in \mathcal{V} + \mathcal{M}$ (Bed. 20).

F) „1) LOP $\Leftrightarrow$ 22) $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$“:
a) „$\Rightarrow$“: Für jedes $X \in \mathcal{V} \cap \mathcal{M}$ hat man sowohl die Darstellungen

$$X = \breve{V}(g) = S_0^{\delta\mathsf{T}} g_0 \mathbf{1}_{0,\Omega} = X_0 \mathbf{1}_{0,\Omega} = \breve{V}(\breve{g}) \in \mathcal{V}$$

mit $g = (g_0, g_1, ..., g_T)^{\mathsf{T}}$ , $\breve{g} = (g_0, 0, ..., 0)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{H}_N$, $X_0 := S_0^{\delta\mathsf{T}} g_0$ und

$$X = \breve{V}(\breve{g}) = L(\breve{g}) \qquad \text{(Abschnitt 2.8.3)}$$

als auch die Darstellung

$$X = L(h) \in \mathcal{M} = L(\ker V_0) \text{ mit } h \in \ker V_0.$$

Da $\breve{g}$ und $h$ Duplikationsstrategien von $X$ sind, folgt bei gültigem LOP (Bed. 1) dann

$$X_0 = S_0^{\delta\mathsf{T}} g_0 = V_0(\breve{g}) = \pi(X) = V_0(h) = 0$$

und $X = 0$. Daher ist $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ und $L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{M}$.
Zweiter Beweis von „$\Rightarrow$“: Es gilt $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}^{\perp} = O$, nach Abschnitt 2.8.4 $L(\mathcal{B}^{\perp}) = L(\ker V_0) = \mathcal{M}$ und $L(\mathcal{B}) = \mathcal{V}$. Aus dem LOP folgt nach B die Inklusion $\ker L \subseteq \mathcal{B}^{\perp}$, sodass man nach Hilfssatz 5.10, c) von Abschnitt 5.3.6 auch den trivialen Durchschnitt der $L$-Bilder $\mathcal{V}$ und $\mathcal{M}$ erhält:

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = L(\mathcal{B}) \cap L(\mathcal{B}^{\perp}) = L(\mathcal{B} \cap \mathcal{B}^{\perp}) = L(O) = O.$$

b) „$\Leftarrow$“: Zunächst ist nach Abschnitt 2.8.4 $L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{V} + \mathcal{M}$ mit den Unterräumen $\mathcal{V} = \breve{V}(\mathcal{H}_N)$ , $\mathcal{M} = \breve{L}(\mathcal{H}_N)$ . Mit der Voraussetzung $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ (Bed. 22) erhält man dann die direkte Zerlegung

$$L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{M} .$$

Demzufolge ist für jedes beliebig vorgegebene duplizierbare Zahlungsprofil

$$X = L(h) = \breve{V}(h) + \breve{L}(h) \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{M}$$

aufgrund der oben in E) „20) $\Leftrightarrow$ 22) $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$“ bewiesenen Einzigkeit der additiven Zerlegung von $X$ nun insbesondere für alle Duplikationsstrategien $h \in L^{-1}(\{X\})$ von $X$ der deterministische Anteil $\breve{V}(h) = V_0(h) \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega}$ von $L(h)$ und somit auch der Startkapitaleinsatz $V_0(h)$ konstant. Dies bedeutet, dass im Marktmodell das LOP (Bed. 1) gilt.

---

[21] Diese Charakterisierung der direkten Summe von linearen Unterräumen mit der eindeutigen additiven Zerlegung der Elemente der Unterraumsumme findet man bei Wagner (1981), S. 27, Kowalsky (1967), S. 217, Kowalsky u. Michler (2003), S. 37, Bröcker (2004), S. 35.

G) „22) $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O \Leftrightarrow$ 23) $\mathcal{E} \not\subseteq \mathcal{M} \Leftrightarrow$ 24) $\mathcal{M}^\perp \not\subseteq \mathcal{E}^\perp \Leftrightarrow$ 25) $\mathcal{M}^\perp \not\subseteq \mathcal{E}^\perp \cap \mathcal{M}^\perp \Leftrightarrow$ 11) $\mathcal{M}^{\perp 1} \neq \emptyset$“:
Zum Nachweis der Äquivalenz 22) $\Leftrightarrow$ 23) wird zunächst der Sonderfall $\mathcal{V} = O \neq \mathcal{E}$ ($\Leftrightarrow S_0^\delta = 0 \Leftrightarrow b = 0$ nach Abschnitt 2.8.4) ausgeschlossen, also vorerst der Fall (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$ mit $\mathcal{V} = \mathcal{E} \neq O$ behandelt. Es ist dann 22) $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ äquivalent zum trivialen Durchschnitt

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{M} = O \text{ (Bed. 22‘)},$$

zur Nichtinzidenz $\mathbf{1}_{0,\Omega} \notin \mathcal{M}$ und zur Nichtinklusion

$$\mathcal{E} \not\subseteq \mathcal{M} \text{ (Bed. 23)},$$

also zum Vorliegen des Falls $\beta$) (KAG$\mathbf{1}_{0,\Omega}$) von Abschnitt 2.8.4. Der Fall $\beta$) für die endlichdimensionalen Unterräume $\mathcal{E}$ und $\mathcal{M}$ ist gleichbedeutend zur Nichtinklusion

$$\mathcal{M}^\perp \not\subseteq \mathcal{E}^\perp = \{\mathbf{1}_{0,\Omega}\}^\perp = \{X_0 = 0\} \text{ (Bed. 24)}:$$

Aus $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}$ folgt nämlich für die orthogonalen Komplemente $\mathcal{E}^\perp \supseteq \mathcal{M}^\perp$ und umgekehrt folgt aus $\mathcal{E}^\perp \supseteq \mathcal{M}^\perp$ auch $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{\perp\perp} \subseteq \mathcal{M}^{\perp\perp} = \mathcal{M}$.[22] Damit ist auch $\mathcal{E} \not\subseteq \mathcal{M}$ äquivalent zu $\mathcal{M}^\perp \not\subseteq \mathcal{E}^\perp$.
Weiter ist diese Relation auch noch äquivalent zu

$$\mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 \neq 0\} = \mathcal{M}^\perp \setminus \mathcal{E}^\perp \neq \emptyset \text{ (Bed. 10)}$$

und zu

$$\mathcal{M}^{\perp 1} = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\} \neq \emptyset \text{ (Bed. 11)}.$$

Die Schlusskette 22‘ $\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$ 11 wurde auch schon in Abschnitt 2.8.4 bei der Behandlung des Falls $\beta$) (KAG$\mathbf{1}_{0,\Omega}$) $\mathcal{E} \cap \mathcal{M} = O$ angegeben.
Die Relation $\mathcal{M}^\perp \not\subseteq \mathcal{E}^\perp = \{X \in \mathcal{W} : X_0 = 0\}$ ist unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) nach Satz 2.1, 10 ($\mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{E}^\perp = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 0\} = \ker L^*$) auch noch äquivalent zu

$$\mathcal{M}^\perp \not\subseteq \mathcal{E}^\perp \cap \mathcal{M}^\perp = \ker L^*$$

und zu

$$\mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^* = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 \neq 0\} = \mathcal{M}^\perp \setminus \mathcal{E}^\perp \neq \emptyset.$$

Im Sonderfall $S_0^\delta = 0$ liegt nach Abschnitt 2.8.4 stets der Fall $\beta$) $\mathcal{E} \cap \mathcal{M} = O$ (Bed. 22‘) vor, sodass dann wegen $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$ auch $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} \subseteq \mathcal{E} \cap \mathcal{M} = O$ (Bed. 22) und das LOP gilt. Weiter gelten im Fall $\beta$) auch die weiteren in der Schlusskette G angegebenen Aussagen und Äquivalenzen, die schon in Abschnitt 2.8.4 bei der Behandlung des Falls $\beta$) aufgeführt wurden. Die in G angegebenen Äquivalenzen gelten also auch ohne die Voraussetzung (AWS$^\delta$), auch wenn für den Nachweis die Unterscheidung der Fälle i) $S_0^\delta \neq 0$ und ii) $S_0^\delta = 0$ vorgenommen wurde.

H) „$\mathcal{V} = \mathcal{E} (\neq O) \wedge$ 22) $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O \Leftrightarrow$ 28) $L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{M} \Leftrightarrow$ 26) Dim.gl. $\Leftrightarrow$ 27) $\mathcal{M}$ Hyp. v. $L(\mathcal{H}_N)$“:
Mit dem Dimensionssatz[23]

$$\dim(\mathcal{V} + \mathcal{M}) + \dim(\mathcal{V} \cap \mathcal{M}) = \dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{M},$$

für endlichdimensionale Unterräume $\mathcal{V}$ und $\mathcal{M}$ eines Vektorraums erhält man hier für $L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{V} + \mathcal{M}$ und $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{E} = 1$ ($\mathcal{V} = \mathcal{E} \Leftrightarrow$ Voraussetzung AWS$^\delta$ nach Abschnitt 2.8.4) die Dimensionsgleichung

$$\dim L(\mathcal{H}_N) + \dim(\mathcal{V} \cap \mathcal{M}) = 1 + \dim \mathcal{M}.$$

Demnach ist unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) für $\dim \mathcal{V} = 1$ die Bedingung $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ (Bed. 22) bzw. $\dim(\mathcal{V} \cap \mathcal{M}) = 0$ äquivalent zur Dimensionsgleichung (Bed. 26)

$$\dim \mathcal{M} = \dim L(\mathcal{H}_N) - 1,$$

---

[22] Die hier verwendeten Eigenschaften des orthogonalen Komplements sind bereits in einer Fußnote zu Beweisteil C angegeben.

[23] Den Dimensionssatz (die Dimensionsformel) für endlich erzeugbare Unterräume $U$ und $W$ eines Vektorraums findet man z. B. bei Kowalsky (1967), S. 167, Wagner (1981), S. 46, und Bröcker (2004), S. 46: $\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$.

also zur Hyperebenenstruktur von $\mathcal{M}$ in $L(\mathcal{H}_N)$ (Bed. 27). Der triviale Durchschnitt der Unterräume $\mathcal{V}$ und $\mathcal{M}$ bedeutet dabei, dass $L(\mathcal{H}_N)$ die direkte Summe von $\mathcal{M}$ und dem eindimensionalen Unterraum $\mathcal{V}$ ist: $L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{M}$ (Bed. 28).

Für die Dimensionsgleichung 26) und die Unterraumstruktur 27) wird dim $\mathcal{V}$ = dim $\Xi$ = 1 und somit die Voraussetzung (AWS$^\delta$) verwendet. Diese beiden Aussagen sind im Sonderfall $S_0^\delta = 0$ nicht richtig, da hier nach Abschnitt 2.8.4 $\mathcal{M} = L(\mathcal{H}_N)$ gilt.

I) „$\mathcal{V} = \Xi\ (\neq O) \wedge 22)$ $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ $\Leftrightarrow$ 15) Dim.gl. $\Leftrightarrow$ 16) ker $L^*$ Hyp. v. $\mathcal{M}^\perp$ $\Leftrightarrow$ 14) $\exists\ \Psi \in \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^* \Leftrightarrow$ 11) $\exists\ \Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1}$“:

Für die direkten Summen

$$\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp = \mathcal{W},$$
$$\ker L^* \oplus L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{W}$$

erhält man mit dem oben beim Beweis von H) „22) $\Leftrightarrow$ 26)“ angegebenen Dimensionssatz für Unterräume die Dimensionsgleichungen

i) $\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{M} + \dim \mathcal{M}^\perp$,

ii) $\dim \mathcal{W} = \dim \ker L^* + \dim L(\mathcal{H}_N)$

und zusammen mit der oben in H) unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) für dim $\mathcal{V}$ = 1 hergeleiteten Dimensionsgleichung dim $L(\mathcal{H}_N)$ + dim $(\mathcal{V} \cap \mathcal{M})$ = 1 + dim $\mathcal{M}$ bzw.

iii) $\dim L(\mathcal{H}_N) - \dim \mathcal{M} = 1 - \dim (\mathcal{V} \cap \mathcal{M})$

jetzt

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{M}^\perp &= \dim \mathcal{W} - \dim \mathcal{M} && \text{(Verwend. v. i)} \\ &= \dim \ker L^* + \dim L(\mathcal{H}_N) - \dim \mathcal{M} && \text{(Verw. v. ii)} \\ &= \dim \ker L^* + 1 - \dim (\mathcal{V} \cap \mathcal{M}) && \text{(Verw. iii).} \end{aligned}$$

Daher ist $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ (Bed. 22) bzw. dim $(\mathcal{V} \cap \mathcal{M}) = 0$ unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) äquivalent zur Dimensionsgleichung (Bed. 15)

$$\dim \ker L^* = \dim \mathcal{M}^\perp - 1,$$

also zur Hyperebenenstruktur von ker $L^*$ in $\mathcal{M}^\perp$ (Bed. 16). Die Hyperebenenstruktur von ker $L^*$ in $\mathcal{M}^\perp$ ist äquivalent zur Bedingung 14) $\exists\ \Psi \in \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^*$ und dazu, dass $\mathcal{M}^\perp$ die direkte Summe von ker $L^*$ und einem eindimensionalen Unterraum ist:

$$\mathcal{M}^\perp = \ker L^* \oplus \operatorname{lin} \Psi \text{ mit einem } \Psi \in \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^*:$$

Aus der Hyperebenenstruktur von ker $L^*$ in $\mathcal{M}^\perp$ folgt nämlich schon mit einem einzigen $\Psi \in \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^*$, für welches dann $\ker L^* \cap \operatorname{lin} \Psi = O$ gilt, für die zugehörige direkte Unterraumsumme

$$U := \ker L^* \oplus \operatorname{lin} \Psi \ (\subseteq \mathcal{M}^\perp)$$

mittels der Dimensionsgleichung dim $U$ = dim ker $L^*$ + 1 = dim $\mathcal{M}^\perp$ die Übereinstimmung von $U$ mit $\mathcal{M}^\perp$. Umgekehrt folgt aus der Darstellung von $\mathcal{M}^\perp$ durch diese direkte Summe ker $L^* \oplus$ lin $\Psi$ mittels der zugehörigen Dimensionsgleichung dim $\mathcal{M}^\perp$ = dim ker $L^*$ + 1 auch die Hyperebenenstruktur von ker $L^*$ in $\mathcal{M}^\perp$.

Die Bedingung 14) $\exists\ \Psi \in \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^*$ (wobei $\mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^* = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 \neq 0$ gilt nach Satz 2.1, 11 bzw. nach dem dort zugehörigen Beweisteil D mit der Voraussetzung (AWS$^\delta$)) ist wiederum gleichbedeutend zur Bedingung 11) $\exists\ \Psi \in \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\} = \mathcal{M}^{\perp 1}$, da man aus einem $\Psi \in \mathcal{M}^\perp$ mit $\Psi_0 \neq 0$ mit $\Psi' = \Psi/\Psi_0$ auch ein „normiertes“ $\Psi' \in \mathcal{M}^\perp$ mit $\Psi'_0 = 1$ erhält.

**Anmerkungen**: a) Es gibt also eine Schlusskette vom LOP (Bed. 1) zum trivialen Durchschnitt $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ (Bed. 22) mittels Beweisteil F oder mittels der Beweisteile D und E und dann weiter zur Existenz eines normierten $\mathcal{M}$-Normalenvektors $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1}$ (Bed. 11) mittels Beweisteil I. In I wird bei der Dimensionsgleichung 15) bzw. der Unterraumstruktur 16) und den dazu äquivalenten Aussagen

14) und 11) die Voraussetzung (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$ für dim $\mathcal{V} = 1$ und für die Darstellung $\mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^* = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 \neq 0\}$ verwendet. Im Sonderfall $S_0^\delta = 0$ sind die Aussagen 15), 16) und 14) nicht richtig, da hier nach Abschnitt 2.8.4 $\ker L^* = \mathcal{M}^\perp$ gilt. Es ist aber dennoch die Aussage 11) $\mathcal{M}^{\perp 1} \neq \emptyset$ richtig.

b) Eine alternative Schlusskette von 22) auf 11) wird im nachfolgenden Beweisteil J mit einem Alternativsatz auch ohne die Voraussetzung (AWS$^\delta$) ermöglicht.

c) Eine weitere alternative Schlusskette von 22) auf 11) wird in G ohne die Voraussetzung (AWS$^\delta$) gemäß einem direkten elementaren Beweis des Alternativsatzes mittels der Eigenschaften des orthogonalen Komplements durchgeführt.

J) „22) $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O \Leftrightarrow$ 11) $\exists\, \Psi \in \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\}$“: Beweis mit einem Alternativsatz:

Die eben in I) schon bewiesene Äquivalenz der Bedingungen 22) und 11) kann nun auch ohne die Voraussetzung (AWS$^\delta$) mit der Verwendung eines Alternativsatzes begründet werden. Zum Beweis wird aber die Unterscheidung der beiden Fälle i) $S_0^\delta \neq 0$ und ii) $S_0^\delta = 0$ vorgenommen. Im Fall i) (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$ ist nach Abschnitt 2.8.4 $\mathcal{V} = \mathcal{E} = \operatorname{lin} \mathbf{1}_{0,\Omega} = \{X_0 \mathbf{1}_{0,\Omega} \in \mathcal{W} : X_0 \in \mathbb{R}\}$ und dann das Vorliegen des trivialen Durchschnitts $\mathcal{E} \cap \mathcal{M} = \mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ (Bed. 22) äquivalent zum Fall $\beta$) $\mathbf{1}_{0,\Omega} \notin \mathcal{M}$. Im Sonderfall ii) $S_0^\delta = 0$ ist nach Abschnitt 2.8.4 stets $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}^\perp$ und $\mathcal{M} \cap \mathcal{E} = O$, sodass hier ebenfalls der Fall $\beta$) $\mathcal{E} \nsubseteq \mathcal{M}$ vorliegt. Der Fall $\beta$) ist nun äquivalent zum trivialen Durchschnitt des Unterraums $\mathcal{M}$ und des abgeschlossenen Strahls

$$\mathcal{E}_{\geq 0} := \text{ray } \mathbf{1}_{0,\Omega} = \{ X_0 \mathbf{1}_{0,\Omega} \in \mathcal{W} : X_0 \geq 0\}$$

bzw. zur Disjunktheit des Unterraums $\mathcal{M}$ und des punktierten Strahls

$$\mathcal{E}_{>0} := \text{ray } \mathbf{1}_{0,\Omega} \setminus \{0\} = \{ X_0 \mathbf{1}_{0,\Omega} \in \mathcal{W} : X_0 > 0\}$$

des ersten Basisvektors $\mathbf{1}_{0,\Omega}$ von $\mathcal{W}$:

$$\mathcal{E}_{>0} \cap \mathcal{M} = \emptyset.$$

Nach dem Alternativsatz 3.2 von Abschnitt 3.4.1 ist dies dann äquivalent zur Existenz eines $\mathcal{M}$-Normalenvektors $\Psi \in \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 > 0\}$ bzw. $\Psi \in \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 \neq 0\}$ (Bed. 10) und damit (nach Übergang von $\Psi$ zu $\Psi/\Psi_0$) zur Existenz eines normierten $\mathcal{M}$-Normalenvektors $\Psi \in \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\} = \mathcal{M}^{\perp 1}$ (Bed. 11).

**Anmerkung**: Zu dieser Charakterisierung des LOP, eigentlich genauer zur Charakterisierung des trivialen Durchschnitts $\mathcal{E}_{\geq 0} \cap \mathcal{M} = O$, mit Hilfe des Alternativsatzes 3.2 durch einen $\mathcal{M}$-Normalenvektors $\Psi$, dessen erste Zeitkomponente $\Psi_0$ positiv ist, gibt es eine Parallele bei der Charakterisierung der Arbitragefreiheit in Abschnitt 3.6.1. Auch hier kann die Arbitragefreiheit bzw. der triviale Durchschnitt $\mathcal{W}_{\geq 0} \cap \mathcal{M} = O$ mittels des Alternativsatzes 3.7 charakterisiert werden durch die Existenz eines $\mathcal{M}$-Normalenvektors $\Phi$, der in allen Komponenten positiv ist.

K) „9) $\exists\, \Psi \in \mathcal{M}^\perp$ mit $L^*(\Psi) = b \Leftrightarrow$ 17) $L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B}$“:

Nach Satz 2.1, 9) gilt stets die Inklusion $L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{B}$. Unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) ($\Leftrightarrow b \neq 0$) ist dim $L^*(\mathcal{M}^\perp) \leq \dim \mathcal{B} = 1$, sodass für den Unterraum $L^*(\mathcal{M}^\perp)$ von $\mathcal{B}$ nur die Fälle $L^*(\mathcal{M}^\perp) = O$ oder $L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B}$ möglich sind. Demnach ist die Existenz eines $\Psi \in \mathcal{M}^\perp$ mit $L^*(\Psi) = \Psi_0 b \neq 0$ (nach Beweisteil B, 8b „$\subseteq$“ von Satz 2.1) bzw. o. E. $L^*(\Psi) = b \neq 0$ (ggf. Übergang zu $\Psi' = \Psi/\Psi_0$) gleichbedeutend mit dim $L^*(\mathcal{M}^\perp) = 1$ und $L^*(\mathcal{M}^\perp) = \operatorname{lin} L^*(\Psi) = \operatorname{lin} b = \mathcal{B}$.

Der Sonderfall $S_0^\delta = 0$ mit $b = 0$ und $\mathcal{B} = O$ fügt sich ebenfalls ein, da mit dim $L^*(\mathcal{M}^\perp) = \dim \mathcal{B} = 0$ und $L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B} = O$ die Bed.17 stets erfüllt ist. Außerdem ist mit $\Psi = 0 \in \mathcal{M}^\perp$ die Bed. 9) stets richtig und dann auch die Äquivalenz 9) $\Leftrightarrow$ 17). Demnach gilt diese Äquivalenz stets, d. h. auch ohne die Voraussetzung (AWS$^\delta$).

L) „8) $\exists\ \Psi \in \mathcal{W}$ mit $L^*(\Psi) = b \Leftrightarrow$ 9) $\exists\ \Psi \in \mathcal{M}^\perp$ mit $L^*(\Psi) = b \Leftrightarrow$ 10) $\mathcal{M}^\perp \setminus \mathcal{E}^\perp \neq \emptyset \Leftrightarrow$ 11) $\mathcal{M}^{\perp 1} \neq \emptyset$“:

Nach Satz 2.1, 12) ist unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$ ($\Leftrightarrow b \neq 0$) die $L^*$-Urbildmenge von $b$ gegeben durch

$$L^{*-1}(\{b\}) = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\}.$$

Daher ist die Inzidenz $b \in L^*(\mathcal{W})$ (Bed. 6), die Inklusion $\mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{W})$ (Bed. 7) bzw. die Existenz eines $\Psi \in \mathcal{W}$ mit $L^*(\Psi) = b$ ($\neq 0$) (Bed. 8) mit der Voraussetzung (AWS$^\delta$) jeweils gleichbedeutend zur Existenz eines $\Psi \in \mathcal{M}^\perp$ mit $\Psi_0 = 1$ (Bed. 11), eines $\Psi \in \mathcal{M}^\perp$ mit $L^*(\Psi) = b$ (Bed. 9), eines $\Psi' \in \mathcal{W}$ mit $L^*(\Psi') = \lambda b \neq 0$, d. h. $\Psi' \in L^{*-1}(\mathcal{B} \setminus O) = \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^* = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 \neq 0\} = \mathcal{M}^\perp \setminus \mathcal{E}^\perp$ (nach Satz 2.1, 11) und dann gleichbedeutend zu $\mathcal{M}^\perp \setminus \mathcal{E}^\perp \neq \emptyset$ (Bed. 10).

Im Sonderfall $S_0^\delta = 0$ ($\Leftrightarrow b = 0$, $\mathcal{B} = O$) liegt nach Abschnitt 2.8.4 der Fall $\beta$) $\mathcal{M}^\perp \not\subseteq \mathcal{E}^\perp$ vor, sodass mit $\Psi = 0 \in \ker L^* = \mathcal{M}^\perp$ die Aussagen 8) und 9) und außerdem die Aussagen 10) und 11) stets richtig sind. Demnach sind auch die zugehörigen Äquivalenzen richtig. Für die Schlusskette L wird also die Voraussetzung (AWS$^\delta$) nicht benötigt.

M) „8) $\exists\ \Psi \in \mathcal{W}$ mit $L^*(\Psi) = b \Leftrightarrow$ 12) $\exists_1\ \vartheta \in L(\mathcal{H}_N)$ mit $L^*(\vartheta) = b \Leftrightarrow$ 13) $\exists_1\ \vartheta \in L(\mathcal{H}_N) \cap \mathcal{M}^{\perp 1}$“:

„8) $\Leftrightarrow$ 12)“: „$\Leftarrow$“: Die Existenz eines $L^*$-Urbildes $\vartheta$ von $b$ im Unterraum $L(\mathcal{H}_N)$ von $\mathcal{W}$ beinhaltet trivialerweise auch die Existenz eines $L^*$-Urbildes von $b$ in $\mathcal{W}$. Die Gesamtheit der $L^*$-Urbilder von $b$ ist dann gegeben durch

$$\Psi = \vartheta + Y \text{ mit } Y \in \ker L^*.$$

„$\Rightarrow$“: Existenz: Es ist also nur noch die nichttriviale umgekehrte Richtung zu zeigen: Existiert ein $\Psi \in \mathcal{W}$ mit $L^*(\Psi) = b$, so folgt aus der direkten orthogonalen Zerlegung $\mathcal{W} = L(\mathcal{H}_N) \oplus \ker L^*$ (siehe Abschnitt 2.10.1) für $\Psi$ die Existenz von $\vartheta \in L(\mathcal{H}_N)$ und $Y \in \ker L^*$ mit $\Psi = \vartheta + Y$ und

$$b = L^*(\Psi) = L^*(\vartheta) + L^*(Y) = L^*(\vartheta).$$

Unität: Dieses $L^*$-Urbild $\vartheta$ von $b$ in $L(\mathcal{H}_N)$ ist eindeutig bestimmt: Für zwei $L^*$-Urbilder $\vartheta$, $\vartheta' \in L(\mathcal{H}_N)$ von $b$ und deren Differenz $\Delta := \vartheta' - \vartheta \in L(\mathcal{H}_N)$ gilt nämlich

$$L^*(\Delta) = L^*(\vartheta') - L^*(\vartheta) = b - b = 0,$$

also $\Delta \in L(\mathcal{H}_N) \cap \ker L^* = O$ und $\vartheta' = \vartheta$.

„12) $\Leftrightarrow$ 13)“: Unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) ist nach Satz 2.1, 12) $L^{*-1}(\{b\}) = \mathcal{M}^{\perp 1}$ und demnach die Aussage 12) $\exists_1\ \vartheta \in L(\mathcal{H}_N) \cap L^{*-1}(\{b\})$ äquivalent zur Aussage 13) $\exists_1\ \vartheta \in L(\mathcal{H}_N) \cap \mathcal{M}^{\perp 1}$.

Im Sonderfall $S_0^\delta = 0$ ($\Leftrightarrow b = 0$) dagegen ist $L^{*-1}(\{b\}) = \ker L^* = \mathcal{M}^\perp$, $L(\mathcal{H}_N) \cap L^{*-1}(\{b\}) = L(\mathcal{H}_N) \cap \ker L^* = O$, $L(\mathcal{H}_N) \cap \mathcal{M}^{\perp 1} \subseteq \{X_0 = 0\} \cap \mathcal{M}^{\perp 1} = \emptyset$ (nach Abschnitt 2.8.4), somit die Aussage 12) stets richtig mit $\vartheta = 0$, aber die Aussage 13) und „12) $\Leftrightarrow$ 13)“ falsch. Für die Aussage 13) wird also (AWS$^\delta$) benötigt.

N) „8) $\exists\ \Psi \in \mathcal{W}$ mit $L^*(\Psi) = b \Leftrightarrow$ 11) $\exists\ \Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1} \Leftrightarrow$ 14) $\exists\ \Psi \in \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^*$ mit $\mathcal{M}^\perp = \ker L^* \oplus \operatorname{lin} \Psi \Leftrightarrow$ 15) $\dim \mathcal{M}^\perp = \dim \ker L^* + 1 \Leftrightarrow$ 16) $\ker L^*$ ist Hyperebene von $\mathcal{M}^\perp$“:

Da $\dim(\mathcal{V} \cap \mathcal{M})$ ($\leq \dim \mathcal{V} \leq 1$) nur die Werte 1 oder 0 annehmen kann, ist nach der oben in Beweisteil I mit der Voraussetzung (AWS$^\delta$) für $\dim \mathcal{V} = 1$ angegebenen Dimensionsgleichung stets

$$\dim \mathcal{M}^\perp = \dim \ker L^* + 1 \text{ oder}$$
$$\dim \mathcal{M}^\perp = \dim \ker L^*.$$

„$\Rightarrow$“: Falls nun ein $\Psi \in \mathcal{W}$ mit $L^*(\Psi) = b$ existiert (Bed. 8) und dabei $b \neq 0$ ($\Leftrightarrow$ (AWS$^\delta$)) ist, gilt nach Satz 2.1, 12) und 11) $\Psi \in L^{*-1}(\{b\}) = \mathcal{M}^{\perp 1} \subseteq \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 \neq 0\} = \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^*$ (Bed. 11 u. 10), nach

der Vorbemerkung dim $\mathcal{M}^\perp$ = dim ker $L^*$ + 1 (Bed. 15), sodass ker $L^*$ eine Hyperebene von $\mathcal{M}^\perp$ ist (Bed. 16) und die direkte Summe $\mathcal{M}^\perp$ = ker $L^* \oplus$ lin $\Psi$ vorliegt (Bed. 14).

„⇐“: Falls ker $L^*$ eine Hyperebene von $\mathcal{M}^\perp$ ist (Bed. 16), gilt die Dimensionsgleichung dim $\mathcal{M}^\perp$ = dim ker $L^*$ + 1 (Bed. 15) und existiert ein $\Psi \in \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^*$ (Bed. 10). Mit diesem $\Psi$ gilt $\mathcal{M}^\perp$ = ker $L^* \oplus$ lin $\Psi$ (Bed. 14). Nach dem Beweisteil B, 8b von Satz 2.1 ist $L^*(\Psi) = \Psi_0 \cdot b$, wobei wegen $\Psi \in \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^*$ hier noch $\Psi_0 \neq 0$ gilt. Ohne Einschränkung (ggf. durch Übergang von $\Psi$ zu $\Psi/\Psi_0$) kann dann $\Psi_0 = 1$ und $L^*(\Psi) = b$ angenommen werden (Bed. 11 u. 8).
Im Sonderfall $S_0^\delta = 0$ ($\Leftrightarrow b = 0$) ist nach Abschnitt 2.8.4 $L^{*-1}(\{b\})$ = ker $L^* = \mathcal{M}^\perp \supseteq O \neq \emptyset$, $\mathcal{M}^{\perp 1} \neq \emptyset$, daher 8) und 11) stets richtig und dann auch 8) $\Leftrightarrow$ 11) richtig. Wegen $\mathcal{M}^\perp$ = ker $L^*$ und $\mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^* = \emptyset$ sind dagegen 14), 15) und 16) stets falsch. Demnach ist auch 11) nicht äquivalent zu 14), 15), 16). Für die Aussagen 14), 15), 16) und die Äquivalenzen von 11) zu 14), 15) bzw. 16) wird also die Voraussetzung (AWS$^\delta$) benötigt.

O) „17) $L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B} \Leftrightarrow$ 18) $L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M}) \oplus \mathcal{B} \Leftrightarrow$ 19) $L^*(\mathcal{M})$ ist Hyperebene von $L^*(\mathcal{W})$“:
Nach Satz 2.1, 9) u. 15) gilt stets $L^*(\mathcal{M}^\perp) \subseteq \mathcal{B}$ und $L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M}) \oplus L^*(\mathcal{M}^\perp)$. Daher ist die Übereinstimmung 17) $L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B}$ äquivalent zur direkten Summe 18) $L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M}) \oplus \mathcal{B}$ und im Fall (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$ ($\Leftrightarrow b \neq 0$, $\mathcal{B} \neq O$) auch noch äquivalent zur Hyperebenenstruktur von $L^*(\mathcal{M})$ in $L^*(\mathcal{W})$ (Bed. 19). Nach den Beweisteilen B, C, L, K (1 $\Leftrightarrow$ 5 $\Leftrightarrow$ 8 $\Leftrightarrow$ 9 $\Leftrightarrow$ 17) charakterisiert die Übereinstimmung 17) $L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B}$ die Gültigkeit des LOP. Entsprechend wird das ungültige LOP charakterisiert durch die echte Inklusion $L^*(\mathcal{M}^\perp) \subsetneq \mathcal{B}$, also $L^*(\mathcal{M}^\perp) = O$, sodass dann im Fall (AWS$^\delta$) noch $L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M}) \neq L^*(\mathcal{M}) \oplus \mathcal{B}$ gilt. Im Fall (AWS$^\delta$) sind bei ungültigem LOP also 17), 18) und 19) falsch.
Im Sonderfall $S_0^\delta = 0$ ($\Leftrightarrow b = 0$, $\mathcal{B} = O$) ist $L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B} = O$ und $L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M}) = L^*(\mathcal{M}) \oplus \mathcal{B}$, aber $L^*(\mathcal{M})$ keine Hyperebene von $L^*(\mathcal{W})$. Demnach sind hier 17) und 18) richtig, aber 19) falsch und dann auch „18) $\Leftrightarrow$ 19)“ falsch. Für die Äquivalenz „17) $\Leftrightarrow$ 18)“ wird also (AWS$^\delta$) nicht benötigt, für die Äquivalenz „18) $\Leftrightarrow$ 19)“ wird (AWS$^\delta$) benötigt.

P) „7) $\mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{W})$ $\Leftrightarrow$ 29) PG$\Psi$ $\Leftrightarrow$ 30) KPG$\Psi$ $\Leftrightarrow$ 31) $\Leftrightarrow$ 32) $\Leftrightarrow$ 33) $\Leftrightarrow$ 11) $\exists\, \Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1}$“:
Vorneweg erfolgt die Feststellung, dass für alle $h \in \mathcal{H}_N$ und $\Psi \in \mathcal{W}$ mit der Normierung $\Psi_0 = 1$ die folgenden Gleichungen gelten:

$$
\begin{aligned}
L^*(\Psi)^\top h &= \langle L^*(\Psi), h \rangle_{\mathcal{H}_N} = \langle \Psi, L(h) \rangle_{\mathcal{W}} = && (L^* \text{ adjungiert zu } L)\\
\Psi^\top L(h) &= \Psi^\top \breve{V}(h) + \Psi^\top \breve{L}(h) && (\text{additive Zerlegung von } L)\\
&= 1 \cdot V_0(h) + \Psi^\top \breve{L}(h) && (\text{Normierung } \Psi_0 = 1)\\
&= b^\top h + \Psi^\top \breve{L}(h) && (\text{Berechn. Startkapitaleinsatz})\\
&= b^\top h + \breve{L}^*(\Psi)^\top h && (\breve{L}^* \text{ adjungiert zu } \breve{L}).
\end{aligned}
$$

a) „7) $\mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{W})$ $\Leftrightarrow$ 29) PG$\Psi$“: Diese Aussage wird bereits in Abschnitt 3.3.3 in Beweisteil 2 mit dem Beweis der Aussage $\mathcal{A} = L^{*-1}(\{b\})$ begründet.
b) „29) (PG$\Psi$) $\Leftrightarrow$ … $\Leftrightarrow$ 11) $\mathcal{M}^{\perp 1} \neq \emptyset$“:
Die Bedingung 29)

(PG$\Psi$) $\quad \exists\, \Psi \in \mathcal{W}$ mit $\Psi^\top L(h) = b^\top h \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_N$

bedeutet definitionsgemäß die Existenz eines Bewertungsprozesses $\Psi \in \mathcal{A}$. Mit der Voraussetzung (AWS$^\delta$) ist nach Abschnitt 3.3.3 $\mathcal{A} = \mathcal{M}^{\perp 1}$. Damit ist schon die Äquivalenz von Bed. 29 und Bed. 11 gezeigt. Da wegen $\mathcal{A} = \mathcal{M}^{\perp 1}$ für ein $\Psi$ mit der Bedingung (PG$\Psi$) insbesondere auch die Normierung $\Psi_0 = 1$ vorliegt, ist unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) die Bedingung (PG$\Psi$) äquivalent zur modifizierten Bedingung

(PGΨ1) $\exists\, \Psi \in \{X_0 = 1\}$ mit $\Psi^{\mathsf{T}} L(h) = b^{\mathsf{T}} h \qquad \forall\, h \in \mathcal{H}_N$

und dann nach den oben zu Beginn von P für die normierten $\Psi \in \{X_0 = 1\}$ angegebenen Beziehungen noch äquivalent zur Bedingung 30)

(KPGΨ) $\exists\, \Psi \in \mathcal{W}$ mit $\Psi_0 = 1$ und $\Psi^{\mathsf{T}} \breve{L}(h) = 0 \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_N$

und zur Bedingung

(KPG*Ψ) $\exists\, \Psi \in \mathcal{W}$ mit $\Psi_0 = 1$ und $\breve{L}^*(\Psi)^{\mathsf{T}} h = 0 \;\; \forall\, h \in \mathcal{H}_N$.

Letztere Bedingung ist wiederum wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts $\langle .,. \rangle_{\mathcal{H}_N}$ (mit $h = \breve{L}^*(\Psi)$ ) gleichbedeutend zur Bedingung 33)

$$\exists\, \Psi \in \mathcal{W} \text{ mit } \Psi_0 = 1 \text{ und } \breve{L}^*(\Psi) = 0$$

und nach Satz 2.1, 8 a) $\ker \breve{L}^* = \mathcal{M}^{\perp}$ auch noch gleichbedeutend zur Bedingung 11)

$$\exists\, \Psi \in \mathcal{M}^{\perp} \text{ mit } \Psi_0 = 1.$$

Die Bedingung (KPGΨ) liefert dabei die Preisgleichungen $\Psi^{\mathsf{T}} \breve{L}(h) = 0 \;\forall\, h \in \mathcal{H}_N$ für die Kapitalmarktgeschäfte $Z \in \mathcal{M} = \breve{L}(\mathcal{H}_N) = L(\ker V_0)$ und kann auch noch durch eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen 31) und 32) ersetzt werden:

$$\exists\, \Psi \in \mathcal{W} \text{ mit } \Psi_0 = 1 \text{ und } \Psi^{\mathsf{T}} Z = 0 \qquad \forall\, Z \in \mathcal{M},$$

$$\exists\, \Psi \in \mathcal{W} \text{ mit } \Psi_0 = 1 \text{ und } \Psi^{\mathsf{T}} L(h) = 0 \;\forall\, h \in \ker V_0 .$$

c) **Anmerkung** zur Voraussetzung (AWS$^{\delta}$): In Beweisteil P, b wird die Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) $S_0^{\delta} \neq 0$ verwendet, um für *jeden* (nicht notwendig positiven) Bewertungsprozess $\Psi \in \mathcal{A}$ die Normierung $\Psi_0 = 1$ zu sichern. Damit existiert mit einem Bewertungsprozess $\Psi \in \mathcal{A}$ auch ein normierter Bewertungsprozess $\Psi'$ mit $\Psi_0' = 1$, für den zunächst (PGΨ1) und dann auch die weiteren äquivalenten Aussagen von Beweisteil P gelten.

Falls (AWS$^{\delta}$) nicht vorliegt, also der Sonderfall $S_0^{\delta} = 0$ auftritt, liegt nach Abschnitt 2.8.4 der Fall $\beta$) $\mathcal{E} \not\subseteq \mathcal{M}$ ($\Leftrightarrow \mathcal{E} \cap \mathcal{M} = O$) und damit stets die Relation $\emptyset \neq \mathcal{M}^{\perp 1}$ ($\subseteq \mathcal{M}^{\perp} = \mathcal{A}$) vor, welche bedeutet, dass auch ein normierter Bewertungsprozess $\Psi \in \mathcal{A}$ mit $\Psi_0 = 1$ auftritt. Für diesen gelten dann die Aussage (PGΨ1) und auch die dazu äquivalenten Aussagen. Für die Gültigkeit der in P angegebenen Schlusskette wird also die Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) nicht benötigt, für deren Nachweis aber die Fallunterscheidung in i) $S_0^{\delta} \neq 0$ und ii) $S_0^{\delta} = 0$ verwendet.

Bei der in Abschnitt 3.6.1 folgenden Charakterisierung der Arbitragefreiheit (AF) bzw. der Existenz eines positiven Bewertungsprozesses $\Phi$ durch entsprechende Aussagen wird die Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) nicht benötigt, da bei einem vorliegenden positiven Bewertungsprozess $\Phi \in \mathcal{A}^{+}$ ($\subseteq \mathcal{M}^{\perp +}$) stets die Bedingung $\Phi_0 \neq 0$ gesichert ist und mit $\Phi' := \Phi/\Phi_0$ ($\Phi_0 > 0$) auch noch ein normierter positiver Bewertungsprozess $\Phi' \in \mathcal{M}^{\perp 1+} \subseteq \mathcal{A}^{+}$ existiert. Mit diesem $\Phi'$ kann dann die Äquivalenz der Existenz von $\Phi' \in \mathcal{A}^{+}$ zu den anderen Aussagen gezeigt werden.

Q) „7) $b \in L^*(\mathcal{W}) \Leftrightarrow$ 34) $L^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B} \oplus \breve{L}^*(\mathcal{W})$ “:

Die Frage, wann in der stets gültigen Inklusion $L^*(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{B} \oplus \breve{L}^*(\mathcal{W})$ das Gleichheitszeichen eintritt, wird bereits in Abschnitt 2.10.4 behandelt.

„⇒“: Mit Satz 2.1, 17) $\breve{V}^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B}$ ergibt sich im Falle 7) $\mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{W})$, also bei gültigem LOP, die Inklusion

$$\begin{aligned}
\breve{L}^*(\mathcal{W}) &= \{\breve{L}^*(X) = L^*(X) - \breve{V}^*(X) : X \in \mathcal{W}\} \\
&\subseteq L^*(\mathcal{W}) - \breve{V}^*(\mathcal{W}) \\
&= L^*(\mathcal{W}) + \mathcal{B} && (\breve{V}^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B}) \\
&= L^*(\mathcal{W}) && (\mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{W})).
\end{aligned}$$

Da nach Satz 2.1, 19) stets die Inklusion $L^*(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{B} \oplus \breve{L}^*(\mathcal{W})$ gilt, folgen in dem Fall $\mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{W})$ die Inklusionen

$$L^*(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{B} \oplus \breve{L}^*(\mathcal{W}) \subseteq L^*(\mathcal{W}) + L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{W})$$

und somit insgesamt die Übereinstimmung

$$L^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B} \oplus \breve{L}^*(\mathcal{W}) .$$

„⇐“: Umgekehrt folgt aus dieser Summendarstellung $L^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B} \oplus \breve{L}^*(\mathcal{W})$ des $L^*$-Bildraums $L^*(\mathcal{W})$ auch die Inklusion $\mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{W})$ und damit das LOP. Im Falle $\mathcal{B} \nsubseteq L^*(\mathcal{W})$, also bei ungültigem LOP, ist demnach $L^*(\mathcal{W}) \subsetneq \mathcal{B} + \breve{L}^*(\mathcal{W})$. □

## 3.4.2 Geometrische Interpretation der Bewertung als Abstandsmessung

**Bewertung als Abstandsmessung im Raum $\mathcal{W}$**

Dividiert man bei gültigem LOP den Preis $\pi(X)$ eines Zahlungsprofils $X \in L(\mathcal{H}_N)$ durch die euklidische Norm

$$\|\Psi\| = (\Psi^\top \Psi)^{1/2} = \left( \sum_{t=0}^{T} \sum_{k=1}^{k_t} \Psi_t (A_{t,k})^2 \right)^{1/2}$$

($> 0$ wegen $\Psi_0 = 1$) des Bewertungsprozesses $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1}$ ($\emptyset \neq \mathcal{M}^{\perp 1} \subseteq \mathcal{A}$ bei gültigem LOP nach Abschnitt 3.3.3), so erhält man geometrisch gesehen mit dem Wert

$$d(X) := \pi(X)/\|\Psi\| = \Psi^\top X / \|\Psi\|$$

für jedes $X \in L(\mathcal{H}_N)$ den orientierten **Abstand** des Punktes $X \in L(\mathcal{H}_N)$ von der (linearen) Hyperebene

$$H_{\Psi,0} := \{\Psi\}^\perp = \{Z \in \mathcal{W} : \Psi^\top Z = 0\}$$

in $\mathcal{W}$, welche $\Psi$ als Normalenvektor besitzt.

Für das Zahlungsprofil

$$X \in L(\mathcal{H}_N) \subseteq \mathcal{W} = \text{lin}\, \Psi \oplus \{\Psi\}^\perp$$

erhält man die zur orthogonalen Summe der Unterräume lin $\Psi$ und $\{\Psi\}^\perp$ gehörige eindeutige orthogonale additive Zerlegung

$$X = U + Z$$

mit

$$U = (\Psi^\top X)\Psi/\|\Psi\|^2 = \pi(X)\Psi/\|\Psi\|^2 = d(X)\Psi/\|\Psi\| \in \text{lin}\, \Psi =: [\Psi] =: V,$$
$$Z = X - U \in \{\Psi\}^\perp = [\Psi]^\perp =: W,\ U \perp Z.$$

Dabei ist $U$ die orthogonale Projektion (der Lotfußpunkt) von $X$ auf den Unterraum $V = [\Psi]$ und $Z$ die orthogonale Projektion von $X$ auf den Unterraum $W = V^\perp$ ($X = U + Z$ mit $U \in V$, $Z \in V^\perp$ bzw. mit $Z \in W$, $U \in W^\perp = V^{\perp\perp} = V$). Der Wert $d(X)$ ist der Abstand $\|Z - X\|$ von $X$ zu seinem Lotfußpunkt $Z$ in $\{\Psi\}^\perp$ bzw. der minimale Abstand $\|Y - X\|$ von $X$ zu den Punkten $Y$ des Unterraums $\{\Psi\}^\perp$.[24]

[24] Ausführlichere Betrachtungen zur Projektion eines Punktes auf einen linearen Unterraum oder allgemeiner auf eine konvexe Menge findet man beispielsweise bei Pleier (2021), S. 377–383, und auf der Website www.pleier-r.de.

Der Wert $\pi(X)$ von $X \in L(\mathcal{H}_N)$ stimmt bis auf den positiven konstanten Faktor $\|\Psi\|$ überein mit dem orientierten Abstand $d(X)$ des Punktes $X$ von der Hyperebene $H_{\Psi,0}$. Die Abstandsfunktion $d(X)$ und die Preisfunktion $\pi(X)$ liefern daher als Nutzenfunktionen auf $L(\mathcal{H}_N)$ die gleiche Präferenzordnung $\succeq$.[25] Somit kann die Bewertung von Zahlungsprofilen $X$ in $L(\mathcal{H}_N)$ nach dem Duplikationsprinzip, also mittels des Startkapitaleinsatzes von Duplikationsstrategien als Maßstab, wie bei deterministischen Zahlungsströmen auch als Abstandsmessung von der Hyperebene $H_{\Psi,0}$ in $\mathcal{W}$ mit dem Normalenvektor $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp}$ interpretiert werden. Eine grafische Darstellung der Abstandsmessung von $X$ zur Hyperebene $H_{\Psi,0}$ mit einem Bewertungsprozess $\Psi$ wird in der nachfolgenden Abbildung 3.8 gegeben.

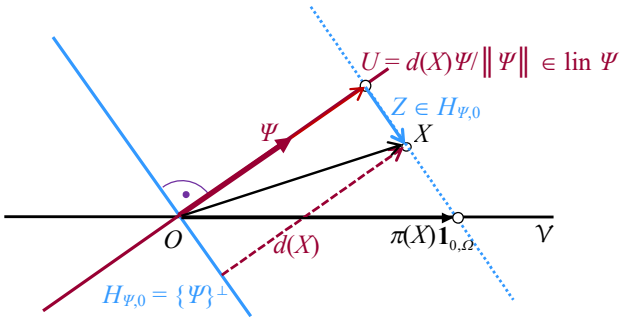



**Abb. 3.8** Die Interpretation der Bewertung als die Messung des Abstands des Punktes $X \in L(\mathcal{H}_N)$ von der Hyperebene $H_{\Psi,0}$

**Bewertung als Abstandsmessung im Raum $L(\mathcal{H}_N)$**

Da bei gültigem LOP genau für die $Z = L(g) \in \mathcal{M} = L(\ker V_0)$, $g \in \ker V_0 \subseteq \mathcal{H}_N$, der Preis $\pi(Z) = \Psi^{\top} Z = V_0(g) = 0$ ist, ist der Unterraum $\mathcal{M}$ der Durchschnitt von $L(\mathcal{H}_N)$ mit der (linearen) Hyperebene $H_{\Psi,0} = \{\Psi\}^{\perp}$:

$$\mathcal{M} = L(\mathcal{H}_N) \cap H_{\Psi,0}.$$

Eine Begründung dafür, dass $\mathcal{M}$ die Menge der Kapitalmarktgeschäfte ist, wird in Abschnitt 3.7.1 gegeben. In Abschnitt 3.3.3 wurde gezeigt, dass für die Preisberechnung auch der spezielle eindeutig bestimmte duplizierbare Bewertungsprozess $\vartheta \in L(\mathcal{H}_N)$ gewählt werden kann. Analog zu obiger Betrachtung bei der Abstandsmessung in $\mathcal{W}$ erhält man nun mit $\vartheta$ anstelle von $\Psi$ für das duplizierbare Zahlungsprofil

$$X \in L(\mathcal{H}_N) = \text{lin}\,\vartheta \oplus \mathcal{M} \qquad (\mathcal{M} = L(\mathcal{H}_N) \cap \{\vartheta\}^{\perp})$$

auch innerhalb $L(\mathcal{H}_N)$ eine eindeutige orthogonale additive Zerlegung

$$X = W + Y$$

mit $W = \pi(X)\vartheta/\|\vartheta\|^2 = d'(X)\vartheta/\|\vartheta\| \in \text{lin}\,\vartheta$ und $Y \in \mathcal{M} = L(\mathcal{H}_N) \cap \{\vartheta\}^{\perp}$, $W \perp Y$.

Der Wert

$$d'(X) := \pi(X)/\|\vartheta\| = \vartheta^{\top} X/\|\vartheta\|$$

[25] Zwei Nutzenfunktionen beschreiben genau dann die gleiche Präferenzordnung, wenn es eine streng monoton steigende Transformation gibt, sodass die eine Nutzenfunktion die Komposition der anderen Nutzenfunktion und der Transformation ist (siehe Pleier 2021, S. 209).

ist hier der Abstand des Zahlungsprofils $X$ zur Hyperebene $\mathcal{M}$ der Kapitalmarktgeschäfte in $L(\mathcal{H}_N)$. Er stimmt bis auf den positiven konstanten Faktor $1/\|\vartheta\|$ mit dem Preis $\pi(X)$ von $X$ und bis auf den positiven konstanten Faktor $\|\Psi\|/\|\vartheta\|$ mit dem Abstand $d(X)$ des Punktes $X$ von der Hyperebene $H_{\Psi,0}$ überein. Die Nutzenfunktionen $\pi$ , $d'$ und $d$ beschreiben also die gleiche Präferenzordnung $\trianglerighteq$ auf $L(\mathcal{H}_N)$. Die Bewertung der Zahlungsprofile $X$ in $L(\mathcal{H}_N)$ nach dem Duplikationsprinzip kann also auch im Raum $L(\mathcal{H}_N)$ als Abstandsmessung interpretiert werden und zwar als Abstandsmessung von der Hyperebene $\mathcal{M}$ mit dem Normalenvektor $\vartheta \in \mathcal{M}^{\perp} \cap L(\mathcal{H}_N)$. Eine grafische Darstellung dieser Abstandsmessung in $L(\mathcal{H}_N)$ findet man in der Abbildung 4.1 in Kapitel 4.

### 3.4.3 Berechnung eines Bewertungsprozesses

Um für ein Marktmodell die Gültigkeit des Law of One Price nachzuweisen, genügt es nach Satz 3.3, 11) einen Bewertungsprozess $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1}$ zu bestimmen, d. h. eine normierte Lösung $\Psi \in \mathcal{W}$ ($\Psi_0 = 1$) des Gleichungssystems

$$\Psi^{\mathsf{T}} Z = 0 \quad \forall\, Z \in \mathcal{M}.$$

Zunächst hat man für den Bewertungsprozess $\Psi$ die Anfangsbedingung

$$\Psi_0(A_0) = 1.$$

Die Lösungsmenge für den gesuchten Bewertungsprozess $\Psi$ wird nicht verändert, wenn man in den für $\Psi$ angegebenen Kapitalmarkt-Preisgleichungen bzw. Orthogonalitätsbedingungen $\Psi^{\mathsf{T}} Z = 0 \;\forall\, Z \in \mathcal{M}$ statt aller $Z \in \mathcal{M}$ nur ein Erzeugendensystem für $\mathcal{M}$ nimmt. Man wählt dazu die Schar

$$Z := Z(A_{t-1,k},p) := -\,S_{t-1} \cdot (p\mathbf{1}_{t-1,A_{t-1,k}}) + S_t^{\delta} \cdot (p\mathbf{1}_{t,A_{t-1,k}})$$

von Kapitalmarktgeschäften, die zu den Zeitpunkten $t \in \{1,\ldots,T\}$, Knoten $A_{t-1,k} \in \mathcal{P}_{t-1}$ ($k \in \{1,\ldots,k_{t-1}\}$) des Informationsbaums und beliebigen Portfoliovektoren $p = (p_1,\ldots,p_N)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^N$ gehört.

**Beweis** für $Z(A_{t-1,k},p) \in \mathcal{M}$: Der Zahlungsstrom $Z = Z(A_{t-1,k},p)$ wird durch die Handelsstrategie

$$h := p\mathbf{1}_{t,A_{t-1,k}} = (0,\ldots,0,p\mathbf{1}_{A_{t-1,k}},0,\ldots,0)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{H}_N$$

($h_s = 0$ für $s \neq t$, $h_t = p\mathbf{1}_{A_{t-1,k}}$) dupliziert:

$$\begin{aligned}
Z_s &= L_s(h) = S_s^{\delta} \cdot h_s - S_s \cdot h_{s+1} = 0 && \text{für } s \neq t\text{-}1,\, t,\\
Z_{t-1} &= -\,S_{t-1} \cdot h_t = -\,S_{t-1} \cdot (p\mathbf{1}_{A_{t-1,k}}) && \text{für } s = t\text{-}1,\\
Z_t &= S_s^{\delta} \cdot h_t = S_t^{\delta} \cdot (p\mathbf{1}_{A_{t-1,k}}) && \text{für } s = t.
\end{aligned}$$

Genauer gilt dabei für die Werte $Z_s(A_{s,m})$ der Zustandsfunktionen $Z_s$ in den einzelnen Ereignissen $A_{s,m} \in \mathcal{P}_s$:

$$\begin{aligned}
Z_s(A_{s,m}) &= 0 && \text{für } s \neq t\text{-}1,\, t \text{ und } m \in \{1,\ldots,k_s\}\\
Z_{t-1}(A_{t-1,m}) &= -\,S_{t-1}(A_{t-1,k})^{\mathsf{T}} p && \text{für } m = k,\\
Z_{t-1}(A_{t-1,m}) &= 0 && \text{für } m \neq k,\\
Z_t(A_{t,m}) &= S_t^{\delta}(A_{t,m})^{\mathsf{T}} p && \text{für } A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k},\\
Z_t(A_{t,m}) &= 0 && \text{für } A_{t,m} \not\subseteq A_{t-1,k}.
\end{aligned}$$

Das Zahlungsprofil

$$Z = L(h) = -\,S_{t-1} p\mathbf{1}_{t-1,A_{t-1,k}} + S_t^{\delta} p\mathbf{1}_{t,A_{t-1,k}}$$

besitzt wegen $h_0 = 0$ ($t \geq 1$) den Startkapitaleinsatz $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = 0$ und liegt daher in $\mathcal{M} = L(\ker V_0) \subseteq \{\Psi\}^\perp$. □

Es genügt sogar in der Schar der ausgewählten Kapitalmarktgeschäfte $Z$ nur die zu den $N$ Standardbasisvektoren $p = \mathbf{e}_j = (0,..,0,1,0,..,0)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^N$ ($j \in J$) zu nehmen, die jeweils für das Portfolio nur das $j$-te Finanzinstrument $S^j$ herauspicken, da diese das in Abschnitt 3.7.2 behandelte endliche Erzeugendensystem $F^{\tau,j,k}$ von $\mathcal{M}$ liefern:

$$\begin{aligned} Z(A_{t\text{-}1,k},\mathbf{e}_j) &= -S_{t-1}\cdot(\mathbf{e}_j \mathbf{1}_{t-1,A_{t-1,k}}) + S_t^\delta \cdot (\mathbf{e}_j \mathbf{1}_{t,A_{t-1,k}}) \\ &= -S_{t-1}^j(A_{t-1,k})\mathbf{1}_{t-1,A_{t-1,k}} + \sum_{A_{t,m}\subseteq A_{t-1,k}} S_t^{\delta,j}(A_{t,m})\mathbf{1}_{t,A_{t,m}} \\ &= F^{\tau,j,k}. \end{aligned}$$

Bei vorausgesetztem LOP bzw. bei Voraussetzung der Existenz der Lösung $\Psi$ erfüllt der gesuchte Prozess $\Psi$ die zu den Kapitalmarktgeschäften $Z = Z(A_{t\text{-}1,k},p)$ mit jeweils festem Knoten $A_{t\text{-}1,k}$, seinen Nachfolgerknoten $A_{t,m}$ ($A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$) und beliebigem Portfoliovektor $p \in \mathbb{R}^N$ gehörigen Preisgleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \pi(Z) = \langle \Psi, X \rangle_{\mathcal{W}} = \Psi^\mathsf{T} Z \\ &= \sum_{s=0}^{T} \langle \Psi_s, Z_s \rangle_{\mathcal{W}_{s,1}} = \sum_{s=0}^{T} \Psi_s^\mathsf{T} Z_s \\ &= \sum_{s=0}^{T}\sum_{m=1}^{k_s} \Psi_s(A_{s,m}) Z_s(A_{s,m}) \qquad (s = t\text{-}1,\ t) \\ &= -\Psi_{t-1}(A_{t-1,k}) S_{t-1}\left(A_{t-1,k}\right)^\mathsf{T} p + \sum_{A_{t,m}\subseteq A_{t-1,k}} \Psi_t(A_{t,m}) S_t^\delta(A_{t,m})^\mathsf{T} p \\ &= \left[ -\Psi_{t-1}(A_{t-1,k}) S_{t-1}(A_{t-1,k}) + \sum_{A_{t,m}\subseteq A_{t-1,k}} \Psi_t(A_{t,m}) S_t^\delta(A_{t,m}) \right]^\mathsf{T} p\ . \end{aligned}$$

Da das Skalarprodukt aus dem durch den Klammerausdruck […] gegebenen Spaltenvektor $a \in \mathbb{R}^N$ und dem Spaltenvektor $p$ für alle $p \in \mathbb{R}^N$ gleich Null ist, muss der Klammerausdruck $a$ der Nullvektor sein: Speziell für $p = a$ erhält man nämlich $a^\mathsf{T} a = 0$ und wegen der positiven Definitheit des Standardskalarprodukts des $\mathbb{R}^N$ dann $a = 0$. Für die Zustandsfunktionswerte $\Psi_t(A_{t,m})$ des Bewertungsprozesses $\Psi$ erhält man also bezüglich des Zeitindexes $t \in \{1,\ldots,T\}$ eine Rekursionsformel in Gestalt der Vektorgleichung

$$\sum_{A_{t,m}\subseteq A_{t-1,k}} S_t^\delta(A_{t,m})\Psi_t(A_{t,m}) = \Psi_{t-1}(A_{t-1,k})\ S_{t-1}(A_{t-1,k})$$

bzw. in Gestalt der $N$ linearen Komponentengleichungen[26]

$$(\mathrm{GS}\Psi A_{t\text{-}1,k}) \qquad \sum_{A_{t,m}\subseteq A_{t-1,k}} S_t^{\delta,j}(A_{t,m})\Psi_t(A_{t,m}) = \Psi_{t-1}(A_{t-1,k})\ S_{t-1}^j(A_{t-1,k}) \qquad (j = 1,\ldots,N),$$

$t \in \{1,\ldots,T\}$, $k \in \{1,\ldots,k_{t\text{-}1}\}$, mit der Anfangswertbedingung $\Psi_0(A_0) = 1$.

[26] Diese Gleichungen mit einem Diskontierungsprozess $\Psi = \Phi$ ($> 0$) anstelle eines Bewertungsprozesses $\Psi$ findet man in versteckter Formulierung $D_{t-1,t}^\Phi(S_t^{\delta,j}) = S_{t-1}^j$ mit dem Diskontierungsoperator $D_{s,t}^\Phi$ (siehe hier Abschnitt 3.9.4 bei der Preisberechnung von $S^j$ durch stochastische Abzinsung) bei Kremer (2017), S. 60, in Korollar 2.10.

Auf dieses lineare Gleichungssystem der Komponentengleichungen kommt man auch unmittelbar, wenn man $p = \mathbf{e}_j$ einsetzt.

**Rekursives Berechnungsschema**

Um zu den jeweils fest vorgegebenen Indizes $t \in \{1,\ldots,T\}$ und $k \in \{1,\ldots,k_{t-1}\}$ die gesuchten Komponenten $\Psi_t(A_{t,m})$ ($m \in \{1,\ldots,k_t\}$ mit $A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}$) für den Bewertungsprozess $\Psi$ zu bestimmen, geht man von der Anfangsbedingung

$$\Psi_0(A_0) = 1$$

aus und löst dann sukzessive für die Zeitpunkte $t = 1,\ldots,T$ und die Knoten $A_{t-1,k} \in \mathcal{P}_{t-1}$, $k = 1,\ldots,k_{t-1}$, des Informationsbaums jeweils das zugehörige lineare Gleichungssystem (GS$\Psi A_{t-1,k}$) mit den $N$ Komponentengleichungen ($j = 1,\ldots,N$) nach den zu den Indizes $m$ mit $A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}$ gehörigen Unbekannten $\Psi_t(A_{t,m})$ auf. Dabei stehen in der $j$-ten Komponentengleichung als Faktoren auf der linken Seite die Preisprozesskomponenten $S_t^{\delta,j}(A_{t,m})$ ($A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}$) und auf der rechten Seite die Preisprozesskomponente $S_{t-1}^{j}(A_{t-1,k})$ und die bereits berechnete Bewertungsprozesskomponente $\Psi_{t-1}(A_{t-1,k})$.

Wie bei der Berechnung einer Duplikationsstrategie in Abschnitt 3.2 kann auch hier bei der rekursiven Bestimmung eines Bewertungsprozesses der zu einem Indexpaar $(t,k)$, $t \in \{1,\ldots,T\}$, $k \in \{1,\ldots,k_{t-1}\}$, gehörige Block von $N$ linearen Gleichungen für sich behandelt werden. Der Gleichungsblock (GS$\Psi A_{t-1,k}$) gehört zu dem Einperiodenmodell mit dem Ausgangsknoten $A_{t-1,k} \in \mathcal{P}_{t-1}$ und seinen Nachfolgerknoten $A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}$. Ein Zusammenhang des LOP im Mehrperiodenmodell mit dem LOP im Einperiodenmodell und der Existenz eines Bewertungsvektors in diesem Einperiodenmodell wird im nachfolgenden Satz 3.4 behandelt. Eine schematische Darstellung der hier zeitlich vorwärts verlaufenden rekursiven Berechnung der Bewertungsprozesskomponenten $\Psi_t(A_{t,m})$ mittels des linearen Gleichungssystems (GS$\Psi A_{t-1,k}$) wird in Abbildung 3.9 gegeben.

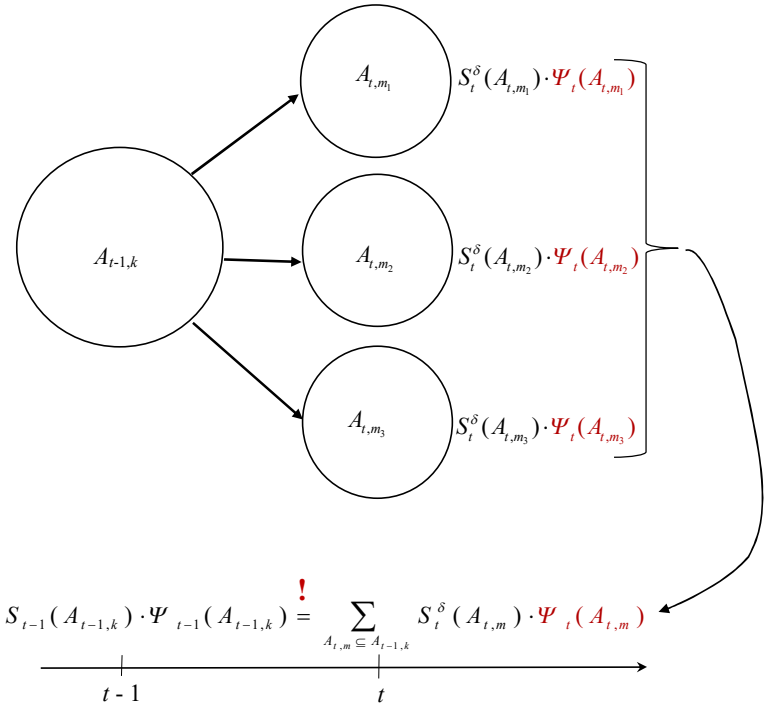



**Abb. 3.9** Das zum Ausgangsknoten $A_{t\text{-}1,k}$ und seinen Nachfolgerknoten $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$ gehörige Einperiodenmodell mit der Berechnung der zugehörigen Bewertungsprozesskomponenten $\Psi_t(A_{t,m})$ durch das Lösen eines linearen Gleichungssystems von $N$ Gleichungen

Beispielsweise ist für $t = 1$, dem dazugehörigen einzigen Ausgangsknoten $A_0 = \Omega \in \mathcal{P}_0$ und seinen Nachfolgerknoten $A_{1,m} \in \mathcal{P}_1$ ($A_{1,1}$, …, $A_{1,k_1} \subseteq A_0 = \Omega$) für die Bestimmung der Zustandsfunktion $\Psi_1 = (\Psi_1(A_{1,1}),\ldots,\Psi_1(A_{1,k_1}))^{\mathsf{T}}$ nur das einzige lineare Gleichungssystem

$$(\mathrm{GS}\Psi A_0) \qquad \sum_{m=1}^{k_1} S_1^{\delta,j}(A_{1,m})\Psi_1(A_{1,m}) = \Psi_0(A_0)S_0^j(A_0) \qquad (j = 1,\ldots,N).$$

mit den $N$ Komponentengleichungen für die $k_1$ Unbekannten $\Psi_1(A_{1,m})$ ($m = 1,\ldots,k_1$) zu lösen. In der Vektorschreibweise erhält man mit den Spaltenvektoren $S_1^{\delta}(A_{1,m})$, $S_0(A_0) \in \mathbb{R}^N$ die Vektorgleichung

$$\sum_{m=1}^{k_1} S_1^{\delta}(A_{1,m})\Psi_1(A_{1,m}) = 1\cdot S_0(A_0)$$

bzw. die Matrizengleichung[27]

[27] Diese spezielle Schreibweise des Einperiodenmodells wird in Kapitel 6 ausführlich behandelt. Bei gültigem LOP ist die Preisprozesskomponente $S_0(A_0)$ des Ausgangsknotens $A_0$ also linear abhängig von den Preisprozesskomponenten $S_1^{\delta}(A_{1,m})$ der Nachfolgerknoten $A_{1,m} \subseteq A_0$ und somit ein sog. Bewertungsvektor $\Psi_1$ für das zum Ausgangsknoten $A_0$ gehörige Einperiodenmodell vor-

$$D\Psi_1 = S_0$$

mit der Matrix

$$D := \left(S_1^{\delta}(A_{1,1}),...,S_1^{\delta}(A_{1,k_1})\right)$$

$$= \begin{pmatrix} S_1^{\delta,1}(A_{1,1}) & . & . & . & S_1^{\delta,1}(A_{1,k_1}) \\ & . & & & . \\ & . & & & . \\ S_1^{\delta,N}(A_{1,1}) & . & . & . & S_1^{\delta,N}(A_{1,k_1}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times k_1}$$

und dem Spaltenvektor $\Psi_1 = (\Psi_1(A_{1,1}),\ldots,\Psi_1(A_{1,k_1}))^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{k_1}$.

Für die nachfolgenden Zeitpunkte $t > 1$ sind für die Bestimmung der jeweiligen Zustandsfunktion $\Psi_t = (\Psi_t(A_{t,1}),\ldots,\psi_t(A_{t,k_t}))^{\mathsf{T}}$ aber im Allgemeinen gemäß der Anzahl der Ausgangsknoten $A_{t\text{-}1,k}$ bzw. Einperiodenmodelle mehrere Gleichungssysteme zu lösen.

Nachfolgend wird nun ein Zahlenbeispiel zur Bestimmung eines Bewertungsprozesses $\Psi$ in einem Mehrperiodenmodell gerechnet.

**Beispiel 3.3 Die Bestimmung eines Bewertungsprozesses in einem Zwei Perioden-Vier Zustände-Zwei Finanzinstrumente-Modell**

Es wird das Mehrperiodenmodell des obigen Beispiels 3.2 in Abschnitt 3.2.1 (mit $\delta = 0$, $S^{\delta} = S$, $N = 2$, $T = 2$, $|\Omega| = K = 4$) weiter behandelt. In der nachfolgenden Abbildung 3.10 ist der zum vorgegebenen Preisprozess $S$ gehörige Informationsbaum mit den gestrichelt umrandeten Teilgraphen der enthaltenen Einperiodenmodelle dargestellt. In den einzelnen Knoten $A_{t,k}$ des Graphen sind die Werte $S_t(A_{t,k})$ des Preisprozesses $S$, die Werte $\Psi_t(A_{t,k})$ des Bewertungsprozesses $\Psi$ und die rechten Seiten

$$a_{t\text{-}1,k} = (a^1_{t-1,k},\ldots,a^N_{t-1,k})^{\mathsf{T}},$$

$a^j_{t-1,k} := \Psi_{t-1}(A_{t-1,k})\cdot S^j_{t-1}(A_{t-1,k})$, $j = 1,\ldots,N$, $t = 1,\ldots,T$, der Gleichungssysteme der jeweiligen Einperiodenmodelle aufgeführt. Die rechten Seiten $a^j_{t-1,k}$ sind die mit dem „Abzinsungsfaktor" $\Psi_{t-1}(A_{t-1,k})$ abgezinsten Preise $S^j_{t-1}(A_{t-1,k})$ des $j$-ten Finanzinstruments zum Zeitpunkt $t$-1 und im Ereignis $A_{t\text{-}1,k}$. Wann die $\Psi_t(A_{t,k})$ tatsächlich als Diskontierungsfaktoren im Marktmodell anzusehen sind, wird in Abschnitt 3.8.1 (mit Voraussetzung der Arbitragefreiheit und der Vollständigkeit) behandelt.

Bei der Bestimmung eines Bewertungsprozesses $\Psi$ beginnt man mit der Anfangsbedingung

$$\Psi_0(A_0) = 1$$

und dem zum Zeitpunkt $t = 1$ und zum Ausgangsknoten $A_0 = \Omega \in \mathcal{P}_0$ mit seinen Nachfolgerknoten $A_{1,1}$, $A_{1,2} \subseteq A_0$ gehörigen Gleichungssystem

$$(\mathrm{GS}\Psi A_0) \qquad \sum_{m=1}^{2} S_1^j(A_{1,m})\Psi_1(A_{1,m}) = \Psi_0(A_0)\cdot S_0^j(A_0) = a^j_{0,0} \qquad (j = 1,2)$$

bzw. in der Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} S_1^1(A_{1,1}) & S_1^1(A_{1,2}) \\ S_1^2(A_{1,1}) & S_1^2(A_{1,2}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Psi_1(A_{1,1}) \\ \Psi_1(A_{1,2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_0(A_0)\cdot S_0^1(A_0) \\ \Psi_0(A_0)\cdot S_0^2(A_0) \end{pmatrix}.$$

Nach Einsetzen der Zahlenwerte erhält man für die Zustandsfunktion $\Psi_1 = (\Psi_1(A_{1,1}),\Psi_1(A_{1,2}))^{\mathsf{T}}$ das

---

handen. Nach Abschnitt 6.2.2 wird dadurch auch das LOP für dieses Einperiodenmodell charakterisiert.

Gleichungssystem

$$64\cdot\Psi_1(A_{1,1}) + 96\cdot\Psi_1(A_{1,2}) = 80,$$
$$110\cdot\Psi_1(A_{1,1}) + 90\cdot\Psi_1(A_{1,2}) = 100$$

bzw. in der Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} 64 & 96 \\ 110 & 90 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Psi_1(A_{1,1}) \\ \Psi_1(A_{1,2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung hierfür lautet

$$(\Psi_1(A_{1,1}),\Psi_1(A_{1,2}))^{\mathsf{T}} = (0.5,0.5)^{\mathsf{T}}.$$

Zum Zeitpunkt $t = 2$, zu dem Ausgangsknoten $A_{1,1} \in \mathcal{P}_1$ und seinen Nachfolgerknoten $A_{2,1} = \{\omega_1\}$, $A_{2,2} = \{\omega_2\} \subseteq A_{1,1}$ erhält man den folgenden Block des Gleichungssystems

$$(\mathrm{GS}\Psi A_{1,1}) \qquad \sum_{m=1}^{2} S_2^j(A_{2,m})\Psi_2(A_{2,m}) = \Psi_1(A_{1,1})\cdot S_1^j(A_{1,1}) = a_{1,1}^j \qquad (j = 1,2)$$

bzw. mit den Zahlenwerten

$$58\cdot\Psi_2(A_{2,1}) + 29\cdot\Psi_2(A_{2,2}) = 0.50\cdot 64 = 32,$$
$$132\cdot\Psi_2(A_{2,1}) + 106\cdot\Psi_2(A_{2,2}) = 0.50\cdot 110 = 55$$

und die Lösung

$$(\Psi_2(A_{2,1}),\Psi_2(A_{2,2}))^{\mathsf{T}} = (0.774,-0.445)^{\mathsf{T}}.$$

Zu diesem Block des Gleichungssystems gehört in Abbildung 3.10 der gelb gestrichelt umrandete Teilgraph des Informationsbaums. Die in diesem Block verknüpften Größen zur Berechnung der Bewertungsprozesskomponenten $\Psi_2(A_{2,1})$ und $\Psi_2(A_{2,2})$ sind in der Abbildung durch orangefarbene Klammern verbunden.

Zum Zeitpunkt $t = 2$, zu dem Ausgangsknoten $A_{1,2} \in \mathcal{P}_1$ und seinen Nachfolgerknoten $A_{2,3} = \{\omega_3\}$, $A_{2,4} = \{\omega_4\} \subseteq A_{1,2}$ ergibt sich das Gleichungssystem

$$(\mathrm{GS}\Psi A_{1,2}) \qquad \sum_{m=3}^{4} S_2^j(A_{2,m})\Psi_2(A_{2,m}) = \Psi_1(A_{1,2})\cdot S_1^j(A_{1,2}) = a_{1,2}^j \qquad (j = 1,2)$$

bzw. mit den Zahlenwerten

$$76.8\cdot\Psi_2(A_{2,3}) + 105.6\cdot\Psi_2(A_{2,4}) = 0.50\cdot 96 = 48,$$
$$99\cdot\Psi_2(A_{2,3}) + 81\cdot\Psi_2(A_{2,4}) = 0.50\cdot 90 = 45$$

und die Lösung

$$(\Psi_2(A_{2,3}),\Psi_2(A_{2,4}))^{\mathsf{T}} = (0.204,0.306)^{\mathsf{T}}.$$

Insgesamt erhält man den Bewertungsprozess

$$\Psi = (\Psi_0(A_0);\Psi_1(A_{1,1}),\Psi_1(A_{1,2});\Psi_2(A_{2,1}),\Psi_2(A_{2,2}),\Psi_2(A_{2,3}),\Psi_2(A_{2,4}))^{\mathsf{T}}$$
$$= (1;\ 0.5,0.5;0.774,-0.445,0.204,0.306)^{\mathsf{T}}.$$

Der Preis für das in Beispiel 3.2 angegebene Zahlungsprofil $X = (0;0,0;32,6,0,0)^{\mathsf{T}}$ berechnet sich damit zu

$$\pi(X) = \Psi^{\mathsf{T}}X = 0.774\cdot 32 - 0.445\cdot 6 = 22.112.$$

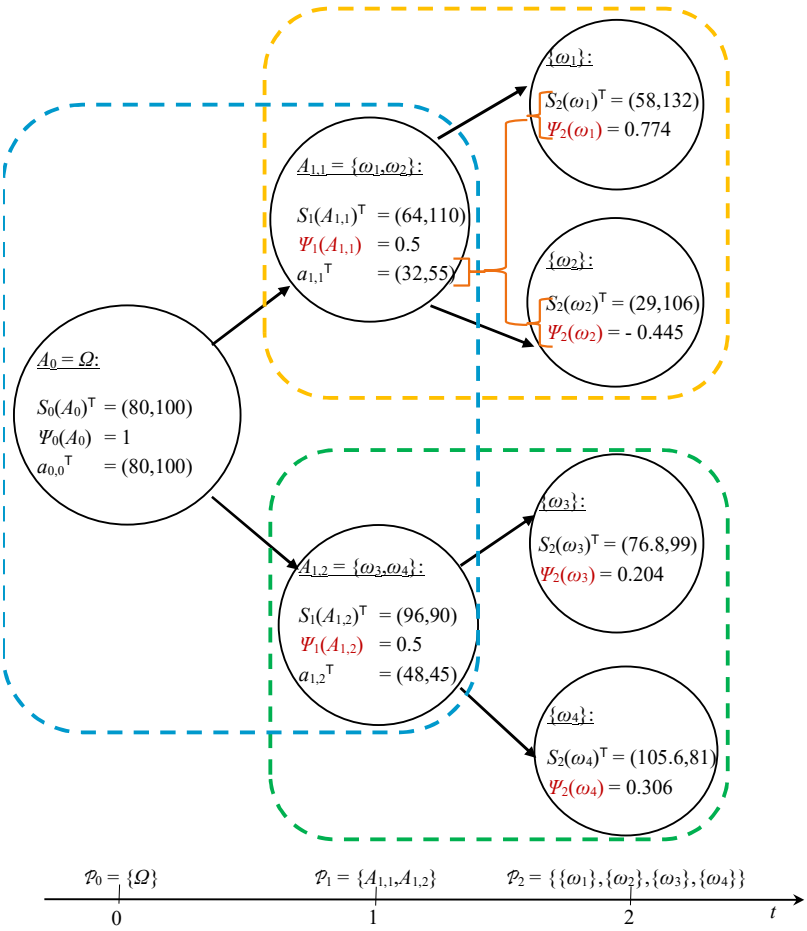



**Abb. 3.10** Der Informationsbaum des zur Filtration $\mathcal{P}$ von Partitionen adaptierten Preisprozesses $S^\delta = S\,(\delta = 0, N = 2, T = 2, K = 4)$ mit den Werten des Preisprozesses $S$, des Bewertungsprozesses $\Psi$ und der rechten Seiten $a_{t-1,k}$ der Gleichungssysteme (GS $\Psi A_{t\text{-}1,k}$)

Im Beispiel ergibt sich bei der Lösung des Gleichungssystems der Bewertungsprozess $\Psi$ als einzige Lösung. Die Existenz der Lösung $\Psi$ bedeutet nach Satz 3.3, 32) die Gültigkeit des LOP, die Einzigkeit der Lösung nach Satz 3.6, 2a) (von Abschnitt 3.5) die Vollständigkeit des Marktmodells. Da die Komponente $\Psi_2(\omega_2) = -0.445$ von $\Psi$ negativ ist, also die einzige Lösung $\Psi$ nicht positiv ist, gibt es keine positive Lösung $\Phi$ der linearen Gleichung $L^*(\Phi) = b$, sodass nach Satz 3.8, 1) (von Abschnitt 3.6.1) das Marktmodell nicht arbitragefrei ist. Eine Arbitragegelegenheit $h$ wird beispielsweise gegeben durch die Handelsstrategie

$$h = (h_0;h_1;h_2)^\top = (h_0^1, h_0^2 ; h_1^1, h_1^1 ; h_2^1(A_{1,1}), h_2^2(A_{1,1}); h_2^1(A_{1,2}), h_2^2(A_{1,2}))^\top$$
$$= (h_0^1, h_0^2 ;0,0;-0.0306,0.0178,0,0)^\top$$

($h_0^1$, $h_0^2 \in \mathbb{R}$ beliebig mit $80\cdot h_0^1 + 100\cdot h_0^2 = S_0{}^\top h_0 = V_0(h) = 0$), deren Startkapitaleinsatz $V_0(h) = 0$ ist und die das schwach positive Zahlungsprofil $X = L(h)$ liefert:

$$\begin{aligned} X = L(h) &= (X_0;X_1;X_2)^\mathsf{T} \\ &= (X_0(\Omega);X_1(A_{1,1}),X_1(A_{1,2});X_2(\omega_1),X_2(\omega_2),X_2(\omega_3),X_2(\omega_4))^\mathsf{T} \\ &= (0;0,0;0.575,1.000,0,0)^\mathsf{T} \geq 0. \end{aligned}$$

Diese Arbitragegelegenheit $h$ des Mehrperiodenmodells ergibt sich aus der Arbitragegelegenheit $h_2(A_{1,1}) = (h_2^1(A_{1,1}),h_2^2(A_{1,1}))^\mathsf{T} = (-0.0306,0.0178)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^2$ des gelb umrandeten enthaltenen Einperiodenmodells. Eine Arbitragegelegenheit in einem Einperiodenmodell wird zu Beginn von Abschnitt 6.2.3 als Handelsstrategie $h = (h_0,h_1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $V_0(h) = 0 \wedge Lh = (-R_0(h),V_1(h))^\mathsf{T} \geq 0$ und als Portfoliovektor $h_1 \in \mathbb{R}^N$ mit $L'h_1 = (-S_0^\mathsf{T}h_1,D^\mathsf{T}h_1)^\mathsf{T} \geq 0$ beschrieben. In diesem Einperiodenmodell ist nämlich beim Ausgangsknoten $A_{1,1}$ der Vermögenswert

$$V_1(h)(A_{1,1}) = S_1(A_{1,1})^\mathsf{T}h_1(A_0) = (64,110)(0,0)^\mathsf{T} = 0,$$

der Reinvestitionswert

$$R_1(h)(A_{1,1}) = S_1(A_{1,1})^\mathsf{T}h_2(A_{1,1}) = (64,110)(-0.0306,0.0178)^\mathsf{T} = 0$$

und der Auszahlungswert

$$X_1(A_{1,1}) = L_1(h)(A_{1,1}) = V_1(h)(A_{1,1}) - R_1(h)(A_{1,1}) = 0.$$

Bei den Nachfolgerknoten $\omega_1$ und $\omega_2$ ergeben sich die Auszahlungswerte

$$L_2(h)(\omega_1) = V_2(h)(\omega_1) = S_2(\omega_1)^\mathsf{T}h_2(A_{1,1}) = (58,132)(-0.0306,0.0178)^\mathsf{T} = 0.575,$$
$$L_2(h)(\omega_2) = V_2(h)(\omega_2) = S_2(\omega_2)^\mathsf{T}h_2(A_{1,1}) = (29,106)(-0.0306,0.0178)^\mathsf{T} = 1.000$$

und damit das schwach positive Zahlungsprofil

$$(X_2(\omega_1),X_2(\omega_2))^\mathsf{T} = (L_2(h)(\omega_1),L_2(h)(\omega_2))^\mathsf{T} = (0.575,1.000)^\mathsf{T} \geq 0.$$

Ein Mehrperiodenmodell ist nämlich genau dann arbitragefrei, wenn jedes seiner enthaltenen Einperiodenmodelle arbitragefrei ist.[28] Ein arbitragefreies Marktmodell würde man erhalten, wenn man beispielsweise beim Preisprozess $S$ den Wert $S_2^{\delta,1}(\omega_2) = S_2^1(\omega_2) = 29$ durch den Wert 67 ersetzt, da dann die positive Lösung $\Phi = (1; 0.5,0.5;0.108,0.383,0.204,0.306)^\mathsf{T}$ von $L^*(\Phi) = b$ existiert. △

## 3.4.4 LOP im Mehrperiodenmodell und in den enthaltenen Einperiodenmodellen

Wie bei der in Abschnitt 3.2.5 mit Satz 3.1 begründeten Äquivalenz der Vollständigkeit (VS) eines Mehrperiodenmodells zur Vollständigkeit (VSsf und damit VS) aller enthaltenen Einperiodenmodelle kann hier ein ähnlicher, aber kein analoger Sachverhalt hinsichtlich der Gültigkeit des LOP bewiesen und im folgenden Satz dargestellt werden.[29] Der Beweis erfolgt mittels der Existenz eines Bewertungsprozesses $\Psi$ des Mehrperiodenmodells und der Existenz von Bewertungsvektoren $\psi_t$ der Einperiodenmodelle. Für die Schlussrichtung vom LOP im Mehrperiodenmodell auf das LOP in einem enthaltenen Einperiodenmodell wird benötigt, dass der Bewertungsprozess $\Psi$ im Ausgangsknoten des Einperiodenmodells von Null verschieden ist.

**Satz 3.4 Zusammenhang zwischen dem LOP im Mehrperiodenmodell und dem LOP in den enthaltenen Einperiodenmodellen**

a) Falls das LOP in allen enthaltenen Einperiodenmodellen gültig ist, so gilt es auch im Mehrperiodenmodell.

---

[28] Die Äquivalenz der Arbitragefreiheit eines Mehrperiodenmodells zur Arbitragefreiheit der enthaltenen Einperiodenmodelle bringt Kremer (2011) auf S. 175 und (2017) auf S. 69 mit Lemma 2.22. Sie wird auch hier noch in Abschnitt 3.6.3 mit Satz 3.10 begründet.

[29] Den Zusammenhang zwischen dem LOP im Mehrperiodenmodell und dem LOP in seinen enthaltenen Einperiodenmodellen verwendet Kremer (2011) auf S. 171 mit der stillschweigenden Voraussetzung, dass der Bewertungsprozess nirgends verschwindet.

b) Falls im Mehrperiodenmodell das LOP gültig ist, $\Psi$ ein Bewertungsprozess ist und im Ausgangsknoten $A_{t\text{-}1,k}$ ($t \in \{1,\ldots,T\}$) eines enthaltenen Einperiodenmodells für die zugehörige Bewertungsprozesskomponente
$$\Psi_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k}) \neq 0$$
gilt, so ist auch in diesem Einperiodenmodell das LOP gültig.

c) Falls im Mehrperiodenmodell das LOP gültig ist und $\Psi$ ein Bewertungsprozess mit
$$\Psi_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k}) \neq 0 \text{ für alle } t \in \{1,\ldots,T\} \text{ und } k \in \{1,\ldots, k_{t\text{-}1}\}$$
ist, so gilt auch in allen enthaltenen Einperiodenmodellen das LOP.

Anzumerken ist, dass die Voraussetzung der Nullstellenfreiheit von $\Psi$ in Teil b) des Satzes nur im Ausgangsknoten $A_{t\text{-}1,k}$ und nicht auch noch für dessen Nachfolgerknoten $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$ benötigt wird und in Teil c) nur für die Knoten $A_{t,k}$ der Zeitpunkte $t = 1,\ldots,T\text{-}1$ und nicht für die Endknoten $A_{T,m}$ im Endzeitpunkt $T$. Bei der entsprechenden Beweisrichtung von Satz 3.10 in Abschnitt 3.6.3 zur Arbitragefreiheit im Mehrperiodenmodell und in den enthaltenen Einperiodenmodellen wird dagegen die Positivität der Bewertungsprozesskomponenten sowohl im Ausgangsknoten als auch in den Nachfolgerknoten benötigt. Bei gültigem LOP im Mehrperiodenmodell ist wegen $\Psi_0(A_0) = 1$ stets auch in dem ersten Einperiodenmodell zum Ausgangsknoten $A_0 = \Omega$ das LOP gültig. Falls nun bei gültigem LOP im Mehrperiodenmodell in einem der Knoten $A_{t\text{-}1,k}$ ($t \in \{2,\ldots,T\}$, $k \in \{1,\ldots, k_{t\text{-}1}\}$) die Bewertungsprozesskomponente $\Psi_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k}) = 0$ ist, so kann im zugehörigen Einperiodenmodell das LOP ungültig sein oder auch gültig sein. Dies wird nachfolgend noch in Beispiel 3.4 durch Zahlenbeispiele belegt. Unter Voraussetzung des LOP im Mehrperiodenmodell ist die Bedingung $\Psi_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k}) \neq 0$ ($t > 1$) also hinreichend, aber nicht notwendig für das LOP im zugehörigen Einperiodenmodell.

**Beweis:** a) In allen enthaltenen Einperiodenmodellen eines Mehrperiodenmodells gelte das LOP. Zum Nachweis der Gültigkeit des LOP im Mehrperiodenmodell wird die Existenz eines Bewertungsprozesses $\Psi$ mit dem Prinzip der vollständigen Induktion gezeigt. Als Induktionsbeginn setzt man $\Psi_0(A_0) := 1$, womit $\Psi$ schon im Ausgangsknoten $A_0$ definiert ist. Die Induktionsannahme besteht darin, dass schon für alle zu den Ausgangsknoten $A_{s\text{-}1,k}$ ($1 \le s < t$, $k \in \{1,\ldots,k_{s\text{-}1}\}$) von Einperiodenmodellen gehörigen Gleichungssysteme

$$(\mathrm{GS}\Psi A_{s\text{-}1,k}) \qquad \sum_{A_{s,m} \subseteq A_{s-1,k}} S_s^{\delta,j}(A_{s,m}) \Psi_s(A_{s,m}) = \Psi_{s-1}(A_{s-1,k})\ S_{s-1}^{j}(A_{s-1,k}) \qquad (j = 1,\ldots,N)$$

die Existenz von Lösungen $\Psi_s$ nachgewiesen ist. Eine Lösung $\Psi$ existiert dann mit den Werten $\Psi_s(A_{s,m})$ für alle $s = 0,\ldots,t\text{-}1$, $A_{s,m} \in \mathcal{P}_s$, also insbesondere mit den Werten $\Psi_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k})$, $A_{t\text{-}1,k} \in \mathcal{P}_{t\text{-}1}$. Als Induktionsschluss $(t\text{-}1,k) \longrightarrow (t,m)$ ($t \in \{1,\ldots,T\}$) zeigt man für jedes $k \in \{1,\ldots,k_{t\text{-}1}\}$ und für alle $m$ mit $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$, dass dann auch das Gleichungssystem $(\mathrm{GS}\Psi A_{t\text{-}1,k})$ eine auf den $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$ definierte Lösung $\Psi_t$ besitzt. Da in dem zum Ausgangsknoten $A_{t\text{-}1,k}$ ($t \ge 1$) gehörigen Einperiodenmodell nach Voraussetzung das LOP gültig ist, existiert nach Satz 6.1 von Abschnitt 6.2.2 ein auf den Knoten $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$ definierter Bewertungsvektor $\psi_t$ als Lösung des Gleichungssystems[30]

[30] Für ein im Mehrperiodenmodell enthaltenes Einperiodenmodell gilt das LOP nach Abschnitt 6.2.2 genau dann, wenn die Preisprozesskomponente $S_{t-1}(A_{t-1,k})$ des Ausgangsknotens $A_{t\text{-}1,k}$ linear abhängig ist von den Preisprozesskomponenten $S_t^{\delta}(A_{t,m})$ seiner Nachfolgerknoten $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$ und somit ein Bewertungsvektor $\psi_t$ für das Einperiodenmodell existiert. Die Bezeichnung des Bewertungsvektors $\psi_t$ im Einperiodenmodell erfolgt hier mit dem kleinen griechischen Buchstaben $\psi$, während der Bewertungsprozess $\Psi$ des Mehrperiodenmodells mit dem großen griechischen Buchstaben $\Psi$ bezeichnet wird.

$$\sum_{A_{t,m}\subseteq A_{t-1,k}} S_t^{\delta}(A_{t,m})\psi_t(A_{t,m}) = 1\cdot S_{t-1}(A_{t-1,k})$$

und dann mit der Definition der Zustandsfunktion

$$\Psi_t(A_{t,m}) := \Psi_{t-1}(A_{t-1,k})\cdot\psi_t(A_{t,m})$$

als Produkt des Skalars $\Psi_{t-1}(A_{t-1,k})$ und der Zustandsfunktion $\psi_t$ auch eine auf den $A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}$ definierte Lösung $\Psi_t$ des Gleichungssystems

$$(\mathrm{GS}\Psi A_{t-1,k}) \qquad \sum_{A_{t,m}\subseteq A_{t-1,k}} S_t^{\delta}(A_{t,m})\Psi_t(A_{t,m}) = \Psi_{t-1}(A_{t-1,k})\; S_{t-1}(A_{t-1,k}),$$

wodurch die Verbindung der Funktionswerte $\Psi_t(A_{t,m})$ mit den bereits in der Induktionsannahme vorhandenen Funktionswerten $\Psi_{t-1}(A_{t-1,k})$ hergestellt wird. Da in allen enthaltenen Einperiodenmodellen das LOP gültig ist, erhält man insgesamt einen auf allen Argumenten $(t,A_{t,m})$ ($t \in I$, $A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$) definierten Prozess $\Psi$, der die Anfangsbedingung $\Psi_0(A_0) := 1$ und das Gleichungssystem $(\mathrm{GS}\Psi A_{t-1,k})$ ($t \in \{1,\ldots,T\}$, $k \in \{1,\ldots,k_{t-1}\}$) erfüllt und daher ein normierter $\mathcal{M}$-Normalenvektor bzw. ein Bewertungsprozess für das Mehrperiodenmodell ist. Nach Satz 3.3, 11) von Abschnitt 3.4.1 ist somit das LOP auch im Mehrperiodenmodell gültig. Mittels vollständiger Induktion erhält man noch die Berechnung der Bewertungsprozesskomponente $\Psi_t(A_t)$ eines Knotens $A_t = A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$ aus den Bewertungsvektorkomponenten $\psi_s(A_s)$, $0 \le s \le t$, des Knotens $A_t$ selbst und der dazu eindeutig bestimmten Vorgängerknoten $A_s \in \mathcal{P}_s$ ($s = 0,\ldots,t\text{-}1$; $\psi_0(A_0) := \Psi_0(A_0) = 1$):

$$\Psi_t(A_t) = \psi_0(A_0)\cdot\psi_1(A_1)\cdot\ldots\cdot\psi_{t-1}(A_{t-1})\cdot\psi_t(A_t) \text{ mit } A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_t.$$[31]

b) Falls im Mehrperiodenmodell das LOP gilt, also ein Bewertungsprozess $\Psi$ als Lösung des Gleichungssystems $(\mathrm{GS}\Psi A_{t-1,k})$ ($t \in \{1,\ldots,T\}$, $k \in \{1,\ldots,k_{t-1}\}$) existiert, und im Ausgangsknoten $A_{t-1,k}$ noch $\Psi_{t-1}(A_{t-1,k}) \neq 0$ ist, liefert die Zustandsfunktion

$$\psi_t(A_{t,m}) := \Psi_t(A_{t,m})/\Psi_{t-1}(A_{t-1,k})$$

eine auf den $A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}$ definierte Lösung des Gleichungssystems

$$\sum_{A_{t,m}\subseteq A_{t-1,k}} S_t^{\delta}(A_{t,m})\psi_t(A_{t,m}) = 1\cdot S_{t-1}(A_{t-1,k}),$$

somit für das zu $A_{t-1,k}$ gehörige Einperiodenmodell nach Satz 6.1 bzw. Satz 6.3, 19) von Abschnitt 6.2.2 einen Bewertungsvektor $\psi_t$ und die Gültigleit des LOP.

c) Der Beweis der Aussage c) des Satzes ergibt sich aus b). □

**Beispiel 3.4 Ein Mehrperiodenmodell (Zwei Perioden-Vier Zustände-Zwei Finanzinstrumente-Modell) mit gültigem LOP und mit einem Einperiodenmodell ohne LOP**

Es wird das obige Beispiel 3.3 von Abschnitt 3.4.3 (mit $\delta = 0$, $S^{\delta} = S$, $N = 2$, $T = 2$, $|\Omega| = K = 4$) weiter behandelt, wobei aber jetzt einige Werte der Preisprozesse $S^j(A_{t,m})$ abgeändert werden. Es werden zwei Fälle dargestellt: Im Fall I) ist in dem Einperiodenmodell zum Ausgangsknoten $A_{11}$ das LOP ungültig, im Fall II) ist in diesem Einperiodenmodell das LOP gültig. Dazu wird der Wert $S_0(A_0)^{\mathsf{T}}$ von (80,100) auf (48,45) abgeändert, der Wert $S_1(A_{11})^{\mathsf{T}}$ von (64,110) auf (72.5,132.0) im Fall I) bzw. auf (72.5,165.0) im Fall II) und der Wert $S_2(A_{22})^{\mathsf{T}}$ von (29,106) auf (29,66). Die Zustandsfunktionen $S_t$ des Preisprozesses $S$ sind jetzt also gegeben durch

$S_0^{\mathsf{T}} = S_0(A_0)^{\mathsf{T}}$ = (48,45),
$S_1^{\mathsf{T}} = (S_1(A_{11})^{\mathsf{T}};S_1(A_{12})^{\mathsf{T}})$ = (72.5,132.0;96,90) im Fall I) bzw.
$S_1^{\mathsf{T}} = (S_1(A_{11})^{\mathsf{T}};S_1(A_{12})^{\mathsf{T}})$ = (72.5,165.0;96,90) im Fall II),
$S_2^{\mathsf{T}} = (S_2(A_{21})^{\mathsf{T}};S_2(A_{22})^{\mathsf{T}};S_2(A_{23})^{\mathsf{T}};S_2(A_{24})^{\mathsf{T}})$ = (58,132;29,66;76.8,99;105.6,81).

In der nachfolgenden Abbildung 3.11 wird der zum vorliegenden Mehrperiodenmodell gehörige Informationsbaum dargestellt. In seinen Knoten werden die Werte des Preisprozesses $S$ und des Bewertungsprozesses $\Psi$ für den Fall I) angegeben.

---

[31] Diese Berechnungsformel für den Bewertungsprozess $\Psi$ aus den Bewertungsvektoren $\psi_t$ der enthaltenen Einperiodenmodelle bringt Kremer (2011) auf S. 171 in Satz 3.48 (3.15).

a) Zur Bestimmung eines Bewertungsprozesses $\Psi$ beginnt man mit der Anfangsbedingung

$$\Psi_0(A_0) = 1$$

und löst als Erstes die zum Ausgangsknoten $A_0 \in \mathcal{P}_0$ gehörige Vektorgleichung

$$(\mathrm{GS}\Psi A_0) \qquad \sum_{m=1}^{2} S_1(A_{1,m})\Psi_1(A_{1,m}) = \Psi_0(A_0)\cdot S_0(A_0)\,.$$

Mit den Zahlenwerten von Fall I) erhält man das Gleichungssystem in der Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} 72.5 & 96 \\ 132.0 & 90 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Psi_1(A_{1,1}) \\ \Psi_1(A_{1,2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 45 \end{pmatrix}.$$

Hierfür lautet die einzige Lösung

$$(\Psi_1(A_{1,1}),\Psi_1(A_{1,2}))^{\mathsf{T}} = (0{,}0.5)^{\mathsf{T}}.$$

Mit den Zahlenwerten von Fall II) hat das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 72.5 & 96 \\ 165.0 & 90 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Psi_1(A_{1,1}) \\ \Psi_1(A_{1,2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 45 \end{pmatrix}.$$

ebenfalls die einzige Lösung

$$(\Psi_1(A_{1,1}),\Psi_1(A_{1,2}))^{\mathsf{T}} = (0{,}0.5)^{\mathsf{T}}.$$

Der Wert Null für die Bewertungsprozesskomponente $\Psi_1(A_{1,1})$ ergibt sich in beiden Fällen I) und II) dadurch, dass die rechte Seite $\Psi_0(A_0)\cdot S_0(A_0) = S_0(A_0)$ ($\in \mathbb{R}^2$) schon allein von der zweiten Matrixspalte $S_1(A_{12})$, der Preisprozesskomponente des Nachfolgerknotens $A_{12}$, linear abhängig ist.

Wie nachfolgend noch gezeigt wird, liefert dann der Wert $\Psi_1(A_{1,1}) = 0$ in dem zum Ausgangsknoten $A_{1,1}$ gehörigen Einperiodenmodell ein Gleichungssystem mit rechter Seite $\Psi_1(A_{1,1})\cdot S_1(A_{1,1}) = 0$, also ein homogenes lineares Gleichungssystem, das stets lösbar ist. Dies ermöglicht bei geeigneten Werten der anderen Gleichungssysteme die Lösbarkeit des gesamten Gleichungssystems ($\mathrm{GS}\Psi A_{t\text{-}1,k}$) ($t \in I$, $A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$) bzw. die Gültigkeit des LOP im gesamten Mehrperiodenmodell, auch wenn das LOP in diesem Einperiodenmodell ungültig ist. Die Ungültigkeit des LOP in diesem Einperiodenmodell ist wiederum dadurch bedingt, dass die Preisprozesskomponente $S_1(A_{1,1})$ des Ausgangsknotens $A_{1,1}$ nicht von den Preisprozesskomponenten $S_2(A_{2,m})$ seiner Nachfolgerknoten $A_{2,m} \subseteq A_{1,1}$ linear abhängt und somit kein Preisvektor $\psi_t$ für das Einperiodenmodell existiert.

Zum Ausgangsknoten $A_{1,1} \in \mathcal{P}_1$ erhält man für $\Psi$ wegen $\Psi_1(A_{1,1}) = 0$ die homogene Vektorgleichung

$$(\mathrm{GS}\Psi A_{1,1}) \qquad \sum_{m=1}^{2} S_2(A_{2,m})\Psi_2(A_{2,m}) = \Psi_1(A_{1,1})\cdot S_1(A_{1,1}) = 0,$$

also mit den Zahlenwerten von Fall I) das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 58 & 29 \\ 132 & 66 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Psi_2(A_{2,1}) \\ \Psi_2(A_{2,2}) \end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix} 72.5 \\ 132 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

das stets lösbar ist und zumindest die triviale Lösung besitzt. Die allgemeine Lösung ist hier $(\Psi_2(A_{2,1}),\Psi_2(A_{2,2}))^{\mathsf{T}} = \lambda\cdot(1,\text{-}2)^{\mathsf{T}}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) und eine spezielle Lösung beispielsweise

$$(\Psi_2(A_{2,1}),\Psi_2(A_{2,2}))^{\mathsf{T}} = (1,\text{-}2)^{\mathsf{T}}.$$

Mit den Zahlenwerten von Fall II) erhält man dasselbe Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 58 & 29 \\ 132 & 66 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Psi_2(A_{2,1}) \\ \Psi_2(A_{2,2}) \end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix} 72.5 \\ 165 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und ebenfalls eine Lösung durch

$$(\Psi_2(A_{2,1}),\Psi_2(A_{2,2}))^{\mathsf{T}} = (1,\text{-}2)^{\mathsf{T}}.$$

Zum Ausgangsknoten $A_{1,2} \in \mathcal{P}_1$ ergibt sich wie in Beispiel 3.3 von Abschnitt 3.4.3 die unveränderte Vektorgleichung

$$(\mathrm{GS}\Psi A_{1,2}) \qquad \sum_{m=3}^{4} S_2(A_{2,m})\Psi_2(A_{2,m}) = \Psi_1(A_{1,2}) \cdot S_1(A_{1,2}),$$

also das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 76.8 & 105.6 \\ 99 & 81 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_2(A_{2,3}) \\ \Psi_2(A_{2,4}) \end{pmatrix} = 0.5 \cdot \begin{pmatrix} 96 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 45 \end{pmatrix}$$

und die einzige Lösung

$$(\Psi_2(A_{2,3}), \Psi_2(A_{2,4}))^{\mathsf{T}} = (0.204, 0.306)^{\mathsf{T}}.$$

Insgesamt erhält man einen Bewertungsprozess

$$\begin{aligned} \Psi &= (\Psi_0(A_0); \Psi_1(A_{1,1}), \Psi_1(A_{1,2}); \Psi_2(A_{2,1}), \Psi_2(A_{2,2}), \Psi_2(A_{2,3}), \Psi_2(A_{2,4}))^{\mathsf{T}} \\ &= (1;\ 0,0.5;1,-2,0.204,0.306)^{\mathsf{T}} \end{aligned}$$

und daher die Gültigkeit des LOP im Mehrperiodenmodell in den beiden Fällen I) und II). Da der Bewertungsprozess $\Psi$ (bei der Festlegung der Komponenten $\Psi_2(A_{2,1})$ und $\Psi_2(A_{2,2})$) nicht eindeutig bestimmt ist, liegt nach Satz 3.6, 2a) von Abschnitt 3.5 die Vollständigkeit des Marktmodells nicht vor.

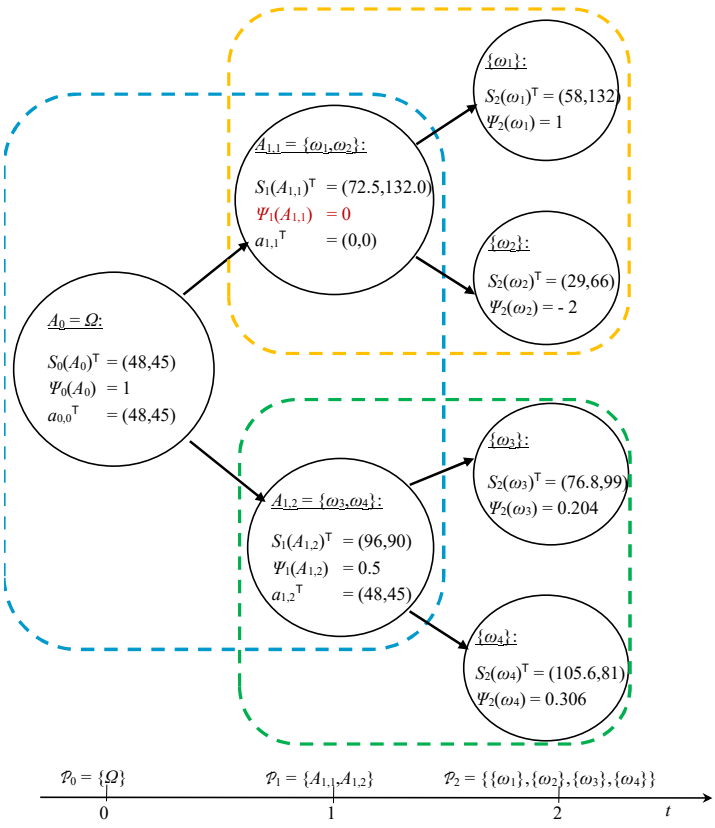



**Abb. 3.11** Der Informationsbaum eines Mehrperiodenmodells ($\delta = 0$, $N = 2$, $T = 2$, $K = 4$) mit gültigem LOP und dem gelb umrandeten Einperiodenmodell mit ungültigem LOP (Fall I). In den Knoten $A_{t,k}$ sind die Werte des $\mathcal{P}$-adaptierten Preisprozesses $S$, des Bewertungsprozesses $\Psi$ und der rechten Seiten $a_{t,k}$ der Gleichungssysteme $(\mathrm{GS}\Psi A_{t,k})$ angegeben.

b) Es wird jetzt noch gezeigt, dass im vorliegenden Mehrperiodenmodell auch ein Einperiodenmodell enthalten ist, für das im Fall I) das LOP ungültig und im Fall II) das LOP gültig ist. Für das in der Abbildung 3.11 gelb umrandete Einperiodenmodell zum Ausgangsknoten $A_{1,1}$ ist die Bewertungsprozesskomponente $\Psi_1(A_{1,1}) = 0$, sodass hier nicht mit Satz 3.4, b) auf die Gültigkeit des LOP in diesem Einperiodenmodell geschlossen werden kann. Tatsächlich ist im Fall I)

$$S_1(A_{1,1}) = (72.5,132)^\top \notin \text{lin}\,(29,66)^\top = \text{lin}\,S_2(A_{22}) = \text{lin}\,\{S_2(A_{21}),S_2(A_{22})\},$$

d. h. für das zum Einperiodenmodell gehörige Gleichungssystem des Bewertungsvektors $(\psi_2(A_{2,1}),\psi_2(A_{2,2}))^\top$ die rechte Seite des Gleichungssystems nicht im Spaltenraum der Matrix, somit das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 58 & 29 \\ 132 & 66 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_2(A_{2,1}) \\ \psi_2(A_{2,2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72.5 \\ 132 \end{pmatrix}$$

nicht lösbar und nach Satz 6.1 bzw. Satz 6.3, 19) das LOP im Einperiodenmodell ungültig. Zur Unterscheidung von den Komponenten $\Psi_t$ des Bewertungsprozesses $\Psi$ sind die Komponenten $\psi_t$ des Bewertungsvektors $\psi$ mit kleinem griechischen Buchstaben geschrieben.

Andererseits ist mit den Zahlenwerten von Fall II)

$$S_1(A_{1,1}) = (72.5,165)^\top = 2.5\cdot(29,66)^\top = 2.5\cdot S_2(A_{22}) \in \text{lin}\,\{S_2(A_{21}),S_2(A_{22})\},$$

somit das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 58 & 29 \\ 132 & 66 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_2(A_{2,1}) \\ \psi_2(A_{2,2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72.5 \\ 165 \end{pmatrix}$$

lösbar und nach Satz 6.1 das LOP im Einperiodenmodell gültig. Ein Bewertungsvektor $(\psi_2(A_{2,1}),\psi_2(A_{2,2}))^\top$ für dieses Einperiodenmodell ist nicht eindeutig bestimmt und beispielsweise durch den positiven Vektor $(\psi_2(A_{2,1}),\psi_2(A_{2,2}))^\top = (0.25,2)^\top$ gegeben. Die allgemeine Lösung ist $(\psi_2(A_{2,1}),\psi_2(A_{2,2}))^\top = (0,2.5)^\top + \lambda\cdot(1,-2)^\top$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Daher liegt im Fall II) in dem zum Ausgangsknoten $A_{1,1}$ gehörigen Einperiodenmodell nach Abschnitt 6.2.3 sogar die Arbitragefreiheit vor.

Das zum Ausgangsknoten $A_{1,2}$ gehörige Einperiodenmodell besitzt ebenfalls einen positiven Bewertungsvektor $(\psi_2(A_{2,3}),\psi_2(A_{2,4}))^\top = (\Psi_2(A_{2,3}),\Psi_2(A_{2,4}))^\top/\Psi_1(A_{1,2}) = (0.408,0.612)^\top$ und ist somit ebenfalls arbitragefrei.

Das zum Ausgangsknoten $A_0$ gehörige Einperiodenmodell ist jedoch nicht arbitragefrei, da der einzige Bewertungsvektor $(\Psi_1(A_{1,1}),\Psi_1(A_{1,2}))^\top/\Psi_0(A_0) = (0,0.5)^\top$ nicht (strikt) positiv ist. Nach dem in Abschnitt 3.6.3 noch folgenden Satz 3.10 ist dann das gesamte Mehrperiodenmodell nicht arbitragefrei. △

### 3.4.5 Geometrische Bedeutung der von Null verschiedenen Komponenten des Bewertungsprozesses

Es sei im Mehrperiodenmodell das LOP gültig und gemäß Abschnitt 3.3.3 (auch ohne die Voraussetzung (AWS$^\delta$)) $\Psi \in \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\} \subseteq \mathcal{A}$ ein normierter Bewertungsprozess. Die Indexmenge der Koordinaten-$n_1$-Tupel[32] ($n_1 = k_0+\ldots+k_T$) der $\mathcal{P}$-adaptierten reellwertigen stochastischen Prozesse $X \in \mathcal{W}$ ($\mathcal{P} = (\mathcal{P}_t)_{t\in I}$ Filtration von Partitionen $\mathcal{P}_t$ von $\Omega$) ist gegeben durch

$$I(\mathcal{W}) = \bigcup_{t=0}^{T}\big(\{t\}\times\mathcal{P}_t\big) = \{(t,A_{t,k}) : t \in I,\, A_{t,k} \in \mathcal{P}_t\}.$$

Diese kann nach den Vorzeichen der Komponenten $\Psi_t(A_{t,k})$ von $\Psi$ in drei von $\Psi$ abhängige Teilmengen zerlegt werden:

---

[32] Die Tupel-Darstellung eines stochastischen Prozesses $X \in \mathcal{W}$ wird in Abschnitt 2.6.2 behandelt.

$$I(\mathcal{W}) = I_+(\Psi) \cup I_0(\Psi) \cup I_-(\Psi)$$

mit

$$I_+(\Psi) = \{(t,A_{t,k}) \in I(\mathcal{P}) : \Psi_t(A_{t,k}) > 0\},$$
$$I_0(\Psi) = \{(t,A_{t,k}) \in I(\mathcal{P}) : \Psi_t(A_{t,k}) = 0\},$$
$$I_-(\Psi) = \{(t, A_{t,k}) \in I(\mathcal{P}) : \Psi_t(A_{t,k}) < 0\}.$$

Wegen $\Psi_0(A_0) = 1 > 0$ ist zumindest die Indexmenge $I_+(\Psi)$ der positiven $\Psi$-Komponenten nichtleer. Weiter können zu den positiven bzw. negativen Komponenten von $\Psi$ die beiden folgenden Teilmengen von $\mathcal{W}$ jeweils als Durchschnitt offener linearer Halbräume gebildet werden:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{>0}(\Psi) &:= \{X \in \mathcal{W} : X_t(A_{t,k}) > 0 \text{ für } (t,A_{t,k}) \in I_+(\Psi)\}\\ &= \{X \in \mathcal{W} : X_t(A_{t,k}) > 0 \text{ für } (t,A_{t,k}) \text{ mit } \Psi_t(A_{t,k}) > 0\},\\ \mathcal{W}_{<0}(\Psi) &:= \{X \in \mathcal{W} : X_t(A_{t,k}) < 0 \text{ für } (t,A_{t,k}) \in I_-(\Psi)\}\\ &= \{X \in \mathcal{W} : X_t(A_{t,k}) < 0 \text{ für } (t,A_{t,k}) \text{ mit } \Psi_t(A_{t,k}) < 0\}.\end{aligned}$$

Wegen $I_+(\Psi) \neq \emptyset$ ist $\mathcal{W}_{>0}(\Psi)$ eine echte Teilmenge von $\mathcal{W}$: Sie ist ein offener polyedrischer Kegel, eine Verallgemeinerung des positiven Orthanten $\mathcal{W}_{>0} = \{X \in \mathcal{W} : X > 0\}$ von $\mathcal{W}$ und wird hier als der nur hinsichtlich der Indexmenge $I_+(\Psi)$ (also der positiven Komponenten $\Psi_t(A_{t,k})$ von $\Psi$) positive Orthant oder kürzer als der **$\Psi$-positive Orthant** in $\mathcal{W}$ bezeichnet. Bei positiver Komponente $\Psi_t(A_{t,k})$ hat in $\mathcal{W}_{>0}(\Psi)$ die entsprechende Komponente $X_t(A_{t,k})$ von $X$ das gleiche Vorzeichen wie $\Psi_t(A_{t,k})$ und wird demnach auf die positive Halbachse $]0,\infty[$ eingeschränkt. Bei nichtpositiver Komponente $\Psi_t(A_{t,k})$ wird für $X_t(A_{t,k})$ die gesamte reelle Achse $\mathbb{R}$ zugelassen.
Da dieser $\Psi$-positive Orthant $\mathcal{W}_{>0}(\Psi)$ den Bewertungsprozess $\Psi$ als Element enthält, hat er mit $\mathcal{M}^\perp$ einen nichtleeren Durchschnitt:

$$\Psi \in \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{W}_{>0}(\Psi) \neq \emptyset.$$

Diese Eigenschaft des orthogonalen Komplements $\mathcal{M}^\perp$ von $\mathcal{M}$ lässt sich mit dem nachfolgend noch angegebenen Alternativsatz 3.5 der konvexen Geometrie in eine Eigenschaft von $\mathcal{M}$ übertragen. Zur Formulierung der entsprechenden Aussage für $\mathcal{M}$ ist vorher noch eine weitere Teilmenge von $\mathcal{W}$ als Verallgemeinerung des schwach positiven Orthanten $\mathcal{W}_{\geq 0}$ von $\mathcal{W}$ zu definieren:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\geq 0}(\Psi) &:= \{X \in \mathcal{W} : \; X_t(A_{t,k}) \geq 0 \text{ für } (t,A_{t,k}) \in I_+(\Psi) \wedge\\ &\qquad\qquad X_t(A_{t,k}) = 0 \text{ für } (t,A_{t,k}) \notin I_+(\Psi)\} \setminus \{0\}\\ &= \text{cone}\,\{\mathbf{1}_{t,A_{t,k}} : (t,A_{t,k}) \in I_+(\Psi)\} \setminus \{0\}\\ &= \text{cone}\,\{\mathbf{1}_{t,A_{t,k}} : (t,A_{t,k}) \text{ mit } \Psi_t(A_{t,k}) > 0\} \setminus \{0\}\end{aligned}$$

Bei positiver Komponente $\Psi_t(A_{t,k})$ (z. B. für $(t,A_{t,k}) = (0,A_0)$ wegen $\Psi_0(A_0) = 1 > 0$) wird in $\mathcal{W}_{\geq 0}(\Psi)$ die entsprechende Komponente $X_t(A_{t,k})$ von $X$ eingeschränkt auf die nichtnegative Halbachse $[0,\infty[$, bei nichtpositiver Komponente $\Psi_t(A_{t,k})$ wird für $X_t(A_{t,k})$ nur der Wert 0 zugelassen. Abschließend wird noch der Nullpunkt $0 \in \mathcal{W}$ entfernt. Die Menge $\mathcal{W}_{\geq 0}(\Psi)$ ist der im Nullpunkt punktierte, von den $\mathcal{W}$-Basisvektoren $\mathbf{1}_{t,A_{t,k}}$ (Arrow-Debreu-Papieren, siehe Abschnitt 3.8.1) zur Indexmenge $I_+(\Psi)$ aufgespannte konvexe lineare Kegel. Sie wird

hier als der zur Indexmenge $I_+(\Psi)$ gehörige verallgemeinerte schwach positive Orthant oder kürzer als der $\Psi$-**schwach positive Orthant** von $\mathcal{W}$ bezeichnet.

Nach dem nachfolgenden Alternativsatz 3.5 (mit $T = \mathcal{M}$, $\mathbb{R}^n_{\geq 0}(J) = \mathcal{W}_{\geq 0}(\Psi)$, $a = \Psi$ und zwar mit der elementaren Beweisrichtung „⇐“) folgt, dass die Menge $\mathcal{M}$ der Kapitalmarktgeschäfte und der $\Psi$-schwach positive Orthant $\mathcal{W}_{\geq 0}(\Psi)$ einen leeren Durchschnitt besitzen:

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{W}_{\geq 0}(\Psi) = \emptyset.$$

Darüberhinaus liefert der Satz die Inklusionen

$$\mathcal{M} \subseteq H_{\Psi,0} = \{X \in \mathcal{W} : \Psi^{\mathsf{T}} X = 0\} \text{ und}$$
$$\mathcal{W}_{\geq 0}(\Psi) \subseteq H^{>}_{\Psi,0} = \{X \in \mathcal{W} : \Psi^{\mathsf{T}} X > 0\}.$$

**Die geometrische Bedeutung** der positiven Komponenten des Bewertungsprozesses $\Psi$ liegt also darin, dass bei gültigem LOP mit einem Bewertungsprozess $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1}$ die Menge $\mathcal{M}$ den $\Psi$-schwach positiven Orthanten $\mathcal{W}_{\geq 0}(\Psi)$ nicht trifft, der von den zu den positiven Komponenten von $\Psi$ gehörigen $\mathcal{W}$-Basisvektoren aufgespannt wird. Dies beruht darauf, dass die Menge $\mathcal{M}$ in der linearen Hyperebene $H_{\Psi,0}$ liegt und der $\Psi$-schwach positive Orthant $\mathcal{W}_{\geq 0}(\Psi)$ im offenen linearen Halbraum $H^{>}_{\Psi,0}$.

Falls $I_-(\Psi) \neq \emptyset$ ist, also für mindestens ein Indexpaar $(t,A_{t,k}) \in I(\mathcal{P})$ der Wert $\Psi_t(A_{t,k}) < 0$ ist, ist der offene polyedrische Kegel $\mathcal{W}_{<0}(\Psi)$ eine echte Teilmenge von $\mathcal{W}$, die in Verallgemeinerung des negativen Orthanten $\mathcal{W}_{<0}$ von $\mathcal{W}$ als der $\Psi$-**negative Orthant** in $\mathcal{W}$ bezeichnet werden kann. Um nun den Alternativsatz 3.5 anzuwenden, beachtet man, dass für beliebiges $\Theta \in \mathcal{W}$ die Inzidenz $\Theta \in \mathcal{W}_{>0}(\Theta)$ gilt. Es gilt dann insbesondere für $\Theta = -\Psi$ neben $\Theta = -\Psi \in \mathcal{W}_{>0}(-\Psi)$ noch die Inzidenz $\Theta = -\Psi \in -\mathcal{M}^{\perp} = \mathcal{M}^{\perp}$. Demnach ist

$$\mathcal{M}^{\perp} \cap \mathcal{W}_{>0}(-\Psi) \neq \emptyset$$

und nach dem Alternativsatz 3.5

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{W}_{\geq 0}(-\Psi) = \emptyset.$$

Nun ist

$$\mathcal{W}_{\geq 0}(-\Psi) = \text{cone}\,\{\mathbf{1}_{t,A_{t,k}} : (t,A_{t,k}) \text{ mit } \Psi_t(A_{t,k}) < 0\} \setminus \{0\}$$
$$=: \mathcal{W}_{\leq 0}(\Psi),$$

sodass auch $\mathcal{M}$ und der $\Psi$-**schwach negative Orthant** $\mathcal{W}_{\leq 0}(\Psi)$ einen leeren Durchschnitt haben:

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{W}_{\leq 0}(\Psi) = \emptyset.$$

Hierbei ist jedoch zu beachten, dass im Falle $I_-(\Psi) = \emptyset$ (d. h. bei $\Psi \geq 0$)

$$\mathcal{W}_{<0}(\Psi) = \mathcal{W},$$
$$\text{cone}\,\{\mathbf{1}_{t,A_{t,k}} : \Psi_t(A_{t,k}) < 0\} = \text{cone}\,\emptyset = O = \{0\},$$
$$\mathcal{W}_{\leq 0}(\Psi) = \text{cone}\,\emptyset \setminus \{0\} = \emptyset$$

gilt, also die zugehörige Aussage $\mathcal{M} \cap \mathcal{W}_{\leq 0}(\Psi) = \emptyset$ trivial ist. Falls aber negative Komponenten beim Bewertungsprozess $\Psi$ auftreten, so trifft $\mathcal{M}$ auch den nichtleeren punktierten

konvexen linearen Kegel $\mathcal{W}_{\lesssim 0}(\Psi)$ nicht, der von den zu den negativen Komponenten von $\Psi$ gehörigen $\mathcal{W}$-Basisvektoren aufgespannt wird. Insgesamt gilt

$$\mathcal{M} \cap ( \mathcal{W}_{\gtrsim 0}(\Psi) \cup \mathcal{W}_{\lesssim 0}(\Psi) ) = \emptyset.$$

Für den von allen $\mathcal{W}$-Basisvektoren $\mathbf{1}_{t,A_{t,k}}$ mit $\Psi_t(A_{t,k}) \neq 0$ gemeinsam aufgespannten punktierten konvexen linearen Kegel cone $\{\mathbf{1}_{t,A_{t,k}} : \Psi_t(A_{t,k}) \neq 0\}) \setminus \{0\}$ kann aber im Allgemeinen kein leerer Durchschnitt mit $\mathcal{M}$ gefolgert werden. Erst bei Vorliegen der Arbitragefreiheit und somit eines positiven Bewertungsprozesses $\Psi = \Phi$ (nach Abschnitt 3.6.1) hat der von sämtlichen $\mathcal{W}$-Basisvektoren $\mathbf{1}_{t,A_{t,k}}$ aufgespannte punktierte konvexe lineare Kegel, also der schwach positive Orthant $\mathcal{W}_{\gtrsim 0}$ von $\mathcal{W}$, mit $\mathcal{M}$ einen leeren Durchschnitt. In Abschnitt 3.6.4 wird eine schrittweise Zunahme der Anzahl der positiven Bewertungsprozesskomponenten $\Psi_t(A_{t,k})$ geometrisch interpretiert durch die Ausdehnung des $\Psi$-schwach positiven Orthanten $\mathcal{W}_{\gtrsim 0}(\Psi)$, ausgehend vom punktierten Strahl $\mathcal{Z}_{>0}$ = cone $\mathbf{1}_{0,\Omega} \setminus \{0\}$ bis zum gesamten schwach positiven Orthanten $\mathcal{W}_{\gtrsim 0}$, und somit als Übergang vom LOP zur Arbitragefreiheit (AF).

**Ein Alternativsatz der konvexen Geometrie**

Der weiter unten in Abschnitt 3.6.1 noch folgende Alternativsatz 3.7 lässt sich mit dem gleichen Beweisweg[33] auch noch verallgemeinern, indem die Positivität der Komponenten des Vektors $a \in T^{\perp}$ nicht für alle Indizes $j \in I_n := \{1,\ldots,n\}$, sondern nur für die Indizes $j$ einer nichtleeren Teilmenge $J \subseteq I_n$ charakterisiert wird. Zur Formulierung des damit resultierenden Alternativsatzes 3.5 verwendet man als Verallgemeinerung des schwach positiven Orthanten $\mathbb{R}^n_{\gtrsim \mathbf{0}}$ dessen Teilmenge $\mathbb{R}^n_{\gtrsim \mathbf{0}}(J)$, für deren Vektoren $x$ die Komponenten $x_i$ für die Indizes $i \in I_n \setminus J$ den Wert Null haben, die Komponenten $x_j$ für die Indizes $j \in J$ nichtnegativ sind und mindestens ein Index $k \in J$ existiert mit $x_k > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^n_{\gtrsim \mathbf{0}}(J) &= \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 0 \;\forall\, i \in I_n \setminus J, x_j \geq 0 \;\forall\, j \in J, \exists\, k \in J \text{ mit } x_k > 0\} \\
&= \mathbb{R}^n_{\gtrsim \mathbf{0}} \cap \bigcap_{i \in I_n \setminus J} H_{e_i,0} \\
&= \{y = \sum_{j \in J} y_j e_j \;: y_j \geq 0\} \setminus \{o\}. \\
&= \text{cone } \{e_j : j \in J\} \setminus \{o\}.
\end{aligned}$$

---

[33] Den ausführlichen Beweis des Satzes findet man noch etwas allgemeiner für einen abgeschlossenen konvexen linearen Kegel $T$ anstelle des linearen Unterraums $T$ als Downloadthema auf der Autorenwebsite www.pleier-r.de. Dieser Alternativsatz ist ein sehr nützliches und geometrisch anschauliches Hilfsmittel, um zu einem linearen Unterraum unmittelbar die Existenz eines Normalenvektors mit (evtl. teilweise) positiven Komponenten zu begründen. Neben der hier verwendeten allgemeinen Version in Satz 3.5 kommt er in diesem Buch auch noch in Spezialfällen zur Anwendung: Als Satz 3.2 dient er zur Charakterisierung des LOP durch die Existenz eines Bewertungsprozesses in Abschnitt 3.4.1 beim Beweisteil J zu Satz 3.3. Als Satz 3.7 dient er zur Charakterisierung der Arbitragefreiheit (AF) durch die Existenz eines Diskontierungsprozesses in Abschnitt 3.6.1 (Satz 3.8), zur Charakterisierung der spezielleren Arbitragefreiheit (AFsf) durch die Existenz eines Diskontvektors in den Abschnitten 5.1.6 und 5.1.7 (Sätze 5.4 und 5.5) und der spezielleren Arbitragefreiheit (AFsf) beim Einperiodenmodell ($T = 1$) in Abschnitt 6.2.4.

Die Menge $\mathbb{R}^n_{\geqslant \mathbf{o}}(J)$ ist der schwach positive Orthant in dem Teilraum von $\mathbb{R}^n$, der durch die linearen Gleichungen $x_i = 0$ für die $i \in I_n \setminus J$ beschrieben wird und daher der Durchschnitt der (linearen, homogenen) Hyperebenen $\{x_i = 0\}$ $(i \in I_n \setminus J)$ ist, und auch eine Teilmenge des schwach positiven Orthanten $\mathbb{R}^n_{\geqslant \mathbf{o}}$ des $\mathbb{R}^n$. Weiter ist dieser zur Indexmenge $J$ gehörige verallgemeinerte schwach positive Orthant (Abk.: der $J$-**schwach positive Orthant**) $\mathbb{R}^n_{\geqslant \mathbf{o}}(J)$ der im Nullpunkt punktierte von den speziellen Standardbasisvektoren $e_j$ der Indizes $j \in J$ aufgespannte konvexe lineare Kegel. Als Spezialfälle ergeben sich für $\mathbb{R}^n_{\geqslant \mathbf{o}}(J)$ mit $J = I_n$ der gesamte schwach positive Orthant $\mathbb{R}^n_{\geqslant \mathbf{o}}(I_n) = \mathbb{R}^n_{\geqslant \mathbf{o}}$ des $\mathbb{R}^n$ und mit $J = \{1\}$ der punktierte Strahl $\mathbb{R}^n_{\geqslant \mathbf{o}}(\{1\}) = \text{cone } e_1 \setminus \{o\} = \text{ray } e_1 \setminus \{o\}$ des ersten Standardbasisvektors $e_1 = (1,0,\ldots,0)^\mathsf{T}$.

Weiter definiert man zur Indexmenge $J$ als Verallgemeinerung des positiven Orthanten $\mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}$ in $\mathbb{R}^n$ die umfangreichere Teilmenge

$$\mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}(J) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j > 0 \; \forall \, j \in J\} = \bigcap_{j \in J} H^{>}_{e_j,0}$$

des $\mathbb{R}^n$ als den $J$-**positiven Orthanten**, bei dem jetzt nur die Positivität der Komponenten $x_j$ mit den Indizes $j \in J$ gefordert wird und über die Vorzeichen der restlichen Komponenten $x_i$ $(i \in I_n \setminus J)$ keine Aussage gemacht wird. Als Spezialfälle erhält man für $\mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}(J)$ mit $J = I_n$ den (strikt) positiven Orthanten $\mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}(I_n) = \mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}$ und mit $J = \{1\}$ den offenen linearen Halbraum $\mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}(\{1\}) = H^{>}_{e_1,0} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\}$. Mit $J = I_n$ erhält man den Alternativsatz 3.7 in Abschnitt 3.6.1 und mit $J = \{1\}$ den Alternativsatz 3.2 in Abschnitt 3.4.1.

**Satz 3.5 Alternativsatz zur Disjunktheit eines linearen Unterraums und eines verallgemeinerten schwach positiven Orthanten**

Es sei $J$ eine nichtleere Teilmenge der Indexmenge $I_n = \{1,\ldots,n\}$. Der lineare Unterraum $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und der zur Indexmenge $J$ gehörige verallgemeinerte schwach positive Orthant ($J$-schwach positive Orthant) $\mathbb{R}^n_{\geqslant \mathbf{o}}(J)$ sind genau dann disjunkt, wenn es einen Vektor $a = (a_1,\ldots,a_n)^\mathsf{T}$ im orthogonalen Komplement $T^\perp$ von $T$ mit den positiven Komponenten $a_j$ für die Indizes $j \in J$ gibt $(a \in \mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}(J))$ und somit $T$ in der (linearen, homogenen) Hyperebene $H_{a,0} = \{a\}^\perp$ und $\mathbb{R}^n_{\geqslant \mathbf{o}}(J)$ im offenen (linearen, homogenen) Halbraum $H^{>}_{a,0}$ mit dem Normalenvektor $a$ liegt:

$$T \cap \mathbb{R}^n_{\geqslant \mathbf{o}}(J) = \emptyset \Leftrightarrow T^\perp \cap \mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}(J) \neq \emptyset.$$

Mit einem $a \in T^\perp \cap \mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}(J)$ gilt $T \subseteq H_{a,0}$ und $\mathbb{R}^{n,J}_{\geqslant \mathbf{o}} \subseteq H^{>}_{a,0}$.

Der Satz lässt sich auch als Alternativsatz formulieren: Es hat entweder $T$ mit dem $J$-schwach positiven Orthanten $\mathbb{R}^{n,J}_{\geqslant \mathbf{o}}$ einen nichtleeren Durchschnitt oder es besitzt das orthogonale Komplement $T^\perp$ von $T$ mit dem $J$-positiven Orthanten $\mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}(J)$ einen nichtleeren Durchschnitt. Von den beiden folgenden Aussagen gilt also entweder (1) oder (2):

(1) $T \cap \mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}(J) \neq \emptyset$;

(2) $T^\perp \cap \mathbb{R}^n_{>\mathbf{o}}(J) \neq \emptyset$.

## 3.5 Charakterisierungen der Vollständigkeit (VS)

Die **Vollständigkeit** (VS) des Marktmodells (englisch: complete market model),

(VS) $L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{W}$,

d. h. die Surjektivität der linearen Abbildung $L$, ist nach Abschnitt 2.10.1 gleichbedeutend zu

$$\ker L^* = (L(\mathcal{H}_N))^\perp = \mathcal{W}^\perp = O$$

und damit zur Injektivität der adjungierten Abbildung $L^*$. Die Injektivität der Abbildung $L^*$ hat zur Folge, dass die inhomogene lineare Gleichung $L^*(\Psi) = b$ höchstens eine Lösung $\Psi$ hat und somit höchstens ein Bewertungsprozess existiert.
Eine weitere Charakterisierung der Vollständigkeit (VS) ist dadurch gegeben, dass alle $\mathcal{W}$-Basisvektoren $w_{t,A_{t,k}} = \mathbf{1}_{t,A_{t,k}}$ $(t \in I,\ k \in \{1,\ldots,k_t\})$ duplizierbar sind, also in $L(\mathcal{H}_N)$ liegen (siehe Abschnitt 3.8.1).

### 3.5.1 Vielfalt der Bewertungsprozesse und Diskontierungsprozesse

Unter der Voraussetzung des LOP, welches nach Satz 3.3, 8) durch die Existenz einer Lösung $\Psi \in \mathcal{W}$ der inhomogenen linearen Gleichung $L^*(\Psi) = b$ charakterisiert wird, ist die allgemeine Lösung $\Psi$ von $L^*(\Psi) = b$ gegeben durch

$$\Psi = \Psi' + Y$$

mit einer speziellen Lösung $\Psi'$ der Gleichung $L^*(\Psi) = b$ und der allgemeinen Lösung $Y$ der zugehörigen homogenen Gleichung $L^*(Y) = 0$ bzw. $Y \in \ker L^*$, also durch die Gesamtheit der Prozesse

$$\Psi \in \Psi' + \ker L^* = L^{*-1}(\{b\}) = \mathcal{A}$$

Dabei kann die spezielle Lösung $\Psi'$ nach Abschnitt 3.3.3 beispielsweise als der eindeutig bestimmte duplizierbare Bewertungsprozess $\vartheta \in \mathcal{M}^\perp \cap L(\mathcal{H}_N)$ oder als ein normierter $\mathcal{M}$-Normalenvektor $\Psi' \in \mathcal{M}^{\perp 1} \subseteq \mathcal{A}$ gewählt werden. Die Lösungsmenge $L^{*-1}(\{b\})$ ist in dem als affinen Raum betrachteten Vektorraum $\mathcal{W}$ die Minkowski-Summe[34] aus dem Punkt $\Psi'$ und dem linearen Unterraum $\ker L^*$, also ein **affiner Unterraum** von $\mathcal{W}$. Unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$ ist die Lösungsmenge $L^{*-1}(\{b\})$ nach Satz 2.1, 12) in Abschnitt 2.11 auch der Durchschnitt des linearen Unterraums $\mathcal{M}^\perp$ mit der affinen Hyperebene $\{X_0 = 1\}$: $L^{*-1}(\{b\}) = \mathcal{M}^{\perp 1}$.
Ist $p := \dim \ker L^*$ $(= \dim \mathcal{W} - \dim L^*(\mathcal{W}))$, so gibt es maximal $p$ linear unabhängige Vektoren $Y^i \in \ker L^*$ $(i = 1,\ldots,p)$. Ist weiter $\Psi' \in \mathcal{A} = L^{*-1}(\{b\})$ ein spezieller Bewertungsprozess und setzt man noch $Y^0 := 0$, so erhält man mit den Prozessen

$$\Psi^i := \Psi' + Y^i \in L^{*-1}(\{b\}) = \mathcal{A} \qquad (i = 0,\ldots,p)$$

---

[34] Die Minkowski-Summe $A + B := \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$ zweier Teilmengen $A$ und $B$ eines Vektorraums $V$ ist benannt nach dem deutschen Mathematiker und Physiker Hermann Minkowski (1864–1909).

die Maximalanzahl von $p + 1$ affin unabhängigen[35] [36] Bewertungsprozessen für das Marktmodell. Je unvollständiger das Marktmodell ist, desto größer ist die Maximalanzahl affin unabhängiger Bewertungsprozesse. Außerdem wird mit Satz 3.9 b in Abschnitt 3.6.1 noch gezeigt, dass unter der Voraussetzung der Arbitragefreiheit (AF) die Maximalzahl affin unabhängiger Diskontierungsprozesse ebenfalls durch $p + 1$ gegeben ist.

**Maximalzahl affin unabhängiger Bewertungsprozesse und Diskontierungsprozesse**
Es sei $p$ := dim ker $L^*$ (= dim $\mathcal{W}$ - dim $L^*(\mathcal{W})$ ).
Unter der Voraussetzung des (LOP) ist $p + 1$ die Maximalzahl affin unabhängiger Bewertungsprozesse.
Unter der Voraussetzung der Arbitragefreiheit (AF) ist $p + 1$ die Maximalzahl affin unabhängiger Diskontierungsprozesse.

### 3.5.2 LOP und Vollständigkeit

Unter der Voraussetzung von LOP bedeutet die Vollständigkeit (VS) wegen $p = 0$ somit die Einzigkeit der Lösung $\Psi \in \mathcal{W}$ von $L^*(\Psi) = b$:

$$\exists_1\ \Psi \in \mathcal{W} \text{ von } L^*(\Psi) = b.$$

Die Bedingungen (LOP) und (VS) liegen also genau dann gleichzeitig vor, wenn genau ein $\Psi \in \mathcal{W}$ bzw. ein lineares Funktional $\pi = \langle \Psi, . \rangle_{\mathcal{W}} = \Psi^{\mathsf{T}}$ auf $\mathcal{W} = L(\mathcal{H}_N)$ mit $L^*(\Psi) = b$ existiert. Der Bewertungsprozess $\Psi$ stimmt dann mit dem nach Satz 3.3, 12) eindeutig bestimmten duplizierbaren Bewertungsprozess $\vartheta$ überein. Die Einzigkeit des linearen Funktionals $\pi = \langle \Psi, . \rangle_{\mathcal{W}} = \Psi^{\mathsf{T}}$ für beliebiges $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp}$ mit $L^*(\Psi) = b$ ist bei Einschränkung auf dem Unterraum $L(\mathcal{H}_N)$ von $\mathcal{W}$ nach den Erläuterungen zu Satz 3.3 in Abschnitt 3.4.1 allein schon bei gültigem LOP gegeben.
Eine analoge Charakterisierung der Vollständigkeit (VS) in einem arbitragefreien Marktmodell durch die Existenz von genau einem Diskontierungsprozess $\Phi$ wird mit Satz 3.9, a) in Abschnitt 3.6.1 gegeben.

Da das LOP nach Satz 3.3, 10), 11), 14) unter der Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) für den Unterraum $\mathcal{M}^{\perp}$ die Darstellung $\mathcal{M}^{\perp} = \ker L^* \oplus \text{lin}\,\{\Psi\}$ ($\Psi \in \mathcal{M}^{\perp}$ mit $\Psi_0 = 1$) bedeutet, ergibt die zusätzlich vorliegende Vollständigkeit (VS) dann $\mathcal{M}^{\perp} = O + \text{lin}\,\{\Psi\} = \text{lin}\,\{\Psi\}$, sodass $\mathcal{M}^{\perp}$ ein eindimensionaler Unterraum von $\mathcal{W} = L(\mathcal{H}_N)$ ist. Unter den Voraussetzungen (LOP) und (VS) ist dann $\mathcal{W} = L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$ die direkte Summe der (linearen) Hyperebene $\mathcal{M}$ und des eindimensinalen Unterraums $\mathcal{M}^{\perp} = \text{lin}\,\{\Psi\}$ von $\mathcal{W}$:

$$L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}\ (= \mathcal{W}) \text{ mit eindimensionalem } \mathcal{M}^{\perp} = \text{lin}\,\{\Psi\}.$$

Umgekehrt folgt aus einer derartigen Darstellung von $L(\mathcal{H}_N)$ die Vollständigkeit und auch das LOP, da dim $L(\mathcal{H}_N)$ = dim $\mathcal{M}$ + 1 nach Satz 3.3, 26) unter der Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) charakteristisch für das LOP ist. Eine derartige Darstellung von $L(\mathcal{H}_N)$ mit eindi-

---

[35] Eine Familie von $p + 1$ Punkten $a_0, a_1, \ldots, a_p$ eines als affinen Raum betrachteten Vektorraums heißt affin unabhängig, wenn die $p$ zum festen Punkt $a_0$ gebildetenVerbindungsvektoren $a_1 - a_0, \ldots, a_p - a_0$ linear unabhängig sind (Lexikon der Mathematik, Bd. 1, 2000, S. 29).

[36] Die Definition einer Basis und die Definition der Dimension eines Vektorraums als Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren des Raumes findet man bei Bröcker (2004), S. 38, 41, Wagner (1981), S. 34, 39, Lexikon der Mathematik, Bd. 1 (2000), S. 169, 419.

mensionalem $\mathcal{M}^{\perp}$ ist also charakteristisch für das gleichzeitige Vorliegen der Vollständigkeit und des LOP. In diesem Fall hat jedes Zahlungsprofil $X \in \mathcal{W} = L(\mathcal{H}_N)$ die Darstellung $X = Z + \lambda\Psi$, $Z \in \mathcal{M}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, mit $\pi(X) = \pi(Z) + \lambda\pi(\Psi) = \lambda\pi(\Psi)$, also mit $\lambda = \pi(X)/\pi(\Psi) = \pi(X)/\left\| \Psi \right\|^2$ und somit

$$X = Z + \pi(X)\Psi/\left\| \Psi \right\|^2.$$

Die Vollständigkeit (VS) und ein ungültiges LOP sind unter der Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) gleichbedeutend zu

$$\mathcal{W} = L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{M}$$

bzw. zu $O = \ker L^* = \mathcal{M}^{\perp}$. Die Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) wird dabei für den Schluss „$L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{M} \Rightarrow$ LOP ungültig“ bzw. den äquivalenten Schluss „$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{V} \cap \mathcal{M} \neq O$“ benötigt. Die Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) ist notwendig für die Ungültigkeit des LOP, da im Sonderfall $S_0^{\delta} = 0$ stets $\mathcal{V} = O$, $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ und das LOP gültig ist. Unter dieser Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) ist nach Abschnitt 2.8.4 $\mathcal{V} = \mathcal{E}$ eindimensional und bei $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{M}$ dann $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = \mathcal{V} \neq O$ und das LOP ungültig.
Die gegenseitige Lage der verschiedenen Unterräume von $\mathcal{H}_N$ bzw. von $\mathcal{W}$ bei vorliegender Vollständigkeit wird in Abbildung 3.12 für den Fall a) des gültigen LOP und für den Fall b) des ungültigen LOP dargestellt.

### 3.5.3 Vollständigkeit und Dimensionsgleichung $m = n_1$

Mit dem Dimensionssatz[37] für die lineare Abbildung $L$, nach dem die Summe aus Rang rg $L$ (= dim $L(\mathcal{H}_N)$) und Defekt def $L$ (= dim ker $L$) von $L$ gleich der Dimension dim $\mathcal{H}_N$ des Originalraums $\mathcal{H}_N$ ist,

$$\dim L(\mathcal{H}_N) + \dim \ker L = \dim \mathcal{H}_N,$$

folgt aus der Vollständigkeit (VS) $L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{W}$ die notwendige Bedingung

$$m = \dim \mathcal{H}_N \geq \dim L(\mathcal{H}_N) = \dim \mathcal{W} = n_1,$$

also $m \geq n_1$. Unter Voraussetzung der Vollständigkeit (VS) gilt somit die Dimensionsgleichung

$$m = n_1$$

genau dann, wenn ker $L = O$, also $L$ injektiv und insgesamt ein Isomorphismus ist. Für das Marktmodell bedeutet dies (wegen ker $L = O \subseteq$ ker $V_0$) nach Satz 3.3, 5) insbesondere auch die Gültigkeit des LOP. Nach Abschnitt 2.10.1 ist dann auch die zu $L$ adjungierte Abbildung $L^*$ ein Isomorphismus. Umgekehrt gilt bei isomorpher Abbildung $L$ auch $L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{W}$ und ker $L = O$, also (VS) und LOP, außerdem

$$m = \dim \mathcal{H}_N = \dim L(\mathcal{H}_N) = \dim \mathcal{W} = n_1.$$

---

[37] Den Dimensionssatz für eine auf einem endlichdimensionalen Vektorraum definierte lineare Abbildung findet man bei Kremer (2006), S. 415, Wagner (1981), S. 65, Kowalsky (1967), S. 53, und Bröcker (2004), S. 45.

**Satz 3.6 Charakterisierungen der Vollständigkeit des Marktmodells**

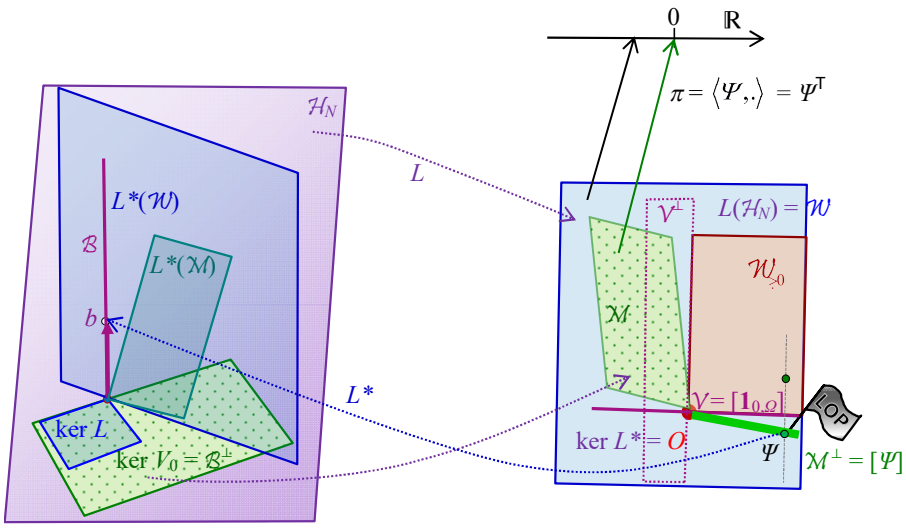
1) Das Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ ist genau dann vollständig, wenn jeweils eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
   a) $\ker L^* = O$, also $L^*$ injektiv.
   b) Alle $\mathcal{W}$-Basisvektoren $w_{t,A_{t,k}} = \mathbf{1}_{t,A_{t,k}}$ $(t \in I, k \in \{1,\ldots,k_t\})$ liegen auch in $L(\mathcal{H}_N)$.

2) Das Marktmodell besitzt genau dann die Dimensionseigenschaft
   $$\dim \mathcal{H}_N = m = n_1 = \dim \mathcal{W}$$
   und die Vollständigkeit (VS) gleichzeitig, wenn jeweils eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:
   a) $L$ ist ein Isomorphismus.
   b) $L^*$ ist ein Isomorphismus.

Die Voraussetzung (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$ wird für die Aussagen mit den Bedingungen 3 b, c benötigt.

3) Das Marktmodell besitzt genau dann die Eigenschaften (LOP) und (VS) gleichzeitig, wenn jeweils eine der folgenden Bedingungen a), b) oder c) erfüllt ist:
   a) Es existiert genau ein $\Psi \in \mathcal{W}$ mit $L^*(\Psi) = b$.
   b) $L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ $(= \mathcal{W})$ mit $\mathcal{M}^\perp = \text{lin}\,\{\Psi\}$ $(\Psi_0 = 1)$.
   c) $L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{W} \wedge \mathcal{M}$ ist Hyperebene von $L(\mathcal{H}_N)$.

a) VS und LOP gültig:




b) VS gültig und LOP ungültig:

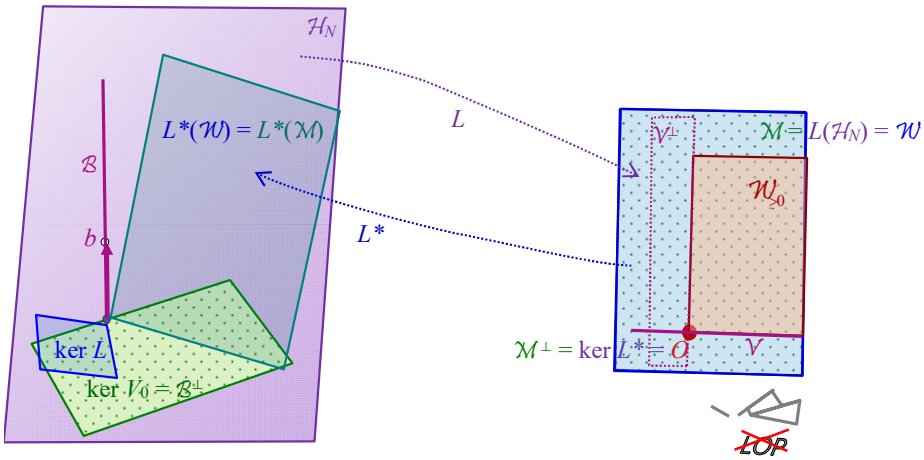



**Abb. 3.12** Die verschiedenen Unterräume von $\mathcal{H}_N$ und $\mathcal{W}$, die linearen Abbildungen $L$ und $L^*$ bei vollständigem Marktmodell und a) gültigem LOP bzw. b) ungültigem LOP

## 3.6 Charakterisierungen der Arbitragefreiheit (AF)

### 3.6.1 Fundamentalsatz der Preistheorie mit der Charakterisierung der Arbitragefreiheit durch die Existenz eines Diskontierungsprozesses

Bei dem in Abschnitt 3.4 behandelten Law of One Price (LOP) wird unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) ($\Leftrightarrow \mathcal{V} = \mathcal{E} \neq O$) der Unterraum $\mathcal{M} = L(\ker V_0)$ von $L(\mathcal{H}_N)$ durch den eindimensionalen Unterraum $\mathcal{E} = \operatorname{lin} \mathbf{1}_{0,\Omega}$ auf eine (lineare) Hyperebene von $L(\mathcal{H}_N)$ zurückgedrängt: $\mathcal{M} \cap \mathcal{E} = \mathcal{M} \cap \mathcal{V} = O$ und $L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{M}$ (nach Satz 3.3, 22, 28 in Abschnitt 3.4.1). Das LOP ist unter dieser Voraussetzung dann auch gleichbedeutend dazu, dass $\mathcal{M}$ durch den zum Zeitindex $t = 0$ gehörigen nichtnegativen Strahl

$$\mathcal{E}_{\geq 0} := \operatorname{ray} \mathbf{1}_{0,\Omega} = \operatorname{cone} \mathbf{1}_{0,\Omega} = \{ X_0 \mathbf{1}_{0,\Omega} \in \mathcal{W} : X_0 \geq 0 \}$$

auf eine Hyperebene von $L(\mathcal{H}_N)$ zurückgedrängt wird:

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{E}_{\geq 0} = O.$$

Bei der jetzt zu untersuchenden Arbitragefreiheit (Abkürzung: AF; Definition folgt unten) wird die Hyperebene $\mathcal{M}$ von $L(\mathcal{H}_N)$ bei gleichbleibender Dimension noch durch den gesamten nichtnegativen Orthanten

$$\mathcal{W}_{\geq 0} := \operatorname{cone} \{ \mathbf{1}_{t,A_{t,k}} : t \in I, A_{t,k} \in \mathcal{P}_t \}$$

$$= \{ \sum_{t=0}^{T} \sum_{k=1}^{k_t} X_t(A_{t,k}) \mathbf{1}_{t,A_{t,k}} \in \mathcal{W} : X_t(A_{t,k}) \geq 0 \text{ für } t \in I, A_{t,k} \in \mathcal{P}_t \}$$

von $\mathcal{W}$ derart verlagert, dass $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{W}_{\geq 0}$ nur den trivialen Durchschnitt hat:

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{W}_{\geq 0} = O.$$

Ohne die Voraussetzung (AWS$^\delta$) hat man nur die Inklusionen $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$ und $\mathcal{M} \cap \mathcal{V} \subseteq \mathcal{M} \cap \mathcal{E}$, sodass die Bedingung $\mathcal{M} \cap \mathcal{E}_{\geq 0} = O$ bzw. $\mathcal{M} \cap \mathcal{E} = O$ nur hinreichend ist für $\mathcal{M} \cap \mathcal{V} = O$, also das LOP. Dies bedeutet umgekehrt auch, dass bei nichtgültigem LOP ($\Leftrightarrow \mathcal{M} \cap \mathcal{V} \neq O$ nach Beweisteil F von Satz 3.3 in Abschnitt 3.4.1) dann $\mathcal{M} \cap \mathcal{E} \neq O$ und $\mathcal{M} \cap \mathcal{E}_{\geq 0} \neq O$ gilt, somit die Arbitragegelegenheit $\mathbf{1}_{0,\Omega} \in \mathcal{M} \cap \mathcal{E}_{\geq 0} \setminus O \subseteq \mathcal{M} \cap \mathcal{W}_{\geq 0} \setminus O$ auftritt und die Arbitragefreiheit (AF) nicht gültig ist. Bei vorliegender Arbitragefreiheit ist somit auch das LOP gültig.

Eine andere Begründung hierfür erhält man dadurch, dass bei vorliegender Arbitragefreiheit ein positiver normierter $\mathcal{M}$-Normalenvektor $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1+}$ ($\subseteq \mathcal{M}^{\perp 1} \subseteq \mathcal{A}$) existiert (Begründung folgt unten), der nach Abschnitt 3.3.3 auch ein Bewertungsvektor ist, und demzufolge das LOP gilt.

Arbitragefreiheit (AF) ⇒ (LOP)

Zu dem (endlichdimensionalen) Unterraum $\mathcal{M}$ von $\mathcal{W}$ gehört das orthogonale Komplement

$$\mathcal{M}^\perp = \{ X \in \mathcal{W} : X^\top Y = \langle X, Y \rangle_{\mathcal{W}} = 0 \; \forall \; Y \in \mathcal{M} \} \subseteq \mathcal{W}$$

von $\mathcal{M}$, mit dem der Vektorraum $\mathcal{W}$ die direkte Summe der orthogonalen Unterräume $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}^\perp$ ist: $\mathcal{M} \perp \mathcal{M}^\perp$ und $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp = \mathcal{W}$, d. h. $\mathcal{M} + \mathcal{M}^\perp = \mathcal{W}$, $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp = O$.

[38] Es wird nachfolgend gezeigt, dass mit der Einstellung der Arbitragefreiheit im Marktmodell sich im Gegenzug in $\mathcal{W}$ das orthogonale Komplement $\mathcal{M}^{\perp}$ von $\mathcal{M}$ derart vergrößert, dass sogar ein (strikt) positiver $\mathcal{M}$-Normalenvektor $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp}$ (o. E. mit $\Phi_0 = 1$) existiert.

Das Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ heißt **arbitragefrei** (englisch: No-Arbitrage, No-Arbitrage Principle, Arbitrage-Free Condition, Abk.: AF oder NA), wenn es keine **Arbitragegelegenheit** (Arbitragemöglichkeit, Arbitragestrategie) $h \in \mathcal{H}_N$, d. h. keine Handelsstrategie $h$ ohne Startkapitaleinsatz ($V_0(h) = 0$) und dennoch mit schwach positivem Zahlungsprofil $L(h)$ gibt:

(AF) $\quad \nexists\, h \in \mathcal{H}_N \text{ mit } V_0(h) = 0 \ \wedge \ L(h) \gtrdot 0.$

Dabei bedeutet $L(h) \gtrdot 0$ ($L(h)$ ist schwach positiv), dass

$$L_t(h)(\omega) \geq 0 \quad \text{für alle } (t,\omega) \in I \times \Omega \text{ und}$$
$$L_{t'}(h)(\omega') > 0 \quad \text{für mindestens ein Paar } (t',\omega') \in I \times \Omega$$

gilt. Bei einer Arbitragegelegenheit $h \in \mathcal{H}_N$ wird für das Portfolio zum Zeitpunkt $t = 0$ kein Startkapitaleinsatz benötigt und erfolgt zu keinem der Zeitpunkte $t \in I$ eine Einzahlung in das Portfolio. Aber dennoch kann zumindest in einem Zeitpunkt $t'$ und einem zugehörigen Zustand $\omega'$ ein Kapital aus dem Portfolio entnommen werden.
Im arbitragefreien Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ gibt es keine Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ mit

$$\breve{V}(h) = V_0(h) \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} = 0 \ \wedge \ L(h) \gtrdot 0.$$

In der Mengenschreibweise mit dem Kern $\ker \breve{V}$ der Abbildung $\breve{V}$ und dessen $L$-Bild

$$\mathcal{M} = L(\ker \breve{V}) \subseteq \mathcal{W}$$

bedeutet die Arbitragefreiheit, dass in dem $n_1$-dimensionalen Vektorraum $\mathcal{W}$ ($\dim \mathcal{W} = n_1 = 1 + k_1 + \ldots + k_{T-1} + K$) der lineare Unterraum $\mathcal{M}$ und der nichtnegative Orthant $\mathcal{W}_{\geq 0} := \{X \in \mathcal{W} : X \geq 0\}$ nur den trivialen Durchschnitt $O = \{X \in \mathcal{W} : X = 0\}$ (Nullraum von $\mathcal{W}$) haben,

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{W}_{\geq 0} = O,$$

bzw. dass der Durchschnitt von $\mathcal{M}$ mit dem schwach positiven (punktierten nichtnegativen) Orthanten $\mathcal{W}_{\gtrdot 0} := \{X \in \mathcal{W} : X \gtrdot 0\} = \mathcal{W}_{\geq 0} \setminus O$ leer ist:

(AF$\mathcal{M}$) $\quad \mathcal{M} \cap \mathcal{W}_{\gtrdot 0} = \emptyset.$

Neben den beiden Orthanten $\mathcal{W}_{\geq 0}$ und $\mathcal{W}_{\gtrdot 0}$ wird in $\mathcal{W}$ noch der (strikt) positive Orthant $\mathcal{W}_{>0} := \{X \in \mathcal{W} : X > 0\}$ verwendet, wobei $X > 0$ bedeutet, dass $X_t(\omega) > 0$ für alle $(t,\omega) \in I \times \Omega$ gilt. Da nach Abschnitt 2.8.4 auch $\mathcal{M} = \breve{L}(\mathcal{H}_N)$ gilt, bedeutet die Arbitragefreiheit auch, dass es keine Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ mit $\breve{L}(h) \gtrdot 0$ gibt. Eine Arbitragegelegenheit $h \in \mathcal{H}_N$ mit $\breve{V}(h) = 0$ und $L(h) \gtrdot 0$ ist wegen $\breve{L}(h) = L(h) - \breve{V}(h)$ auch eine Handelsstrategie mit $\breve{L}(h) \gtrdot 0$. Umgekehrt gibt es auch zu einer Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ mit

[38] Ein Literaturhinweis zur Darstellung eines Vektorraums $V$ als direkte Summe eines beliebigen endlichdimensionalen Unterraums $U$ und seines orthogonalen Komplements $U^{\perp}$ wird in einer Fußnote von Abschnitt 2.10.1 gegeben.

$\breve{L}(h) \gneq 0$ wegen $\breve{L}(h) \in \breve{L}(\mathcal{H}_N) = \mathcal{M} = L(\ker \breve{V})$ auch eine Handelsstrategie $g \in \mathcal{H}_N$ (z. B. $g = \hat{h} = (0,h_1,\ldots,h_T)^\mathsf{T}$) mit $L(g) = \breve{L}(h) \gneq 0$ und $V_0(g) = 0$ bzw. $\breve{V}(g) = 0$. Der lineare Unterraum $\mathcal{M}$ von $\mathcal{W}$ wird in Abschnitt 3.7.1 noch als die Menge der Kapitalmarktgeschäfte charakterisiert.

Aufgrund der Isomorphie der $n_1$-dimensionalen euklidischen Vektorräume $\mathcal{W}$ und $\mathbb{R}^{n_1}$ kann der nachfolgend angegebene Alternativsatz 3.7[39] aus der konvexen Geometrie des $\mathbb{R}^n$ zur Disjunktheit eines linearen Unterraums und des schwach positiven Orthanten auch im Vektorraum $\mathcal{W}$ angewandt werden. In der zugehörigen Abbildung 3.13 wird ein linearer Unterraum $T$ dargestellt, der den nichtnegativen Orthanten $\mathbb{R}^n_{\geq \mathbf{0}}$ genau dann nur im Nullpunkt trifft, wenn er einen (strikt) positiven Normalenvektor $a \in T^\perp$ besitzt. Bei der zweidimensionalen Darstellung liegt die Gerade $T$ genau dann in der Vereinigung von 2., 3. und 4. Quadranten ohne die positiven Anteile der Koordinatenachsen, wenn diese einen Normalenvektor im offenen 1. Quadranten besitzt. Der Alternativsatz dient zum unmittelbaren Beweis des Fundamentalsatzes der Preistheorie für das Mehrperiodenmodell. Es ist dabei nur als linearer (homogener) Unterraum $T$ der Unterraum $\mathcal{M}$ ($\subseteq \mathcal{W}$) der Kapitalmarktgeschäfte des Marktmodells zu wählen. Man erhält damit auch eine Parallele zur Charakterisierung des LOP mittels eines anderen Alternativsatzes, nämlich Satz 3.2 von Abschnitt 3.4.1: Bei gültigem LOP besitzt der lineare Unterraum $\mathcal{M}$ der Kapitalmarktgeschäfte mit dem nichtnegativen Strahl $\mathcal{E}_{\geq 0}$ nur den trivialen Durchschnitt und somit einen Normalenvektor $\Psi$, der in der ersten Zeitkomponente $\Psi_0$ positiv ist (siehe Beweisteil J von Satz 3.3 in Abschnitt 3.4.1 für die beiden Fälle i) $S_0^\delta \neq 0$ und ii) $S_0^\delta = 0$). Bei vorliegender Arbitragefreiheit besitzt der lineare Unterraum $\mathcal{M}$ mit dem nichtnegativen Orthanten $\mathcal{W}_{\geq 0}$ nur den trivialen Durchschnitt und daher einen Normalenvektor $\Phi$, dessen sämtliche Zeitkomponenten $\Phi_t$ positiv sind.

[39] Diesem Alternativsatz zur Disjunktheit entspricht ein Alternativsatz über die Lösbarkeit von homogenen linearen Ungleichungssystemen, der als Alternativsatz von Stiemke (1892–1915) bezeichnet wird und in seiner inhomogenen Version im engen Zusammenhang mit dem Minkowski-Farkas-Lemma steht. Einen Beweis des Alternativsatzes zur Disjunktheit findet man noch etwas allgemeiner für einen abgeschlossenen konvexen linearen Kegel $T$ bei Pleier (2021), S. 386–391, und auf der Autorenwebsite www.pleier-r.de bei den Download-Themen. Beweise des Satzes von Stiemke findet man beispielsweise auch bei Stoer u. Witzgall (1970), S. 24, Borgwardt (2001), S. 23, und Jungnickel (2008), S. 42f. Bei Jungnickel wird der Satz von Stiemke aus dem Satz von Motzkin (1908–1970) und dieser wiederum aus dem Minkowski-Farkas-Lemma hergeleitet. Dieses Lemma wurde unabhängig voneinander 1902 vom ungarischen Physiker und Mathematiker Julius (Gyula) Farkas (1847–1930) und vom deutschen Mathematiker und Physiker Hermann Minkowski (1864–1909) bewiesen. Verschiedene Beweise des Lemmas findet man beispielsweise bei Rockafellar (1970), S. 200, Corollary 22.3.1, Stoer u. Witzgall (1970), S. 55, Theorem (2.8.5), Borgwardt (2001), S. 18–21, Satz 2.3 und Jungnickel (2008), S. 39f, Satz 2.4.2. Ein Vergleich der inhomogenen Version des Satzes von Stiemke mit dem Minkowski-Farkas-Lemma wird bei Pleier (2021), S. 398–400, durchgeführt.

**Satz 3.7 Alternativsatz zur Disjunktheit eines linearen Unterraums und des schwach positiven Orthanten**

Der lineare Unterraum $T \subseteq \mathbb{R}^n$ und der schwach positive (punktierte nichtnegative) Orthant

$$\mathbb{R}^n_{\gneq \mathbf{o}} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \gneq o, \text{ d. h. } x \geq o \wedge x \neq o\}$$

sind genau dann disjunkt, wenn es einen (strikt) positiven Vektor $a$ im orthogonalen Komplement $T^\perp$ von $T$ gibt und somit $T$ in einer linearen Hyperebene $H_{a,0} := \{x \in \mathbb{R}^n : a^\mathsf{T}x = 0\}$ und $\mathbb{R}^n_{\gneq \mathbf{o}}$ im offenen linearen Halbraum $H^{>}_{a,0} := \{x \in \mathbb{R}^n : a^\mathsf{T}x > 0\}$ mit dem positiven Normalenvektor $a$ liegt:

$$T \cap \mathbb{R}^n_{\gneq \mathbf{o}} = \emptyset \quad \Leftrightarrow T^\perp \cap \mathbb{R}^n_{>0} \neq \emptyset.$$

Mit einem $a \in T^\perp \cap \mathbb{R}^n_{>0}$ gilt $T \subseteq H_{a,0}$ und $\mathbb{R}^n_{\gneq \mathbf{o}} \subseteq H^{>}_{a,0}$.

Der Satz lässt sich auch als Alternativsatz formulieren: Von den beiden nachfolgenden Aussagen gilt entweder (1) oder (2), sodass entweder der lineare Unterraum $T$ und der schwach positive Orthant $\mathbb{R}^n_{\gneq \mathbf{o}}$ nicht disjunkt sind oder das orthogonale Komplement $T^\perp$ von $T$ und der (strikt) positive Orthant

$$\mathbb{R}^n_{>0} = \{x \in \mathbb{R}^n : x > o\}$$

nicht disjunkt sind:

$$(1)\ T \cap \mathbb{R}^n_{\gneq \mathbf{o}} \neq \emptyset \quad \vee \quad (2)\ T^\perp \cap \mathbb{R}^n_{>0} \neq \emptyset.$$

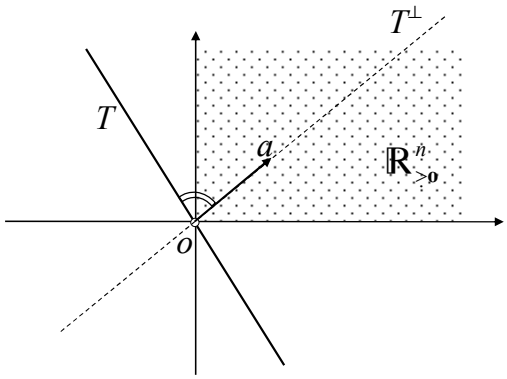



**Abb. 3.13** Ein linearer Unterraum $T \subseteq \mathbb{R}^n$, der zum punktierten nichtnegativen Orthanten $\mathbb{R}^n_{\gneq \mathbf{o}}$ disjunkt ist, und ein (strikt) positiver Vektor $a$ im orthogonalen Komplement $T^\perp$. Der Unterraum $T$ liegt in der Hyperebene $H_{a,0} = \{x \in \mathbb{R}^n : a^\mathsf{T}x = 0\}$ und der schwach positive Orthant $\mathbb{R}^n_{\gneq \mathbf{o}}$ im offenen homogenen Halbraum $H^{>}_{a,0} = \{x \in \mathbb{R}^n : a^\mathsf{T}x > 0\}$ mit dem positiven Normalenvektor $a$ von $T$

Mit diesem Alternativsatz ergibt sich unmittelbar, dass die Arbitragefreiheit, d. h. $\mathcal{M} \cap \mathcal{W}_{\gneq 0} = \emptyset$, also die Disjunktheit des linearen Unterraums $\mathcal{M}$ und des schwach positiven Orthanten $\mathcal{W}_{\gneq 0}$, gleichbedeutend ist zur Existenz eines **positiven $\mathcal{M}$-Normalenvektors $\Phi$**:

$$(\mathrm{AF}) \Leftrightarrow \exists\, \Phi = (\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_T)^\mathsf{T} \in \mathcal{M}^{\perp +} := \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{W}_{>0}.$$

Da mit einem positiven $\mathcal{M}$-Normalenvektor $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp+}$ auch $\lambda\Phi \in \mathcal{M}^{\perp+}$ $(\lambda \in ]0,\infty[)$ gilt, kann für den deterministischen Wert $\Phi_0(A_0) = \Phi_0(\Omega) \in ]0,\infty[$ o. E. der Wert $\Phi_0 = 1$ und der Prozess $\Phi$ als normierter positiver $\mathcal{M}$-Normalenvektor gewählt werden: Aus $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp+}$ erhält man wegen $\Phi_0 > 0$ mit $\Phi' := \Phi/\Phi_0$ ein $\Phi' \in \mathcal{M}^{\perp 1+} = \mathcal{M}^{\perp+} \cap \{X_0 = 1\}$ und umgekehrt ist ein $\Phi' \in \mathcal{M}^{\perp 1+} \subseteq \mathcal{M}^{\perp+}$ auch ein $\Phi' \in \mathcal{M}^{\perp+}$. Es gilt somit die Äquivalenz

$$\mathcal{M}^{\perp+} \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{M}^{\perp 1+} \neq \emptyset$$

und daher auch die weitere Charakterisierung der Arbitragefreiheit durch die Existenz eines **normierten positiven $\mathcal{M}$-Normalenvektors $\Phi$**:

$$(\mathrm{AF}) \Leftrightarrow \mathcal{M}^{\perp 1+} := \mathcal{M}^{\perp} \cap \{X_0 = 1, X > 0\} \neq \emptyset.$$

Die Menge $\mathcal{M}^{\perp 1+}$ aller in $\Phi_0$ normierten und positiven $\mathcal{M}$-Normalenvektoren $\Phi$ ist als Durchschnitt des linearen Unterraums $\mathcal{M}^{\perp}$, der affinen Hyperebene $\{X_0 = 1\}$ und der offenen linearen Halbräume $\{X_t(A_{t,k}) > 0\}$ $(t \in I,\ A_{t,k} \in \mathcal{P}_t)$ ein teilweise offenes konvexes Polyeder (polyedrische Menge, Vielflach, Vielflächner, Ebenflächner definiert als Durchschnitt von endlich vielen affinen Halbräumen).

Aufgrund der in Abschnitt 3.3.3 begründeten Darstellungen der Menge

$$\mathcal{A} := \{\Psi \in \mathcal{W} : (\mathrm{PG}\Psi)\ \Psi^{\mathrm{T}} L(h) = v_0(h)\ \forall\ h \in \mathcal{H}_N\}$$

der Bewertungsprozesse und der Inklusionen $\mathcal{M}^{\perp 1} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}^{\perp}$ gelten für ihre **Teilmenge**

$$\mathcal{A}^+ := \mathcal{A} \cap \{X > 0\}$$

**der positiven Bewertungsprozesse (der Diskontierungsprozesse)** entsprechende Aussagen:

**Inklusionen und Darstellungen für die Menge $\mathcal{A}^+$ der positiven Bewertungsprozesse:**
Für die Menge $\mathcal{A}^+$ der positiven Bewertungsprozesse gelten die Inklusionen

$$\mathcal{M}^{\perp 1+} \subseteq \mathcal{A}^+ \subseteq \mathcal{M}^{\perp+}$$

$(\mathcal{M}^{\perp 1+} \neq \mathcal{M}^{\perp+})$ und die Darstellungen

$$\mathcal{A}^+ = L^{*-1}(\{b\}) \cap \{X > 0\};$$

$$\mathcal{A}^+ = \mathcal{M}^{\perp 1+} = \mathcal{M}^{\perp} \cap \{X_0 = 1, X > 0\} \quad \text{im Fall i) } (\mathrm{AWS}^{\delta})\ S_0^{\delta} \neq 0,$$

$$\mathcal{A}^+ = \mathcal{M}^{\perp+} = \mathcal{M}^{\perp} \cap \{X > 0\} \quad \text{im Sonderfall ii) } S_0^{\delta} = 0.$$

Die Inklusion $\mathcal{M}^{\perp 1+} \subseteq \mathcal{A}^+$ bedeutet dabei, dass ein normierter positiver $\mathcal{M}$-Normalenvektor $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1+}$ stets auch ein positiver Bewertungsprozess (ein Diskontierungsprozess) ist. Die Inklusion $\mathcal{A}^+ \subseteq \mathcal{M}^{\perp+}$ bedeutet, dass ein positiver Bewertungsprozess auch ein positiver $\mathcal{M}$-Normalenvektor $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp+}$ ist. Da nun die Arbitragefreiheit (AF) äquivalent zu $\mathcal{M}^{\perp 1+} \neq \emptyset$ und zu $\mathcal{M}^{\perp+} \neq \emptyset$ ist, ist aufgrund der angegebenen Inklusionen die Arbitragefreiheit (AF) auch äquivalent zu $\mathcal{A}^+ \neq \emptyset$. Bei vorliegender Arbitragefreiheit existiert also stets ein positiver Bewertungsprozess $\Phi$ in $\mathcal{M}^{\perp 1+}$, unabhängig von der Fallunterscheidung bezüglich $S_0^{\delta}$.
Mit dem positiven Bewertungsprozess $\Phi$ folgt aus der Arbitragefreiheit (AF) auch das LOP. Für die Arbitragefreiheit erhält man folgende Charakterisierungen:

**Charakterisierungen der Arbitragefreiheit** (AF)**:**

$$(\mathrm{AF}) \Leftrightarrow \exists\ \Phi \in \mathcal{M}^{\perp+} \qquad \text{(pos. } \mathcal{M}\text{-Normalenvektor)}$$

$$\Leftrightarrow \exists\ \Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1+}\ (\subseteq \mathcal{A}^+) \qquad \text{(norm. pos. } \mathcal{M}\text{-Normalenvektor)}$$

$\Leftrightarrow \exists\, \Phi \in \mathcal{A}^+ \quad (\subseteq \mathcal{M}^{\perp+})$ (pos. Bewertungsprozess)
$\Leftrightarrow \exists\, \Phi \in L^{*-1}(\{b\}) \cap \{X > 0\}$ (pos. $L^*$-Urbild von $b$).

**Bezeichnungen für einen normierten positiven $\mathcal{M}$-Normalenvektor und deren Plausibilisierung**

Ein normierter positiver $\mathcal{M}$-Normalenvektor $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1+} \subseteq \mathcal{A}^+$ wird als **(normierter) Zustands(preis)prozess** oder **Diskontierungsprozess** bezeichnet.[40] Nach Abschnitt 3.8.1 ist nämlich das Maß $d_{t,k} := \Phi_t(A_{t,k})$ der Preis des Arrow-Debreu-Zahlungsprofils $\mathbf{1}_{t,A_{t,k}}$, sodass die Komponente $\Phi_t(A_{t,k})$ des Vektors $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1+}$ etwas salopp auch als Preis des Ereignisses $A_{t,k}$ bezeichnet werden kann. Insbesondere sind die Maße $d_{T,k} := \Phi_T(\omega_k) = \pi(\mathbf{1}_{T,\omega_k})$ die Preise der Zahlungsprofile $\mathbf{1}_{T,\omega_k}$, sodass diese salopp auch als Preise der Zustände $\omega_k \in \Omega$ bezeichnet werden können.

Eine ökonomische Plausibilisierung der Bezeichnung Diskontierungsprozess erfolgt in den Abschnitten 3.8.1 und 4.3 unter der zusätzlichen Voraussetzung der Duplizierbarkeit der AD-Papiere $\mathbf{1}_{t,A_{t,k}}$ (d. h. der Vollständigkeit des Marktmodells), indem die Maße $d_{t,k} = \Phi_t(A_{t,k}) = \pi(\mathbf{1}_{t,A_{t,k}})$, d. h. die Koordinaten von $\Phi \in \mathcal{W}$ bezüglich der $\mathcal{W}$-Basis $\mathbf{1}_{t,A_{t,k}}$ ($t \in I$, $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$) bzw. die Komponenten von $\Phi$ bei der $n_1$-Tupel-Darstellung von Abschnitt 2.6.2, als stochastische Diskontierungsfaktoren einer Abzinsung (Diskontierung, Barwertberechnung) vom Zeitpunkt $t \in \{1,\ldots,T\}$ und Ereignis $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$ ausgehend auf den Zeitpunkt $t = 0$ und das sichere Ereignis $\Omega \in \mathcal{P}_0$ interpretiert werden können. Diese Abzinsung kann tatsächlich als Glattstellung (additive Ergänzung, Replizierung) mit einem Ergänzungsgeschäft $\widehat{\xi}^{t,k}$ vom Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ durchgeführt werden.

Außerdem kann für jedes Zahlungsprofil $X \in L(\mathcal{H}_N)$ die Preisberechnung $\pi(X) = \Phi^{\mathsf{T}}X$ mittels des positiven normierten Bewertungsprozesses $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1+}$ als Barwertberechnung (Abzinsung, Diskontierung) mit $\Phi$ als stochastischem Diskontierungsvektor interpretiert werden (Abschnitt 4.3). Auch hier kann die Abzinsung tatsächlich als Glattstellung mit einem Ergänzungsgeschäft vom Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ durchgeführt werden. Eine grafische Darstellung eines Zustandsprozesses $\Phi$ eines arbitragefreien Marktmodells ist in der Abbildung 3.7 im Abschnitt 3.4.1 angegeben.

**Weitere Charakterisierungen der Arbitragefreiheit** (AF)

Da im arbitragefreien Marktmodell der positive normierte $\mathcal{M}$-Normalenvektor $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1+}$ ($\subseteq \mathcal{A}^+$) auch ein positiver Bewertungsprozess $\Phi \in \mathcal{A}^+$ ist und demnach das LOP gültig ist, gelten zunächst *notwendig* auch die in Satz 3.3 zur Charakterisierung des LOP angegebenen Gleichungen oder Gleichungssysteme, die jetzt mit einem positiven normierten Bewertungsprozess $\Phi \in \mathcal{A}^+$ in den Punkten 1) – 6) des folgenden Satzes 3.8 aufgeführt werden.

Es wird nun noch begründet, dass die Existenz einer positiven Lösung $\Phi$ (ohne die Normierung bei $\Phi_0$) für eines dieser Gleichungssysteme 1) – 6) auch *hinreichend* und damit cha-

[40] Die Bezeichnung Zustands(preis)prozess und normierter Zustandsprozess findet man bei Kremer (2011), S. 41, 175, 177, die Bezeichnung Diskontierungsprozess bei Kremer (2017), S. 55.

rakteristisch für die Arbitragefreiheit (AF) ist. Damit erhält man den sogenannten Fundamentalsatz bzw. ersten Hauptsatz der Preistheorie für Mehrperiodenmodelle.[41]

**Beweis:** Mit einer positiven Lösung $\Phi$ ($\Phi_0 > 0$) für eines der homogenen Gleichungssysteme 1) – 4) existiert nämlich auch die normierte positive Lösung $\Phi' := \Phi/\Phi_0$ ($\Phi_0' = 1$), sodass diese nach Beweisteil P von Satz 3.3 auch eine Lösung für die anderen aufgeführten Gleichungssysteme darstellt. Da dann für $\Phi'$ insbesondere auch 6) (PG$\Phi$+) gilt und somit ein positiver (normierter) Bewertungsprozess $\Phi' \in \mathcal{A}^+$ existiert, liegt nach obiger Charakterisierung die Arbitragefreiheit vor.

Weiter existiert mit einer positiven Lösung $\Phi$ (ohne die Normierung) für das inhomogene Gleichungssystems 5) (Ub+), d. h. mit einem positiven $L^*$-Urbild von $b$, wegen der Übereinstimmung $\mathcal{A} = L^{*-1}(\{b\})$ (nach Beweisteil 2 von Abschnitt 3.3.3) auch eine positive Lösung der inhomogenen Preisgleichungen 6) (PG$\Phi$+), d. h. ein positiver Bewertungsprozess $\Phi \in \mathcal{A}^+$. Dies bedeutet aber nach den obigen Charakterisierungen die Arbitragefreiheit (AF) und dann auch die Existenz eines normierten positiven Bewertungsprozesses (Bed. 8).

Die angeführten Gleichungen 1) – 6) sind also auch ohne die Normierungsbedingung $\Phi_0 = 1$ hinreichend für die Arbitragefreiheit (AF). Diese Bedingung $\Phi_0 = 1$ könnte im Satz 3.8 weggelassen werden, da die jeweilige Bedingung auch ohne die Normierung hinreichend für (AF) ist. Sie wird in runden Klammern angegeben, da sie sich aus (AF) auch herleiten lässt.

Im Gegensatz dazu wird bei den Charakterisierungen des LOP in Satz 3.3, die hier den Bedingungen 1) – 5) entsprechen, die Normierung $\Psi_0 = 1$ benötigt. Bei der 6) entsprechenden Bedingung (PG$\Psi$) kann aber die Normierung $\Psi_0 = 1$ mittels einer Fallunterscheidung hergeleitet werden: Im Fall i) $S_0^\delta \neq 0$ folgt wegen $\mathcal{A} = \mathcal{M}^{\perp 1}$ aus der Existenz eines Bewertungsprozesses $\Psi \in \mathcal{A}$ auch die Existenz eines normierten Bewertungsprozesses $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1} \subseteq \mathcal{A}$. Im Fall ii) $S_0^\delta = 0$ existiert nach Abschnitt 3.3.3 stets ein normierter Bewertungsprozess $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1} \subseteq \mathcal{A}$.

Weiter existiert unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) bei vorliegender Arbitragefreiheit (AF) mit einem $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp +}$ wegen $\Phi_0 > 0$ auch ein $\Phi \in \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 \neq 0\} = \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^*$ (Satz 2.1, 11) mit $\Phi > 0$ (Bed. 9). Umgekehrt liegt ein derartiges $\Phi$ auch in $\mathcal{M}^{\perp +}$, sodass durch dessen Existenz auch die Arbitragefreiheit charakterisiert wird. □

Die Gleichungen 2) (KPG$\Phi$+) $\Phi^\top \breve{L}(h) = 0$ liefern die Preisgleichungen für die Kapitalmarktgeschäfte $Z = \breve{L}(h) \in \breve{L}(\mathcal{H}_N) = \mathcal{M}$ und die Gleichungen 6) (PG$\Phi$+) $\Phi^\top L(h) = b^\top h$ allgemeiner die Preisgleichungen für alle duplizierbaren Zahlungsprofile $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$. Die Charakterisierung der Arbitragefreiheit durch die Existenz eines positiven Prozesses $\Phi \in \mathcal{W}$ mit den zugehörigen Preisgleichungen $\Phi^\top L(h) = V_0(h)$ für die $h \in \mathcal{H}_N$ bzw. für die $h \in \ker V_0$ findet man bei Kremer (2011), S. 175, 176, wobei dort der Startkapitaleinsatz $V_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0$ mit dem Portfoliovektor $h_0$ und noch nicht die Darstellung des Startkapitaleinsatzes $V_0(h) = b^\top h$ mittels der Handelsstrategie $h$ im Mehrperiodenmodell verwendet wird.

[41] Kremer behandelt den Fundamentsatz der Preistheorie für das Einperiodenmodell auf (2011) S. 40, (2017) S. 23, 24 und für das Mehrperiodenmodell auf (2011) S. 175, 176.

**Satz 3.8 Erster Hauptsatz bzw. Fundamentalsatz der Preistheorie für das Mehrperiodenmodell mit den Charakterisierungen der Arbitragefreiheit** (AF)

Das Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ ist genau dann arbitragefrei, wenn eine der folgenden zueinander äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $\exists\, \Phi \in \mathcal{W}$ mit $\Phi > 0$ und $\Phi^{\mathsf{T}} Z = 0 \quad \forall\, Z \in \mathcal{M}$ | $(\Phi_0 = 1)$ |
| 2) (KPGΦ+) | $\exists\, \Phi \in \mathcal{W}$ mit $\Phi > 0$ und $\Phi^{\mathsf{T}} \breve{L}(h) = 0 \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_N$ | $(\Phi_0 = 1)$ |
| 3) | $\exists\, \Phi \in \mathcal{W}$ mit $\Phi > 0$ und $\Phi^{\mathsf{T}} L(h) = 0 \quad \forall\, h \in \ker V_0$ | $(\Phi_0 = 1)$ |
| 4) | $\exists\, \Phi \in \mathcal{W}$ mit $\Phi > 0$ und $\breve{L}^*(\Phi) = 0$ | $(\Phi_0 = 1)$ |
| 5) (Ub+) | $\exists\, \Phi \in \mathcal{W}$ mit $\Phi > 0$ und $L^*(\Phi) = b$ | $(\Phi_0 = 1$; pos. $L^*$-Urb. v. $b)$ |
| 6) (PGΦ+) | $\exists\, \Phi \in \mathcal{W}$ mit $\Phi > 0$ und $\Phi^{\mathsf{T}} L(h) = b^{\mathsf{T}} h \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_N$ | $(\Phi_0 = 1)$ |
| | | (pos. Bew.proz. $\Phi \in \mathcal{A}^+$, Diskontierungsproz. m. Preisgleich.) |
| 7) (N+) | $\exists\, \Phi \in \mathcal{M}^{\perp}$ mit $\Phi > 0$ | (pos. $\mathcal{M}$-Normalenvektor) |
| 8) (NN+) | $\exists\, \Phi \in \mathcal{M}^{\perp}$ mit $\Phi > 0$ und $\Phi_0 = 1$ | (pos. norm. $\mathcal{M}$-Normalenvektor) |

Unter der Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) $S_0^{\delta} \neq 0$ ist die Arbitragefreiheit (AF) auch äquivalent zu

9) $\exists\, \Phi \in \mathcal{M}^{\perp} \cap \{X_0 \neq 0\} = \mathcal{M}^{\perp} \setminus \ker L^*$ mit $\Phi > 0$ (nichtleere Differenz).

**Algebraische Berechnung des Preises eines Zahlungsprofils mittels eines Diskontierungsprozesses**

Mit dem normierten positiven $\mathcal{M}$-Normalenvektor $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1+}$ $(\subseteq \mathcal{A}^+)$ erhält man also für jedes Zahlungsprofil $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ und jede Duplikationsstrategie $h \in L^{-1}(\{X\})$ von $X$ den Preis $\pi(X)$ durch

$$\begin{aligned}\pi(X) &= V_0(h) = b^{\mathsf{T}} h = L^*(\Phi)^{\mathsf{T}} h = \Phi^{\mathsf{T}} L(h) = \Phi^{\mathsf{T}} X \\ &= \sum_{t=0}^{T} \sum_{k=1}^{k_t} \Phi_t(A_{t,k}) X_t(A_{t,k}) \\ &= 1 \cdot X_0(\Omega) + \sum_{t=1}^{T} \sum_{k=1}^{k_t} \Phi_t(A_{t,k}) X_t(A_{t,k}),\end{aligned}$$

ohne eine Duplikationsstrategie $h$ für $X$ berechnen zu müssen. Eine Interpretation dieser Preisbestimmung als verallgemeinerte stochastische Diskontierung der Zahlungen $X_t(A_{t,k})$ auf eine gleichwertige sichere Zahlung $\pi(X)$ im Zeitpunkt $s = 0$ erfolgt in Abschnitt 4.3 unter Voraussetzung der Arbitragefreiheit (AF) und der Vollständigkeit (VS).

Der Preis $\pi(X) = \Phi^{\mathsf{T}} X$ ist für $X \in L(\mathcal{H}_N)$ unabhängig von der Duplikationsstrategie $h \in L^{-1}(\{X\})$ und (wie in Abschnitt 3.4 bei der Erläuterungen zu Satz 3.3 begründet wird) auch unabhängig von der Lösung $\Phi \in L^{*-1}(\{b\})$. Für die Preisbestimmung wird jetzt nur der innerhalb des Marktmodells ermittelte positive normierte $\mathcal{M}$-Normalenvektor $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1+} \subseteq \mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathcal{F})$ verwendet. Die tatsächlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten der bei der Modellierung des Preisprozesses $S$ auftretenden Ereignisse $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$ gehen nicht ein.

Durch den positiven Bewertungsprozess $\Phi$ ist auf $\mathcal{W}$ eine lineare Abbildung

$$\pi = \langle \Phi, . \rangle_{\mathcal{W}} = \Phi^{\mathsf{T}} : X \in \mathcal{W} \mapsto \pi(X) = \langle \Phi, X \rangle_{\mathcal{W}} = \Phi^{\mathsf{T}} X \in \mathbb{R}$$

definiert, die auf dem Unterraum $L(\mathcal{H}_N)$ von $\mathcal{W}$ die Preise der Zahlungsprofile $X$ liefert. Wegen der Positivität von $\Phi$ ist jetzt $\pi(X) > 0$ für alle $X \in \mathcal{W}_{\geq 0}$ und daher $\pi$ eine sogenannte **positive Linearform** (ein positives lineares Funktional). Auf $L(\mathcal{H}_N)$ liefert $\pi$ ein positives lineares Bewertungsfunktional.

Die Abbildung 3.7 in Abschnitt 3.4.1 illustriert, dass unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) im arbitragefreien Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ der Unterraum $\mathcal{M}$ genau um eine Dimension kleiner ist als der $L$-Bildraum $L(\mathcal{H}_N)$ und dass der Unterraum $\mathcal{M}^\perp$ genau um eine Dimension größer ist als der $L^*$-Kern $\ker L^*$. Das orthogonale Komplement $\mathcal{M}^\perp$ von $\mathcal{M}$ enthält jetzt (im Unterschied zu einem Marktmodell, in dem nur das LOP gültig ist) sogar einen *positiven* Prozess

$$\Phi \in \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^* = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 \neq 0\},$$

für den o. E. die Normierung $\Phi_0 = 1$ erfüllt ist. Als eine für die Arbitragefreiheit charakteristische Lagebeziehung für die Unterräume $\mathcal{M}^\perp$ und $\ker L^*$ von $\mathcal{W}$ erhält man für $\mathcal{M}^\perp$ die Darstellung als direkte Summe von $\ker L^*$ und dem eindimensionalen Unterraum $\operatorname{lin}\{\Phi\}$ mit einem positiven Prozess $\Phi \in \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^*$:

$$\mathcal{M}^\perp = \ker L^* \oplus \operatorname{lin}\{\Phi\}.$$

**Vielfalt der Diskontierungsprozesse**

Nach der Aussage von Satz 3.6, 3a) „⇒“ in Abschnitt 3.5.3 zur gleichzeitigen Gültigkeit des LOP und der Vollständigkeit (VS) ergibt sich jetzt hier, dass insbesondere unter der Voraussetzung der Arbitragefreiheit (AF) und der Vollständigkeit (VS) genau ein positives $L^*$-Urbild von $b$ bzw. genau ein Diskontierungsprozess $\Phi$ existiert. Es existiert dann auch genau eine Linearform $\pi = \langle \Phi, . \rangle_{\mathcal{W}} = \Phi^\intercal$ auf ganz $\mathcal{W}$, die auf $L(\mathcal{H}_N)$ die Preise liefert und die eine sog. positive Linearform ist ($\pi(X) > 0$ für alle $X \in \mathcal{W}_{\geq 0}$).

Es wird jetzt mit Teil b) des nachfolgenden Satzes 3.9 noch gezeigt, dass unter der Voraussetzung der Arbitragefreiheit (AF) bei unvollständigem Marktmodell mehrere Diskontierungsprozesse existieren, nämlich $p + 1$ affin unabhängige Diskontierungsprozesse, wenn $p = \dim \ker L^*$ ist. Damit ist die Existenz von genau einem Diskontierungsprozess auch hinreichend für die Vollständigkeit des Marktmodells. Insgesamt erhält man damit den folgenden Satz, den sog. zweiten Hauptsatz der Preistheorie, der in Teil a) besagt, dass bei vorliegender Arbitragefreiheit das Marktmodell genau dann vollständig ist, wenn genau ein Diskontierungsprozess existiert.

**Satz 3.9 Zweiter Hauptsatz der Preistheorie für das Mehrperiodenmodell mit der Charakterisierung der Vollständigkeit (VS) und der Angabe der Maximalanzahl von affin unabhängigen Diskontierungsprozessen**

Es sei für das Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ die Arbitragefreiheit (AF) vorausgesetzt. Es gelten dann die folgenden Aussagen:

a) Das Marktmodell ist genau dann vollständig, wenn genau ein Diskontierungsprozess $\Phi$ existiert.

b) Ist $p := \dim \ker L^*$ die Dimension des Kerns $\ker L^*$ der zu $L$ adjungierten Abbildung $L^*$, so ist $p + 1$ die Maximalanzahl von affin unabhängigen Diskontierungsprozessen.

**Beweis:** a) Nach obiger Vorbemerkung ist für die Aussage a) nur noch die Beweisrichtung „⇐“ zu zeigen, nämlich dass aus der Existenz von höchstens einem Diskontierungsprozess die Vollständigkeit folgt bzw. dass bei Nichtvorliegen der Vollständigkeit die Existenz von mehreren Diskontierungsprozessen folgt. Damit ist nach Satz 3.6, 3a) auch gezeigt, dass bei der Existenz von höchstens einem Diskontierungsprozess (positiven Bewertungsprozess) auch nur höchstens ein Bewertungsprozess existiert. Aus der Arbitragefreiheit (AF) folgt nach den obigen Charakterisierungen die Existenz eines normierten positiven $\mathcal{M}$-Normalenvektors $\Phi'$, also eines Prozesses

$$\Phi' \in \mathcal{M}^{\perp 1+} = \mathcal{M}^{\perp} \cap \{X_0 = 1, X > 0\} \subseteq \mathcal{A}^{+} \subseteq \mathcal{A} = L^{*-1}(\{b\}).$$

Aus der Unvollständigkeit des Marktmodells folgt nach Satz 3.6, 1) $\ker L^* \neq O$, also die Existenz eines Prozesses

$$Y \in \ker L^* \setminus O$$

Es wird nun gezeigt, dass der Prozess

$$\Phi := \Phi' + \lambda Y \in \Phi' + \ker L^* = L^{*-1}(\{b\}) = \mathcal{A}$$

mit geeignetem $\lambda > 0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) einen positiven Bewertungsprozess $\Phi \in \mathcal{A}^{+}$ mit $\Phi \neq \Phi'$ liefert. Wegen $Y \neq 0$ und $\lambda \neq 0$ ist $\Phi \neq \Phi'$. Weiter ist noch $\Phi > 0$ bzw. mit den Abkürzungen $d_{t,k} := \Phi'(A_{t,k}) > 0$ und $y_{t,k} := Y(A_{t,k})$ ($t \in I$, $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$) für alle Indizes $t$ und $k$ die Bedingung

(*) $\qquad \Phi(A_{t,k}) = d_{t,k} + \lambda y_{t,k} > 0$

zu sichern. Im Fall $y_{t,k} = 0$ ist (*) für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt. Im Fall $y_{t,k} > 0$ ist (*) für beliebiges $\lambda \geq 0$ gültig. Für den Fall $y_{t,k} < 0$ wählt man $\lambda$ mit

$$0 < \lambda < \min \{d_{t,k}/|y_{t,k}| : (t,k) \text{ mit } y_{t,k} < 0\},$$

womit auch in diesem Fall die Bedingung $\lambda < d_{t,k}/|y_{t,k}|$ bzw. (*) $d_{t,k} > -\lambda y_{t,k}$ erfüllt ist. Damit ist auch $\Phi > 0$ gezeigt und $\Phi$ somit ein weiterer von $\Phi'$ verschiedener und dann ein von $\Phi'$ affin unabhängiger positiver Bewertungsprozess (Diskontierungsprozess).

b) Ist $p := \dim \ker L^*$, so gibt es (maximal) $p$ linear unabhängige $Y^i \in \ker L^*$ ($i = 1,\ldots,p$). Ist bei vorliegender Arbitragefreiheit (AF)

$$\Phi' \in \mathcal{M}^{\perp 1+} \subseteq \mathcal{A}^{+} \subseteq \mathcal{A} = L^{*-1}(\{b\})$$

ein spezieller Diskontierungsprozess und setzt man noch $Y^0 := 0$, so erhält man mit den Prozessen

$$\Phi^i := \Phi' + \lambda_i Y^i \in \Phi' + \ker L^* = L^{*-1}(\{b\}) = \mathcal{A} \qquad (\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ i = 0,\ldots,p)$$

(vergleiche Abschnitt 3.5.1) zunächst die Maximalanzahl von $p + 1$ affin unabhängigen Bewertungsprozessen. Wie in Beweisteil a) gezeigt wurde, kann durch die passende Wahl der $\lambda_i$,

$$0 < \lambda_i < \min \{d_{t,k}/|\, y^i_{t,k}\,| : (t,k) \text{ mit } y^i_{t,k} < 0\} \qquad (y^i_{t,k} := Y^i(A_{t,k}),\ t \in I,\ A_{t,k} \in \mathcal{P}_t),$$

noch die Positivität der Bewertungsprozesse $\Phi^i$ gesichert werden. Somit erhält man auch die Maximalanzahl von $p + 1$ affin unabhängigen Diskontierungsprozessen. □

In der nachfolgenden Tabelle 3.1 wird eine Zusammenstellung der Charakterisierungen verschiedener Begriffe, nämlich der Duplizierbarkeit, der Vollständigkeit, des LOP und der Arbitragefreiheit im Mehrperiodenmodell gegeben. Für die Charakterisierung des LOP wird dabei die mathematisch-technische Voraussetzung (AWS$^{\delta}$), dass der Anfangswert $S_0^{\delta}$ des Preisprozesses $S^{\delta}$ von Null verschieden ist, verwendet. Bei den inhomogenen Gleichungen (PG$\Psi$) und $L^*(\Psi) = b$ muss dann die Normierungsbedingung $\Psi_0 = 1$ nicht extra angegeben werden. Bei der Charakterisierung der Arbitragefreiheit (AF) mit dem positiven Diskontierungsprozess $\Phi$ kann bei den Gleichungen die Normierungsbedingung $\Phi_0 = 1$ stets (mittels Division von $\Phi$ durch $\Phi_0$) erreicht werden und somit weggelassen werden.

**Tab. 3.1** Charakterisierungen der Duplizierbarkeit, der Vollständigkeit, des Law of One Price und der Arbitragefreiheit beim Mehrperiodenmodell unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) ($\mathcal{B} = \text{lin}\,\{b\}$, $\mathcal{M} = L(\ker V_0) = L(\mathcal{B}^\perp)$, $\mathcal{V} = \text{lin}\{\mathbf{1}_{0,\Omega}\}$, $m = \dim \mathcal{H}_N$, $n_1 = \dim \mathcal{W}$)

| | |
|---|---|
| Duplizierbarkeit (DP) | $X \in \mathcal{W}$ ist duplizierbar<br>$\Leftrightarrow \exists\, h \in \mathcal{H}_N$ mit $X = L(h)$<br>$\Leftrightarrow X \in L(\mathcal{H}_N)$ ($X$ ist $L$-Bild)<br>$\Leftrightarrow X \perp \ker L^*$ (Orthogonalität von $X$ u. ker $L^*$) |
| Vollständigkeit (VS) | $((S,\delta),\mathcal{F})$ ist vollständig, d. h. $\forall\, X \in \mathcal{W}$ ist $X = L(h)$ mit einem $h \in \mathcal{H}_N$<br>$\Leftrightarrow L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{W}$ ($L$ surjektiv, Maximalität von $L(\mathcal{H}_N)$)<br>$\Leftrightarrow \ker L^* = O$ ($L^*$ injektiv, Trivialität von ker $L^*$)<br>$\Rightarrow L^*(\Psi) = b$ hat höchstens eine Lösung $\Psi \in \mathcal{W}$ |
| Law of One Price (LOP) | $\forall\, X \in L(\mathcal{H}_N)$: $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0$ konstant für alle $h \in \mathcal{H}_N$ mit $L(h) = X$<br>$\Leftrightarrow \forall\, X \in L(\mathcal{H}_N)$: $R_0(h) = S_0^{\mathsf{T}} h_1$ konstant für alle $h \in \mathcal{H}_N$ mit $L(h) = X$<br>$\Leftrightarrow \exists\, X \in L(\mathcal{H}_N)$: $V_0(h)$ konstant für alle $h \in L^{-1}(\{X\})$<br>$\Leftrightarrow V_0(f) = b^{\mathsf{T}} f = 0$ für alle $f \in \mathcal{H}_N$ mit $L(f) = 0$<br>$\Leftrightarrow \ker L \subseteq \ker V_0 = \{b\}^\perp$ (Inkl. d. Kerne, z. B. bei inj. $L$ bzw. ker $L = O$)<br>$\Leftrightarrow b \in (\ker L)^\perp = L^*(\mathcal{W})$ ($b$ ist $L^*$-Bild)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{B} \subseteq L^*(\mathcal{W})$ (Inklusion von $\mathcal{B}$ im $L^*$-Bildraum)<br>$\Leftrightarrow \exists\, \Psi \in \mathcal{W}$ mit $L^*(\Psi) = b$ ($L^*$-Urbild von $b$)<br>$\Leftrightarrow \exists\, \Psi \in \mathcal{M}^\perp$ mit $L^*(\Psi) = b$ ($L^*$-Urbild von $b$)<br>$\Leftrightarrow \exists\, \Psi \in \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^*$ ($\subseteq \mathcal{W}$ mit $L^*(\Psi) = b$) (nichtleere Differenz)<br>$\Leftrightarrow$ (NN) $\exists\, \Psi \in \mathcal{M}^\perp$ mit $\Psi_0 = 1$ (norm. $\mathcal{M}$-Normalenvektor)<br>$\Leftrightarrow \exists_1\, \vartheta \in L(\mathcal{H}_N)$ mit $L^*(\vartheta) = b$ (dupliz. $L^*$-Urbild von $b$)<br>$\Leftrightarrow \exists_1\, \vartheta \in L(\mathcal{H}_N) \cap \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\}$ (dupliz. norm. $\mathcal{M}$-Normalenv.)<br>$\Leftrightarrow \exists\, \Psi \in \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^*$ mit $\mathcal{M}^\perp = \ker L^* \oplus \text{lin}\,\{\Psi\}$ (echte Teilmenge)<br>$\Leftrightarrow \dim \mathcal{M}^\perp = \dim \ker L^* + 1$ (Dimensionsgleichung)<br>$\Leftrightarrow \ker L^*$ ist eine Hyperebene von $\mathcal{M}^\perp$ (Struktur von $\mathcal{M}^\perp$)<br>$\Leftrightarrow L^*(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B}$ (Maxim. bzw. Eindimens. von $L^*(\mathcal{M}^\perp)$)<br>$\Leftrightarrow L^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B} \oplus L^*(\mathcal{M})$ ($L^*(\mathcal{W})$ als direkte Summe)<br>$\Leftrightarrow L^*(\mathcal{M})$ ist Hyperebene von $L^*(\mathcal{W})$ (echte Teilmenge)<br>$\Leftrightarrow \forall\, X \in L(\mathcal{H}_N)$ $\exists_1$ additive Zerlegung $X = Y + Z$ mit $Y \in \mathcal{V}$, $Z \in \mathcal{M}$<br>$\Leftrightarrow \exists\, X \in L(\mathcal{H}_N)$: $\exists_1$ additive Zerlegung $X = Y + Z$ mit $Y \in \mathcal{V}$, $Z \in \mathcal{M}$<br>$\Leftrightarrow \mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ (trivialer Durchschnitt)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{E} = \mathcal{V} \not\subseteq \mathcal{M}$ (Nichtinklusion)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}^\perp \not\subseteq \mathcal{E}^\perp = \{X_0 = 0\}$ (Nichtinklusion)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}^\perp \not\subseteq \mathcal{E}^\perp \cap \mathcal{M}^\perp = \ker L^*$ (Nichtinklusion)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^* = \mathcal{M}^\perp \setminus \mathcal{E}^\perp = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 \neq 0\} \neq \emptyset$ (nichtleere Differenz)<br>$\Leftrightarrow L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{M}$ ($L(\mathcal{H}_N)$ als direkte Summe)<br>$\Leftrightarrow \dim L(\mathcal{H}_N) = \dim \mathcal{M} + 1$ (Dimensionsgleichung)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}$ ist eine Hyperebene von $L(\mathcal{H}_N)$ (echte Teilmenge) |

| | |
|---|---|
| | $\Leftrightarrow$ (PGΨ) $\exists\, \Psi \in \mathcal{W}$ mit $\Psi^{\top} L(h) = b^{\top} h \;\forall\, h \in \mathcal{H}_N$ (Bewertungsprozess mit Preisgleich.)<br>$\Leftrightarrow$ (KPGΨ) $\exists\, \Psi \in \mathcal{W}$ mit $\Psi^{\top} \breve{L}(h) = 0 \;\forall\, h \in \mathcal{H}_N$, $\Psi_0 = 1$<br>$\Leftrightarrow$ $\exists\, \Psi \in \mathcal{W}$ mit $\Psi^{\top} L(h) = 0 \;\forall\, h \in \ker V_0$, $\Psi_0 = 1$<br>$\Leftrightarrow$ $\exists\, \Psi \in \mathcal{W}$ mit $\Psi^{\top} Z = 0 \;\forall\, Z \in \mathcal{M}$, $\Psi_0 = 1$<br>$\Leftrightarrow$ $\exists\, \Psi \in \mathcal{W}$ mit $\breve{L}^*(\Psi) = 0$, $\Psi_0 = 1$<br>$\Leftrightarrow L^*(\mathcal{W}) = \mathcal{B} \oplus \breve{L}^*(\mathcal{W})$ |
| LOP nicht gültig | $\exists\, X \in L(\mathcal{H}_N)$: $V_0(h)$ nicht konstant für alle $h \in L^{-1}(X)$<br>$\Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{H}_N$ mit $L(f) = 0 \wedge V_0(f) \neq 0$<br>$\Leftrightarrow \ker L \not\subseteq \ker V_0 = \mathcal{B}^{\perp}$ (Nichtinklusion der Kerne)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{B} \not\subseteq L^*(\mathcal{W})$ (Nichtinklusion von $\mathcal{B}$ im $L^*$-Bildraum)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{V} \cap \mathcal{M} \neq O$ (nichttrivialer Durchschnitt)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{E} = \mathcal{V} \subseteq \mathcal{M}$ (Inklusion)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M} = L(\mathcal{H}_N)$ (Maximalität von $\mathcal{M}$)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}^{\perp} \subseteq \mathcal{E}^{\perp} = \{X_0 = 0\}$ (Inklusion)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}^{\perp} = \mathcal{E}^{\perp} \cap \mathcal{M}^{\perp} = \ker L^*$ (Übereinstimmung)<br>$\Leftrightarrow L^*(\mathcal{M}^{\perp}) = O$ (Trivialität von $L^*(\mathcal{M}^{\perp})$)<br>$\Leftrightarrow L^*(\mathcal{W}) = L^*(\mathcal{M})$ (Maximalität von $L^*(\mathcal{M})$)<br>$\Leftrightarrow L^*(\mathcal{W}) \subsetneq \mathcal{B} + \breve{L}^*(\mathcal{W})$ (echte Inklusion) |
| (VS) $\wedge$ LOP | $L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{W} \wedge \mathcal{M}$ ist Hyperebene von $L(\mathcal{H}_N)$ (max. $L(\mathcal{H}_N) \wedge$ nichtmax. $\mathcal{M}$)<br>$\Leftrightarrow L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$ mit $\dim \mathcal{M}^{\perp} = 1$<br>$\Leftrightarrow L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$, $\mathcal{M}^{\perp} = \operatorname{lin} \Psi$ mit einem $\Psi \in \mathcal{W} \setminus O$<br>$\Leftrightarrow \exists_1\, \Psi \in \mathcal{W}$ mit $L^*(\Psi) = b$<br>$\Leftrightarrow |\mathcal{A}| = |L^{*-1}(\{b\})| = 1$ |
| (VS) $\wedge\, m = n_1$ | $L$ surjektiv $\wedge\, m = n_1$<br>$\Leftrightarrow L$ ist ein Isomorphismus<br>$\Leftrightarrow L^*$ ist ein Isomorphismus |
| (VS) $\wedge$<br>LOP ungültig | $\mathcal{M} = L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{W}$ (Maximalität von $\mathcal{M}$ u. $L(\mathcal{H}_N)$)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}^{\perp} = \ker L^* \wedge \ker L^* = O$<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}^{\perp} = O$ (Trivialität von $\mathcal{M}^{\perp}$) |
| Arbitragefreiheit (AF) | $\nexists\, h \in \mathcal{H}_N$ mit $V_0(h) = 0 \wedge L(h) \gneq 0$ (keine Arbitragegelegenheit)<br>$\Leftrightarrow \nexists\, h \in \mathcal{H}_N$ mit $\breve{L}(h) \gneq 0$<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M} \cap \mathcal{W}_{\gneq 0} = \emptyset$ (leerer Durchschnitt)<br>$\Leftrightarrow$ (N+) $\exists\, \Phi \in \mathcal{M}^{\perp}$ mit $\Phi > 0$ (pos. $\mathcal{M}$-Normalenvektor)<br>$\Leftrightarrow$ (NN+) $\exists\, \Phi \in \mathcal{M}^{\perp}$ mit $\Phi > 0$ und $\Phi_0 = 1$ (pos. norm. $\mathcal{M}$-Normalenv.)<br>$\Leftrightarrow$ $\exists\, \Phi \in \mathcal{W}$ mit $\Phi > 0$, $\Phi^{\top} Z = 0 \;\forall\, Z \in \mathcal{M}$ ($\Phi_0 = 1$)<br>$\Leftrightarrow$ (KPGΦ+) $\exists\, \Phi \in \mathcal{W}$ mit $\Phi > 0$, $\Phi^{\top} \breve{L}(h) = 0 \;\forall\, h \in \mathcal{H}_N$ ($\Phi_0 = 1$) |

| | |
|---|---|
| | $\Leftrightarrow \quad \exists\, \Phi \in \mathcal{W}$ mit $\Phi > 0$, $\Phi^{\top} L(h) = 0 \;\forall\, h \in \ker V_0 \quad (\Phi_0 = 1)$ |
| | $\Leftrightarrow \quad \exists\, \Phi \in \mathcal{W}$ mit $\Phi > 0$, $\breve{L}^*(\Phi) = 0 \qquad (\Phi_0 = 1)$ |
| | $\Leftrightarrow$ (PGΦ+) $\quad \exists\, \Phi \in \mathcal{W}$ mit $\Phi > 0$, $\Phi^{\top} L(h) = b^{\top} h \;\; \forall\, h \in \mathcal{H}_N$ |
| | (Diskontierungsprozess m. Preisgleich.) |
| | $\Leftrightarrow \quad \exists\, \Phi \in \mathcal{W}$ mit $L^*(\Phi) = b$, $\Phi > 0 \qquad$ (pos. $L^*$-Urbild von $b$) |
| | $\Leftrightarrow \quad \exists\, \Phi \in \mathcal{M}^{\perp} \setminus \ker L^* = \mathcal{M}^{\perp} \cap \{X_0 \neq 0\}$ mit $\Phi > 0$ |
| | (AF) $\Rightarrow$ (LOP) |
| (VS) ∧ (AF) | $L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{W} \;\wedge\; \exists\, \Phi \in \mathcal{M}^{\perp} \cap \mathcal{W}_{>0}$ |
| | $\Leftrightarrow L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{W} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$ mit $\mathcal{M}^{\perp} = \operatorname{lin} \Phi$, $\Phi > 0$ |
| | $\Leftrightarrow |\mathcal{A}^{+}| = |L^{*-1}(\{b\})| = |\mathcal{M}^{\perp 1+}| = 1$ |

## 3.6.2 Berechnung eines Diskontierungsprozesses

Um für ein Marktmodell die Arbitragefreiheit nachzuweisen, ist nach Satz 3.8 ein positiver normierter $\mathcal{M}$-Normalenvektor $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1+}$ zu bestimmen. Es ist somit eine positive Lösung $\Psi = \Phi$ für das unendliche Gleichungssystem

$$\Psi^{\top} Z = 0 \;\forall\, Z \in \mathcal{M}$$

bzw. das dazu äquivalente endliche Gleichungssystem

$$\Psi^{\top} F^{t,j,k} = 0 \;\forall\, t \in \{1,\ldots,T\}, j \in J = \{1,\ldots,N\}, k \in \{1,\ldots,k_{t-1}\}$$

mit der Anfangsbedingung $\Psi_0 = 1$ zu berechnen (Definition der einperiodischen Termingeschäfte $F^{t,j,k} \in \mathcal{M}$ in Abschnitt 3.7.2). Dazu löst man, wie oben in Abschnitt 3.4.3 bei der Berechnung eines normierten Bewertungsprozesses $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1} \subseteq \mathcal{A}$ dargestellt, beginnend mit dem Anfangswert

$$\Psi_0(A_0) = 1$$

der Reihe nach für die Zeitpunkte $t = 1,\ldots,T$ und Knoten $A_{t-1,k} \in \mathcal{P}_{t-1}$, $k = 1,\ldots,k_{t-1}$, mit den jeweiligen Nachfolgerknoten $A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}$ ($m \in \{1,\ldots,k_t\}$) des Informationsbaums jeweils das zugehörige Gleichungssystem mit den $N$ Gleichungen nach den zu den Indizes $m$ mit $A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}$ gehörigen Unbekannten $\Psi_t(A_{t,m})$ auf:

$$(\mathrm{GS}\Psi A_{t-1,k}) \qquad \sum_{A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}} \Psi_t(A_{t,m}) S_t^{\delta,j}(A_{t,m}) = \Psi_{t-1}(A_{t-1,k})\, S_{t-1}^{j}(A_{t-1,k}) \qquad (j = 1,\ldots,N).$$

Im obigen Beispiel 3.3 in Abschnitt 3.4.3 würde man ein arbitragefreies Marktmodell erhalten, wenn man beispielsweise beim Preisprozess $S$ den Wert $S_2^{\delta,1}(\omega_2) = S_2^{1}(\omega_2) = 29$ durch den Wert 67 ersetzt, da dann die positive Lösung

$$\Phi = (1;\, 0.5,0.5;0.108,0.383,0.204,0.306)^{\top}$$

für das Gleichungssystem $\Psi^{\top} Z = 0 \;\forall\, Z \in \mathcal{M}$ existiert.

### 3.6.3 Äquivalenz der Arbitragefreiheit im Mehrperiodenmodell zur Arbitragefreiheit in den enthaltenen Einperiodenmodellen

Analog zu der in Abschnitt 3.2.5 (Satz 3.1) begründeten Äquivalenz der Vollständigkeit eines Mehrperiodenmodells zur Vollständigkeit aller enthaltenen Einperiodenmodelle kann der gleiche Sachverhalt hinsichtlich der Arbitragefreiheit bewiesen werden. Dieser wird im folgenden Satz dargestellt.[42] Der Beweis erfolgt hier mittels der Existenz eines Diskontierungsprozesses $\Phi$ des Mehrperiodenmodells und der Existenz von Diskontvektoren $\varphi_t$ der Einperiodenmodelle.

**Satz 3.10 Äquivalenz der Arbitragefreiheit im Mehrperiodenmodell zur Arbitragefreiheit in allen enthaltenen Einperiodenmodellen**

Im Mehrperiodenmodell liegt genau dann Arbitragefreiheit (AF) vor, wenn dies auch für alle enthaltenen Einperiodenmodelle gilt.

**Beweis:** a) „⇐": In allen enthaltenen Einperiodenmodellen eines Mehrperiodenmodells liege die Arbitragefreiheit vor. Für die Gültigkeit der Arbitragefreiheit (AF) im Mehrperiodenmodell wird die Existenz eines Diskontierungsprozesses $\Psi = \Phi$, also einer positiven Lösung des Gleichungssystems (GS$\Psi A_{t\text{-}1,k}$), mit dem Prinzip der vollständigen Induktion gezeigt. Als Induktionsbeginn setzt man $\Phi_0(A_0) := 1 > 0$, womit $\Phi$ schon im Ausgangsknoten $A_0$ passend definiert ist. Die Induktionsannahme besteht darin, dass für ein $t \in \{1,\ldots,T\}$ schon für alle zu den Ausgangsknoten $A_{s\text{-}1,k}$ $(0 < s < t$, $k \in \{1,\ldots,k_{s\text{-}1}\})$ gehörigen Gleichungssysteme (GS$\Psi A_{s\text{-}1,k}$) die Existenz von positiven Lösungen $\Phi_s$ und damit insbesondere die Existenz einer positiven Lösung $\Phi_{t\text{-}1}$ $(s = t - 1)$ für die Gleichungssysteme

$$(\mathrm{GS}\Psi A_{t\text{-}2,k}) \qquad \sum_{A_{t-1,m} \subseteq A_{t-2,k}} S_{t-1}^{\delta}(A_{t-1,m})\Phi_{t-1}(A_{t-1,m}) = \Phi_{t-2}(A_{t-2,k})\; S_{t-2}(A_{t-2,k})$$

$(A_{t\text{-}2,k} \in \mathcal{P}_{t\text{-}2})$ nachgewiesen ist. Als Induktionsschluss $t\text{-}1 \longrightarrow t$ $(t \in \{1,\ldots,T\})$ zeigt man für jedes $k \in \{1,\ldots,k_{t\text{-}1}\}$ und für alle $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$, dass dann auch das Gleichungssystem (GS$\Psi A_{t\text{-}1,k}$) eine auf den $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$ positive Lösung $\Psi_t = \Phi_t$ besitzt: Da in dem zum Ausgangsknoten $A_{t\text{-}1,k}$ $(t \geq 1)$ gehörigen Einperiodenmodell die Arbitragefreiheit gilt, existiert nach Abschnitt 6.2.3 ein auf den Knoten $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$ definierter Diskontvektor $\varphi_t$ als *positive* Lösung des Gleichungssystems[43]

$$\sum_{A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}} S_t^{\delta}(A_{t,m})\varphi_t(A_{t,m}) = 1 \cdot S_{t-1}(A_{t-1,k})\,.$$

Mit der Definition

$$\Phi_t(A_{t,m}) := \Phi_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k}) \cdot \varphi_t(A_{t,m})$$

erhält man dann wegen der gemäß Induktionsannahme vorliegenden Positivität von $\Phi_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k})$ auch eine auf den $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$ definierte positive Lösung $\Psi_t = \Phi_t$ des Gleichungssystems

$$(\mathrm{GS}\Psi A_{t\text{-}1,k}) \qquad \sum_{A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}} S_t^{\delta}(A_{t,m})\Phi_t(A_{t,m}) = \Phi_{t-1}(A_{t-1,k})\; S_{t-1}(A_{t-1,k})\,.$$

---

[42] Die Äquivalenz der Arbitragefreiheit eines Mehrperiodenmodells zur Arbitragefreiheit der enthaltenen Einperiodenmodelle findet man bei Kremer (2011) auf S. 175 und (2017) auf S. 69 in Lemma 2.22.

[43] Für ein im Mehrperiodenmodell enthaltenes Einperiodenmodell liegt die Arbitragefreiheit (AF) nach Abschnitt 6.2.3 genau dann vor, wenn die Preisprozesskomponente $S_{t-1}(A_{t-1,k})$ des Ausgangsknotens $A_{t\text{-}1,k}$ eine Positivkombination (positive Linearkombination) der Preisprozesskomponenten $S_t^{\delta}(A_{t,m})$ seiner Nachfolgerknoten $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$ ist und somit ein Diskontvektor $\varphi_t$ für das Einperiodenmodell existiert.

Da in allen enthaltenen Einperiodenmodellen die Arbitragefreiheit gilt, erhält man insgesamt einen auf allen Argumenten $(t,A_{t,m})$ ($t \in I$, $A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$) definierten positiven Prozess $\Phi$, der das Gleichungssystem $(GS\Psi A_{t\text{-}1,k})$ ($t \in \{1,\ldots,T\}$, $k \in \{1,\ldots,k_{t\text{-}1}\}$) mit der Anfangsbedingung $\Psi_0 = 1$ erfüllt und daher ein positiver normierter $\mathcal{M}$-Normalenvektor $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1+} \subseteq \mathcal{A}$ ist. Nach Satz 3.8, 8) (NN+) von Abschnitt 3.6.1 liegt somit die Arbitragefreiheit auch im Mehrperiodenmodell vor. Mittels vollständiger Induktion erhält man die Berechnung der Diskontierungsprozesskomponente $\Phi_t(A_t)$ eines Knotens $A_t = A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$ aus den Diskontvektorkomponenten $\varphi_s(A_s)$ des Knotens $A_t$ selbst und der dazu eindeutig bestimmten Vorgängerknoten $A_s \in \mathcal{P}_s$ ($s = t\text{-}1,\ldots,0$; $\varphi_0(A_0) := \Phi_0(A_0) = 1$):

$$\Phi_t(A_t) = \varphi_0(A_0)\cdot\varphi_1(A_1)\cdot\ldots\cdot\varphi_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1})\cdot\varphi_t(A_t) \text{ mit } A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_t.$$[44]

b) „⇒“: Falls im Mehrperiodenmodell die Arbitragefreiheit vorliegt, also ein normierter Diskontierungsprozess $\Psi = \Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1+} \subseteq \mathcal{A}$ als positive Lösung des Gleichungssystems $(GS\Psi A_{t\text{-}1,k})$ ($t \in \{1,\ldots,T\}$, $k \in \{1,\ldots,k_{t\text{-}1}\}$) mit der Anfangsbedingung $\Psi_0 = 1$ existiert, liefert

$$\varphi_t(A_{t,m}) := \Phi_t(A_{t,m})/\Phi_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k})$$

wegen der Positivität[45] von $\Phi_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k})$ und $\Phi_t(A_{t,m})$ eine auf den $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$ definierte positive Lösung $\varphi_t$ des Gleichungssystems

$$\sum_{A_{t,m}\subseteq A_{t-1,k}} S_t^{\delta}(A_{t,m})\varphi_t(A_{t,m}) = 1\cdot S_{t-1}(A_{t-1,k}),$$

somit nach Abschnitt 6.2.3 (Satz 6.4) für das zu $A_{t\text{-}1,k}$ gehörige Einperiodenmodell einen Diskontvektor $\varphi_t$ und die Gültigkeit der Arbitragefreiheit. □

## 3.6.4 Geometrische Interpretation des schrittweisen Übergangs vom LOP zur Arbitragefreiheit (AF)

Im Mehrperiodenmodell sei das LOP gültig, $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1} \subseteq \mathcal{A}$ ein normierter Bewertungsprozess und somit $\Psi$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$(GS\Psi A_{t\text{-}1,k}) \qquad \sum_{A_{t,m}\subseteq A_{t-1,k}} S_t^{\delta}(A_{t,m})\Psi_t(A_{t,m}) = \Psi_{t-1}(A_{t-1,k})\, S_{t-1}(A_{t-1,k})$$

($t \in \{1,\ldots,T\}$, $k \in \{1,\ldots,k_{t\text{-}1}\}$) mit Anfangswert $\Psi_0 = 1$. Wenn für ein im Mehrperiodenmodell enthaltenes Einperiodenmodell sowohl im Ausgangsknoten $A_{t\text{-}1,k}$ als auch in dessen Nachfolgerknoten $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$ der Bewertungsprozess $\Psi$ positiv ist, so liegt (wie schon in Beweisteil b) von Satz 3.10 dargestellt wurde) für dieses Einperiodenmodell eine auf den $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$ definierte positive Lösung $\varphi_t(A_{t,m}) := \Psi_t(A_{t,m})/\Psi_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k})$ des Gleichungssystems

$$\sum_{A_{t,m}\subseteq A_{t-1,k}} S_t^{\delta}(A_{t,m})\varphi_t(A_{t,m}) = 1\cdot S_{t-1}(A_{t-1,k}),$$

somit nach Abschnitt 6.2.3 (Satz 6.4) ein Diskontvektor $\varphi_t$ und die Arbitragefreiheit vor. In Abschnitt 3.4.5 wurde mit dem Alternativsatz 3.5 der konvexen Geometrie bewiesen, dass der von den $\mathcal{W}$-Basisvektoren $\mathbf{1}_{t,A_{t,k}}$ zur Indexmenge $I_+(\mathcal{W},\Psi)$ (der positiven Bewertungsprozesskomponenten $\Psi_t(A_{t,k})$) aufgespannte punktierte konvexe lineare Kegel

$$\mathcal{W}_{\geq 0}(\Psi) = \text{cone}\,\{\mathbf{1}_{t,A_{t,k}} : (t,A_{t,k}) \text{ mit } \Psi_t(A_{t,k}) > 0\} \setminus \{0\},$$

---

[44] Diese Berechnungsformel für den Diskontierungsprozess $\Phi$ aus den Diskontvektoren $\varphi_s$ der enthaltenen Einperiodenmodelle bringt Kremer (2017) auf S. 175f in (3.16) u. (3.18).

[45] Die Positivität der Komponenten des Diskontierungsprozesses ist hier entscheidend für die Existenz eines (positiven) Diskontvektors im Einperiodenmodell. Im Gegensatz dazu muss beim entsprechenden Satz 3.4 zum LOP in Abschnitt 3.4.4 das Nichtverschwinden der Bewertungsprozesskomponente $\Psi_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k})$ noch extra vorausgesetzt werden.

der sog. $\Psi$-schwach positive Orthant $\mathcal{W}_{\gneq 0}(\Psi)$, mit der Menge $\mathcal{M}$ der Kapitalmarktgeschäfte einen leeren Durchschnitt hat:

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{W}_{\gneq 0}(\Psi) = \emptyset.$$

Zunächst liegt bei einem Mehrperiodenmodell mit gültigem LOP und somit einem normierten Bewertungsprozess $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1} \subseteq \mathcal{A}$ zumindest der punktierte Strahl

$$\mathcal{E}_{>0} = \text{cone } \mathbf{1}_{0,\Omega} \setminus \{0\} = \{ X_0 \mathbf{1}_{0,\Omega} \in \mathcal{W} : X_0 > 0 \}$$

wegen $\Psi_0 > 0$ im $\Psi$-schwach positiven Orthanten $\mathcal{W}_{\gneq 0}(\Psi)$. Mit der schrittweisen Zunahme der Anzahl der positiven Bewertungsprozesskomponenten $\Psi_t(A_{t,k})$ wächst dann aber auch die Anzahl der arbitragefreien enthaltenen Einperiodenmodelle und die Ausdehnung des $\Psi$-schwach positiven Orthanten $\mathcal{W}_{\gneq 0}(\Psi)$. Durch den größer werdenden Orthanten $\mathcal{W}_{\gneq 0}(\Psi)$ wird der Unterraum $\mathcal{M}$ der Kapitalmarktgeschäfte fortschreitend verlagert. Wenn schließlich alle Komponenten $\Psi_t(A_{t,k})$ des Bewertungsprozesses $\Psi$ positiv sind, liegt in allen enthaltenen Einperiodenmodellen die Arbitragefreiheit vor und bildet der punktierte Kegel $\mathcal{W}_{\gneq 0}(\Psi)$ den gesamten schwach positiven Orthanten $\mathcal{W}_{\gneq 0}$ von $\mathcal{W}$. Die Hyperebene $\mathcal{M}$ von $L(\mathcal{H}_N)$ liegt dann derart im Raum $\mathcal{W}$, dass sie den gesamten schwach positiven Orthanten $\mathcal{W}_{\gneq 0}$ nicht trifft ($\mathcal{M} \cap \mathcal{W}_{\gneq 0} = \emptyset$) und das gesamte Mehrperiodenmodell arbitragefrei ist.

## 3.7 Folgerungen aus dem Law of One Price bzw. der Arbitragefreiheit

### 3.7.1 Unterraum $\mathcal{M}$ als Menge der Kapitalmarktgeschäfte mit dem Preis Null

Für ein Zahlungsprofil $Z$ im Unterraum

$$\mathcal{M} = L(\ker V_0) = L(\mathcal{B}^{\perp}) = \breve{L}(\mathcal{H}_N)$$

gibt es eine Handelsstrategie $h \in \ker V_0$ mit $Z = L(h) = \breve{L}(h)$ und dem bei Durchführung der Handelsstrategie zum Zeitpunkt $t = 0$ vom Portfolioinhaber aufzubringenden Startkapitaleinsatz

$$V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = 0 \text{ bzw. } \breve{V}(h) = 0.$$

Wegen $\breve{V}(h) = 0$ entwickelt sich das Zahlungsprofil $Z$ allein aus dem zu den Zeitpunkten $t \in I$ erfolgenden Handel mit den $N$ Wertpapieren $S^j$ des Marktmodells: Für die nachfolgenden Zeitindizes $t = 1,\ldots,T$ gehört nämlich zu jedem Portfoliovektor $h_t$ sowohl der Kauf des Portfolios $R_{t-1}(h) = S_{t-1} \cdot h_t$ zum Zeitpunkt $t$-1 für die Reinvestition in das Portfolio als auch der Verkauf des sich aus $R_{t-1}(h)$ zufallsabhängig entwickelten Portfolios $V_t(h) = S_t^{\delta} \cdot h_t$ zum Zeitpunkt $t$ zur Bereitstellung der Portfolioauszahlung $L_t(h)$ und des Reinvestitionswerts $R_t(h)$. Der Unterraum $\mathcal{M}$ ist somit die Menge der **Kapitalmarktgeschäfte** des Marktmodells $((S,\delta),\mathcal{F})$.

Bei Gültigkeit des LOP existiert ein Bewertungsprozess $\Psi \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}^{\perp}$ für die duplizierbaren $\mathcal{F}$-adaptierten Zahlungsprofile. Jedes Kapitalmarktgeschäft $Z = L(h) \in \mathcal{M} = L(\ker V_0)$ besitzt den Preis

$$\pi(Z) = \Psi^{\mathsf{T}} Z = V_0(h) = 0$$

und wird daher als indifferent, d. h. weder als vorteilhaft noch als unvorteilhaft, angesehen. Umgekehrt gilt für ein Zahlungsprofil $Z = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ mit dem Preis $\pi(Z) = 0$ die Preisgleichung (PG$\Psi$) $0 = \pi(Z) = \Psi^{\mathsf{T}} Z = b^{\mathsf{T}} h = V_0(h)$ und somit die Inzidenz $Z = L(h) \in L(\ker V_0) = \mathcal{M}$. Insgesamt erhält man daher für die Menge $\mathcal{M}$ der Kapitalmarktgeschäfte die Darstellung

$$\mathcal{M} = L(\mathcal{H}_N) \cap \{\Psi\}^{\perp}.$$

Die zu einem Bewertungsprozess $\Psi$ gehörige Linearform $\pi = \Psi^{\mathsf{T}}$ besitzt also auf $\mathcal{M}$ den Wert Null und auf $L(\mathcal{H}_N) \setminus \mathcal{M}$ von Null verschiedene Werte.

### 3.7.2 Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ als lineare Hülle der einperiodischen Termingeschäfte $F^{t,j,k}$

Es wird nun im nachfolgenden Beweis noch gezeigt, dass jedes Kapitalmarktgeschäft $Z = L(h) \in \mathcal{M}$ eine mittels der Portfoliovektoren $h_t$ gebildete Kombination der einperiodischen Termingeschäfte (Forwardgeschäfte)

$$\begin{aligned} T^{t,j} &:= -\, S_{t-1}^{j} \cdot \mathbf{1}_{t-1,\Omega} + S_t^{\delta,j} \cdot \mathbf{1}_{t,\Omega} \\ &= \left(0,\ldots,0,-S_{t-1}^{j},+S_t^{\delta,j},0,\ldots,0\right)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

($t \in \{1,\ldots,T\}, j \in J = \{1,\ldots,N\}$) von Beispiel 3.1 in Abschnitt 3.1 ist:

$$Z = C(h) := \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{N} h_t^j \cdot T^{t,j} .$$

Da die $\mathcal{F}_{t-1}$-messbaren reellwertigen Zustandsfunktionen $h_t^j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ einer Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ für $t \geq 2$ im Allgemeinen auf $\Omega$ nicht konstant sind, ist das Kapitalmarktgeschäft $C(h)$ keine Linearkombination der Termingeschäfte $T^{t,j}$ mit konstanten Koeffizienten.

Nur im deterministischen Fall sind die Zustandsfunktionen $S_{t-1}^{j}(A_{t-1,k}) = S_{t-1}^{j}$, $S_t^{j,\delta}(A_{t,k}) = S_t^{j,\delta}$, $h_t^j(A_{t-1,k}) = h_t^j$, $Z_t(A_{t,k}) = Z_t$ jeweils konstant für alle $A_{t-1,k} \in \mathcal{P}_{t-1}$ bzw. $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$, sodass dann $Z \in \mathcal{M}$ eine Linearkombination der deterministischen einperiodischen Termingeschäfte $T^{t,j}$ ist. Im deterministischen Fall bedeutet die Duplizierbarkeit von $X$ somit die Summendarstellung

$$X = \breve{V}(h) + \breve{L}(h),$$

wobei $\breve{L}(h) = C(h)$ eine Linearkombination der $T^{t,j}$ ist. Die Vollständigkeit des Marktmodells bedeutet in diesem deterministischen Fall dann, dass jeder Zahlungsstrom $X \in L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{W}$ (dim $\mathcal{W} = n_1 = k_0 + \ldots + k_T = T + 1$) eine Summe aus einem Bewertungszah-

lungsstrom $\breve{V}(h) = (V_0(h),0,\ldots,0)^\mathsf{T}$ und einer Linearkombination der $T$ indifferenten Kapitalmarktgeschäfte $T^{t,j}$ ($t \in \{1,\ldots,T\}$) ist.

Weiter wird im stochastischen Fall für $Z = C(h) \in \mathcal{M}$ die Koordinatendarstellung

$$Z = \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{k_{t-1}} h_t^j(A_{t-1,k})F^{t,j,k}$$

bezüglich des endlichen Erzeugendensystems der Forwardgeschäfte

$$F^{t,j,k} := -S_{t-1}^j(A_{t-1,k})\mathbf{1}_{t-1,A_{t-1,k}} + \sum_{A_{t,m}\subseteq A_{t-1,k}} S_t^{\delta,j}(A_{t,m})\mathbf{1}_{t,A_{t,m}}$$

$$= \left(0,\ldots,0,-S_{t-1}^j(A_{t-1,k})\mathbf{1}_{A_{t-1,k}},+\sum_{A_{t,m}\subseteq A_{t-1,k}} S_t^{\delta,j}(A_{t,m})\mathbf{1}_{A_{t,m}},0,\ldots,0\right)^\mathsf{T} \in \mathcal{M}$$

($t \in \{1,\ldots,T\}, j \in J = \{1,\ldots,N\}, k \in \{1,\ldots,k_{t-1}\}$) von $\mathcal{M}$ bewiesen.

Somit ist der Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells die lineare Hülle der endlich vielen einperiodischen Forwardgeschäfte $F^{t,j,k}$:

$$\mathcal{M} = \text{lin}\,\{F^{t,j,k} : t \in \{1,\ldots,T\}, j \in J, k \in \{1,\ldots,k_{t-1}\}\}.$$

Das endliche Erzeugendensystem $F^{t,j,k}$ von $\mathcal{M}$ wird in Abschnitt 3.4.3 verwendet, um bei der Bestimmung eines Bewertungsprozess $\Psi$ das unendliche Gleichungssystem $\Psi^\mathsf{T}Z = 0$ $\forall\, Z \in \mathcal{M}$ durch das äquivalente endliche Gleichungssystem $\Psi^\mathsf{T}F^{t,j,k} = 0$ $\forall\, t \in \{1,\ldots,T\}$, $j \in J$, $k \in \{1,\ldots,k_{t-1}\}$ zu ersetzen.

**Beweis:** In Beispiel 3.1 von Abschnitts 3.1 wurde gezeigt, dass jedes einperiodische Termingeschäft $T^{t,j}$ mittels der speziellen Handelsstrategie $\theta^{t,j} = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{1}_{t,\Omega}$ duplizierbar ist und im Unterraum $\mathcal{M} = L(\ker V_0) = \breve{L}(\mathcal{H}_N)$ der duplizierbaren Zahlungsprofile liegt, die ohne Startkapitaleinsatz zum Zeitpunkt $t = 0$ dupliziert werden können. Das Finanzgeschäft $T^{t,j}$ besteht in dem Kauf des Wertpapiers $S^j$ zum Zeitpunkt $t$ - 1 und dem Verkauf dieses Wertpapiers zum Zeitpunkt $t$. Es wird nun gezeigt, dass sich die Zugehörigkeit zum Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells auch überträgt auf das zur Stückzahl $h_t^j$ gehörige Zahlungsprofil

$$C^{t,j}(h_t^j) := h_t^j \cdot T^{t,j} = \left(0,\ldots,0,-S_{t-1}^j \cdot h_t^j,+S_t^{\delta,j} \cdot h_t^j,0,\ldots,0\right)^\mathsf{T},$$

das zum Portfoliovektor $h_t$ gehörige Zahlungsprofil

$$C^t(h_t) := \sum_{j=1}^{N} C^{t,j}(h_t^j) = \left(0,\ldots,0,-S_{t-1} \cdot h_t,+S_t^\delta \cdot h_t,0,\ldots,0\right)^\mathsf{T}$$

$$= -(S_{t-1} \cdot h_t) \cdot \mathbf{1}_{t-1,\Omega} + (S_t^\delta \cdot h_t) \cdot \mathbf{1}_{t,\Omega}$$

und das zur Handelsstrategie $h$ gehörige Zahlungsprofil

$$C(h) := \sum_{t=1}^{T} C^t(h_t) = \sum_{t=1}^{T}\left(0,\ldots,0,-S_{t-1} \cdot h_t,+S_t^\delta \cdot h_t,0,\ldots,0\right)^\mathsf{T}.$$

Es genügt zu beweisen, dass $C^{t,j}(h_t^j)$ im Unterraum $\mathcal{M}$ liegt, da dann auch die Zahlungsprofile $C^t(h_t)$ und $C(h)$ als Summen der $C^{t,j}(h_t^j)$ sich ebenfalls im Unterraum $\mathcal{M}$ befinden.

Das Finanzgeschäft $C^{t,j}(h_t^j) = h_t^j \cdot T^{t,j}$ ist das $h_t^j$ -fache des zum Wertpapier $S^j$ gebildeten Termingeschäfts $T^{t,j}$ und besteht in dem Kauf der Portfolio-Position $h_t^j \cdot S_t^j$ des Wertpapiers $S^j$ zum Zeit-

punkt $t$ - 1 und dem Verkauf der Portfolio-Position $h_t^j \cdot S_t^{\delta,j}$ dieses Wertpapiers zum Zeitpunkt $t$.
Bei dem Finanzgeschäft $C^t(h_t)$ wird zum Zeitpunkt $t$ - 1 das aus den $N$ Wertpapieren $S^j$ gemäß Portfoliovektor $h_t$ gebildete Portfolio $S_{t-1} \cdot h_t = S_{t-1}^{\mathsf{T}} h_t = S_{t-1}^1 h_t^1 + \ldots + S_{t-1}^N h_t^N$ gekauft und zum Zeitpunkt $t$ das daraus entstandene Portfolio $S_t^{\delta} \cdot h_t = S_t^{\delta\mathsf{T}} h_t = S_t^{\delta,1} h_t^1 + \ldots + S_t^{\delta,N} h_t^N$ wieder verkauft.
Das Finanzgeschäft $C(h)$ schließlich, das durch die Folge $\bar{h} = (h_1,\ldots,h_T)^{\mathsf{T}}$ der Portfoliovektoren $h_t$ ($t \in \{1,\ldots,T\}$) beschrieben wird, setzt sich additiv aus den $T$ Finanzgeschäften $C^t(h_t)$ zusammen und besteht allein in dem Kauf und Verkauf der zu den Portfoliovektoren $h_t$ gebildeten Wertpapierportfolios. Da hierbei kein Startkapitaleinsatz verwendet wird, ist $C(h)$ der Zahlungsstrom eines reinen Kapitalmarktgeschäfts mit den $N$ Wertpapieren $S^j$ des Marktmodells.

Beweis für $C^{t,j}(h_t^j) \in \mathcal{M}$: Zunächst ist $C^{t,j}(h_t^j)$ als Produkt der $\mathcal{F}_{t-1}$-messbaren reellwertigen Zustandsfunktion $h_t^j$ und des $\mathcal{F}$-adaptierten stochastischen $\mathbb{R}^N$-wertigen Prozesses $T^{t,j} = - S_{t-1}^j \cdot \mathbf{1}_{t-1,\Omega} + S_t^{\delta,j} \cdot \mathbf{1}_{t,\Omega}$ ein $\mathcal{F}$-adaptierter stochastischer Prozess, da $h_t^j \cdot T_{t-1}^{t,j} = -h_t^j \cdot S_{t-1}^j$ $\mathcal{F}_{t-1}$-messbar, $h_t^j \cdot T_t^{t,j} = h_t^j \cdot S_t^{\delta,j}$ $\mathcal{F}_t$-messbar und $h_t^j \cdot T_s^{t,j} = h_t^j \cdot 0 = 0$ ($s \neq t$-1, $t$) $\mathcal{F}_s$-messbar sind. Weiter wird gezeigt, dass $C^{t,j}(h_t^j)$ duplizierbar ist und zwar mittels der Handelsstrategie

$$\varphi^{t,j} := h_t^j \cdot \theta^{t,j} = h_t^j \cdot \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{1}_{t,\Omega} = (0,..,0,h_t^j \cdot \mathbf{e}_j,0,..,0)^{\mathsf{T}}$$

mit $\varphi_s^{t,j} = 0$ für $s \neq t$ und $\varphi_t^{t,j} = h_t^j \cdot \mathbf{e}_j \in \mathcal{H}_{t,N}$: Da die reellwertige Zustandsfunktion $h_t^j \in \mathcal{H}_{t,1}$ ($\mathcal{F}_{t-1}$,$\mathcal{B}^1$)-messbar ist, ist auch die $\mathbb{R}^N$-wertige Zustandsfunktion $\varphi_t^{t,j} = h_t^j \cdot \mathbf{e}_j$ ($\mathcal{F}_{t-1}$,$\mathcal{B}^N$)-messbar [46] und somit $\varphi^{t,j}$ eine Handelsstrategie. Zu $\varphi^{t,j}$ ($t \in \{1,\ldots,T\}$) gehören die Vermögenswerte

$$\begin{aligned} V_s(\varphi^{t,j}) &= S_s^{\delta} \cdot \varphi_s^{t,j} = 0 && \text{für } s \neq t, \\ V_t(\varphi^{t,j}) &= S_t^{\delta} \cdot \varphi_t^{t,j} = h_t^j \; S_t^{\delta} \cdot \mathbf{e}_j = h_t^j \; S_t^{\delta,j} && \text{für } s = t, \end{aligned}$$

die Reinvestitionswerte

$$\begin{aligned} R_s(\varphi^{t,j}) &= S_s \cdot \varphi_{s+1}^{t,j} = 0 && \text{für } s \neq t\text{-}1, \\ R_{t-1}(\varphi^{t,j}) &= S_{t-1} \cdot \varphi_t^{t,j} = h_t^j \; S_{t-1} \cdot \mathbf{e}_j = h_t^j \; S_{t-1}^j && \text{für } s = t\text{-}1, \end{aligned}$$

die Portfolioauszahlungen

$$\begin{aligned} L_s(\varphi^{t,j}) &= V_s(\varphi^{t,j}) - R_s(\varphi^{t,j}) = 0 && \text{für } s \neq t\text{-}1,\ t, \\ L_{t-1}(\varphi^{t,j}) &= - R_{t-1}(\varphi^{t,j}) = - \; h_t^j \; S_{t-1}^j && \text{für } s = t\text{-}1, \\ L_t(\varphi^{t,j}) &= V_t(\varphi^{t,j}) = h_t^j \; S_t^{\delta,j} && \text{für } s = t \end{aligned}$$

und daher insgesamt das Zahlungsprofil

$$\begin{aligned} L(\varphi^{t,j}) &= - \; h_t^j \; S_{t-1}^j \cdot \mathbf{1}_{t-1,\Omega} + h_t^j \; S_t^{\delta,j} \cdot \mathbf{1}_{t,\Omega} \\ &= h_t^j \cdot \left(0,..,0,-S_{t-1}^j,S_t^{\delta,j},0,..,0\right)^{\mathsf{T}} \\ &= h_t^j \; T^{t,j} \\ &= C^{t,j}(h_t^j). \end{aligned}$$

---

[46] Zur Begründung für die ($\mathcal{F}_{t-1}$,$\mathcal{B}^N$)-Messbarkeit des Produkts $\varphi_t^{t,j}$ aus ($\mathcal{F}_{t-1}$,$\mathcal{B}^1$)-messbarer reellwertiger Funktion $h_t^j$ und konstanter und damit auch ($\mathcal{F}_{t-1}$,$\mathcal{B}^N$)-messbarer $\mathbb{R}^N$-wertiger Funktion $\mathbf{e}_j$ kann man die Charakterisierung der Messbarkeit bei endlichem Zustandsraum in Abschnitt 2.3 verwenden: Da die Funktionen $h_t^j$ und $\mathbf{e}_j$ jeweils konstant auf den $A_{t-1} \in \mathcal{P}_{t-1}$ sind, ist auch die Produktfunktion $\varphi_t^{t,j} = h_t^j \cdot \mathbf{e}_j$ konstant auf den $A_{t-1} \in \mathcal{P}_{t-1}$ und somit $\mathcal{F}_{t-1}$-messbar.

Aus der Inzidenz $C^{t,j}(h_t^j) = L(\varphi^{t,j}) \in L(\mathcal{H}_N) \subseteq \mathcal{W}$ folgt auch noch einmal die $\mathcal{F}$-Adaptiertheit des Zahlungsprofils $C^{t,j}(h_t^j)$. Wegen $t \geq 1$ ist $V_0(\varphi^{t,j}) = S_0^{\delta} \cdot \varphi_0^{t,j} = S_0^{\delta\mathsf{T}} \varphi_0^{t,j} = 0$, sodass $C^{t,j}(h_t^j) = L(\varphi^{t,j})$ im Unterraum $\mathcal{M} = L(\ker V_0)$ von $L(\mathcal{H}_N)$ liegt.

Beweis der Darstellung $Z = C(h)$ für $Z \in \mathcal{M}$: Allgemein erhält man für ein duplizierbares Zahlungsprofil $X \in L(\mathcal{H}_N) \subseteq \mathcal{W}$ die Umformungen

$$
\begin{aligned}
X &= L(h) = \sum_{t=0}^{T} L_t(h)\mathbf{1}_t \\
&= \breve{V}(h) + \breve{L}(h) && \text{(additive Zerlegung von } L\text{)} \\
&= V_0(h)\ \mathbf{1}_{0,\Omega} + \sum_{t=0}^{T} \breve{L}_t(h)\mathbf{1}_t && (\mathbf{1}_{0,\Omega} = w_{0,A_0},\ \mathbf{1}_t = \mathbf{1}_{t,\Omega} \in \mathcal{W} \text{ bzw. } \mathbb{R}^{n_1}) \\
&= V_0(h)\ \mathbf{1}_{0,\Omega} - S_0 \cdot h_1 \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} + \sum_{t=1}^{T} \left(S_t^{\delta} \cdot h_t - S_t \cdot h_{t+1}\right)\mathbf{1}_t && (h_{T+1} = 0) \\
&= V_0(h)\ \mathbf{1}_{0,\Omega} - \sum_{t=1}^{T} (S_{t-1} \cdot h_t) \cdot \mathbf{1}_{t-1} + \sum_{t=1}^{T} (S_t^{\delta} \cdot h_t) \cdot \mathbf{1}_t \\
&= (V_0(h), 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}} + \sum_{t=1}^{T} \left(0, \ldots, 0, -S_{t-1} \cdot h_t, +S_t^{\delta} \cdot h_t, 0, \ldots, 0\right)^{\mathsf{T}} && \text{(Darst. in } \mathbb{R}^{n_1}) \\
&= (V_0(h), 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}} + \sum_{t=1}^{T} \left(0, \ldots, 0, -\sum_{j=1}^{N} h_t^j \cdot S_{t-1}^j, +\sum_{j=1}^{N} h_t^j \cdot S_t^{\delta,j}, 0, \ldots, 0\right)^{\mathsf{T}} \\
&= (V_0(h), 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{N} h_t^j \cdot \left(0, \ldots, 0, -S_{t-1}^j, +S_t^{\delta,j}, 0, \ldots, 0\right)^{\mathsf{T}} \\
&= (V_0(h), 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{N} h_t^j \cdot T^{t,j} \\
&= \breve{V}(h) + C(h)(X).
\end{aligned}
$$

Demzufolge erhält man speziell für ein Kapitalmarktgeschäft $Z = L(h) \in \mathcal{M} = L(\ker \breve{V}) = \breve{L}(\mathcal{H}_N)$ wegen $\breve{V}(h) = 0$ die Darstellung $Z = C(h)(Z)$ und insgesamt

$$\mathcal{M} = C(\mathcal{H}_N).$$

Beweis der Darstellung der Kapitalmarktgeschäfte $Z = C(h) \in \mathcal{M}$ durch die einperiodischen Forwardgeschäfte $F^{t,j,k}$: Zu einer Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ gehört neben dem Startkapitaleinsatz $\breve{V}(h)$ auch die Summe

$$C(h) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{N} h_t^j \cdot T^{t,j} = \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{N} C^{t,j}(h_t^j)$$

der einperiodischen Kapitalmarktgeschäfte $C^{t,j}(h_t^j) = h_t^j \cdot T^{t,j}$. Da die $\mathcal{F}_{t-1}$-messbaren reellwertigen Zustandsfunktionen $h_t^j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ für $t \geq 2$ im Allgemeinen auf $\Omega$ nicht konstant sind, ist das Kapitalmarktgeschäft $C(h)$ keine Linearkombination der Termingeschäfte $T^{t,j}$ mit konstanten Koeffizienten. Nachfolgend wird aber gezeigt, dass $C(h)$ eine Linearkombination der $F^{t,j,k} \in \mathcal{M}$ ist und somit die $F^{t,j,k}$ ein Erzeugendensystem des Kapitalmarkts $\mathcal{M}$ bilden: Die einperiodischen Termingeschäfte $C^{t,j}(h_t^j)$ lassen sich nämlich weiter additiv zerlegen zu einer (echten) Linearkombination

$$C^{t,j}(h_t^j) = h_t^j \cdot T^{t,j}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\ h_t^j\ S_{t-1}^j \cdot \mathbf{1}_{t-1,\Omega} \ +\ h_t^j\ S_t^{\delta,j} \cdot \mathbf{1}_{t,\Omega} \\
&= -\sum_{k=1}^{k_{t-1}} h_t^j(A_{t-1,k}) S_{t-1}^j(A_{t-1,k}) \mathbf{1}_{t-1,A_{t-1,k}} \ + \sum_{k=1}^{k_{t-1}} h_t^j(A_{t-1,k}) \sum_{A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}} S_t^{\delta,j}(A_{t,m}) \mathbf{1}_{t,A_{t,m}} \\
&= \sum_{k=1}^{k_{t-1}} h_t^j(A_{t-1,k}) \left[ -S_{t-1}^j(A_{t-1,k}) \mathbf{1}_{t-1,A_{t-1,k}} + \sum_{A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}} S_t^{\delta,j}(A_{t,m}) \mathbf{1}_{t,A_{t,m}} \right] \\
&= \sum_{k=1}^{k_{t-1}} h_t^j(A_{t-1,k}) F^{t,j,k}
\end{aligned}
$$

der einperiodischen Termingeschäfte (Forwardgeschäfte)

$$
\begin{aligned}
F^{t,j,k} &:= -\ S_{t-1}^j(A_{t-1,k}) \mathbf{1}_{t-1,A_{t-1,k}} + \sum_{A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}} S_t^{\delta,j}(A_{t,m}) \mathbf{1}_{t,A_{t,m}} \\
&= \left( 0,...,0,-\ S_{t-1}^j(A_{t-1,k}) \mathbf{1}_{A_{t-1,k}}, + \sum_{A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}} S_t^{\delta,j}(A_{t,m}) \mathbf{1}_{A_{t,m}}, 0,...,0 \right)^{\mathsf{T}}
\end{aligned}
$$

($t \in \{1,\ldots,T\}, j \in J = \{1,\ldots,N\}, k \in \{1,\ldots,k_{t\text{-}1}\}$) mit den reellen Koeffizienten $h_t^j(A_{t-1,k})$. Beim Forwardgeschäft $F^{t,j,k}$ wird das $j$-te Wertpapier $S^j$ genau zum Zeitpunkt $s = t\text{-}1$ und im Ereignis $A_{t\text{-}1,k}$ zum Preis $S_{t-1}^j(A_{t-1,k})$ gekauft und genau zum darauffolgenden Zeitpunkt $s = t$ in einem der dann noch möglichen Ereignisse $A_{t,m}$, $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$, zum jeweils zugehörigen Preis $S_t^{\delta,j}(A_{t,m})$ verkauft.

Analog zu Beispiel 3.1 in Abschnitt 3.1 kann man zeigen, dass jedes Termingeschäft $F^{t,j,k}$ ein Kapitalmarktgeschäft ist: Zur Handelsstrategie

$$\theta := \theta^{t,j,k} := \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{1}_{t,A_{t-1,k}} = (0,..,0,\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{1}_{A_{t-1,k}},0,..,0)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{H}_N$$

erhält man nämlich die Vermögenswerte

$$
\begin{aligned}
V_s(\theta) &= S_s^\delta \cdot \theta_s = 0 && \text{für } s \neq t, \\
V_t(\theta) &= S_t^\delta \cdot \theta_t = \left( \sum_{A_{t,p} \in \Omega_t} S_t^\delta(A_{t,p}) \cdot \mathbf{1}_{A_{t,p}} \right) \cdot \left( \sum_{A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{1}_{A_{t,m}} \right) \\
&= \sum_{A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}} S_t^{\delta,j}(A_{t,m}) \cdot \mathbf{1}_{A_{t,m}} && \text{für } s = t,
\end{aligned}
$$

die Reinvestitionswerte

$$
\begin{aligned}
R_s(\theta) &= S_s \cdot \theta_{s+1} = 0 && \text{für } s \neq t\text{-}1, \\
R_{t\text{-}1}(\theta) &= S_{t-1} \cdot \theta_t = \left( \sum_{A_{t-1,p} \in \Omega_{t-1}} S_{t-1}(A_{t-1,p}) \cdot \mathbf{1}_{A_{t-1,p}} \right) \cdot \left( \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{1}_{A_{t-1,k}} \right) \\
&= S_{t-1}^j(A_{t-1,k}) \cdot \mathbf{1}_{A_{t-1,k}} && \text{für } s = t\text{-}1,
\end{aligned}
$$

die Portfolioauszahlungen

$$
\begin{aligned}
L_s(\theta) &= V_s(\theta) - R_s(\theta) = 0 && \text{für } s \neq t\text{-}1, \text{ t}, \\
L_{t\text{-}1}(\theta) &= -\ R_{t\text{-}1}(\theta) = -\ S_{t-1}^j(A_{t-1,k}) \cdot \mathbf{1}_{A_{t-1,k}} && \text{für } s = t\text{-}1, \\
L_t(\theta) &= V_t(\theta) = \sum_{A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}} S_t^{\delta,j}(A_{t,m}) \cdot \mathbf{1}_{A_{t,m}} && \text{für } s = t,
\end{aligned}
$$

insgesamt das Zahlungsprofil

$$L(\theta) = -\ S_{t-1}^j(A_{t-1,k})\ \mathbf{1}_{t-1,A_{t-1,k}} + \sum_{A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}} S_t^{\delta,j}(A_{t,m}) \cdot \mathbf{1}_{t,A_{t,m}} = F^{t,j,k},$$

wegen $t > 0$ den Startkapitaleinsatz $V_0(\theta) = 0$ und somit $F^{t,j,k} \in \mathcal{M}$. Daraus ergeben sich auch die entsprechenden Koordinatendarstellungen von $C^t(h_t)$ und $C(h)$ bezüglich des Erzeugendensystems der Kapitalmarktgeschäfte $F^{t,j,k}$ von $\mathcal{M}$. Demzufolge ist

$$\mathcal{M} = \text{lin}\ \{F^{t,j,k} : t \in \{1,\ldots,T\}, j \in J = \{1,\ldots,N\}, k \in \{1,\ldots,k_{t\text{-}1}\}\}.$$ □

**Beispiel 3.5 Beispiel für ein einfaches Kapitalmarktgeschäft**

Wird bei der Laufzeit $T = 1$ und dem in das Portfolio eingesetzten Startkapital $V_0 = 0$ ($h_0^j = 0$ für $j \in J$) zum Zeitpunkt $t = 0$ nur das Wertpapier $S^1$ in der Stückzahl $h_1^1$ gekauft ($h_1^j = 0$ für $j = 2,\ldots,N$), so erhält man für das Zahlungsprofil $L(h)$ bei $t = 0$ infolge dieser Investition den Wert

$$L_0(h) = -R_0(h) = -S_0^1 h_1^1 < 0$$

und bei $t = T = 1$ den Wert

$$L_1(h) = V_1(h) = S_1^{\delta,1} h_1^1 > 0.$$

Das zu dieser Handelsstrategie $h = (0, h_1)^\top$ gehörige Zahlungsprofil

$$Z = L(h) = (-S_0^1 h_1^1, S_1^{\delta,1} h_1^1)^\top = h_1^1 F^{1,1,1} = h_1^1 T^{1,1} = C^{1,1}(h_1^1)$$

ist der Zahlungsstrom der zur Laufzeit $T = 1$ gehörigen Investition in das Wertpapier $S^1$, also der Zahlungsstrom eines Kapitalmarktgeschäfts. △

## 3.7.3 Bewertung der Zahlungsströme von Finanzgeschäften

Es sei das LOP für das Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ vorausgesetzt. Der zu einem duplizierbaren Zahlungsanspruch $X \in L(\mathcal{H}_N)$ gehörige Zahlungsstrom $\widehat{X}$, der neben dem Zahlungsprofil $X$ auch die Auszahlung des fairen, d. h. des durch das Duplikationsprinzip bestimmten, Kaufpreises $\pi(X) = \langle \Psi, X \rangle_{\mathcal{W}} = \Psi^\top X$ zum Zeitpunkt $t = 0$ mit erfasst, ist gegeben durch

$$\widehat{X} = (X_0 - \pi(X), X_1, \ldots, X_T)^\top = X - \pi(X)\cdot \mathbf{1}_{0,\Omega}.$$

Mit $X$ ist auch $\widehat{X}$ duplizierbar, da aus $X = L(h)$ mit $h \in \mathcal{H}_N$ und $\pi(X) = V_0(h)$ folgt, dass

$$\begin{aligned}\widehat{X} &= X - V_0(h)\cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} \\ &= L(h) - \breve{V}(h) \\ &= \breve{L}(h) = L(\hat{h}) \in L(\mathcal{H}_N)\end{aligned}$$

mit $\hat{h} = (0, h_1, \ldots, h_T)^\top \in \ker \breve{V} \subseteq \mathcal{H}_N$ ist (Definition von $\breve{V}(h)$ und $\breve{L}(h)$ in Abschnitt 2.8.3). Weiter ist ersichtlich, dass

$$\widehat{X} = L(\hat{h}) \in L(\ker \breve{V}) = \mathcal{M}$$

gilt, also $\widehat{X}$ im Unterraum $\mathcal{M}$ der Kapitalmarktgeschäfte liegt, daher den Preis

$$\pi(\widehat{X}) = 0$$

aufweist und als indifferent angesehen wird.[47] Die Begründung für die Inzidenz $\widehat{X} \in \mathcal{M}$ kann auch mittels der Preisbestimmung erfolgen: Aus der Inzidenz $\mathbf{1}_{0,\Omega} \in L(\mathcal{H}_N)$ (nach Abschnitt 2.8.4 unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$)) und der Preisberechnung $\pi(\mathbf{1}_{0,\Omega}) = \Psi^\top \mathbf{1}_{0,\Omega} = \Psi_0 = 1$ folgt

$$\Psi^\top \widehat{X} = \pi(\widehat{X}) = \pi(X) - \pi(X)\cdot\pi(\mathbf{1}_{0,\Omega}) = 0$$

und daraus nach Abschnitt 3.7.1

$$\widehat{X} \in L(\mathcal{H}_N) \cap \{\Psi\}^\perp = \mathcal{M}.$$

---

[47] Diese Aussage wird in den Abschnitten 3.8.1 und 3.8.2 verwendet für die AD-Papiere $\xi^{t,C}$, $\xi^{t,A_{t,k}}$, $\xi^{t,\Omega}$ und die zugehörigen AD-Kassageschäfte $\widehat{\xi}^{t,C}$, $\widehat{\xi}^{t,A_{t,k}}$, $\widehat{\xi}^{t,\Omega}$.

Falls jedoch für den Erwerb des Zahlungsanspruchs $X$ ein anderer Preis $p(X)$ ($p(X) > \pi(X)$ oder $p(X) < \pi(X)$) gezahlt wird, hat der zugehörige Zahlungsstrom

$$\widehat{X} = X - p(X)\mathbf{1}_{0,\Omega} \in L(\mathcal{H}_N) \qquad (X, \mathbf{1}_{0,\Omega} \in L(\mathcal{H}_N))$$

den durch die Duplizierung bestimmten fairen Preis

$$\pi(\widehat{X}) = \pi(X) - p(X) < 0 \text{ oder } > 0.$$

Das mit dem Zahlungsstrom $\widehat{X}$ verbundene Finanzgeschäft ist dann kein Kapitalmarktgeschäft und wird als ungünstig oder günstig bewertet.

Umgekehrt liegt mit einem Kapitalmarktgeschäft

$$\widehat{X} = (\widehat{X}_0, \widehat{X}_1, ..., \widehat{X}_T)^\top \in \mathcal{M} (\subseteq L(\mathcal{H}_N))$$

auch das im Zeitpunkt $t = 0$ mit der Zahlung $p \in \mathbb{R}$ modifizierte Zahlungsprofil

$$X := p \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} + \widehat{X}$$

in $L(\mathcal{H}_N)$:[48] Nach Abschnitt 2.8.4 gilt unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) nämlich

$$Y := p \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} \in \text{lin}\{\mathbf{1}_{0,\Omega}\} = \mathcal{Z} = \mathcal{V} = \breve{V}(\mathcal{H}_N) \subseteq L(\mathcal{H}_N)$$

und dann auch $X = Y + \widehat{X} \in L(\mathcal{H}_N)$. Hinter dieser Schlussweise steht, dass nach Abschnitt 3.2.1 unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) die Duplizierbarkeit eines Zahlungsprofils $X \in \mathcal{W}$ unabhängig von der deterministischen Komponente $X_0$ ist. Weiter stimmt der Preis von $X$ mit dem Preis von $Y$ überein: $\pi(X) = \pi(Y) + \pi(\widehat{X}) = \pi(Y) = p \cdot \pi(\mathbf{1}_{0,\Omega}) = p$.

### 3.7.4 Formale Maße $\Phi_t$ und W-Maße $Q_t$

Es sei die Arbitragefreiheit (AF) für das Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ vorausgesetzt und $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1+} \subseteq \mathcal{A}^+$ ein normierter Diskontierungsprozess. Da die $\mathcal{F}_t$-messbare Zustandsfunktion $\Phi_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ auf jedem $A_t \in \mathcal{P}_t = \mathcal{Z}(\mathcal{F}_t)$ positiv und konstant ist und somit auch eine auf $\mathcal{P}_t$ definierte Abbildung $\Phi_t : \mathcal{P}_t \longrightarrow ]0,\infty[$ liefert, kann $\Phi_t$ (wie jede beliebige *positive* $\mathcal{F}_t$-messbare Zustandsfunktion $X_t \in \mathcal{W}_{t,1}$) von $\mathcal{P}_t$ aus zu einem **Maß**[49]

$$\Phi_t : \mathcal{F}_t \longrightarrow [0,\infty[$$

auf der $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{P}_t)$ bzw. auf dem Messraum (messbaren Raum) $(\Omega,\mathcal{F}_t)$ fortgesetzt werden:

$$\Phi_t(C) := \sum_{C \supseteq A_{t,k} \in \mathcal{P}_t} \Phi_t(A_{t,k}) \qquad (C \in \mathcal{F}_t;\ \mathcal{P}_t \text{ ist endlich bei } |\Omega| = K < \infty)$$

---

[48] Diese Aussage wird noch in Abschnitt 3.9.2 für das deterministische AD-Kassageschäft $\widehat{\zeta}^t$ und das deterministische AD-Papier $\zeta^t = \widehat{\zeta}^t + d_t \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega}$, $d_t = \Phi_t(\Omega)$, verwendet.

[49] Die Definition eines Prämaßes, Maßes und W-Maßes findet man bei Bauer (1992) MI, S. 10, 14, 38, (2002) WT, S. 4: Eine auf einem Ring $\mathcal{R}$ in $\Omega$ definierte nichtnegative Funktion $\mu : \mathcal{R} \longrightarrow [0,\infty]$ heißt Prämäß (auf $\mathcal{R}$), wenn $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu$ $\sigma$-additiv ist. Ein Prämaß $\mu$ auf einer $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}$ in $\Omega$ heißt Maß auf $\mathcal{A}$. Ein mit der Normierung $\mu(\Omega) = 1$ normiertes Maß auf $\mathcal{A}$ heißt Wahrscheinlichkeitsmaß oder kurz W-Maß.

für die aus den Atomen $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$ zusammengesetzten Moleküle (zur Molekülstruktur siehe Abschnitt 2.2, Beweisteil 2)

$$C = \bigcup_{C \supseteq A_{t,k} \in \mathcal{P}_t} A_{t,k} \in \mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{P}_t).$$

Für $C \in \mathcal{F}_t$ mit $C \neq \emptyset$ gibt es mindestens ein $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$ mit $A_{t,k} \subseteq C$, sodass $\Phi_t(C) \geq \Phi_t(A_{t,k}) > 0$ gilt. Somit ist $\Phi_t > 0$ auf $\mathcal{F}_t \setminus \{\emptyset\}$.

Speziell für $C = \Omega$ ist wegen $k_t = |\mathcal{P}_t| < \infty$ das Maß $\Phi_t(\Omega)$ von $\Omega$ endlich:

$$\Phi_t(\Omega) = \sum_{A_{t,k} \in \mathcal{P}_t} \Phi_t(A_{t,k}) < \infty.$$

Die Abbildung $\Phi_t$ ist auf der $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_t$ nichtnegativ, $\sigma$-additiv und mit den Eigenschaften $\Phi_t(\emptyset) = 0$ und $\Phi_t(\Omega) < \infty$ ausgestattet, also ein **endliches Maß** auf $\mathcal{F}_t$. Das zugehörige auf $\mathcal{F}_t$ normierte Maß

$$Q_t := \Phi_t / \Phi_t(\Omega) = \Phi_t / \left\| \Phi_t \right\| = \Phi_t / \kappa(\Phi_t)$$

(mit der Betragssummennorm $\left\| X_t \right\| = \left| X_t(A_{t,1}) \right| + \ldots + \left| X_t(A_{t,k_t}) \right|$ bzw. der Komponentensumme $\kappa(X_t) = X_t(A_{t,1}) + \ldots + X_t(A_{t,k_t})$ auf $\mathcal{W}_{t,1}$ bzw. $\mathbb{R}^{k_t}$) ist ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** $Q_t : \mathcal{F}_t \longrightarrow [0,1]$ (W-Maß, $Q_t(\Omega) = 1$) auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{F}_t)$.[50] Diese zu den Zeitpunkten $t \in I$ gehörigen innerhalb des Marktmodells entwickelten sog. **formalen** oder **synthetischen W-Maße**[51] $Q_t$ werden im Abschnitt 3.9.3 unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass alle Arrow-Debreu-Papiere $\xi^{t,C} := \mathbf{1}_{t,C}$ $(t \in I, C \in \mathcal{F}_t)$ im Raum $L(\mathcal{H}_N)$ der duplizierbaren Zahlungsprofile liegen (was die Vollständigkeit (VS) des Marktmodells bedeutet), auch noch als Preismaße bezeichnet. Sie werden in Abschnitt 4.4 bei der Interpretation der Bewertung als Diskontierung der $Q_t$-Erwartungswerte der Zahlungen $X_t$ verwendet. Ein Zusammenhang zwischen den zu verschiedenen Zeitpunkten $s, t \in I$ gehörigen W-Maßen $Q_s$ und $Q_t$ wird in Abschnitt 3.9.3 unter Voraussetzung der Arbitragefreiheit (AF) und der zusätzlichen Bedingung (FH) der Existenz von sog. festverzinslichen Handelsstrategien bewiesen: Die W-Maße $Q_t$ stimmen auf $\mathcal{F}_t$ mit dem W-Maß $Q := Q_T$ von $\mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$ überein. In Abschnitt 3.10.3 wird in dem zu einem Numéraire $B$ gebildeten relativen Marktmodell mit dividendenlosen Finanzinstrumenten, in dem stets das konstante Finanzinstrument $\tilde{B} = 1$ und somit nach Abschnitt 3.9.1 auch festverzinsliche Handelsstrategien existieren, durch die Existenz eines derartigen formalen Maßes $\tilde{Q} = \tilde{Q}_T$ auf $\mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$, eines sog. äquivalenten Martingalmaßes, die speziellere Arbitragefreiheit (AFsf) zum Zeitpunkt $T$ charakterisiert.

---

[50] In Abschnitt 5.3.8 wird gezeigt, dass die $T$-te Komponente $\tilde{\Psi}_T$ eines relativen Bewertungsprozesses $\tilde{\Psi} \in \tilde{\mathcal{M}}^{\perp 1}$ und dann insbesondere auch die $T$-te Komponente $\tilde{\Phi}_T$ eines relativen Diskontierungsprozesses $\tilde{\Phi} \in \tilde{\mathcal{M}}^{\perp 1+}$ schon die $\kappa$-Normierung $\kappa(X_T) = 1$ aufweist. Speziell für $t = T$ stimmt also $\tilde{\Phi}_t$ schon mit $\tilde{Q}_t$ überein. Eine entsprechende Aussage im ursprünglichen Marktmodell gilt nur mit der $\kappa$-Normierung $\kappa(X_T) = \kappa_0$ und unter zusätzlichen Voraussetzungen.

[51] Die Bezeichnung formales bzw. synthetisches Wahrscheinlichkeitsmaß verwendet Kremer (2006) auf S. 47, 206, (2011) auf S. 180.

## 3.8 Folgerungen aus der Arbitragefreiheit und der Duplizierbarkeit von Arrow-Debreu-Papieren

Für diesen Abschnitt sei die Arbitragefreiheit (AF) des Marktmodells und damit die Existenz eines positiven normierten $\mathcal{M}$-Normalenvektors (Diskontierungsprozesses) $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1+} \subseteq \mathcal{A}^{+}$ ($\Phi > 0$, $\Phi_0 = 1$) vorausgesetzt. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass bestimmte $t$-periodische Arrow-Debreu-Papiere (AD-Papiere) im Marktmodell erreichbar (duplizierbar) sind, also im $L$-Bildraum $L(\mathcal{H}_N)$ des Marktmodells liegen, wird in den Abschnitten 3.8.1 und 3.8.2 gezeigt, dass dann auch die zugehörigen $t$-periodischen Kapitalmarktgeschäfte bzw. die zugehörigen Diskontierungsfaktoren im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells existieren. In Abschnitt 3.8.3 wird unter der zusätzlichen Voraussetzung der Vollständigkeit des Marktmodells die Existenz aller mehrperiodischen stochastischen AD-Termingeschäfte im Kapitalmarkt des Marktmodells gezeigt. In Abschnitt 3.8.4 wird (mit Hinweis auf den Beweis in Abschnitt 3.9) angegeben, dass aus der Existenz der einperiodischen deterministischen AD-Termingeschäfte auch die Existenz der $t$-periodischen deterministischen AD-Kassageschäfte im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ folgt. Bei diesen Betrachtungen erfolgen auch Erklärungen der vielverwendeten Bezeichnungen stochastischer Diskontierungsfaktor, Arrow-Debreu-Preis, Zustandspreis oder besser Ereignispreis, Diskontvektor, Arrow-Debreu-Preisvektor, Zustandspreisvektor oder besser Ereignispreisvektor, Diskontvektor, Diskontierungsprozess, Zustandspreisprozess, deterministischer Diskontierungsfaktor, deterministischer Diskontvektor bzw. deterministischer Preisvektor.

### 3.8.1 Duplizierbare $t$-periodische stochastische AD-Papiere und AD-Kassageschäfte

**Der allgemeine Fall für ein Ereignis $C$ der $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_t$**

Für eine feste Menge $C \in \mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{P}_t)$ liefert der damit definierte $\mathcal{F}$-adaptierte Prozess

$$\xi^{t,C} := \mathbf{1}_{t,C} = (0,..,0,\mathbf{1}_C,0,..,0)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{W}$$

($\xi_s^{t,C}(\omega) = \xi_s^{t,C}(A_{t,k}) = 1$ für $s = t$ und alle $\omega \in C$ bzw. alle $A_{t,k} \subseteq C$, $\xi_s^{t,C}(\omega) = \xi_s^{t,C}(A_{t,k}) = 0$ für $s \neq t$ oder $\omega \notin C$ bzw. $A_{t,k} \not\subseteq C$) das Zahlungsprofil, das genau zum Zeitpunkt $t \in I$ und in den Zuständen $\omega \in C$ eine Geldeinheit (z. B. 1 Euro) zahlt. Dieses als charakteristische Funktion definierte theoretische Zahlungsprofil $\xi^{t,C} \in \mathcal{W}$ des Marktmodells wird als Elementar-Zahlungsprofil, Zustands-Zahlungsprofil, reines[52], elementares oder primitives Wertpapier, Arrow-Debreu-Papier (Abk.: AD-Papier), Elementar-Claim, Zustands-Claim oder zustandsbedingter Zahlungsanspruch (englisch: state contingent claim) bezeichnet.

---

[52] Die Idee der reinen Wertpapiere geht zurück auf Gérard Debreu (1921–2004) und Kenneth Joseph Arrow (1921–2017), weshalb diese theoretischen Wertpapiere auch Arrow-Debreu-Papiere genannt werden. Der US-amerikanische Mathematiker und Volkswirtschaftler Arrow erhielt 1972 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften und 1986 den John-von-Neumann-Theorie-Preis. Dem französischen Wirtschaftswissenschaftler Debreu wurde 1983 der Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften und 1976 der französische Orden Légion d'honneur verliehen.

Unter der Voraussetzung

(DP$\xi^{t,C}$) $\quad \xi^{t,C} \in L(\mathcal{H}_N)$,

dass also dieses $t$-periodische **stochastische Arrow-Debreu-Papier** $\xi^{t,C}$ im vorliegenden Marktmodell duplizierbar ist und somit im Bildraum $L(\mathcal{H}_N)$ liegt, besitzt $\xi^{t,C}$ bei der oben vorausgesetzten Arbitragefreiheit (AF) den Preis

$$\begin{aligned}\pi(\xi^{t,C}) &= \Phi^{\mathsf{T}}\xi^{t,C} = \left\langle \Phi, \xi^{t,C} \right\rangle_{\mathcal{W}} = \sum_{s=0}^{T}\sum_{k=1}^{k_s} \Phi_s(A_{s,k})\xi_s^{t,C}(A_{s,k}) \\ &= \sum_{C \supseteq A_{t,k} \in \mathcal{P}_t} \Phi_t(A_{t,k}) \\ &= \Phi_t(C) \qquad \text{(Definition des Maßes } \Phi_t\text{)} \\ &=: d_{t,C}.\end{aligned}$$

Die Übereinstimmung des Preises $\pi(\xi^{t,C})$ des im Marktmodell erreichbaren Zahlungsprofils $\xi^{t,C}$ mit dem Funktionswert $\Phi_t(C) = d_{t,C}$ ergibt sich aus der Definition des Maßes $\Phi_t$ im Abschnitt 3.7.4. Für $C \in \mathcal{F}_t \setminus \{\emptyset\}$ ist $d_{t,C} = \Phi_t(C) > 0$.

Der mit dem zum Zeitpunkt $t = 0$ durchgeführten Kauf dieses AD-Papiers $\xi^{t,C}$ verbundene Zahlungsstrom

$$\begin{aligned}\widehat{\xi}^{t,C} &= \xi^{t,C} - \pi(\xi^{t,C}) \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} \\ &= \left(\xi_0^{t,C} - \pi(\xi^{t,C}), \xi_1^{t,C}, .., \xi_t^{t,C}, .., \xi_T^{t,C}\right)^{\mathsf{T}} \\ &= \left(-\Phi_t(C), 0, .., 0, \mathbf{1}_C, 0, .., 0\right)^{\mathsf{T}} \\ &= \left(-d_{t,C}, 0, .., 0, \mathbf{1}_C, 0, .., 0\right)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{M}\end{aligned}$$

ist nach Abschnitt 3.7.3 ein stochastisches Kapitalmarktgeschäft und wird hier als das zum AD-Papier $\xi^{t,C}$ gehörige $t$-periodische **stochastische Arrow-Debreu-Kassageschäft** (AD-Kassageschäft) bezeichnet. Das Zahlungsprofil $\xi^{t,C}$, bei dem im Zeitpunkt $t$ nur beim Eintreten des Ereignisses $C$ eine Geldeinhalt an den Inhaber des Zahlungsprofils gezahlt wird, kann durch Abschluss des AD-Kassageschäfts $\widehat{\xi}^{t,C}$ realisiert werden, bei dem im Zeitpunkt 0 der Preis $d_{t,C} = \pi(\xi^{t,C})$ ausgezahlt und im Zeitpunkt $t$ und Ereignis $C$ genau 1 Geldeinheit eingezahlt wird.

Umgekehrt folgt aus der Duplizierbarkeit des AD-Kassageschäfts $\widehat{\xi}^{t,C}$ bzw. der Inzidenz

$$\widehat{\xi}^{t,C} \in \mathcal{M}$$

nach Abschnitt 3.7.3 unter der Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) auch die Duplizierbarkeit des zugehörigen AD-Papiers $\xi^{t,C} = \widehat{\xi}^{t,C} + d_{t,C} \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega}$:

$$\xi^{t,C} \in L(\mathcal{H}_N).$$

Der Zahlungsstrom des $t$-periodischen stochastischen AD-Kassageschäfts $\widehat{\xi}^{t,C}$ wird in der nachfolgenden Abbildung 3.14 dargestellt.

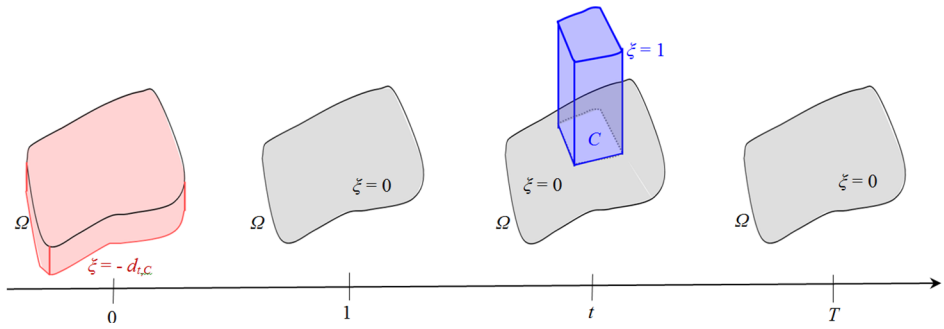



**Abb. 3.14** Grafische Darstellung des $t$-periodischen stochastischen AD-Kassageschäfts $\xi := \widehat{\xi}^{t,C}$ zu festem Zeitpunkt $t$ und festem Ereignis $C \in \mathcal{F}_t$

**Der Spezialfall** ($DP\xi^{0,C}$) für die beiden möglichen Mengen $C = \emptyset, \Omega \in \mathcal{F}_0$ liegt stets vor: Speziell für $t = 0$ ist nämlich $C \in \mathcal{F}_0 = \sigma(\mathcal{P}_0) = \{\emptyset,\Omega\}$. Für $C = \emptyset$ ist $\mathbf{1}_\emptyset = 0 \; \forall \; \omega \in \Omega$, $\xi^{0,\emptyset} = \mathbf{1}_{0,\emptyset} = (0,\ldots,0)^\top \in L(\mathcal{H}_N)$, $\pi(\xi^{0,\emptyset}) = \Phi^\top \xi^{0,\emptyset} = 0$, $\widehat{\xi}^{\,0,\emptyset} = \xi^{0,\emptyset} - \pi(\xi^{0,\emptyset})\mathbf{1}_{0,\Omega} = (0,\ldots,0)^\top \in \mathcal{M}$.

Für $C = \Omega$ ist $\mathbf{1}_\Omega = 1 \; \forall \; \omega \in \Omega$, unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) nach Abschnitt 2.8.4 $\xi^{0,\Omega} = \mathbf{1}_{0,\Omega} = (1,0,\ldots,0)^\top \in L(\mathcal{H}_N)$, $\pi(\xi^{0,\Omega}) = \Phi^\top \xi^{0,\Omega} = \Phi_0(\Omega)\cdot 1 = 1$, $\widehat{\xi}^{\,0,\Omega} = \xi^{0,\Omega} - \pi(\xi^{0,\Omega})\mathbf{1}_{0,\Omega} = (0,\ldots,0)^\top \in \mathcal{M}$.

Für $t = 0$, $C \in \mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\Omega\}$ ist also stets $\xi^{0,C} \in L(\mathcal{H}_N)$ und $\widehat{\xi}^{\,0,C} = (0,\ldots,0)^\top \in \mathcal{M}$.

**Bezeichnungen für die Maße $\Phi_t(C)$**

Im Fall ($DP\xi^{t,C}$) der Duplizierbarkeit des AD-Papiers $\xi^{t,C}$ ist also das zugehörige Finanzgeschäft $\widehat{\xi}^{\,t,C}$ (für den Kauf des Wertpapiers $\xi^{t,C}$) auf dem Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ vorhanden. Daher kann dann der für $C \neq \emptyset$ positive Maßwert

$$d_{t,C} = \Phi_t(C) = \pi(\xi^{t,C})$$

als der zum Zeitintervall $[0,t]$ und Ereignis $C \in \mathcal{F}_t$ gehörige $t$-periodische **stochastische Diskontierungsfaktor** (Abzinsungsfaktor) des AD-Kassageschäfts $\widehat{\xi}^{\,t,C}$ bzw. Arrow-Debreu-Preis (AD-Preis als Preis des AD-Papiers $\mathbf{1}_{t,C}$, Zustandspreis oder besser Ereignispreis) bezeichnet werden.[53] Speziell für den Endzeitpunkt $t = T$ und ein Elementarereignis $C = \{\omega_k\} \in \mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$ bzw. einen Zustand $\omega_k \in \Omega$ ist die Bezeichnung **Zustandspreis** für den Maßwert $\Phi_T(\omega_k) := \Phi_T(\{\omega_k\}) = \pi(\xi^{T,\omega_k})$ angebracht. Weiter kann dann

$$a_{t,C} = 1/d_{t,C}$$

als der zugehörige stochastische Aufzinsungsfaktor und

$$i_{t,C} = a_{t,C} - 1 = 1/d_{t,C} - 1$$

als der zugehörige stochastische Zinssatz bezeichnet werden.

---

[53] Die Bezeichnung Zustandspreis wird im Einperiodenmodell ($T = 1$) angegeben bei Kremer (2011), S. 45, Kainhofer (2007), S. 11, Trautmann (2007), S. 359, Sandmann (2010), S. 45, 165. Im Mehrperiodenmodell ($T \geq 2$) wird die Bezeichnung Zustandspreis verwendet bei Trautmann (2007), S. 443, und die Bezeichnung Arrow-Debreu-Preis bei Deutsch (2008), S. 249.

**Ökonomische Plausibilisierung der Bezeichnung Diskontierungsfaktor** im Fall $C \neq \emptyset$: Der Diskontierungsfaktor $d_{t,C}$ existiert dann im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells in dem Sinne, dass mit Hilfe des zugehörigen Kapitalmarktgeschäfts $\widehat{\xi}^{t,C} \in \mathcal{M}$ eine zum Zeitpunkt $t \in \{1,\ldots,T\}$ und im Ereignis $C \in \mathcal{F}_t$ stattfindende Zahlung $\gamma = X_t(C) \in \mathbb{R}$ tatsächlich auf eine gleichwertige sichere Zahlung $\gamma d_{t,C}$ im Zeitpunkt $s = 0$ transponiert bzw. abgezinst werden kann: Im Fall $(\mathrm{DP}_{\xi^{t,C}})$ $\xi^{t,C} \in L(\mathcal{H}_N)$ erhält man nämlich aus dem Zahlungsprofil

$$X = \gamma \cdot \mathbf{1}_{t,C} = (0,..,0,\gamma \mathbf{1}_C,0,..,0)^\top = \gamma\, \xi^{t,C} \in L(\mathcal{H}_N)$$

mit dem Preis $\pi(X) = \gamma\, \pi(\xi^{t,C}) = \gamma d_{t,C}$ durch Kombination (additive Ergänzung, Glattstellung, Replizierung) mit dem Kapitalmarktgeschäft

$$Z = -\gamma \widehat{\xi}^{t,C} = (\gamma d_{t,C},0,..,0,-\gamma \mathbf{1}_C,0,..,0)^\top \in \mathcal{M}$$

das Zahlungsprofil

$$Y = X + Z = (\gamma d_{t,C},0,\ldots,0)^\top = \gamma d_{t,C} \mathbf{1}_{0,\Omega}$$

mit dem gleichen Preis

$$\begin{aligned} \pi(Y) &= \sum_{s=0}^{T} \sum_{k=1}^{k_s} \Phi_s(A_{s,k}) Y_s(A_{s,k}) \\ &= Y_0(A_0) = \gamma d_{t,C} = \pi(X) \qquad (s = 0,\ \Phi_0(A_0) = 1). \end{aligned}$$

Ebenso steht auch der Aufzinsungsfaktor $a_{t,C}$ im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ zur Verfügung, da mittels

$$Z' = +\gamma a_{t,C} \widehat{\xi}^{t,C} = (-\gamma,0,..,0,\gamma a_{t,C} \mathbf{1}_C,0,..,0)^\top \in \mathcal{M}$$

eine im Zeitpunkt $s = 0$ sicher stattfindende Zahlung $\gamma = X_0 = X_0(\Omega) \in \mathbb{R}$ auf eine gleichwertige zum Zeitpunkt $t \in \{1,\ldots,T\}$ und im Ereignis $C \in \mathcal{F}_t$ stattfindende Zahlung $\gamma a_{t,C}$ transponiert bzw. aufgezinst werden kann: Aus dem Zahlungsprofil

$$X = \gamma \mathbf{1}_{0,\Omega} = (\gamma,0,...,0)^\top$$

erhält man nach Kombination mit dem Kapitalmarktgeschäft $Z'$ das Zahlungsprofil

$$Y = X + Z' = (0,..,0,\gamma a_{t,C} \mathbf{1}_C,0,..,0)^\top = \gamma a_{t,C} \mathbf{1}_{t,C}$$

mit dem gleichen Preis

$$\begin{aligned} \pi(Y) &= \sum_{s=0}^{T} \sum_{k=1}^{k_s} \Phi_s(A_{s,k}) Y_s(A_{s,k}) \\ &= \sum_{k=1}^{k_t} \Phi_t(A_{t,k}) Y_t(A_{t,k}) && (s = t) \\ &= \gamma a_{t,C} \sum_{A_{t,k} \subseteq C} \Phi_t(A_{t,k}) && (Y_t = \gamma a_{t,C} \mathbf{1}_C,\ A_{t,k} \subseteq C) \\ &= \gamma a_{t,C} d_{t,C} = \gamma = \pi(X). \end{aligned}$$

**Im Spezialfall für ein Partitionsereignis** $C = A_{t,k} \in \mathcal{P}_t = \mathcal{Z}(\mathcal{F}_t)$ $(t \in I,\ k \in \{1,\ldots,k_t\})$ ist

$$\xi^{t,k} := \xi^{t,A_{t,k}} := w_{t,A_{t,k}} = \mathbf{1}_{t,A_{t,k}} = \left(0,..,0,\mathbf{1}_{A_{t,k}},0,..,0\right)^\top \in \mathcal{W}$$

das stochastische Zahlungsprofil, das genau zum Zeitpunkt $t \in I$ und im Ereignis $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$ eine Geldeinheit (z. B. 1 Euro) auszahlt.

Unter der Voraussetzung

$(\mathrm{DP}_{\xi^{t,k}})$ $\xi^{t,k} \in L(\mathcal{H}_N)$,

dass also dieses $t$-periodische stochastische AD-Papier $\xi^{t,k}$ im vorliegenden Marktmodell duplizierbar ist, besitzt $\xi^{t,k}$ den Preis

$$\pi(\xi^{t,k}) = \Phi_t(A_{t,k}) =: d_{t,k}.$$

Der mit dem zum Zeitpunkt $t = 0$ ausgeführten Erwerb dieses reinen Wertpapiers $\xi^{t,k}$ ($t \in I$) verbundene Zahlungsstrom

$$\widehat{\xi}^{t,k} = \left(-d_{t,k}, 0, .., 0, \mathbf{1}_{A_{t,k}}, 0, .., 0\right)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{M}$$

ist dann ein stochastisches Kapitalmarktgeschäft ($\pi(\widehat{\xi}^{t,k}) = 0$) und wird hier das zum AD-Papier $\xi^{t,k}$ gehörige $t$-periodische stochastische AD-Kassageschäft genannt.

**Bezeichnungen für die Maße $\Phi_t(A_{t,k})$**
Der nach Abschnitt 3.7.4 positive Maßwert

$$d_{t,k} = \Phi_t(A_{t,k}) = \pi(\xi^{t,k})$$

wird dann als der zum Zeitintervall $[0,t]$ und Ereignis $A_{t,k}$ gehörige $t$-periodische **stochastische Diskontierungsfaktor** des AD-Kassageschäfts $\widehat{\xi}^{t,k}$ bzw. Arrow-Debreu-Preis (AD-Preis des AD-Papiers $\xi^{t,k}$, Zustandspreis oder besser Ereignispreis), die positive Konstante

$$a_{t,k} = 1/d_{t,k}$$

als zugehöriger $t$-periodischer stochastischer Aufzinsungsfaktor und

$$i_{t,k} = a_{t,k} - 1 = 1/d_{t,k} - 1$$

als $t$-periodischer stochastischer Zinssatz bezeichnet.

**Ökonomische Plausibilisierung der Bezeichnung Diskontierungsfaktor** im Fall $C = A_{t,k}$: Der Diskontierungsfaktor $d_{t,k}$ steht dann auf dem Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells in dem Sinne zur Verfügung, dass mit Hilfe des zugehörigen Kapitalmarktgeschäfts $\widehat{\xi}^{t,k} \in \mathcal{M}$ eine zum Zeitpunkt $t \in I$ und im Ereignis $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$ stattfindende Zahlung $\gamma = X_t(A_{t,k}) \in \mathbb{R}$ tatsächlich auf eine gleichwertige sichere Zahlung im Zeitpunkt $s = 0$ transponiert bzw. abgezinst werden kann. Die Replizierung

$$\gamma \cdot \mathbf{1}_{t,A_{t,k}} - \gamma\widehat{\xi}^{t,k} = \gamma d_{t,k}\mathbf{1}_{0,\Omega}$$

wurde oben bereits für ein beliebiges Ereignis $C \in \mathcal{F}_t \setminus \{\emptyset\}$ anstelle von $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$ angegeben.

**Bezeichnungen für die Vektoren $\Phi_t$ und $\Phi$**
Wenn zu festem Index $t$ für alle Indizes $k \in \{1,\ldots,k_t\}$ mit $A_{t,k} \subseteq C \in \mathcal{F}_t$ die Bedingung (DP$\xi^{t,k}$) $\xi^{t,k} = \xi^{t,A_{t,k}} \in L(\mathcal{H}_N)$ erfüllt ist, so ist dies aufgrund der Unterraumeigenschaft von $L(\mathcal{H}_N)$ hinreichend für (DP$\xi^{t,C}$):

$$\xi^{t,C} = \sum_{k:\, C \supseteq A_{t,k} \in \mathcal{P}_t} \xi^{t,k} \in L(\mathcal{H}_N).$$

Wenn zu festem Index $t$ für alle Indizes $k \in \{1,\ldots,k_t\}$ die Bedingung (DP$\xi^{t,k}$) $\xi^{t,k} = \xi^{t,A_{t,k}} \in L(\mathcal{H}_N)$ erfüllt ist, kann das zum Zeitpunkt $t \in I$ gehörige und aus allen $t$-periodischen stochastischen Diskontierungsfaktoren (Ereignispreisen) $d_{t,k} = \Phi_t(A_{t,k})$, $k \in \{1,\ldots,k_t\}$, bestehende Koordinaten-$k_t$-Tupel

$$\Phi_t = \left(\Phi_t(A_{t,1}), ..., \Phi_t(A_{t,k_t})\right)^{\mathsf{T}} = \left(d_{t,1}, ..., d_{t,k_t}\right)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{k_t}_{>0}$$

der $\mathcal{F}_t$-messbaren Zustandsfunktion

$$\Phi_t = \sum_{k=1}^{k_t} d_{t,k} \mathbf{1}_{A_{t,k}}$$

zur Basis $\mathbf{1}_{A_{t,k}}$ ($k \in \{1,\ldots,k_t\}$) von $\mathcal{W}_{t,1}$ als **Diskontvektor**[54] (Arrow-Debreu-Preisvektor, AD-Preisvektor, Zustandspreisvektor bzw. besser Ereignispreisvektor) des Zeitpunkts $t$ bezeichnet werden. Die Bezeichnung **Zustandspreisvektor** ist eigentlich nur exakt für das zum Endzeitpunkt $t = T$ gehörige und aus den Zustandspreisen $d_{T,k} = \Phi_T(\omega_k) = \pi(\xi^{T,k})$ bestehende Koordinaten-$K$-Tupel

$$\Phi_T = (\Phi_T(\omega_1),\ldots,\Phi_T(\omega_K))^\mathsf{T} = \left(d_{T,1},...,d_{T,K}\right)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^K_{>0}$$

($A_{T,k} = \{\omega_k\} \in \mathcal{P}_T = \mathcal{Z}(\mathcal{F}_T)$, $k = 1,\ldots,K$).

Wenn für alle Indizes $t \in I$ und $k \in \{1,\ldots,k_t\}$ die Bedingung (DP$\xi^{t,k}$) erfüllt ist, kann dann auch das zur Gesamtheit aller Zeitpunkte $t \in I$ gehörige Koordinaten-$n_1$-Tupel

$$\begin{aligned}\Phi &= (\Phi_0,\Phi_1,\ldots,\Phi_T)^\mathsf{T} \\ &= (1;\Phi_1(A_{1,1}),..,\Phi_1(A_{1,k_1});\ldots;\Phi_T(\omega_1),..,\Phi_T(\omega_K))^\mathsf{T} \\ &= (1;d_{1,1},..,d_{1,k_1};\ldots;d_{T,1},..,d_{T,K})^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n_1}_{>0}\end{aligned}$$

($n_1 = 1 + k_1 + \ldots + k_{t-1} + K$) des Zustandsprozesses

$$\Phi = \sum_{t=0}^{T}\sum_{k=1}^{k_t} \Phi_t(A_{t,k})\mathbf{1}_{t,A_{t,k}} = \sum_{t=0}^{T}\sum_{k=1}^{k_t} d_{t,k}\mathbf{1}_{t,A_{t,k}}$$

zur $\mathcal{W}$-Basis $\mathbf{1}_{t,A_{t,k}}$ ($t \in I$, $k \in \{1,\ldots,k_t\}$) zur Unterscheidung vom Diskontvektor eines speziellen Zeitpunkts $t$ als **Diskontierungsvektor** (oder auch wieder als AD-Preisvektor, Ereignispreisvektor) bezeichnet werden. Der Zustandsprozess $\Phi = (\Phi_t(\omega))_{t\in I,\omega\in\Omega}$ selbst wird auch Zustandspreisprozess oder **Diskontierungsprozess** genannt.[55]

Unter dieser Voraussetzung liegen alle $\mathcal{W}$-Basisvektoren $\xi^{t,A_{t,k}} = w_{t,A_{t,k}} = \mathbf{1}_{t,A_{t,k}}$ im Bildraum $L(\mathcal{H}_N)$, sodass dies die Inklusionen

$$\mathcal{W} = \text{lin}\,\{w_{t,A_{t,k}} : t \in I, k \in \{1,\ldots,k_t\}\} \subseteq L(\mathcal{H}_N) \subseteq \mathcal{W},$$

also die Vollständigkeit (VS) $L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{W}$ des Marktmodells bedeutet. Im Falle der Vollständigkeit liegen dann auch alle AD-Papiere $\xi^{t,C}$ ($C \in \mathcal{F}_t$, $t \in I$) in $L(\mathcal{H}_N)$. Die **Vollständigkeit** des Marktmodells ist also äquivalent zur Duplizierbarkeit aller AD-Papiere $\xi^{t,C} = \mathbf{1}_{t,C}$ (zu beliebigen $C \in \mathcal{F}_t$, $t \in I$). In diesem Fall stehen dann die Diskontierungsfaktoren $d_{t,k}$ tatsächlich zur Verfügung, sodass mit Hilfe der im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells existierenden AD-Kassageschäfte $\widehat{\xi}^{t,k}$ jede zu einem Zeitpunkt $t \in I$ und in einem Ereignis $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$ stattfindende Zahlung $\gamma = X_t(A_{t,k}) \in \mathbb{R}$ auf eine gleichwertige sichere Zahlung $\gamma d_{t,k}$ im Zeitpunkt $s = 0$ transponiert bzw. abgezinst werden kann. Damit kann dann *jeder* stochastische Prozess $X \in \mathcal{W}$ mit Hilfe der Kapitalmarktgeschäfte $\widehat{\xi}^{t,k}$ tatsächlich auf seinen Preis $\pi(X)$ im Zeitpunkt $t = 0$ transponiert werden. Diese Eigenschaft der Preisbe-

---

[54] Die Bezeichnung Diskontvektor zu einem festen Zeitpunkt $t \in I$ findet man bei Kremer (2017), S. 55.

[55] Die Bezeichnung Zustands(preis)prozess findet man bei Kremer (2011), S. 41, 175,177, die Bezeichnung Diskontierungsprozess bei Kremer (2017), S. 55.

rechnung als **Barwertberechnung (Diskontierung)** mit stochastischen Diskontierungsfaktoren wird auch noch in Abschnitt 4.3 als eine spezielle Interpretation der Bewertung aufgeführt.

### 3.8.2 Duplizierbare *t*-periodische deterministische AD-Papiere und AD-Kassageschäfte

Im Spezialfall des sicheren Ereignisses $C = \Omega \in \mathcal{F}_t$ erhält man das $t$-periodische **deterministische Arrow-Debreu-Papier**

$$\zeta^t := \xi^{t,\Omega} = \mathbf{1}_t = \mathbf{1}_{t,\Omega} = (0,..,0,1,0,..,0)^\top \in \mathcal{W}$$

($t \in I$ fest fixiert, $\zeta_s^t(\omega) = \mathbf{1}_\Omega(\omega) = 1$ für $s = t$ und $\zeta_s^t(\omega) = 0$ für $s \neq t$ jeweils für alle $\omega \in \Omega$), das genau zum Zeitpunkt $t \in I$ in allen Zuständen $\omega \in \Omega$ eine Geldeinheit auszahlt.[56] Unter der Voraussetzung

(DP$\zeta^t$) $\qquad \zeta^t \in L(\mathcal{H}_N)$,

dass also das deterministische (d. h. das zum sicheren Ereignis $\Omega \in \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_t$ im Zeitpunkt $t \in I$ gehörige) AD-Papier $\zeta^t$ duplizierbar ist, ist der Preis $\pi(\zeta^t)$ von $\zeta^t$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
\pi(\zeta^t) &= \Phi^\top \zeta^t = \left\langle \Phi, \zeta^t \right\rangle_{\mathcal{W}} \\
&= \sum_{s=0}^{T} \sum_{k=1}^{k_s} \Phi_s(A_{s,k}) \zeta_s^t(A_{s,k}) \\
&= \sum_{k=1}^{k_t} \Phi_t(A_{t,k}) \cdot 1 = \sum_{k=1}^{k_t} d_{t,k} && (s = t) \\
&= \Phi_t(\Omega) && \text{(Definition des Maßes } \Phi_t \text{ für } C = \Omega) \\
&=: d_t.
\end{aligned}$$

Die Übereinstimmung des Preises $\pi(\zeta^t)$ des im Marktmodell erreichbaren Zahlungsprofils $\zeta^t$ mit dem Funktionswert $\Phi_t(\Omega)$ ergibt sich aus der Definition des Maßes $\Phi_t$ im Abschnitt 3.7.4.

Wenn für das vorgegebene $t \in I$ und für alle $k \in \{1,\ldots,k_t\}$ die Bedingung (DP$\xi^{t,k}$) erfüllt ist, so ist dies hinreichend für die Bedingung (DP$\zeta^t$): Wegen der Unterraumeigenschaft von $L(\mathcal{H}_N)$ ist nämlich mit $\xi^{t,k} \in L(\mathcal{H}_N)$ ($k \in \{1,\ldots,k_t\}$) auch

$$\zeta^t = \xi^{t,1} + \ldots + \xi^{t,k_t} \in L(\mathcal{H}_N).$$

Der mit dem im Zeitpunkt $s = 0$ getätigten Erwerb des deterministischen AD-Papiers $\zeta^t$ ($t \in \{1,\ldots,T\}$) verbundene Zahlungsstrom

$$\tilde{\zeta}^t = \zeta^t - \pi(\zeta^t) \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} = \left(\zeta_0^t - \pi(\zeta^t), \zeta_1^t, .., \zeta_t^t, .., \zeta_T^t\right)^\top$$

---

[56] Dem deterministischen AD-Papier $\zeta^t = \mathbf{1}_{t,\Omega}$ des Marktmodells entspricht in der Realität ein festverzinsliches Wertpapier (Anleihe, Rentenpapier, Obligation, englisch: bond oder debenture) ohne Kupons (Zinsscheine), also ohne Zinszahlungen während der Laufzeit. Diese gesamtfällige Anleihe (mit Rückzahlung der Schuld inklusive Zinsen am Ende der Laufzeit mit einer einmaligen Gesamtzahlung) kann sowohl als Aufzinsungspapier (z. B. Bundesschatzbrief Typ B) als auch als Abzinsungspapier (Nullkuponanleihe, Zerobond) vorkommen.

$$= \left(-d_t, 0, .., 0, 1, 0, .., 0\right)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{M}$$

ist ein festverzinsliches (deterministisches) Kapitalmarktgeschäft ($\pi(\tilde{\zeta}^t) = 0$) und wird als $t$-periodisches **deterministisches AD-Kassageschäft** bezeichnet. Der Zahlungsstrom des $t$-periodischen deterministischen AD-Kassageschäfts $\tilde{\zeta}^t$ wird in der nachfolgenden Abbildung 3.15 dargestellt.

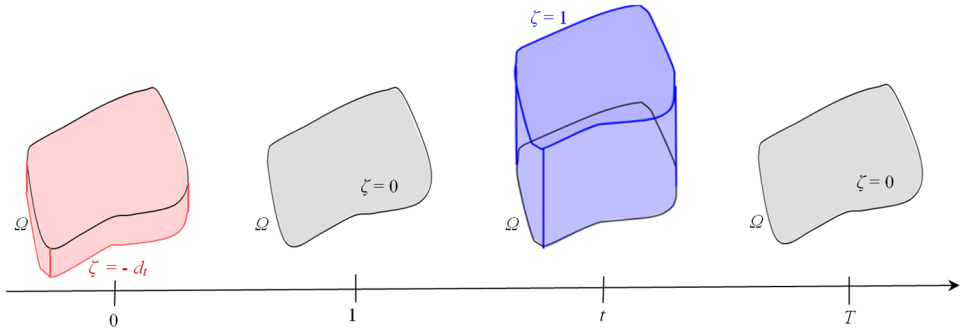



**Abb. 3.15** Grafische Darstellung des $t$-periodischen deterministischen AD-Kassageschäfts $\zeta := \tilde{\zeta}^{t,\Omega}$ zu festem Zeitpunkt $t$

**Der Spezialfall** (DP$\zeta^0$) liegt stets vor: Unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) ist nach Abschnitt 2.8.4 nämlich stets $\zeta^0 = \xi^{0,\Omega} = \mathbf{1}_{0,\Omega} = (1,0,...,0)^{\mathsf{T}} \in L(\mathcal{H}_N)$, $d_0 = \pi(\zeta^0) = \Phi_0(\Omega) = 1$ und $\tilde{\zeta}^0 = \zeta^0 - d_0 \mathbf{1}_{0,\Omega} = 0 \in \mathcal{M}$.

In dem Fall (DP$\zeta^t$) der Duplizierbarkeit von $\zeta^t$ kann also die positive Konstante

$$d_t = \Phi_t(\Omega) = \pi(\zeta^t)$$

als der zum Zeitintervall $[0,t]$ und zum sicheren Ereignis $\Omega$ gehörige $t$-periodische **deterministische Diskontierungsfaktor** bzw. AD-Preis, die positive Konstante

$$a_t := 1/d_t$$

als zugehöriger deterministischer Aufzinsungsfaktor und

$$i_t := a_t - 1 = 1/d_t - 1$$

als deterministischer (risikoloser) Zinssatz interpretiert werden.
Auf dem Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells steht der Diskontierungsfaktor $d_t$ in der Weise zur Verfügung, dass mit Hilfe des zugehörigen Kapitalmarktgeschäfts $\tilde{\zeta}^t = \tilde{\xi}^{t,\Omega} \in \mathcal{M}$ (genauer mit der Hinzunahme von $Z = -\gamma\tilde{\zeta}^t \in \mathcal{M}$) eine zum Zeitpunkt $t \in \{1,\ldots,T\}$ sicher stattfindende Zahlung $\gamma = X_t = X_t(\Omega) \in \mathbb{R}$ auf eine gleichwertige sichere Zahlung $\gamma d_t$ im Zeitpunkt $s = 0$ transponiert bzw. abgezinst werden kann. Ebenso steht auf $\mathcal{M}$ der Aufzinsungsfaktor $a_t$ zur Verfügung, da mittels des Kapitalmarktgeschäfts $Z^{\cdot} = +\gamma a_t \tilde{\zeta}^t \in \mathcal{M}$ eine im Zeitpunkt $s = 0$ sicher stattfindende Zahlung $\gamma = X_0 = X_0(\Omega) \in \mathbb{R}$ auf eine gleichwertige zum Zeitpunkt $t \in \{1,\ldots,T\}$ sicher stattfindende Zahlung $\gamma a_t$ transponiert bzw. aufgezinst werden kann.

Wenn für alle Indizes $t \in I$ die Bedingung (DP$\zeta^t$) erfüllt ist, kann das aus allen deterministischen Diskontierungsfaktoren bzw. deterministischen Ereignispreisen

$$\Phi_t(\Omega) = d_{t,\Omega} = d_t$$

der AD-Papiere $\zeta^t$ ($t \in I$) zusammengestellte ($T$+1)-Tupel

$$P := (\Phi_0(\Omega),\ldots,\Phi_T(\Omega))^\mathsf{T} = (d_0,\ldots,d_T)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}_{>0}^{T+1}$$

**deterministischer Diskontierungsvektor** (deterministischer Preisvektor) genannt werden.[57] Dieser tritt noch in den nachfolgenden Abschnitten 4.4 und 4.5 bei der Interpretation des Preises $\pi(X)$ eines Zahlungsprofils $X$ als Barwert der Erwartungswerte der Zahlungen $X_t$ auf. Im nachfolgenden Abschnitt 3.9 wird mit der zusätzlichen Voraussetzung (FH), d. h. der Existenz von sogenannten festverzinslichen Handelsstrategien, eine hinreichende Bedingung für die Existenz aller deterministischen AD-Papiere $\zeta^t$ ($t \in I$) im $L$-Bildraum $L(\mathcal{H}_N)$ und damit auch für die Existenz aller deterministischer AD-Kassageschäfte $\widehat{\zeta}^t$ und aller Diskontierungsfaktoren $d_t$ im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells gegeben.

### 3.8.3 Duplizierbare mehrperiodische stochastische AD-Termingeschäfte

Falls die zu den beiden Zeitpunkten $s$, $t \in I$, $s \le t$, und den beiden Ereignissen $A_{s,k} \in \mathcal{P}_s$, $A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$ mit $A_{t,m} \subseteq A_{s,k}$ gehörigen stochastischen AD-Papiere $\xi^{s,A_{s,k}}$ und $\xi^{t,A_{t,m}}$ beide duplizierbar sind,

$$\xi^{s,A_{s,k}},\ \xi^{t,A_{t,m}} \in L(\mathcal{H}_N),$$

sind nach Abschnitt 3.8.1 die mit dem Erwerb dieser Papiere verbundenen Zahlungsströme auf dem Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells vorhanden:

$$\begin{aligned}\widehat{\xi}^{s,A_{s,k}} &= \xi^{s,A_{s,k}} - \pi(\xi^{s,A_{s,k}})\cdot\mathbf{1}_{0,\Omega}\\ &= \left(-d_{s,k},0,..,0,\mathbf{1}_{A_{s,k}},0,..,0\right)^\mathsf{T} \in \mathcal{M}\end{aligned}$$

und analog $\widehat{\xi}^{t,A_{t,m}} \in \mathcal{M}$. Wegen der Unterraum-Eigenschaft von $\mathcal{M}$ ist dann auch die Linearkombination

$$\begin{aligned}\widehat{\xi}^{s,A_{s,k};t,A_{t,m}} &:= \widehat{\xi}^{t,A_{t,m}} - \frac{d_{t,m}}{d_{s,k}}\widehat{\xi}^{s,A_{s,k}}\\ &= \left(-d_{t,m},0,.....,0,\mathbf{1}_{A_{t,m}},0,.,0\right)^\mathsf{T} - \frac{d_{t,m}}{d_{s,k}}\left(-d_{s,k},0,.,0,\mathbf{1}_{A_{s,k}},0,.....,0\right)^\mathsf{T}\\ &= \left(0,..,0,-\frac{d_{t,m}}{d_{s,k}}\mathbf{1}_{A_{s,k}},0,.,0,\mathbf{1}_{A_{t,m}},0,...,0\right)^\mathsf{T}\end{aligned}$$

dieser AD-Kassageschäfte, also das zum Zeitintervall $[s,t]$ und zu den Ereignissen $A_{s,k} \in \mathcal{P}_s$, $A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$ ($A_{t,m} \subseteq A_{s,k}$) gehörige im Allgemeinen **mehrperiodische stochastische Arrow-Debreu-Termingeschäft** (AD-Termingeschäft) ein Kapitalmarktgeschäft. Bei dieser Kapi-

---

[57] Der deterministische Preisvektor tritt bei der Bewertung deterministischer Zahlungsströme bei vollkommenem Kapitalmarkt auch bei den Konzepten der Duplizierung (Nachbildung, additiven Zerlegung) und der Replizierung (Glattstellung, additiven Ergänzung) als Normalenvektor der (linearen) Hyperebene der Kapitalmarktgeschäfte auf (Pleier 2021, S. 87–117).

talmarktgeschäftskombination $\widehat{\xi}^{\,s,A_{s,k};t,A_{t,m}}$ wird zum Zeitpunkt 0 das stochastische AD-Papier $\xi^{t,A_{t,m}}$ zum Preis $d_{t,m}$ gekauft und das $d_{t,m}/d_{s,k}$-fache des AD-Papiers $\xi^{s,A_{s,k}}$ zum Preis $d_{s,k}{\cdot}d_{t,m}/d_{s,k} = d_{t,m}$ verkauft. Insgesamt ist bei diesem Termingeschäft genau im Zeitpunkt $s$ und Ereignis $A_{s,k}$ der Geldbetrag $d_{t,m}/d_{s,k}$ zu zahlen, um genau zum Zeitpunkt $t$ und Ereignis $A_{t,m}$ den Geldbetrag 1 zu erhalten. Im Marktmodell ist also das AD-Termingeschäft $\widehat{\xi}^{\,s,A_{s,k};t,A_{t,m}}$ duplizierbar bzw. genauer in $\mathcal{M}$ gelegen:

(DP $\widehat{\xi}^{\,s,A_{s,k};t,A_{t,m}}$) $\quad \widehat{\xi}^{\,s,A_{s,k};t,A_{t,m}} \in \mathcal{M}$.

Demzufolge existiert mit dem AD-Termingeschäft $\widehat{\xi}^{\,s,A_{s,k};t,A_{t,m}} \in \mathcal{M}$ im Marktmodell der zum Zeitintervall $[s,t]$ und zu den Ereignissen $A_{s,k} \in \mathcal{P}_s$, $A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$ $(A_{t,m} \subseteq A_{s,k})$ gehörige mehrperiodische **stochastische Diskontierungsfaktor** bzw. AD-Preis (Zustandspreis oder besser Ereignispreis)

$$d_{s,k;t,m} := d_{t,m}{\cdot}a_{s,k} = d_{t,m}/d_{s,k} = \Phi_t(A_{t,m})/\Phi_s(A_{s,k})$$

der stochastische Aufzinsungsfaktor

$$a_{s,k;t,m} := 1/d_{s,k;t,m}$$

und der stochastische Zinssatz

$$i_{s,k;t,m} := a_{s,k;t,m} - 1 = 1/d_{s,k;t,m} - 1.$$

Der Zahlungsstrom des mehrperiodischen stochastischen AD-Termingeschäfts $\widehat{\xi}^{\,s,A_{s,k};t,A_{t,m}}$ wird in der Abbildung 3.16 veranschaulicht.

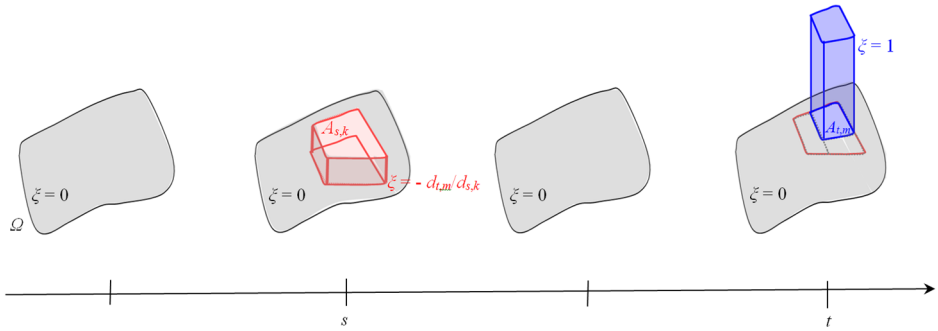



**Abb. 3.16** Grafische Darstellung des zu den festen Zeitpunkten $s$ und $t$, $s \le t$, und festen Ereignissen $A_{s,k} \in \mathcal{P}_s$, $A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$ mit $A_{t,m} \subseteq A_{s,k}$ gehörigen mehrperiodischen stochastischen AD-Termingeschäfts $\xi := \widehat{\xi}^{\,s,A_{s,k};t,A_{t,m}}$

Die Diskontierungsfaktoren $d_{s,k;t,m}$ treten in Abschnitt 3.9.4 noch als Koeffizienten des Diskontierungsoperators $D^{\Phi}_{s,t}(X_t)$ auf, der eine $\mathcal{F}_t$-messbare Zustandsfunktion $X_t$ in eine $\mathcal{F}_s$-messbare Funktion überführt. Da im deterministischen Fall mit $\mathcal{P}_s = \mathcal{P}_t = \{\Omega\}$, $\Phi_t(A_{t,1}) = \Phi_t(\Omega) = d_t$ und $\Phi_s(A_{s,1}) = \Phi_s(\Omega) = d_s$ der Diskontierungsoperator aus der Zahlung $X_t(\Omega) = X_t$ des Zeitpunkts $t$ den auf den Zeitpunkt $s$ abgezinsten Wert $Y_s = D^{\Phi}_{s,t}(X_t) = X_t{\cdot}d_t/d_s$ berechnet, kann dieser Diskontierungsoperator als stochastische Verallgemeinerung der deterministischen Diskontierung angesehen werden. Eine tatsächliche Abzinsung mit dem stochastischen Diskontierungsfaktor $d_{s,k;t,m}$ kann im Marktmodell aber nur durchgeführt werden, wenn das AD-Termingeschäft $\widehat{\xi}^{\,s,A_{s,k};t,A_{t,m}}$ in dem Unterraum $\mathcal{M}$ der Kapitalmarktgeschäfte vorhanden ist.

Die dafür hinreichende Existenz aller stochastischen AD-Papiere $\xi^{t,A_{t,m}} = w_{t,A_{t,m}} = \mathbf{1}_{t,A_{t,m}}$ im Bildraum $L(\mathcal{H}_N)$ des Marktmodells ($t \in I$, $m \in \{1,\ldots,k_t\}$) ist nach Abschnitt 3.8.1 gleichbedeutend zur Vollständigkeit (VS) des Marktmodells.

Allgemeiner kann man auch zu Zeitpunkten $s, t \in I$, $s \le t$, und beliebigen Ereignissen $C \in \mathcal{F}_s$, $D \in \mathcal{F}_t$ unter der Voraussetzung $\xi^{s,C}$, $\xi^{t,D} \in L(\mathcal{H}_N)$ das mehrperiodische stochastische AD-Termingeschäft

$$\xi^{s,C;t,D} := \xi^{t,C} - \frac{d_{t,D}}{d_{s,C}} \xi^{s,C} \in \mathcal{M}$$

mit dem stochastischen Diskontierungsfaktor

$$d_{s,C;t,D} := d_{t,D}/d_{s,C} = \Phi_t(D)/\Phi_s(C)$$

bilden. In den nachfolgenden Abschnitten 3.8.4 und 3.9.1 wird hierfür nur noch der Spezialfall mit $s = t\text{-}1$ und $C = D = \Omega$, also das einperiodische deterministische AD-Termingeschäft $\chi^t$ mit dem einperiodischen deterministischen Diskontfaktor $\rho_t$, betrachtet.

### 3.8.4 Duplizierbare einperiodische deterministische AD-Termingeschäfte

Ein Spezialfall der Existenz der im vorherigen Abschnitt 3.8.3 zum Zeitintervall $[s,t]$ angegebenen stochastischen Diskontierungsfaktoren $d_{s,C;t,D}$ im Marktmodell ist die Existenz der einperiodischen deterministischen Diskontfaktoren $\rho_t = d_{t\text{-}1,\Omega;t,\Omega}$ im Marktmodell. Speziell für $s = t - 1$, $t \in \{1,\ldots,T\}$, und die sicheren Ereignisse $C = D = \Omega$ soll also das zum Zeitintervall $[t\text{-}1,t]$ gehörige **einperiodische deterministische Arrow-Debreu-Termingeschäft**

$$\chi^t := \xi^{t-1,\Omega;t,\Omega} = (0,..,0,-\rho_t,1,0,..,0)^T$$

im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells vorliegen bzw. duplizierbar sein:

(DP$\chi^t$) $\chi^t \in \mathcal{M}$.

Eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass neben (AF) noch (DP$\zeta^t$) für alle $t \in I$ gilt: Es ist dann nämlich insbesondere $\zeta^{t-1} = \xi^{t-1,\Omega}$, $\zeta^t = \xi^{t,\Omega} \in L(\mathcal{H}_N)$ und somit $\chi^t = \xi^{t-1,\Omega;t,\Omega} \in \mathcal{M}$. Der Zahlungsstrom des einperiodischen deterministischen AD-Termingeschäfts $\chi^t$ wird in der Abbildung 3.17 dargestellt.

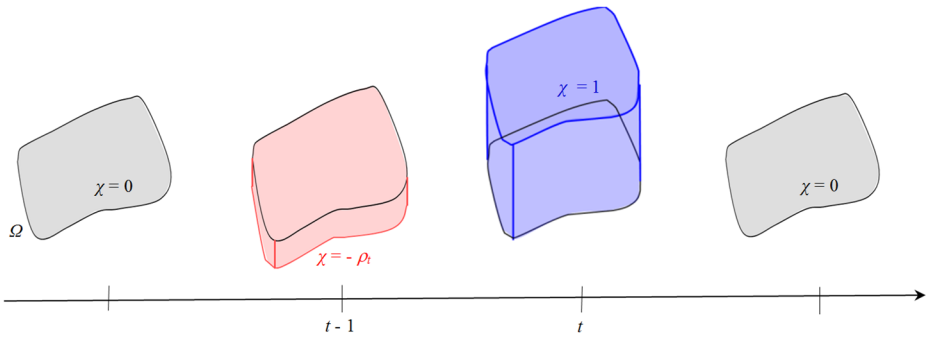



**Abb. 3.17** Grafische Darstellung des zu festem Zeitpunkt $t$ gehörigen einperiodischen deterministischen AD-Termingeschäfts $\chi := \chi^t$

Im nachfolgenden Abschnitt 3.9.1 wird bei der Behandlung der Bedingung (FH) gezeigt, dass die Arbitragefreiheit (AF) und die Bedingung (FH) der Existenz von sogenannten festverzinslichen Handelsstrategien zusammen hinreichend sind für die Existenz dieser AD-Termingeschäfte $\chi^t$ bzw. der Diskontfaktoren $\rho_t$ im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells. Mit diesen einperiodischen deterministischen AD-Termingeschäften $\chi^t$ liegen nach Abschnitt 3.9.2 dann auch noch die $t$-periodischen deterministischen AD-Kassageschäfte $\hat{\zeta}^t$ im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$. Weiter wird in Abschnitt 3.9.1 gezeigt, dass die Voraussetzung (FH) beispielsweise in einem Marktmodell mit einem festverzinslichen Finanzinstrument $S^1$ erfüllt ist (Bedingung (FF)).

## 3.9 Folgerungen aus der Arbitragefreiheit und der Existenz von festverzinslichen Handelsstrategien

### 3.9.1 Deterministische einperiodische Diskontfaktoren

Neben der Arbitragefreiheit (AF) wird jetzt für das Marktmodell noch die weitere Bedingung (FH), die Existenz von sogenannten **festverzinslichen Handelsstrategien**, vorausgesetzt. Es wird gezeigt, dass diese beiden Bedingungen zusammen hinreichend dafür sind, dass für alle $t \in \{1,\ldots,T\}$ die zu den Zeitintervallen $[t\text{-}1,t]$ gehörigen einperiodischen deterministischen Arrow-Debreu-Termingeschäfte (AD-Termingeschäfte)

$$\chi^t = \left(0,..,0,-\rho_t,1,0,..,0\right)^{\mathsf{T}} \qquad (\rho_t \in ]0,\infty[)$$

im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells vorliegen. Im nachfolgenden Abschnitt 3.9.2 wird gezeigt, dass mit diesen einperiodischen AD-Termingeschäften dann auch für alle $t \in \{1,\ldots,T\}$ die in Abschnitt 3.8.2 definierten $t$-periodischen deterministischen Arrow-Debreu-Kassageschäfte (AD-Kassageschäfte)

$$\widehat{\zeta}^t = \left(-d_t,0,..,0,1,0,..,0\right)^{\mathsf{T}} \qquad (d_t \in ]0,\infty[)$$

im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ liegen. Weiter wird gezeigt, dass dabei die zugehörigen $t$-periodischen deterministischen Diskontierungsfaktoren

$$d_t := \sum_{k=1}^{k_t} \Phi_t\,(A_{t,k}) = \Phi_t(\Omega)$$

die Produkte der einperiodischen Diskontfaktoren $\rho_1, \ldots, \rho_t$ sind. Unter der Voraussetzung ($DP\zeta^t$) und insbesondere hier unter der Voraussetzung (FH)[58] steht die Konstante $d_t$ tatsächlich auf dem Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells als Diskontierungsfaktor zur Verfügung, um eine zum Zeitpunkt $t \in I$ sicher stattfindende Zahlung $\gamma = X_t = X_t(\Omega) \in \mathbb{R}$ auf eine gleichwertige sichere Zahlung im Zeitpunkt $s = 0$ abzuzinsen. Die Bedingung (FH) kommt in Abschnitt 3.9.3 auch noch direkt beim Beweis der Existenz eines für alle $\sigma$-Algebren $\mathcal{F}_t$ ($t \in I$) einheitlichen Preismaßes $Q$ zum Einsatz.

(FH) **Existenz von festverzinslichen Handelsstrategien:**
Im Marktmodell gibt es zu jedem Zeitpunkt $t = 1,\ldots,T$ eine nur vom Zeitpunkt $t$ abhängige (deterministische) Konstante

$$\rho_t \in \mathbb{R}_+ = ]0,\infty[$$

und dazu eine sogenannte festverzinsliche Handelsstrategie

$$\eta^t = (0,\ldots,0,\eta_t^t,0,\ldots,0)^{\mathsf{T}} = \eta_t^t\,\mathbf{1}_{t,\Omega} \in \mathcal{H}_N,$$

welche für alle $\omega \in \Omega$ den folgenden Gleichungen genügt:
Zu den Zeitpunkten $s \neq t$ ist $\eta_s^t(\omega) = 0$, zum Zeitpunkt $s = t$ erfüllt die Zustandsfunktion $\eta_t^t \in \mathcal{H}_{t,N}$ für alle $\omega \in \Omega$ die beiden Gleichungen

---

[58] Der Beweis für die Folgerung der Bedingung ($DP\xi^t$) aus der Bedingung (FH) wird in Abschnitt 3.9.2 erbracht.

$$R_{t-1}(\eta^t)(\omega) = S_{t-1}(\omega)^\mathsf{T}\ \eta_t^t(\omega) \ = \sum_{j=1}^{N} S_{t-1}^j(\omega)\cdot\eta_t^{t,j}(\omega) \ = \rho_t,$$

$$V_t(\eta^t)(\omega) \ = S_t^\delta(\omega)^\mathsf{T}\ \eta_t^t(\omega) \ = \sum_{j=1}^{N} S_t^{\delta,j}(\omega)\cdot\eta_t^{t,j}(\omega) \ = 1.$$

Implizit ist hierbei $S_{t-1}(\omega)$, $S_t^\delta(\omega) \neq (0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^N$ für alle $\omega \in \Omega$, $t \in \{1,\ldots,T\}$ vorausgesetzt. Bei einer $\mathcal{F}_{t-1}$-messbaren $\mathbb{R}^N$-wertigen Lösung

$$\eta_t^t \ = \sum_{k=1}^{k_{t-1}} \eta_t^t(A_{t-1,k})\mathbf{1}_{A_{t-1,k}} \ \in \mathcal{H}_{t,N} = \mathcal{W}_{t-1,N}$$

bzw. dem zugehörigen $Nk_{t-1}$-Tupel

$$\eta_t^t \ = (\eta_t^t(A_{t-1,1}),\ldots,\eta_t^t(A_{t-1,k_{t-1}}))^\mathsf{T} \ \in \mathbb{R}^{Nk_{t-1}}$$

können die zu den einzelnen Ereignissen $A_{t-1,k} \in \mathcal{P}_{t-1}$ gehörigen $N$-Tupel

$$\eta_t^t(A_{t-1,k}) \ = \left(\eta_t^{t,1}(A_{t-1,k}),\ldots,\eta_t^{t,N}(A_{t-1,k})\right)^\mathsf{T} \ \in \mathbb{R}^N,$$

$k \in \{1,\ldots,k_{t-1}\}$, als Lösungen ihres Gleichungssystems

$$S_{t-1}(A_{t-1,k})^\mathsf{T}\eta_t^t(A_{t-1,k}) = \sum_{j=1}^{N} S_{t-1}^j(A_{t-1,k})\cdot\eta_t^{t,j}(A_{t-1,k}) \ = \rho_t,$$

$$S_t^\delta(A_{t,m})^\mathsf{T}\eta_t^t(A_{t-1,k}) \ = \sum_{j=1}^{N} S_t^{\delta,j}(A_{t,m})\cdot\eta_t^{t,j}(A_{t-1,k}) \ = 1 \qquad (A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k})$$

für die verschiedenen Ereignisse $A_{t-1,k} \in \mathcal{P}_{t-1}$ auch unterschiedlich ausfallen, sodass $\eta^t$ im Allgemeinen stochastisch und nicht deterministisch ist.

Im Gegensatz dazu besitzt das zur Handelsstrategie $\eta^t$ gehörige (duplizierbare) Zahlungsprofil $\chi^t = L(\eta^t)$ die deterministischen Werte

$$\begin{aligned}
\chi_s^t \ &= L_s(\eta^t) \ = S_s^\delta\cdot\eta_s^t \ - \ S_s\cdot\eta_{s+1}^t \ &= 0 \qquad &\text{für } s \neq t\text{-}1,\ t,\\
\chi_{t-1}^t \ &= L_{t-1}(\eta^t) = - \ S_{t-1}\cdot\eta_t^t \ &= -\ \rho_t \qquad &\text{für } s = t\text{-}1,\\
\chi_t^t \ &= L_t(\eta^t) \ = S_t^\delta\cdot\eta_t^t \ &= +\ 1 \qquad &\text{für } s = t.
\end{aligned}$$

Das zur sog. festverzinslichen Handelsstrategie $\eta^t$ gehörige einperiodische deterministische Zahlungsprofil $\chi^t$ hat also die Darstellung

$$\chi^t \ := \left(0,..,0,-\rho_t,1,0,..,0\right)^\mathsf{T} = -\ \rho_t\cdot\mathbf{1}_{t-1,\Omega} \ + \mathbf{1}_{t,\Omega}$$

und wegen $\eta_0^t = 0$ ($t \geq 1$) und der vorausgesetzten Arbitragefreiheit (AF) (es genügt auch das LOP) den Preis

$$\pi(\chi^t) = V_0(\eta^t) = S_0^\delta\cdot\eta_0^t = 0.$$

Die Voraussetzung (FH) bewirkt also, dass das zum Zeitpunkt $t \in \{1,\ldots,T\}$ gehörige einperiodische deterministische (festverzinsliche) Arrow-Debreu-Termingeschäft $\chi^t$ im Marktmodell mit einer speziellen Handelsstrategie $\eta^t \in \mathcal{H}_N$ duplizierbar ist, deren Zustandsfunktionen $\eta_s^t$ der Zeitpunkte $s \neq t$ alle konstant Null sind (und somit $\chi_s^t = L_s(\eta^t) = 0$ für $s \neq t\text{-}1,\ t$

bewirken) und deren $\mathcal{F}_{t-1}$-messbare Zustandsfunktion $\eta_t^t$ des Zeitpunkts $s = t$ die Gleichungen $\chi_{t-1}^t = L_{t-1}(\eta^t) = -\rho_t$ und $\chi_t^t = L_t(\eta^t) = 1$ erfüllt:

(SDP$\chi^t$) $\quad \chi^t = L(\eta^t) \in L(\mathcal{H}_N)$ mit $\eta_s^t = 0$ für $s \neq t \qquad (t \in \{1,\ldots,T\})$.

Da wegen der vorausgesetzten Arbitragefreiheit der Preis $\pi(\chi^t)$ von $\chi^t$ definiert und gleich Null ist, liegt das deterministische Zahlungsprofil $\chi^t$ im Unterraum $\mathcal{M} = L(\ker V_0)$ der Kapitalmarktgeschäfte des Marktmodells: $\chi^t \in \mathcal{M}$. Das Zahlungsprofil $\chi^t$ ist die einperiodische deterministische Investition, bei der genau zum Zeitpunkt $s = t$-1 und unabhängig von den Zuständen $\omega \in \Omega$ der Betrag $\rho_t$ ausgezahlt und genau zum Zeitpunkt $s = t$ unabhängig von den $\omega \in \Omega$ der Betrag 1 eingenommen wird. Es wird als das einperiodische deterministische AD-Termingeschäft bezeichnet, das mit dem zum Zeitpunkt $t$-1 durchgeführten Kauf des deterministischen Arrow-Debreu-Papiers (AD-Papiers) $\zeta^t = \mathbf{1}_t = \mathbf{1}_{t,\Omega}$ verbunden ist.

Bei gültiger Arbitragefreiheit (AF) bedeutet die Voraussetzung (FH) der Existenz der sogenannten festverzinslichen Handelsstrategien $\eta^t$ also, dass im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells die zu den Zeitintervallen $[t\text{-}1,t]$ gehörigen **einperiodischen deterministischen (festverzinslichen) AD-Termingeschäfte** $\chi^t$ ($t = 1,\ldots,T$) vorhanden sind und diese noch mittels der speziellen Handelsstrategien $\eta^t$ ($\eta_s^t(\omega) = 0$ für $s \neq t$) duplizierbar sind:

$$\text{(AF)} \wedge \text{(FH)} \Rightarrow \chi^t = \left(0,..,0,-\rho_t,1,0,..,0\right)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{M}.$$

Demzufolge existiert mit dem AD-Termingeschäft $\chi^t$ im Kapitalmarkt des Marktmodells zu jedem Intervall $[t\text{-}1,t]$ der **einperiodische deterministische Diskontfaktor** $\rho_t$, der deterministische Zinsfaktor

$$q_t = 1/\rho_t$$

und der deterministische (risikolose) Zinssatz

$$r_t = q_t - 1 = 1/\rho_t - 1,$$

mit dem sich die im Zeitpunkt $t$ - 1getätigte Investition des Betrags $\rho_t$ im Intervall $[t\text{-}1,t]$ deterministisch auf den Wert 1 verzinst.[59]

**Hinreichende Bedingung für die Eigenschaft** (FH)
Zur Sicherung der Voraussetzung (FH) wird in der Praxis bei der Konstruktion eines Marktmodells dieses häufig mit einem sog. festverzinslichen (deterministischen) Finanzinstrument $S^1$ ausgestattet:

---

[59] Der zum einperiodischen Zeitintervall $[t\text{-}1,t]$ gehörige einperiodische deterministische Diskontfaktor $\rho_t$, der zugehörige Zinsfaktor $q_t$ und der zugehörige Zinssatz $r_t$ ist für $t \geq 2$ jeweils zu unterscheiden von dem zum Zeitintervall $[0,t]$ aus $t$ Perioden gehörigen $t$-periodischen Diskontierungsfaktor $d_t$, Aufzinsungsfaktor $a_t$ und Zinssatz $i_t$. Nur für $t = 1$ ist $\rho_1 = d_1$ der Diskontfaktor des deterministischen Kapitalmarktgeschäfts $\chi^1 = \zeta^1 = \left(-d_1,1,0,...,0\right)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{M}$, $q_1 = 1/\rho_1 = 1/d_1 = a_1$ der zugehörige Zinsfaktor und $r_1 = q_1 - 1 = a_1 - 1 = i_1$ der zugehörige Zinssatz.

(FF) **Existenz eines festverzinslichen Finanzinstruments:**
Im Marktmodell existiere unter den ausgewählten Finanzinstrumenten $S^j$ ($j \in J$) auch das dividendenlose ($\delta^1 = 0$) festverzinsliche Finanzinstrument $S^1$ mit den positiven deterministischen Zustandsfunktionen

$$S_0^1 := a_0 := 1,\ S_t^1 := a_t > 0 \text{ für } t = 1,\ldots,T,$$

den in den Zeitintervallen $[t\text{-}1,t]$ gültigen einperiodischen deterministischen Zinsfaktoren

$$q_t = a_t/a_{t-1} > 0,$$

Zinssätzen

$$r_t = q_t - 1 \in ]-1,\infty[,$$

Diskontfaktoren

$$\rho_t = 1/q_t > 0$$

und den zu den Zeitintervallen $[0,t]$ gehörigen $t$-periodischen deterministischen Aufzinsungsfaktoren

$$a_t = q_1\cdot\ldots\cdot q_t = 1/(\rho_1\cdot\ldots\cdot\rho_t)\ (>0),$$

Zinssätzen

$$i_t := a_t - 1\ (> -1)$$

und Diskontierungsfaktoren

$$d_t = 1/a_t = 1/(q_1\cdot\ldots\cdot q_t) = \rho_1\cdot\ldots\cdot\rho_t\ (>0) \qquad (t = 1,\ldots,T).$$

Falls neben der Voraussetzung (FF) noch die Arbitragefreiheit (AF) gültig ist, existieren im Unterraum $\mathcal{M}$ der Kapitalmarktgeschäfte auch die einperiodischen AD-Termingeschäfte $\chi^t$ und $t$-periodischen AD-Kassageschäfte $\widehat{\zeta}^t$ (Beweis folgt).

Bei einer möglichen Kassenhaltung von Bargeld kommen die zu den Zeitintervallen $[t\text{-}1,t]$ gehörigen Zinssätze $r_t = 0$, Zinsfaktoren $q_t = 1 + r_t = 1$, Diskontfaktoren $\rho_t = 1/q_t = 1$ und die zu den Zeitintervallen $[0,t]$ gehörigen Aufzinsungsfaktoren $a_t = q_1\cdot\ldots\cdot q_t = 1$, Zinssätze $i_t = a_t - 1 = 0$ und Diskontierungsfaktoren $d_t = 1/a_t = 1$ zum Einsatz.

**Beweis:** a) Die Gültigkeit der Bedingung (FH) in einem Marktmodell mit festverzinslichem Finanzinstrument: Es sei (FF) vorausgesetzt. Für die dazu definierten speziellen deterministischen Handelsstrategien

$$\eta^t = (0,..,0,\eta_t^t,0,..,0)^\mathsf{T} = \eta_t^t\,\mathbf{1}_{t,\Omega} \text{ mit}$$

$$\eta_s^t(\omega) = 0 \text{ für } s \neq t,$$

$$\eta_t^t(\omega) = (d_t,0,\ldots,0)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^N$$

ist

$$R_{t-1}(\eta^t)(\omega) = S_{t-1}(\omega)^\mathsf{T}\ \eta_t^t(\omega) = S_{t-1}^1(\omega)\cdot\eta_t^{t,1}(\omega) = a_{t-1}\cdot d_t = \rho_t,$$

$$V_t(\eta^t)(\omega) = S_t^\delta(\omega)^\mathsf{T}\ \eta_t^t(\omega) = S_t^1(\omega)\cdot\eta_t^{t,1}(\omega) = a_t\cdot d_t = 1.$$

Es existieren also sog. festverzinsliche Handelsstrategien, sodass die Bedingung (FH) erfüllt ist.

b) Falls neben (FF) noch die Arbitragefreiheit (AF) gilt, so existieren nach den Abschnitten 3.9.1 und 3.9.2 genau zu diesen aus (FF) errechneten Diskontfaktoren $\rho_t$ und Diskontierungsfaktoren $d_t$ im Marktmodell auch die zu den Zeitintervallen $[t\text{-}1,t]$ gehörigen einperiodischen AD-Termingeschäfte

$$\chi^t = L(\eta^t) = \left(0,..,-\rho_t,1,0,..,0\right)^\mathsf{T} \in \mathcal{M}$$

mit den deterministischen Diskontfaktoren $\rho_t$ und die zu den Intervallen $[0,t]$ gehörigen $t$-periodischen AD-Kassageschäfte

$$\widehat{\zeta}^t = \left(-d_t,0,..,0,1,0,..,0\right)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{M}$$

mit den deterministischen Diskontierungsfaktoren $d_t$. Im Marktmodell „existieren" also die deterministischen einperiodischen Diskontfaktoren $\rho_t$ und die deterministischen $t$-periodischen Diskontierungsfaktoren $d_t$ im oben bereits beschriebenen Sinne. □

### 3.9.2 Deterministische *t*-periodische Diskontierungsfaktoren

Unter den Voraussetzungen (AF) und (FH) wird nun mit der Existenz der einperiodischen deterministischen AD-Termingeschäfte $\chi^t$ ($t \in \{1,\ldots,T\}$) in der Menge $\mathcal{M}$ der Kapitalmarktgeschäfte des Marktmodells noch gefolgert (Beweis folgt unten), dass die zu den Zeitintervallen $[0,t]$ gehörigen Diskontierungsfaktoren $d_t = \Phi_t(\Omega)$ (Definition in Abschnitt 3.8.2) die Produkte der in dem Marktmodell existierenden einperiodischen Diskontfaktoren $\rho_1, \ldots, \rho_t$ ($> 0$) sind:

$$\text{(AF)} \wedge \text{(FH)} \Rightarrow d_t = \rho_1 \cdot \ldots \cdot \rho_t = \prod_{s=1}^{t} \rho_s \quad \text{für } t = 1,\ldots,T.$$

Weiter wird gezeigt, dass mit den einperiodischen deterministischen AD-Termingeschäften $\chi^t \in \mathcal{M}(t \in \{1,\ldots,T\})$ dann auch die in Abschnitt 3.8.2 betrachteten und zu den $t$-periodischen deterministischen AD-Papieren $\zeta^\tau = \mathbf{1}_t = \mathbf{1}_{t,\Omega}$ gehörigen ***t*-periodischen deterministischen AD-Kassageschäfte** $\widehat{\zeta}^t = \left(-d_t,0,..,0,1,0,..,0\right)^{\mathsf{T}}$ als Linearkombinationen

$$\widehat{\zeta}^t = \sum_{s=1}^{t} \chi^s \cdot \rho_{s+1} \cdot \ldots \cdot \rho_t$$

der $\chi^s$ in der Menge $\mathcal{M}$ der Kapitalmarktgeschäfte des Marktmodells liegen. Es gilt also

$$\text{(AF)} \wedge \text{(FH)} \Rightarrow \widehat{\zeta}^t \in \mathcal{M} \text{ für } t \in I.$$

Demzufolge stehen im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells auch die zum Intervall $[0,t]$ gehörigen ***t*-periodischen deterministischen Diskontierungsfaktoren** bzw. deterministischen AD-Preise $d_t$ für die Abzinsung von sicheren Zahlungen des Zeitpunkts $t$ auf den Zeitpunkt 0 zur Verfügung.

Außerdem wird gezeigt, dass mit den AD-Kassageschäften $\widehat{\zeta}^t$ unter der Voraussetzung ($\text{AWS}^\delta$) auch die ***t*-periodischen deterministischen AD-Papiere**

$$\zeta^\tau = \widehat{\zeta}^t + d_t \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} = \mathbf{1}_{t,\Omega} = (0,..,0,1,0,..0)^{\mathsf{T}}$$

im Raum $L(\mathcal{H}_N)$ der duplizierbaren Zahlungsprofile liegen, also (FH) hinreichend ist für die Bedingung $(\text{DP}\zeta^t) \equiv (\text{DP}\mathbf{1}_{t,\Omega})$ $\zeta^\tau = \mathbf{1}_{t,\Omega} \in L(\mathcal{H}_N)$ ($t = 0,1, \ldots, T$). Es gilt also

$$(\text{AWS}^\delta) \wedge \text{(AF)} \wedge \text{(FH)} \Rightarrow (\text{DP}\mathbf{1}_{t,\Omega}) \text{ für } t \in I.$$

Ohne die Voraussetzung (FH) musste bei der Betrachtung der deterministischen AD-Kassageschäfte im vorherigen Abschnitt 3.8.2 für die Interpretation der Größen $d_t$ als Diskontierungsfaktoren noch die Duplizierbarkeit der AD-Papiere $\zeta^\tau$, $t \in I$, vorausgesetzt werden.

**Beweis:** 1) Berechnung der Diskontierungsfaktoren $d_t$ aus den Diskontfaktoren $\rho_t$: Bei vorliegender Arbitragefreiheit (AF) und Bedingung (FH) erhält man aus der Preisgleichung

$$\begin{aligned} 0 = \pi(\chi^t) &= \left\langle \Phi, \chi^t \right\rangle_{\mathcal{W}} = \sum_{s=0}^{T} \sum_{k=1}^{k_s} \Phi_s(A_{s,k}) \chi_s^t(A_{s,k}) \\ &= -\rho_t \cdot \sum_{k=1}^{k_{t-1}} \Phi_{t-1}(A_{t-1,k}) + 1 \cdot \sum_{k=1}^{k_t} \Phi_t(A_{t,k}) \qquad (s = t\text{-}1,\ t) \\ &= -\rho_t \cdot d_{t-1} + d_t \end{aligned}$$

von $\chi^t \in \mathcal{M}$ für die Diskontierungsfaktoren $d_t$ die Rekursionsformel

(RF$d_t$) $\quad d_t = d_{t-1} \cdot \rho_t$

und mit $d_0 = \Phi_0(\Omega) = 1$ per vollständiger Induktion die explizite Formel

(EF$d_t$) $\quad d_t = \rho_1 \cdot \ldots \cdot \rho_t$ für $t = 1,\ldots,T$.

2) „(AWS$^\delta$), (AF), (FH) ⇒ (DP$\zeta^t$)“: Unter den Voraussetzungen (AF) und (FH) ist nach Abschnitt 3.9.1 $\chi^t \in \mathcal{M}$ für $t \in \{1,\ldots,T\}$ und

$$\begin{aligned} \widehat{\zeta}^t &= \zeta^T - d_T \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} = \left(-d_t, 0, .., 0, 1, 0, .., 0\right)^{\mathsf{T}} \\ &= \left(-\rho_1 \cdot \ldots \cdot \rho_t, 0, .., 0, 1, 0, .., 0\right)^{\mathsf{T}} \qquad (d_t = \rho_1 \cdot \ldots \cdot \rho_t) \\ &= -\rho_1 \cdot \ldots \cdot \rho_t \mathbf{1}_{0,\Omega} + \rho_2 \cdot \ldots \cdot \rho_t \mathbf{1}_{1,\Omega} \\ &\qquad - \rho_2 \cdot \ldots \cdot \rho_t \mathbf{1}_{1,\Omega} + \rho_3 \cdot \ldots \cdot \rho_t \mathbf{1}_{2,\Omega} \\ &\quad \ldots\ldots \\ &\qquad - \rho_t \mathbf{1}_{t-1,\Omega} + \mathbf{1}_{t,\Omega} \\ &= \sum_{s=1}^{t} \left(-\rho_s \rho_{s+1} \cdot \ldots \cdot \rho_t \mathbf{1}_{s-1,\Omega} + \rho_{s+1} \cdot \ldots \cdot \rho_t \mathbf{1}_{s,\Omega}\right) \qquad (s = t\text{: } \rho_{t+1} \cdot \ldots \cdot \rho_t := 1) \\ &= \sum_{s=1}^{t} \left(-\rho_s \mathbf{1}_{s-1,\Omega} + \mathbf{1}_{s,\Omega}\right) \cdot \rho_{s+1} \cdot \ldots \cdot \rho_t \\ &= \sum_{s=1}^{t} \chi^s \cdot \rho_{s+1} \cdot \ldots \cdot \rho_t \\ &= \chi^1 \cdot \rho_2 \cdot \ldots \cdot \rho_t + \ldots + \chi^{t-1} \cdot \rho_t + \chi^t \in \mathcal{M}. \end{aligned}$$

In Abschnitt 3.7.3 wurde bereits festgestellt, dass unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) das spezielle Zahlungsprofil $Y = d_T \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega}$ in $L(\mathcal{H}_N)$ liegt und dass für ein beliebiges duplizierbares Zahlungsprofil $Y \in L(\mathcal{H}_N)$ und ein beliebiges Kapitalmarktgeschäft $\widehat{X} \in \mathcal{M} \subseteq L(\mathcal{H}_N)$ auch deren Summe $X := Y + \widehat{X}$ in $L(\mathcal{H}_N)$ liegt (und denselben Preis wie $Y$ besitzt). Die Voraussetzung (FH) ist zusammen mit (AWS$^\delta$) und (AF) also auch hinreichend für

$$\zeta^T = \widehat{\zeta}^t + d_T \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} \in L(\mathcal{H}_N),$$

also für die Bedingung (DP$\zeta^t$) ($t \in \{1,\ldots,T\}$).

Für $t = 0$ sind nach Abschnitt 3.8.2 die Bedingungen (DP$\zeta^0$) und $\widehat{\zeta}^0 \in \mathcal{M}$ stets erfüllt. □

### 3.9.3 Preismaße $Q_t$ und einheitliches Preismaß $Q$

Unter Voraussetzung der Arbitragefreiheit (AF) und der Bedingung (DP$\xi^{t,C}$), dass also das stochastische AD-Papier $\xi^{t,C}$ duplizierbar ist, wird nach Abschnitt 3.8.1 der zum Zeitintervall $[0,t]$ und zum Ereignis $C \in \mathcal{F}_t$ gehörige AD-Preis

$$\Phi_t(C) = d_{t,C} = \pi(\xi^{t,C})$$

tatsächlich als Preis von $\xi^{t,C} \in L(\mathcal{H}_N)$ bzw. als Diskontierungsfaktor des Kapitalmarktgeschäfts $\bar{\xi}^{t,C}$ im Marktmodell realisiert. Speziell für $C = \Omega$ wird unter der Voraussetzung (DP$\zeta^t$), dass also das deterministische AD-Papier $\zeta^t = \xi^{t,\Omega}$ duplizierbar ist, der zum Intervall $[0,t]$ bzw. Zeitpunkt $t$ und zum sicheren Ereignis $\Omega$ gehörige deterministische AD-Preis $\Phi_t(\Omega) = d_t = \pi(\zeta^t)$ im Marktmodell realisiert. Das Maß $\Phi_t(C) = d_{t,C}$ ist der (nicht normierte) AD-Preis dafür, dass im Zeitpunkt $t$ und nur im Ereignis $C$ genau eine Geldeinheit eingezahlt wird, das Maß $\Phi_t(\Omega) = d_t$ ist der Preis dafür, dass im Zeitpunkt $t$ sicher eine Geldeinheit eingezahlt wird.

Sind beide Voraussetzungen (DP$\xi^{t,C}$) und (DP$\zeta^t$) erfüllt, so ist der normierte AD-Preis

$$Q_t(C) = \Phi_t(C)/\Phi_t(\Omega) = \pi(\xi^{t,C}) / \pi(\zeta^t)$$

von $C$ der Anteil des AD-Preises $\Phi_t(C)$ des Zeitpunkts $t$ und Ereignisses $C \in \mathcal{F}_t$ am AD-Preis $\Phi_t(\Omega)$ des sicheren Ereignisses des Zeitpunkts $t$, also der **normierte (relative) AD-Preis** zu $t$ und $C$ in Bezug auf den deterministischen AD-Preis des Zeitpunkts $t$. Daher kann das in Abschnitt 3.7.4 definierte W-Maß $Q_t(C)$ des Ereignisses $C \in \mathcal{F}_t$ auch als das zur $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_t$ des Zeitpunkts $t$ gehörige (relative) Preismaß von $C$ bezeichnet werden.

Bei Gültigkeit von (AF) und der Voraussetzung (DP$\xi^{t,C}$) für alle $C \in \mathcal{F}_t$ (und dann insbesondere auch für $C = \Omega \in \mathcal{F}_t$) kann dann das in Abschnitt 3.7.4 für alle $C \in \mathcal{F}_t$ definierte und innerhalb des Marktmodell entwickelte formale bzw. synthetische W-Maß

$$Q_t : \mathcal{F}_t \longrightarrow [0,1]$$

als das zum Zeitpunkt $t$ gehörige (normierte, relative) **Preismaß** bezeichnet werden. Diese Bezeichnung des Maßwerts $\Phi_t(C)$ als Zustands-, AD- oder Ereignispreis und des W-Maßes $Q_t(C)$ als Preismaß wird meist salopperweise auch noch ohne Vorliegen der entsprechenden Voraussetzungen verwendet. Bei den nachfolgenden Untersuchungen wird die Voraussetzung (DP$\xi^{t,C}$) für beliebige $C \in \mathcal{F}_t$ und $t \in I$ nicht gesichert. Nach Abschnitt 3.8.1 ist diese Voraussetzung äquivalent zur Vollständigkeit (VS) des Marktmodells. Die zweite speziellere Voraussetzung (DP$\zeta^t$) (für $C = \Omega$, $t \in I$) ist nach Abschnitt 3.9.2 aber eine Folge der nachfolgend verwendeten Voraussetzung (FH).

Für das Marktmodell wird nun neben der Arbitragefreiheit (AF) noch die zusätzliche Voraussetzung (FH) der Existenz von festverzinslichen Handelsstrategien angenommen und damit ein Zusammenhang zwischen den verschiedenen W-Maßen $Q_t$ ($t \in I$) bewiesen. Im nachfolgenden Beweis wird gezeigt, dass dann das Maß $Q_s(E)$ eines Ereignisses $E \in \mathcal{P}_s$ bzw. $E \in \mathcal{F}_s$ im Zeitpunkt $s$ die Summe der Maße $Q_t(A_t)$ seiner Nachfolger-Ereignisse $A_t \in \mathcal{P}_t$, $A_t \subseteq E$, im Zeitpunkt $t$ ist, also insbesondere die Summe der Maße $Q_T(A_T)$ seiner Nachfolger-Ereignisse $A_T \in \mathcal{P}_T = \{\{\omega_1\},\ldots,\{\omega_K\}\}$, $A_T \subseteq E$, im Zeitpunkt $T$:

$$Q_s(E) = \sum_{A_t \subseteq E,\, A_t \in \mathcal{P}_t} Q_t(A_t) = Q_t(E), \qquad 0 \le s < t \le T,\ E \in \mathcal{F}_s,$$

$$Q_s(E) = \sum_{\omega \in E} Q_T(\{\omega\}) = Q_T(E) \qquad (t = T).$$

Diese additive Zerlegung eines Maßes $Q_s(A_s)$ in Maße $Q_t(A_t)$ für ein Ereignis $A_s \in \mathcal{P}_s$ mit seinen Nachfolger-Ereignissen $A_t \in \mathcal{P}_t$, $A_t \subseteq A_s$, wird in der nachfolgenden Abbildung 3.18 dargestellt. Demzufolge ist dann (speziell für $t = T$) jedes W-Maß $Q_s$ die Einschränkung des W-Maßes $Q := Q_T$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ auf die Unter-$\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_s$ von $\mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$. Dieses W-Maß

$$Q : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$

wird salopperweise auch ohne die Voraussetzung der Vollständigkeit (VS) des Marktmodells das (für alle $\sigma$-Algebren $\mathcal{F}_t$, $t \in I$, einheitliche, simultane) **Preismaß**[60] des Marktmodells genannt.

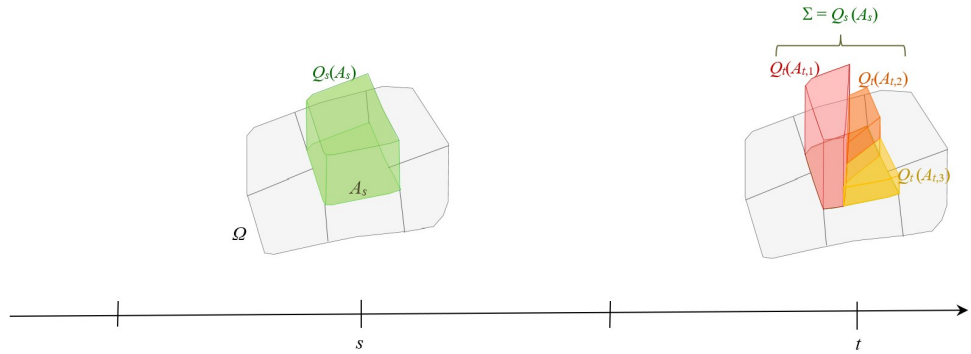



**Abb. 3.18** Die additive Zerlegung des Maßes $Q_s(A_s)$ eines Ereignisses $A_s \in \mathcal{P}_s$ in die Maße $Q_t(A_{t,m})$ seiner Nachfolger-Ereignisse $A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$, $A_{t,m} \subseteq A_s$ $(s < t)$

Speziell für das Einperiodenmodell $(T = 1)$ wird die zusätzliche Voraussetzung (FH) $\triangleq$ (DP$\mathbf{1}_{1,\Omega}$+) $\triangleq$ (DP$D^{\top}\mathbf{1}_{\Omega}$+)[61] für die Existenz des simultanen Preismaßes nicht benötigt, da wegen $Q_0(\emptyset) = 0 = Q_1(\emptyset)$, $Q_0(\Omega) = 1 = Q_1(\Omega)$ hier schon das W-Maß $Q := Q_1$ auf der Unter-$\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\Omega\}$ von $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$ mit dem W-Maß $Q_0$ übereinstimmt.

**Beweis** für die Existenz eines einheitlichen Preismaßes $Q$ für die $\sigma$-Algebren $\mathcal{F}_t$ $(t \in I)$:[62] Zum Beweis wird explizit die in der Bedingung (FH) geforderte Existenz von festverzinslichen Handelsstrategien $\eta^t$ und auch die davon abgeleitete Rekursionsformel der Diskontierungsfaktoren $d_t$ verwendet. Zu beliebigem festen Zeitpunkt $t \in \{1,\ldots,T\}$ und festem Ereignis $A_{t\text{-}1,k} \in \mathcal{P}_{t\text{-}1}$ wird jetzt mittels der festverzinslichen $\mathbb{R}^N$-wertigen Handelsstrategie $\eta^t = \eta^t_t \cdot \mathbf{1}_{t,\Omega} \in \mathcal{H}_N$ und der reellwertigen Handelsstrategie $\mathbf{1}_{t,A_{t-1,k}} \in \mathcal{H}_1$ durch Produktbildung noch eine weitere Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ definiert. Aus der Preisgleichung $\pi(\xi)$ für das zugehörige Zahlungsprofil $\xi = L(h)$ kann dann eine Rekusionsformel für die W-Maße $Q_t$ hergeleitet werden. Man definiert also eine Handelsstrategie

---

60 Die Bezeichnung Preismaß verwendet Kremer (2011) auf S. 199.

61 Eine Begründung für die Äquivalenz der Bedingungen (FH), (DP$\mathbf{1}_{1,\Omega}$+), (DP$D^{\top}\mathbf{1}_{\Omega}$+) im Einperiodenmodell unter den Voraussetzungen (AF) und (AWS$^{\delta}$) wird in Abschnitt 6.2.5 gegeben.

62 Den Beweis zur Existenz des einheitlichen Preismaßes findet man bei Kremer (2011), S. 198f.

$$h := \eta^{t,A_{t-1,k}} := \eta^{\,t} \cdot \mathbf{1}_{t,A_{t-1,k}} = \eta_t^{\,t} \cdot \mathbf{1}_{t,A_{t-1,k}} = (0,\ldots,0,\ \eta_t^{\,t} \cdot \mathbf{1}_{A_{t-1,k}},0,\ldots,0)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{H}_N$$

mit

$$\begin{aligned} h_s &= 0 && \text{für } s \neq t, \\ h_t &= \eta_t^{\,t} \cdot \mathbf{1}_{A_{t-1,k}} && \text{für } s = t \end{aligned}$$

($k \in \{1,\ldots,k_{t-1}\}$ und $A_{t-1,k} \in \mathcal{P}_{t-1}$ fest fixiert).[63] Insbesondere ist $h_0 = 0$ und damit $V_0(h) = S_0^{\delta} \cdot h_0 = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = 0$. Weiter erhält man für die Handelsstrategie $h$ speziell im Zeitpunkt $s = t$ die Werte

$$\begin{aligned} h_t(A_{t-1,m}) &= 0 && \text{für } m \neq k, \\ h_t(A_{t-1,k}) &= \eta_t^{\,t}(A_{t-1,k}) && \text{für } m = k. \end{aligned}$$

Betrachtet man die Zustandsfunktion $h_t$ statt auf den $A_{t-1,m} \in \mathcal{P}_{t-1}$ auch auf den $A_{t,p} \in \mathcal{P}_t$, so erhält man noch

$$\begin{aligned} h_t(A_{t,p}) &= 0 && \text{für } A_{t,p} \not\subseteq A_{t-1,k}, \\ h_t(A_{t,p}) &= \eta_t^{\,t}(A_{t-1,k}) && \text{für } A_{t,p} \subseteq A_{t-1,k}. \end{aligned}$$

Für das Zahlungsprofil $\xi := L(h)$ der Handelsstrategie $h$ ergeben sich die Werte

$$\begin{aligned} \xi_s &= L_s(h) = S_s^{\delta} \cdot h_s - S_s \cdot h_{s+1} && = 0 && \text{für } s \neq t\text{-}1,\ t, \\ \xi_{t-1}(A_{t-1,m}) &= 0 - S_{t-1}(A_{t-1,m})^{\mathsf{T}} h_t(A_{t-1,m}) = - S_{t-1}(A_{t-1,m})^{\mathsf{T}} 0 && = 0 && \text{für } s = t\text{-}1,\ m \neq k, \\ \xi_{t-1}(A_{t-1,k}) &= 0 - S_{t-1}(A_{t-1,k})^{\mathsf{T}} h_t(A_{t-1,k}) = - S_{t-1}(A_{t-1,k})^{\mathsf{T}} \eta_t^{\,t}(A_{t-1,k}) && = -\rho_t && \text{für } s = t\text{-}1,\ m = k, \\ \xi_t(A_{t,p}) &= S_t^{\delta}(A_{t,p})^{\mathsf{T}}\, h_t(A_{t,p}) && = 0 && \text{für } s = t,\ A_{t,p} \subseteq A_{t-1,m} \neq A_{t-1,k}, \\ \xi_t(A_{t,p}) &= S_t^{\delta}(A_{t,p})^{\mathsf{T}}\, h_t(A_{t,p}) = S_t^{\delta}(A_{t,p})^{\mathsf{T}} \eta_t^{\,t}(A_{t-1,k}) && = +1 && \text{für } s = t,\ A_{t,p} \subseteq A_{t-1,k}. \end{aligned}$$

Aufgrund dieser Werte erhält man die Zustandsfunktionen $\xi_s = 0$ für $s \neq t\text{-}1,\ t$, $\xi_{t-1} = -\rho_t \mathbf{1}_{A_{t-1,k}}$, $\xi_t = \mathbf{1}_{A_{t-1,k}}$ und das Zahlungsprofil

$$\begin{aligned} \xi &= -\rho_t \mathbf{1}_{t-1,A_{t-1,k}} + \mathbf{1}_{t,A_{t-1,k}} \\ &= \left(0,\ldots,0,-\rho_t \mathbf{1}_{A_{t-1,k}}, \mathbf{1}_{A_{t-1,k}},0,\ldots,0\right)^{\mathsf{T}}. \end{aligned}$$

Beim Zahlungsprofil $\xi = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ wird also genau zum Zeitpunkt $s = t\text{-}1$ und im Ereignis $A_{t-1,k} \in \mathcal{P}_{t-1} \subseteq \mathcal{F}_{t-1}$ der Betrag $\rho_t$ ausgezahlt und genau zum Zeitpunkt $s = t$ und im Ereignis $A_{t-1,k} \in \mathcal{F}_{t+1} \subseteq \mathcal{F}_t$ der Betrag 1 eingezahlt. Aus der zu $\xi$ gehörigen Preisgleichung

$$\begin{aligned} 0 = S_0^{\delta} \cdot h_0 = V_0(h) &= \pi(\xi) = \langle \Phi, \xi \rangle_{\mathcal{W}} = \sum_{s=0}^{T} \sum_{m=1}^{k_s} \Phi_s(A_{s,m}) \xi_s(A_{s,m}) \\ &= -\rho_t \cdot \Phi_{t-1}(A_{t-1,k}) + 1 \cdot \sum_{A_{t,p} \subseteq A_{t-1,k}} \Phi_t(A_{t,p}) && (s = t\text{-}1,\ t) \\ &= -\rho_t d_{t-1} Q_{t-1}(A_{t-1,k}) + d_t \sum_{A_{t,p} \subseteq A_{t-1,k}} Q_t(A_{t,p}) && (\Phi_t = Q_t \cdot d_t) \\ &= d_t \cdot [-Q_{t-1}(A_{t-1,k}) + \sum_{A_{t,p} \subseteq A_{t-1,k}} Q_t(A_{t,p})] && (\text{Rekurs.-formel für } d_t) \end{aligned}$$

ergibt sich nach Division durch $d_t$ für die W-Maße $Q_t$ die Rekusionsformel

$$Q_{t-1}(A_{t-1,k}) = \sum_{A_{t,p} \subseteq A_{t-1,k}} Q_t(A_{t,p}) \qquad (t \in \{1,\ldots,T\})$$

und mit dem Prinzip der vollständigen Induktion die allgemeinere Beziehung für die W-Maße $Q_t$:

---

[63] Begründung für die $\mathcal{F}_{t-1}$-Messbarkeit der Zustandsfunktion $h_t = \eta_t^{\,t} \cdot \mathbf{1}_{A_{t-1,k}}$: Da die $\mathcal{F}_{t-1}$-messbaren Funktionen $\eta_t^{\,t} \in \mathcal{H}_{t,N} = \mathcal{W}_{t-1,N}$ und $\mathbf{1}_{A_{t-1,k}} \in \mathcal{H}_{t,1} = \mathcal{W}_{t-1,1}$ nach Abschnitt 2.3 auf jedem $A_{t-1,m} \in \mathcal{P}_{t-1}$ konstant sind, gilt dies auch für deren Produkt $h_t$, sodass auch dieses $\mathcal{F}_{t-1}$-messbar ist.

$$Q_s(A_{s,k}) = \sum_{A_{t,p}\subseteq A_{s,k},\, A_{t,p}\in\mathcal{P}_t} Q_t(A_{t,p}) = Q_t(A_{s,k}) \qquad (Q_t\ \sigma\text{-additiv})$$

für $0 \le s < t \le T$ und $A_{s,k} \in \mathcal{P}_s$, $k \in \{1,\ldots,k_s\}$. Speziell für $t = T$ erhält man damit zunächst auf $\mathcal{P}_s$ die Übereinstimmung des W-Maßes $Q_s$ mit dem auf $\mathcal{F}_T = \sigma(\mathcal{P}_T) = \mathcal{P}(\Omega)$ gegebenen W-Maß

$$Q := Q_T : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]:$$
$$Q_s(A_{s,k}) = \sum_{\omega\in A_{s,k}} Q(\{\omega\}) = Q(A_{s,k}) \quad \forall\, A_{s,k} \in \mathcal{P}_s \subseteq \mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega).$$

Wegen der Molekülstruktur der Elemente $D \in \mathcal{F}_s$,

$$D = \bigcup_{k\in M} A_{s,k}$$

mit den endlich vielen Atomen $A_{s,k} \in \mathcal{P}_s$ ($k \in M = M(D) \subseteq \{1,\ldots,k_s\}$, siehe Abschnitt 2.2) von $D$, stimmen dann die ($\sigma$-additiven) Maße $Q_s$ und $Q$ auch auf allen $D \in \mathcal{F}_s$ überein:

$$Q_s(D) = \sum_{A_{s,k}\subseteq D,\, A_{s,k}\in\mathcal{P}_s} Q_s(A_{s,k}) = \sum_{A_{s,k}\subseteq D,\, A_{s,k}\in\mathcal{P}_s} Q(A_{s,k}) = Q(D),$$

also

$$Q_s(D) = Q(D) \text{ für alle } D \in \mathcal{F}_s.$$

Damit ist jedes W-Maß $Q_s : \mathcal{F}_s \longrightarrow [0,1]$ die Einschränkung $Q|_{\mathcal{F}_s}$ des W-Maßes $Q$ auf die Unter-$\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Der zum Zeitpunkt $s \in I$ und Ereignis $C \in \mathcal{F}_s$ gehörige normierte AD-Preis $Q_s(C)$ ($= \Phi_s(C)/\Phi_s(\Omega)$) stimmt also überein mit dem zum Endzeitpunkt $T$ und Ereignis $C \in \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$ gehörigen normierten AD-Preis $Q_T(C)$ bzw. mit dem zum Endzeitpunkt $T$ gehörigen „Preismaß“ $Q(C) = Q_T(C)$ von $C$. Das für alle $D \in \mathcal{P}(\Omega)$ und damit auch für alle Ereignisse $C$ der Unter-$\sigma$-Algebren $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ($s \in I$) definierte einheitliche W-Maß $Q : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ wird nun (auch ohne die Voraussetzung (VS)) Preismaß genannt. □

### 3.9.4 Diskontierte Preisprozesse der dividendenlosen Finanzinstrumente als Martingale bezüglich des Preismaßes $Q$

Es sei die Arbitragefreiheit (AF) und die Bedingung (FH), also die Existenz von festverzinslichen Handelsstrategien, vorausgesetzt. Nach dem vorherigen Abschnitt 3.9.3 existiert dann ein für alle $\sigma$-Algebren $\mathcal{F}_t$ ($t \in I$) einheitliches Preismaß $Q : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ mit $Q = Q_t$ auf $\mathcal{F}_t$. Unter diesen Voraussetzungen lässt sich die zum $j$-ten Finanzinstrument $S^j$ und zum festen Zeitpunkt $s$ gehörige und auf den Zeitpunkt 0 diskontierte Preis-Zustandsfunktion $M_s^j := d_s S_s^j$ darstellen als Summe der **bedingten Erwartung** der zu einem festen späteren Zeitpunkt $t \ge s$ gehörigen diskontierten Preis-Zustandsfunktion $M_t^j = d_t S_t^j$ und der bedingten Erwartungen der diskontierten Dividenden-Zustandsfunktionen $\gamma_i^j := d_i \delta_i^j$ des dazwischenliegenden Zeitintervalls $[s+1,t]$ (der Beweis folgt unten nach den etwas ausführlicheren Anmerkungen zur bedingten Erwartung und zum Martingal):[64]

---

64 Die Formel für die mit den deterministischen Diskontierungsfaktoren diskontierten Preis-Zustandsfunktionen und diskontierten Dividenden-Zustandsfunktionen bringt Kremer (2011) in Lemma 3.80 auf S. 205.

$$\begin{aligned}(\mathrm{AF}) \wedge (\mathrm{FH}) \;\Rightarrow\; d_s S_s^j &= E_Q^{\mathcal{F}_s}(d_t S_t^j) + \sum_{i=s+1}^{t} E_Q^{\mathcal{F}_s}(d_i \delta_i^j) \\ &= d_t E_Q^{\mathcal{F}_s}(S_t^j) + \sum_{i=s+1}^{t} d_i E_Q^{\mathcal{F}_s}(\delta_i^j) \;\text{ für } s \le t.\end{aligned}$$

Die Diskontierung auf den Zeitpunkt 0 erfolgt dabei jeweils mit den $i$-periodischen deterministischen Diskontierungsfaktoren $d_i$ (von Abschnitt 3.9.2, $i = s{+}1,\ldots,t$) und die Umrechnung in eine $\mathcal{F}_s$-messbare Zustandsfunktion mit der bedingten Erwartung $E_Q^{\mathcal{F}_s}(.)$ bezüglich des W-Maßes $Q$ unter der Hypothese $\mathcal{F}_s$. Das Schema der Berechnung des auf den Zeitpunkt $t = 0$ diskontierten Preises $d_s S_s^j$ des Zeitpunkts $s$ durch die entsprechende Diskontierung (auf $t = 0$) der bedingten Erwartungen des Kurses $S_t^j$ zum Zeitpunkt $t$ und der Dividendenzahlungen $\delta_i^j$ in den Zeitpunkten $i = s{+}1,\ldots,t$ ist in der nachfolgenden Abbildung 3.19 dargestellt.

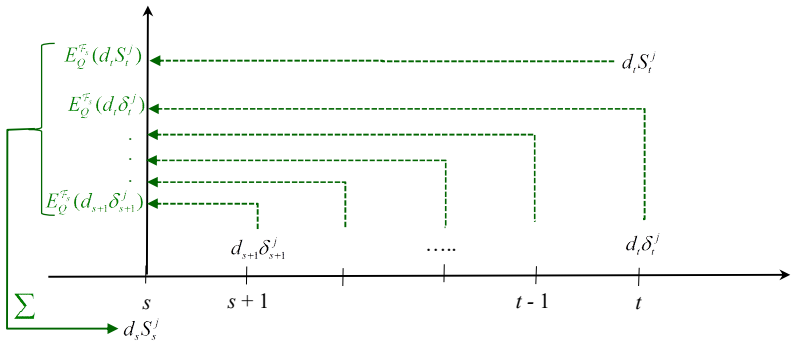



**Abb. 3.19** Berechnung des diskontierten Preises $d_s S_s^j$ von $S^j$ des Zeitpunkts $s$ als Summe der bedingten Erwartungen des diskontierten Preises $d_t S_t^j$ des Zeitpunkts $t$ ($t \ge s$) und der diskontierten Dividendenzahlungen $d_i \delta_i^j$ des Zeitintervalls $[s{+}1,t]$

Im Spezialfall $s = 0$ ($\mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\Omega\}$, $d_0 = \Phi_0(\Omega) = 1$) wird die bedingte Erwartung $E_Q^{\mathcal{F}_0}(.)$ zum Erwartungswert $E_Q(.)$ und erhält man die folgende Diskontierungsformel für das $j$-te Finanzinstrument $S^j$:

$$\begin{aligned}S_0^j &= E_Q(d_t S_t^j) + \sum_{i=1}^{t} E_Q(d_i \delta_i^j) \\ &= d_t \cdot E_Q(S_t^j) + \sum_{i=1}^{t} d_i \cdot E_Q(\delta_i^j)\,.\end{aligned}$$

Dies ist ein Spezialfall der in Abschnitt 4.5 für ein beliebiges Zahlungsprofil $X \in L(\mathcal{H}_N)$ angegebenen Preisberechnung als Barwert der $Q$-Erwartungswerte $E_Q(X_t)$ der Zustandsfunktionen $X_t$: Hier berechnet sich der Preis $S_0^j$ des Finanzinstruments $S^j$ zum Zeitpunkt 0 als Preis $\pi(Y)$ des Zahlungsprofils

$$Y := (0, \delta_1^j, \ldots, \delta_{t-1}^j, S_t^j + \delta_t^j, 0, \ldots, 0)^\mathsf{T}$$

durch den Barwert der $Q$-Erwartungswerte seiner Zahlungen $Y_t$, nämlich des Kurses $S_t^j$ zum Zeitpunkt $t$ und der Dividendenzahlungen $\delta_i^j$ in den Zeitpunkten $i = 1,\ldots,t$.

Im Spezialfall eines **dividendenlosen Finanzinstruments** $S^j$ ($\delta^j = 0$) ist der diskontierte Preisprozess $M^j = (M_t^j)_{t\in I} = (d_t S_t^j)_{t\in I}$ ein **Martingal** bezüglich des W-Maßes $Q$ und der Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ des gefilterten W-Raums $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\in I},Q)$:

$$\text{(AF)} \wedge \text{(FH)} \;\Rightarrow\; d_s S_s^j = E_Q^{\mathcal{F}_s}(d_t S_t^j) \qquad \text{für } s \le t.$$

Die Zustandsfunktion $M_s^j$ stimmt dann mit der bedingten Erwartung von $M_t^j$ unter der Hypothese $\mathcal{F}_s$ überein. Aufgrund dieser Eigenschaft wird das Preismaß $Q$ auch **Martingalmaß**[65] genannt. Der Zusammenhang zwischen der Arbitragefreiheit und der Martingaleigenschaft der dividendenlosen diskontierten Preisprozesse wurde im Jahr 1979 von Harrison und Kreps gefunden.[66]

**Die bedingte Erwartung einer Zustandsfunktion auf endlichem Zustandsraum**
Die bedingte Erwartung ist ein zentraler Begriff der Wahrscheinlichkeitstheorie (W-Theorie) und wird insbesondere bei der Definition eines Martingals verwendet. Für den hier im Mehrperiodenmodell vorliegenden Fall eines gefilterten W-Raum $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\in I},Q)$ ($\mathcal{F}_0 = \{\phi,\Omega\}$, $\mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$, $Q : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ W-Maß) mit **endlichem Zustandsraum** $\Omega$ und dem auf den Ereignissen $A_s \in \mathcal{P}_s = \mathcal{Z}(\mathcal{F}_s)$ **positiven diskreten W-Maß** $Q$ wird für eine $\mathcal{F}_t$-messbare Zustandsfunktion $X_t \in \mathcal{W}_{t,1}$ und die Unter-$\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_s$ von $\mathcal{F}_t$ ($s \le t$) die **bedingte Erwartung** von $X_t$ unter der Hypothese $\mathcal{F}_s$ (bzw. unter der Information $\mathcal{F}_s$, bezüglich $\mathcal{F}_s$ oder gegeben $\mathcal{F}_s$) folgendermaßen definiert:[67]

$$E_Q^{\mathcal{F}_s}(X_t) := E_Q(X_t|\mathcal{F}_s) := \sum_{A_s\in\mathcal{P}_s}\left(\frac{1}{Q(A_s)}\cdot\sum_{\substack{A_t\subseteq A_s\\ A_t\in\mathcal{P}_t}} X_t(A_t)Q(A_t)\right)\cdot\mathbf{1}_{A_s}.$$

Die bedingte Erwartung

$$Y_s := E_Q(X_t|\mathcal{F}_s) = \sum_{A_s\in\mathcal{P}_s} Y_s(A_s)\cdot\mathbf{1}_{A_s}$$

ist also die $\mathcal{F}_s$-messbare Zustandsfunktion $Y_s \in \mathcal{W}_{s,1}$, deren Funktionswerte $Y_s(A_s)$ jeweils durch den **bedingten Erwartungswert** $E_Q(X_t|A_s)$ von $X_t$ unter der Bedingung (Hypothese) $A_s$ ($\in \mathcal{P}_s \subseteq \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$) gegeben sind:

---

65 Die Bezeichnung Martingalmaß findet man bei Kremer (2011), S. 50, 69, 205, 215, 411; (2017), S. 176.

66 Den geschichtlichen Hinweis auf die erste Entdeckung des Zusammenhangs zwischen Arbitragefreiheit und Martingaleigenschaft geben beispielsweise Trautmann (2007) auf S. 361 und Bäuerle u. Rieder (2017) auf S. 44.

67 Diese Definition der bedingten Erwartung im Mehrperiodenmodell findet man bei Kremer (2011), S. 202, 376.

$$Y_s(A_s) = \frac{1}{Q(A_s)} \cdot \sum_{\substack{A_t \subseteq A_s \\ A_t \in \mathcal{P}_t}} X_t(A_t) Q(A_t) \;=\; E_Q(X_t \,|\, A_s) \qquad (A_s \in \mathcal{P}_s).$$

Begründung für die Übereinstimmung $Y_s(A_s) = E_Q(X_t \,|\, A_s)$ : Wegen der $\mathcal{F}_t$- bzw. $\mathcal{P}_t$-Messbarkeit von $X_t$ ist $X_t(\omega) = X_t(A_t)$ für die $\omega \in A_t \in \mathcal{P}_t$. Wegen der Molekülstruktur ist $A_s \in \mathcal{P}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ in $\mathcal{F}_t$ die Vereinigung seiner Atome $A_t \in \mathcal{P}_t$, $A_t \subseteq A_s$. Und da $Q = Q_T$ ein W-Maß auf der endlichen $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_T = \mathfrak{P}(\Omega)$ ist, gilt noch

$$Q(A_t) = \sum_{\omega \in A_t} Q(\{\omega\}) \,.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} Y_s(A_s) \;&=\; \frac{1}{Q(A_s)} \cdot \sum_{\substack{A_t \subseteq A_s \\ A_t \in \mathcal{P}_t}} X_t(A_t) \sum_{\omega \in A_t} Q(\{\omega\}) \\ &=\; \frac{1}{Q(A_s)} \cdot \sum_{\substack{A_t \subseteq A_s \\ A_t \in \mathcal{P}_t}} \sum_{\omega \in A_t} X_t(\omega) Q(\{\omega\}) \\ &=\; \frac{1}{Q(A_s)} \cdot \sum_{\omega \in A_s} X_t(\omega) Q(\omega) \;=\; \frac{1}{Q(A_s)} \int_{A_s} X_t \, dQ \\ &=\; E_Q(X_t \,|\, A_s) \qquad \text{(Def. des bed. Erw.werts).} \end{aligned}$$

Speziell für $s = 0$ mit $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{P}_0 = \mathcal{Z}(\mathcal{F}_0) = \{\Omega\}$ ist damit die bedingte Erwartung von $X_t$ bezüglich $\mathcal{F}_0$ gleich dem Erwartungswert von $X_t$:

$$\begin{aligned} E_Q(X_t \,|\, \mathcal{F}_0) \;&=\; \sum_{A_0 = \Omega} \left( \frac{1}{Q(A_0)} \cdot \sum_{A_t \in \mathcal{P}_t} X_t(A_t) Q(A_t) \right) \cdot \mathbf{1}_{A_0} \\ &=\; \sum_{A_t \in \mathcal{P}_t} X_t(A_t) Q(A_t) \;=\; \sum_{A_t \in \mathcal{P}_t} X_t(A_t) \sum_{\omega \in A_t} Q(\{\omega\}) \qquad (Q(\Omega) = 1) \\ &=\; \sum_{\omega \in \Omega} X_t(\omega) Q(\{\omega\}) \;=\; \int_{\Omega} X_t \, dQ \\ &=\; E_Q(X_t) \qquad \text{(Def. des Erw.werts).} \end{aligned}$$

Die bedingte Erwartung $Y_s = E_Q(X_t \,|\, \mathcal{F}_s)$ ist außerdem die eindeutig bestimmte[68] $\mathcal{F}_s$-messbare Zustandsfunktion $Y_s \in \mathcal{W}_{s,1}$ mit der Eigenschaft[69]

$$E_Q(Y_s \cdot \mathbf{1}_C) \;=\; E_Q(X_t \cdot \mathbf{1}_C) \quad \text{für alle } C \in \mathcal{F}_s.$$

Speziell für $C = \Omega$ erhält man die Übereinstimmung der Erwartungswerte von bedingter Erwartung $Y_s$ und Zustandsfunktion $X_t$:

---

[68] Aufgrund der Voraussetzung $Q > 0$ auf $\mathcal{P}_s$ ist hier die bedingte Erwartung eindeutig bestimmt. Bei einem W-Maß $P$, für welches nur $P \geq 0$ auf $\mathcal{P}_s$ gilt, können die Funktionswerte $Y_s(A_s) \in \mathbb{R}$ für die $A_s \in \mathcal{P}_s$ mit $P(A_s) = 0$ beliebig gewählt werden, sodass dann $Y_s$ nur $P$-fast sicher ($P$-f.s.) eindeutig bestimmt ist (siehe z. B. Kremer 2017, S. 128f).

[69] Diese Übereinstimmung der obigen Erwartungswerte für die Zustandsfunktion $X_t$ und die bedingte Erwartung $Y_s$ auf jedem $C \in \mathcal{F}_s$ ist charakteristisch für die bedingte Erwartung $Y_s$ als $\mathcal{F}_s$-messbare Zustandsfunktion. Einen Beweis hierfür findet man bei Kremer (2011), S. 376f, für ein W-Maß $Q > 0$ auf $\mathcal{P}_s$ und (2017), S. 128f, für ein W-Maß $P \geq 0$.

$$E_Q(Y_s) = E_Q(X_t).$$

Der in der obigen Charakterisierung von $Y_s$ verwendete Erwartungswert $E_Q(Z)$ von $Z$ bezüglich des W-Maßes $Q$ ist für eine beliebige $\mathcal{F}_t$-messbare Zustandsfunktion $Z: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, die im Fall eines endlichen $\Omega$ und somit endlicher Partition $\mathcal{P}_t$ auch $Q$-integrierbar ist, definitionsgemäß ihr $Q$-Integralwert

$$\begin{aligned} E_Q(Z) &:= \int_\Omega Z dQ = \sum_{A_t \in \mathcal{P}_t} \int_{A_t} Z dQ \\ &= \sum_{A_t \in \mathcal{P}_t} Z(A_t) Q(A_t) = \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega) Q(\{\omega\}). \end{aligned}$$

Für $Z = X_t \cdot \mathbf{1}_C$ ist

$$E_Q(X_t \cdot \mathbf{1}_C) = \int_C X_t dQ = \sum_{\substack{A_t \in \mathcal{P}_t \\ A_t \subseteq C}} \int_{A_t} X_t dQ = \sum_{\substack{A_t \in \mathcal{P}_t \\ A_t \subseteq C}} X_t(A_t) Q(A_t),$$

für $Z = Y_s \cdot \mathbf{1}_C$ analog

$$E_Q(Y_s \cdot \mathbf{1}_C) = \sum_{\substack{A_s \in \mathcal{P}_s \\ A_s \subseteq C}} Y_s(A_s) Q(A_s).$$

Daher wird im Fall des endlichen Zustandsraums $\Omega$ die bedingte Erwartung charakterisiert durch die Eigenschaft

$$\sum_{\substack{A_s \in \mathcal{P}_s \\ A_s \subseteq C}} Y_s(A_s) Q(A_s) = \sum_{\substack{A_t \in \mathcal{P}_t \\ A_t \subseteq C}} X_t(A_t) Q(A_t) \quad \text{für alle } C \in \mathcal{F}_s.$$

Dividiert man diese Gleichung noch durch $Q(C)$ ($> 0$), so steht links der bedingte Erwartungswert $E_Q(Y_s \mid C)$ von $Y_s$ unter der Bedingung $C$ und rechts der bedingte Erwartungswert $E_Q(X_t \mid C)$ von $X_t$ unter der Bedingung $C$. Diese Eigenschaft lässt sich aus der oben angegebenen Definition der Funktionswerte $Y_s(A_s)$ der bedingten Erwartung $Y_s = E_Q(X_t \mid \mathcal{F}_s)$ herleiten. Speziell für $C = A_s \in \mathcal{P}_s$ erhält man aus dieser charakteristischen Eigenschaft wegen der Positivität des W-Maßes $Q$ wieder die obige explizite Definition von $Y_s(A_s)$.

**Die bedingte Erwartung einer Zustandsfunktion auf unendlichem Zustandsraum**

Allgemeiner wird für einen beliebigen, also möglicherweise auch unendlichen und evtl. überabzählbaren Zustandsraum $\Omega$ und einen zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum (W-Raum) $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ die bedingte Erwartung $Y$ unter der Hypothese $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$ Unter-$\sigma$-Algebra von $\mathcal{A}$) für eine $\mathcal{A}$-messbare Zustandsfunktion $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mittels der oben angegebenen Eigenschaft definiert:[70] Die bedingte Erwartung $E_P^{\mathcal{C}}(X) = E_P(X \mid \mathcal{C})$ für die nichtnegative bzw. integrierbare[71] $\mathcal{A}$-messbare Zustandsfunktion

---

[70] Diese allgemeinere Definition der bedingten Erwartung findet man bei Kremer (2011), S. 446, und Bauer (2002) WT, S. 117.

[71] Die Definition der Integrierbarkeit einer $\mathcal{A}$-messbaren Funktion $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ bezüglich einem Maß $\mu$ auf $\mathcal{A}$ findet man beispielsweise bei Bauer (1992) MI, S. 61–80: Dazu wird zuerst das $\mu$-Integral von $f$ über $\Omega$ für eine *nichtnegative* messbare Funktion $f$ definiert, die stets das Supremum einer isotonen Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementarfunktionen (endliche Nichtnegativkombinationen von Indikatorfunktionen) $u_n$ ist. Das Integral von $f$ wird als das Supremum der Integrale dieser Elementarfunktionen $u_n$ in $[0,\infty]$ definiert. Dann wird die $\mu$-Integrierbarkeit einer *beliebigen* $\mathcal{A}$-messbaren Funktion $f$ dadurch definiert, dass die zu $f$ gehörigen Funktionen $f^+ := \max\{f,0\}$ (Positivteil) und $f^- := -\min\{f,0\}$ (Negativteil von $f$), die beide nichtnegativ, mit $f$ auch $\mathcal{A}$-messbar sind und somit einen Integralwert in $[0,\infty]$ besitzen, jeweils einen reellwertigen Integralwert aufweisen. Das $\mu$-Integral von $f = f^+ - f^-$ wird dann als die Differenz der $\mu$-Integrale von $f^+$ und $f^-$ definiert.

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ und die Unter-$\sigma$-Algebra $\mathcal{C}$ von $\mathcal{A}$ ist die $P$-fast sicher ($P$-f.s.) eindeutig bestimmte nichtnegative bzw. integrierbare $\mathcal{C}$-messbare Zustandsfunktion $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$E_P(Y \cdot \mathbf{1}_C) = \int_C Y dP = \int_C X dP = E_P(X \cdot \mathbf{1}_C) \text{ für alle } C \in \mathcal{C}$$

bei Verwendung der Erwartungswerte

$$E_P(Z) = \int_\Omega Z dP$$

der Zustandsfunktionen $Z = X \cdot \mathbf{1}_C$, $Y \cdot \mathbf{1}_C$ bezüglich des W-Maßes $P$. Insbesondere erhält man für $C = \Omega \in \mathcal{C}$ und $\mathbf{1}_\Omega = 1$, dass der Erwartungswert der bedingten Erwartung $Y = E_P(X|\mathcal{C})$ von $X$ mit dem Erwartungswert der Zustandsfunktion $X$ übereinstimmt:[72]

$$E_P(Y) = E_P(Y \cdot \mathbf{1}_\Omega) = \int_\Omega Y dP$$
$$= \int_\Omega X dP = E_P(X \cdot \mathbf{1}_\Omega) = E_P(X).$$

**Plausibilisierung des Begriffs der bedingten Erwartung**

Plausibilitätsbetrachtungen[73] zu der zuletzt angegebenen allgemeinen und ziemlich abstrakten Definition verwenden den Spezialfall einer endlichen bzw. abzählbaren Partition $\mathcal{P}$ des Zustandsraums $\Omega$ eines W-Raums $(\Omega,\mathcal{A},P)$ mit der Unter-$\sigma$-Algebra $\mathcal{C} := \sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{A}$.

Bauer (2002) verwendet dazu bei vorgegebenem W-Raum $(\Omega,\mathcal{A},P)$ eine endliche Zerlegung $\mathcal{P} = \{A_1,\ldots,A_k\}$ von $\Omega$ mit $A_i \in \mathcal{A}$ und $P(A_i) > 0$ ($i = 1,\ldots,k$) und definiert zunächst zu jedem festen $A_i \in \mathcal{P}$ mittels der bedingten Wahrscheinlichkeit von $A \in \mathcal{A}$ unter der Hypothese $A_i$ ein W-Maß

$$P_{A_i}(A) = P(A \cap A_i)/P(A_i) = \int_A \mathbf{1}_{A_i} dP / P(A_i)$$

auf $\mathcal{A}$. Der Erwartungswert[74]

$$E_{P_{A_i}}(X) = \int_\Omega X dP_{A_i} = \frac{1}{P(A_i)} \int_\Omega X \cdot \mathbf{1}_{A_i} dP = \frac{1}{P(A_i)} \int_{A_i} X dP$$

einer $P$-integrierbaren $\mathcal{A}$-messbaren reellwertigen Zustandsfunktion $X$ bezüglich dieses W-Maßes wird bedingter Erwartungswert $E_P(X|A_i)$ von $X$ unter der Hypothese $A_i$ genannt. Speziell bei endlichem Zustandsraum $\Omega$ ist dabei das im Zähler stehende Integral durch eine Summe gegeben:

$$\int_{A_i} X dP = \sum_{\omega \in A_i} X(\omega) P(\{\omega\}).$$

Dann definiert er zur Partition $\mathcal{P}$ bzw. zur $\sigma$-Algebra $\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{P})$ die aus diesen Erwartungswerten zusammengesetzte $\mathcal{C}$-messbare Zustandsfunktion

---

72 Diese Eigenschaft der Erwartungstreue und weitere Eigenschaften der bedingten Erwartung findet man bei z. B. bei Bauer (2002) WT, S. 120–127, 140, Deck (2006), S. 121f, Kremer (2011), S. 378, 382f.

73 Plausibilitätsbetrachtungen zur bedingten Erwartung geben Bauer (2002) WT, S. 116, Hausmann et al. (2002), S. 361–363, und Kallsen (2009) S. 14, Satz 1.20.

74 Die Umformung des Erwartungswerts erfolgt nach Bauer (1992) MI, S. 110, Satz 17.3, mit dem Satz von der Integration nach einem Maß mit Dichte. Hier ist $P_{A_i}(A) = \int_A f dP$, also $P_{A_i}$ das Maß mit der Dichte $f = \frac{1}{P(A_i)} \mathbf{1}_{A_i}$ bezüglich dem Maß $P$. Es gilt dann $\int X dP_{A_i} = \int X f dP$.

$$Y := \sum_{i=1}^{k} Y(A_i) \cdot \mathbf{1}_{A_i} = \sum_{i=1}^{k} E_{P_{A_i}}(X) \cdot \mathbf{1}_{A_i}$$

als die bedingte Erwartung von $X$ unter (der Hypothese) $\mathcal{C}$.

Hausmann et al. (2002) betrachten zur Plausibilisierung ebenfalls eine endliche Partition $\mathcal{P}$ von $\Omega$ mit $P > 0$ auf $\mathcal{P}$ und speziell auch den Fall $k = |\mathcal{P}| = 2$.

Kallsen (2009) behandelt eine abzählbare Partition $\mathcal{P}$ mit $P \geq 0$ auf $\mathcal{P}$ und definiert den jeweiligen Funktionswert $Y(A_i)$ der bedingten Erwartung $Y$ von $X$ durch den bedingten Erwartungswert $E_P(X|A_i)$ im Fall $P(A_i) > 0$ und durch den Wert 0 im Fall $P(A_i) = 0$.

Die bedingte Erwartung $Y$ stellt für die $\mathcal{A}$-messbare Zustandsfunktion $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine gewisse Näherung (eine Approximation durch eine $\mathcal{C}$-messbare Zustandsfunktion, eine an $\mathcal{C}$ angepasste Glättung) dar, wobei beim Übergang von $X$ zu $Y$ die Funktion auf den Atomen $A_i \in \mathcal{P} = \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ (d. h. auf den in der Unter-$\sigma$-Algebra $\mathcal{C}$ nicht weiter teilbaren Mengen, siehe Abschnitt 2.2) gleichsam „flachgeklopft“ wird auf den jeweiligen konstanten Durchschnittswert $Y(A_i)$, nämlich den bedingten Erwartungswert $E_P(X|A_i)$ von $X$ unter der Hypothese $A_i$. Diese jeweilige Mittelwertbildung bzw. „Glättung“ der Funktion auf den Elementen der Partition $\mathcal{P}$ bzw. bezüglich der $\sigma$-Algebra $\mathcal{C}$ geht mit einem Verlust an Information über die Funktion einher. So ist für die kleinste Unter-$\sigma$-Algebra $\mathcal{C} = \{\emptyset,\Omega\}$ ($\mathcal{P} = \mathcal{Z}(\mathcal{C}) = \{\Omega\}$) von $\mathcal{A}$ die bedingte Erwartung die gröbste Näherung für $X$, nämlich die konstante Funktion mit dem Funktionswert gleich dem Erwartungswert:

$$E_P(X|\mathcal{C}) = E_P(X) \cdot \mathbf{1}_\Omega,$$

wobei auch $E_P(X|\mathcal{C}) = E_P(X)$ geschrieben wird. Für die größte Unter-$\sigma$-Algebra $\mathcal{C} = \mathcal{A}$ ist die bedingte Erwartung die beste Näherung für $X$, nämlich $X$ selbst:

$$E_P(X|\mathcal{A}) = X.$$

In der Abbildung 3.20 wird die bedingte Erwartung einer Zustandsfunktion $X$ unter der Hypothese $\mathcal{C}$ gestrichelt dargestellt. Dabei ist $X$ durch die Funktionswerte auf einer fünfelementigen Partition von $\Omega$ gegeben und besitzt die Unter-$\sigma$-Algebra $\mathcal{C}$ eine zweielementige induzierte Partition $\mathcal{P} = \mathcal{Z}(\mathcal{C}) = \{A_1,A_2\}$.

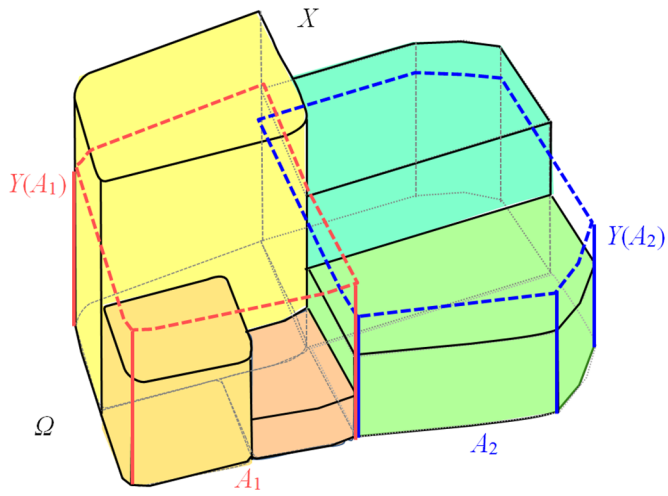



**Abb. 3.20** Die bedingte Erwartung $Y = E_P(X|\mathcal{C})$ einer Zustandsfunktion $X$ unter der Hypothese $\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{P})$ mit den gestrichelt gezeichneten Funktionswerten $Y(A_i) = E_P(X|A_i)$ für die $A_i$ der Partition $\mathcal{P} = \mathcal{Z}(\mathcal{C}) = \{A_1,A_2\}$

**Ein stochastischer Prozess als Martingal**

Mittels der bedingten Erwartung wird der Begriff des Martingals (englisch: martingale) definiert, der eine wichtige Rolle in der stochastischen Analysis und der stochastischen Finanzmathematik einnimmt. Dieser Begriff ist die Verallgemeinerung der zeit- und zufallsabhängigen Entwicklung des nach der $n$-ten Spielrunde vorhandenen Kapitals $X_n$ eines Spielers bei einem fairen Spiel. Man erwartet dabei, dass der zukünftige Wert im Mittel mit dem heutigen Wert übereinstimmt, also die Vorausschau gemäß der Richtlinie „Morgen wird wie heute sein“[75] erfolgt. Bei dem im Mehrperiodenmodell unter den Voraussetzungen (AF) und (FH) vorliegenden gefilterten W-Raum $(\Omega,(\mathcal{F}_t)_{t\in I},Q)$ mit endlicher geordneter diskreter Zeitmenge $I = \{0,\ldots,T\}$, endlichem Zustandsraum $\Omega$ und einem W-Maß $Q$ mit $Q > 0$ auf $\mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset\}$ heißt ein an die Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ adaptierter reellwertiger stochastischer Prozess $X \in \mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathcal{F})$ ein **Martingal** oder $\mathcal{F}$-Martingal, wenn er die folgende **Martingaleigenschaft** besitzt:[76]

$$E_Q(X_{s+1}|\mathcal{F}_s) = X_s \quad \text{für } s = 0,\ldots,T\text{-}1.$$

Bei der kontinuierlichen Zeitparametermenge $I = [0,\infty[$, evtl. auch überabzählbarem Zustandsraum $\Omega$ und einem beliebigem W-Maß $Q$ heißt ein an die Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ adaptierter $Q$-integrierbarer reellwertiger stochastischer Prozess $X$ Martingal, wenn die Martingaleigenschaft

[75] Mit diesem Motto beschreibt Trautmann (2007), S. 361, die Vorausschau für ein Martingal.

[76] Diese Definition des Martingals für eine endliche geordnete Zeitmenge $I$ findet man beispielsweise bei Kremer (2011), S. 388.

$$E_Q(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s \;\; Q\text{-fast sicher für } s, t \in I \text{ mit } t \geq s$$

erfüllt ist.[77] [78] Falls die Zustandsfunktionen bei $s = 0$ deterministisch sind, also der Fall $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\Omega\}$ vorliegt, ist $E_Q(X_t) = E_Q(X_t|\mathcal{F}_0) = X_0$ $Q$-f.s. $\forall\, t \in I$. Für ein Martingal $X$ ist dann der Erwartungswert $E_Q(X_t)$ der Zustandsfunktionen $X_t$ für alle $t \in I$ $Q$-f.s. konstant. Dies folgt auch aus der Eigenschaft der bedingten Erwartung, dass der Erwartungswert der bedingten Erwartung $E_Q(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ von $X_t$ und der Erwartungswert der Zustandsfunktion $X_t$ übereinstimmen ($\forall$ $s$ mit $0 \leq s \leq t$).

In der Abbildung 3.21 wird ein Martingal für die Zeitparametermenge $I = \{0,1,2\}$ dargestellt. Die Zustandsfunktion $X_2$ ist dabei wieder die Zustandsfunktion $X$ von Abbildung 3.20, die durch ihre Funktionswerte auf einer fünfelementigen Partition von $\Omega$ gegeben ist. Die Zustandsfunktion $X_1$ ist die bedingte Erwartung von $X_2$, die auf einer zweielementigen Partition von $\Omega$ gebildet wird. Die Zustandsfunktion $X_0$ ist jeweils der Erwartungswert von $X_1$ und von $X_2$.

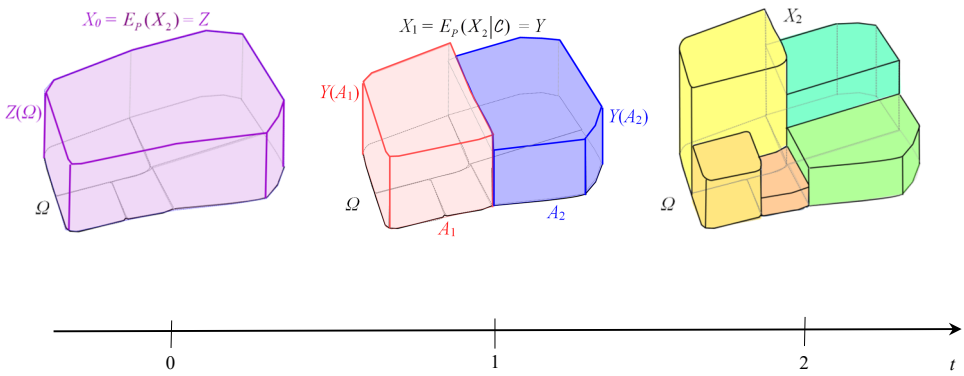



**Abb. 3.21** Ein Martingal $X = (X_0,X_1,X_2)^\top$

**Beweis** für die Martingaleigenschaft der dividendenlosen diskontierten Preisprozesse:

**Der Diskontierungsoperator**: Im arbitragefreien Marktmodell kann mit einem normierten Diskontierungsprozess $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1+} \subseteq \mathcal{A}^+$ ein Diskontierungsoperator[79]

---

[77] Die Definition des Martingals für eine kontinuierliche geordnete Zeitmenge $I$ findet sich z. B. bei Kremer (2011), S. 447, und Bauer (2002) WT, S. 138f.

[78] Zur Herkunft des Wortes Martingal als mathematischer Begriff ist Folgendes anzuführen. Die Martingale ist eine schon im 18. Jahrhundert bekannte Spielstrategie beim Glücksspiel, bei der nach verlorenem Spiel der Einsatz erhöht, z. B. verdoppelt wird. Da sie das bekannteste Spielsystem ist, wird die Martingale auch als Synonym für Spielsystem verwendet. Dies führte angeblich zur Übernahme des Begriffs in die mathematische Literatur. Weiter bezeichnet der Martingal einen zwischen den Vorderbeinen des Pferdes durchlaufenden Hilfszügel, der das Pferd hindern soll, seinen Kopf zu weit hochzuheben und zu steigen. Beide Worte sollen sich von der französischen Stadt Martigues ableiten, deren Bewohner früher als naiv angesehen wurden und mit „sehr waghalsig spielen“ in Verbindung gebracht werden. Literatur: Mansuy (2009).

[79] Die Definition des Diskontierungsoperators findet man bei Kremer (2006), S. 192, (2011), S. 185, und (2017), S. 58.

$$D^{\Phi}_{s,t} : X_t \in \mathcal{W}_{t,1} \mapsto D^{\Phi}_{s,t}(X_t) \in \mathcal{W}_{s,1} \qquad (s, t \in I, s \le t),$$

definiert werden, welcher einer $\mathcal{F}_t$-messbaren Zustandsfunktion $X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine $\mathcal{F}_s$-messbare Funktion $Y_s = D^{\Phi}_{s,t}(X_t)$ zuordnet:

$$D^{\Phi}_{s,t}(X_t) := \sum_{A_s \in \mathcal{P}_s} \left( \frac{1}{\Phi_s(A_s)} \cdot \sum_{\substack{A_t \subseteq A_s \\ A_t \in \mathcal{P}_t}} X_t(A_t)\Phi_t(A_t) \right) \cdot \mathbf{1}_{A_s} \qquad (\mathcal{P}_s = \mathcal{Z}(\mathcal{F}_s))$$

$$= \sum_{A_{s,k} \in \mathcal{P}_s} \sum_{\substack{A_{t,m} \subseteq A_{s,k} \\ A_{t,m} \in \mathcal{P}_t}} X_t(A_{t,m}) d_{s,k;t,m} \cdot \mathbf{1}_{A_{s,k}} .$$

Speziell für $s = t$ ist

$$D^{\Phi}_{t,t}(X_t) = \sum_{A_t \in \mathcal{P}_t} X_t(A_t) \cdot \mathbf{1}_{A_t} = X_t.$$

Für $s = 0$ ist

$$D^{\Phi}_{0,t}(X_t) = \sum_{A_{t,m} \in \mathcal{P}_t} X_t(A_{t,m})\Phi_t(A_{t,m})$$

$$= \left\langle X_t, \Phi_t \right\rangle_{\mathcal{W}_{t,1}} = \Phi_t^{\mathsf{T}} X_t = \Phi^{\mathsf{T}} X_t \mathbf{1}_t = \pi(X_t \mathbf{1}_t)$$

der Preis des Zahlungsprofils $X_t\mathbf{1}_t = (0,\ldots,0,X_t,0,\ldots)^{\mathsf{T}}$. Weitere Formeln, mit denen beispielsweise für ein duplizierbares Zahlungsprofil $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ der Reinvestitionswerts $R_t(h)$ und der Vermögenswert $V_t(h)$ des Zeitpunkts $t$ durch „Abzinsung“ mit dem Diskontierungsoperator aus den Zahlungswerten $X_i = L_i(h)$ des Zeitraums $[t+1,T]$ bzw. $[t,T]$ berechnet werden, findet man bei Kremer (2011), S. 190f., 203. Speziell für $t = 0$ erhält man daraus die Preisberechnung von $X$ zu

$$\pi(X) = V_0(h) = \sum_{i=0}^{T} D^{\Phi}_{0,i}(X_i) .$$

Der im Diskontierungsoperator auftretende Koeffizient

$$d_{s,k;t,m} := a_{s,k} \cdot d_{t,m} = \frac{d_{t,m}}{d_{s,k}} = \frac{\Phi_t(A_{t,m})}{\Phi_s(A_{s,k})}$$

ist unter bestimmten Voraussetzungen (wie z. B. der Vollständigkeit des Marktmodells; siehe Abschnitt 3.8.3) der stochastische Diskontierungsfaktor eines im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells existierenden mehrperiodischen stochastischen AD-Termingeschäfts

$$\widehat{\xi}^{\,s,A_{s,k};t,A_{t,m}} = \left( 0,..,0,-\frac{d_{t,m}}{d_{s,k}}\mathbf{1}_{A_{s,k}},0,..,0,\mathbf{1}_{A_{t,m}},0,...,0 \right)^{\mathsf{T}} ,$$

mit dem die Abzinsung vom Zeitpunkt $t$ und Ereignis $A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$ ($A_{t,m} \subseteq A_{s,k}$) auf den Zeitpunkt $s$ ($s \le t$) und das Ereignis $A_{s,k} \in \mathcal{P}_s$ erfolgen kann.

**Verallgemeinerung der deterministischen Diskontierung** durch $D^{\Phi}_{s,t}$ : Da im deterministischen Fall mit $\mathcal{P}_s = \mathcal{P}_t = \{\Omega\}$, $A_{s,k} = A_{t,m} = \Omega$, $d_{s,k} = \Phi_s(A_{s,k}) = \Phi_s(\Omega) = d_s$ und analog $d_{t,m} = d_t$, $d_{s,k;t,m} = d_t/d_s = a_s d_t$ und $X_t(\Omega) = X_t$ der Diskontierungsoperator aus der Zahlung $X_t$ des Zeitpunkts $t$ den auf den Zeitpunkt $s$ deterministisch abgezinsten Wert

$$Y_s = D^{\Phi}_{s,t}(X_t) = X_t \cdot a_s d_t$$

berechnet, kann der Diskontierungsoperator als stochastische Verallgemeinerung der deterministischen Diskontierung angesehen werden.

**Linearität** von $D^{\Phi}_{s,t}$: Der Diskontierungsoperator $D^{\Phi}_{s,t}$ liefert eine lineare Abbildung. Die Linearität ergibt sich, da die Koordinaten $Y_s(A_s)$ der $\mathcal{F}_s$-messbaren reellwertigen Funktion

$$D^{\Phi}_{s,t}(X_t) = Y_s = \sum_{A_s \in \mathcal{P}_s} Y_s(A_s) \cdot \mathbf{1}_{A_s} \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}_s}$$

bezüglich der Basis $\mathbf{1}_{A_s}$, $A_s \in \mathcal{P}_s$, des Raums $\mathbb{R}^{\mathcal{P}_s}$ jeweils eine Linearkombination der Koordinaten $X_t(A_t)$ der $\mathcal{F}_t$-messbaren Funktion

$$X_t = \sum_{A_t \in \mathcal{P}_t} X_t(A_t) \cdot \mathbf{1}_{A_t} \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}_t}$$

bezüglich der Basis $\mathbf{1}_{A_t}$, $A_t \in \mathcal{P}_t$, sind:

$$Y_s(A_{s,k}) = \sum_{\substack{A_{t,m} \subseteq A_{s,k} \\ A_{t,m} \in \mathcal{P}_t}} X_t(A_{t,m}) d_{s,k;t,m} \ .$$

**Iterationseigenschaft** (**Turmeigenschaft**, **Tower-Property**) von $D^{\Phi}_{s,t}$: Hinsichtlich der Iteration (wiederholten Anwendung) hat der Operator $D^{\Phi}_{s,t}$ die folgende Eigenschaft:[80]

$$D^{\Phi}_{r,s}(D^{\Phi}_{s,t}(X_t)) = D^{\Phi}_{r,t}(X_t) \quad \text{für } X_t \in \mathcal{W}_{t,1},\ 0 \le r \le s \le t \le T.$$

Zum Beweis der Iterationseigenschaft verwendet man, dass sich für jedes beliebige $A_r \in \mathcal{P}_r$ aus den disjunkten Zerlegungen

$$A_r = \bigcup_{\substack{A_s \in \mathcal{P}_s \\ A_s \subseteq A_r}} A_s \ , \ A_s = \bigcup_{\substack{A_t \in \mathcal{P}_t \\ A_t \subseteq A_s}} A_t$$

von $A_r$ und $A_s$ die disjunkte Zerlegung

$$A_r = \bigcup_{\substack{A_t \in \mathcal{P}_t \\ A_t \subseteq A_r}} A_t$$

von $A_r$ ergibt, und zeigt damit $D^{\Phi}_{r,s}(D^{\Phi}_{s,t}(X_t))(A_r) = D^{\Phi}_{r,t}(X_t)(A_r)$.

**Preisberechnung des Wertpapiers $S^j$ zum Zeitpunkt $s$ durch stochastische Abzinsung** des späteren Preises $S^j_t$ des Zeitpunkts $t$ und der zwischenzeitlichen Dividendenzahlungen $\delta^j_i$ ($s+1 \le i \le t$): Unter Verwendung der Linearität von $D^{\Phi}_{s,t}$, der Iterationseigenschaft von $D^{\Phi}_{s,t}$ und des Prinzips der vollständigen Induktion erhält man daraus eine Formel, welche die verallgemeinerte Diskontierung mit dem Diskontierungsoperator speziell für jedes Finanzinstrument $S^j$ beschreibt:[81]

$$S^j_s = D^{\Phi}_{s,t}(S^{\delta,j}_t) + \sum_{i=s+1}^{t-1} D^{\Phi}_{s,i}(\delta^j_i) \qquad \text{für } 0 \le s < t \le T,$$

$$S^j_s = D^{\Phi}_{s,t}(S^j_t) + \sum_{i=s+1}^{t} D^{\Phi}_{s,i}(\delta^j_i) \qquad \text{für } 0 \le s \le t \le T.$$

Der Preis $S^j_s$ für das Finanzinstrument $S^j$ des Marktmodells zum Zeitpunkt $s$ berechnet sich aus dem Preis $S^j_t$ des späteren Zeitpunkts $t \ge s$ und den Dividendenzahlungen $\delta^j_i$ des Intervalls $[s+1,t]$ durch Abzinsung auf den Zeitpunkt $s$ mit dem jeweiligen stochastischen Diskontierungsoperator.

---

80 Diese Iterationseigenschaft ist die Aussage von Kremer (2011), S. 188, Lemma 3.61 bzw. (2017), S. 59, Satz 2.9.

81 Diese verallgemeinerte Diskontierung für das $j$-te Finanzinstrument $S^j$ ist die Aussage von Kremer (2011), S. 191, Satz 3.66 bzw. (2017), S. 60, Korollar 2.10.

Begründung für die erste der beiden Aussagen mittels vollständiger Induktion für die Indizes $s$ mit $0 \le s < t$: Als Induktionsbeginn erhält man für $s = t - 1$ die entsprechende Aussage

$$D^{\Phi}_{t-1,t}(S^{\delta,j}_t) \;=\; S^j_{t-1}$$

folgendermaßen: Aufgrund der Definition des Diskontierungsoperators $D^{\Phi}_{s,t}$ gilt für beliebiges $A_{t-1,k} \in \mathcal{P}_{t-1}$

$$D^{\Phi}_{t-1,t}(S^{\delta,j}_t)(A_{t-1,k}) \;=\; \frac{1}{\Phi_{t-1}(A_{t-1,k})} \sum_{A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}} \Phi_t(A_{t,m}) S^{\delta,j}_t(A_{t,m}) \,.$$

Da der normierte Diskontierungsprozess $\Phi$ als spezieller normierter Bewertungsprozess das in Abschnitt 3.4.3 angegebene Gleichungssystem (GS$\Psi A_{t-1,k}$) zur Bestimmung eines Bewertungsprozesses $\Psi$ erfüllt, also

$$\sum_{A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}} \Phi_t(A_{t,m}) S^{\delta,j}_t(A_{t,m}) \;=\; \Phi_{t-1}(A_{t-1,k})\; S^j_{t-1}(A_{t-1,k}) \,,$$

folgt nach Division mit $\Phi_{t-1}(A_{t-1,k})$ $(> 0)$ die Beziehung $D^{\Phi}_{t-1,t}(S^{\delta,j}_t)(A_{t-1,k}) \;=\; S^j_{t-1}(A_{t-1,k})$ $\forall\, A_{t-1,k} \in \mathcal{P}_{t-1}$ und somit

(*) $$D^{\Phi}_{t-1,t}(S^{\delta,j}_t) \;=\; S^j_{t-1} \,.$$

Der Induktionsschluss $s \longrightarrow s - 1$ erfolgt für $s < t$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
D^{\Phi}_{s-1,t}(S^{\delta,j}_t) \;&=\; D^{\Phi}_{s-1,s}(D^{\Phi}_{s,t}(S^{\delta,j}_t)) && \text{(Iter.eigsch.)}\\
&=\; D^{\Phi}_{s-1,s}(S^j_s - \sum_{i=s+1}^{t-1} D^{\Phi}_{s,i}(\delta^j_i)) && \text{(Ind.ann. für } s\text{)}\\
&=\; D^{\Phi}_{s-1,s}(S^j_s) \;-\; \sum_{i=s+1}^{t-1} D^{\Phi}_{s-1,s}(D^{\Phi}_{s,i}(\delta^j_i)) && (D^{\Phi}_{s,t} \text{ linear})\\
&=\; D^{\Phi}_{s-1,s}(S^{\delta,j}_s - \delta^j_s) \;-\; \sum_{i=s+1}^{t-1} D^{\Phi}_{s-1,i}(\delta^j_i) && (S = S^{\delta} - \delta, \text{ Iter.eigsch.})\\
&=\; D^{\Phi}_{s-1,s}(S^{\delta,j}_s) \;-\; D^{\Phi}_{s-1,s}(\delta^j_s) \;-\; \sum_{i=s+1}^{t-1} D^{\Phi}_{s-1,i}(\delta^j_i) && (D^{\Phi}_{s,t} \text{ linear})\\
&=\; S^j_{s-1} \;-\; \sum_{i=s}^{t-1} D^{\Phi}_{s-1,i}(\delta^j_i) && (\text{(*) mit } s \text{ anstelle } t),
\end{aligned}$$

also

$$S^j_{s-1} \;=\; D^{\Phi}_{s-1,t}(S^{\delta,j}_t) \;+\; \sum_{i=s}^{t-1} D^{\Phi}_{s-1,i}(\delta^j_i) \,.$$

Mittels vollständiger Induktion folgt somit die erste Aussage und schließlich unter Verwendung von $D^{\Phi}_{s,t}(S^{\delta,j}_t) \;=\; D^{\Phi}_{s,t}(S^j_t) \;+\; D^{\Phi}_{s,t}(\delta^j_t)$ auch die zweite Aussage. Diese zweite Aussage gilt wegen $D^{\Phi}_{t,t}(S^j_t) \;=\; S^j_t$ auch für $s = t$ und insgesamt für $s \le t$.

**Übereinstimmung von Diskontierungsoperator und diskontierter bedingter Erwartung**: Mit der zusätzlichen Voraussetzung (FH) gilt nach Abschnitt 3.9.3 $Q_t = Q$ und $\Phi_t = d_t Q_t = d_t Q$ auf $\mathcal{F}_t$ $(t \in I)$ und daher für eine beliebige $\mathcal{F}_t$-messbare Zustandsfunktion $X_t \in \mathcal{W}_{t,1}$ die folgende Beziehung zwischen Diskontierungsoperator und diskontierter bedingter Erwartung:[82]

---

[82] Dieser Zusammenhang zwischen Diskontierungsoperator und diskontierter bedingter Erwartung ist die Aussage von Lemma 3.76 bei Kremer (2011), S. 202.

$$D^{\Phi}_{s,t}(X_t) = \frac{d_t}{d_s} \cdot \sum_{A_s \in \mathcal{P}_s} \left( \frac{1}{Q(A_s)} \cdot \sum_{\substack{A_t \subseteq A_s \\ A_t \in \mathcal{P}_t}} X_t(A_t) Q(A_t) \right) \cdot \mathbf{1}_{A_s} = \frac{d_t}{d_s} \cdot E^{\mathcal{F}_s}_Q(X_t) \qquad (s \le t).$$

Die einer $\mathcal{F}_t$-messbaren Funktion $X_t$ mittels Diskontierungsoperator $D^{\Phi}_{s,t}(.)$ bzw. bedingter Erwartung $E^{\mathcal{F}_s}_Q(.)$ zugeordneten $\mathcal{F}_s$-messbaren Funktionen $D^{\Phi}_{s,t}(X_t)$ und $E^{\mathcal{F}_s}_Q(X_t)$ unterscheiden sich also nur durch den deterministischen Faktor $d_t / d_s$. Der Diskontierungsoperator ist somit die vom Zeitpunkt $t$ auf den Zeitpunkt $s$ diskontierte bedingte Erwartung, wobei die Abzinsung von $t$ auf 0 mittels des deterministischen Diskontierungsfaktors $d_t$ und und die Aufzinsung von 0 auf $s$ mittels des deterministischen Aufzinsungsfaktors $a_s = 1/d_s$ erfolgt.

**Berechnung des diskontierten Preises $d_s S^j_s$ des Wertpapiers $S^j$ zum Zeitpunkt $s$** als Summe der bedingten Erwartungen des diskontierten Preises $d_t S^j_t$ eines späteren Zeitpunkts $t$ und der zwischenzeitlichen diskontierten Dividendenzahlungen $d_i \delta^j_i$: Verwendet man den Zusammenhang zwischen $D^{\Phi}_{s,t}(X_t)$ und $E^{\mathcal{F}_s}_Q(X_t)$ für die Zustandsfunktionen $S^j_t$ und $\delta^j_i$ anstelle von $X_t$, so erhält man

$$E^{\mathcal{F}_s}_Q(d_t S^j_t) = d_t \cdot E^{\mathcal{F}_s}_Q(S^j_t) = d_s \cdot D^{\Phi}_{s,t}(S^j_t),$$

analog

$$E^{\mathcal{F}_s}_Q(d_i \delta^j_i) = d_s \cdot D^{\Phi}_{s,t}(\delta^j_i)$$

und damit aus der obigen mit $d_s$ multiplizierten zweiten Formel für die Preisberechnung bzw. Diskontierung des Finanzinstruments $S^j$ jetzt die behauptete Formel für den diskontierten Preisprozess $(d_t S^j_t)_{t \in I}$:

$$\begin{aligned} d_s S^j_s &= E^{\mathcal{F}_s}_Q(d_t S^j_t) + \sum_{i=s+1}^{t} E^{\mathcal{F}_s}_Q(d_i \delta^j_i) \\ &= d_t E^{\mathcal{F}_s}_Q(S^j_t) + \sum_{i=s+1}^{t} d_i E^{\mathcal{F}_s}_Q(\delta^j_i) \qquad \text{für } s \le t. \end{aligned}$$

Im Spezialfall eines dividendenlosen Finanzinstruments $S^j$ ($\delta^j = 0$) ergibt sich unter den Voraussetzungen (AF) und (FH) die **Martingaleigenschaft** des diskontierten Preisprozesses:

$$d_s S^j_s = E^{\mathcal{F}_s}_Q(d_t S^j_t) \qquad \text{für } s \le t.$$

Speziell für $s = 0$ erhält man noch, dass der Preis $S^j_0 = d_0 S^j_0$ des dividendenlosen Finanzinstruments $S^j$ zum Zeitpunkt 0 der mit $d_t$ diskontierte $Q$-Erwartungswert des Kurses $S^j_t$ zum Zeitpunkt $t$ ist:

$$\begin{aligned} S^j_0 &= d_0 S^j_0 = E^{\mathcal{F}_0}_Q(d_t S^j_t) \\ &= E_Q(d_t S^j_t) = d_t \cdot E_Q(S^j_t). \end{aligned}$$

□

## 3.9.5 Risikoloses Wahrscheinlichkeitsmaß $Q$ und risikoneutrale Bewertung der Zahlungsprofile

Es sei die Arbitragefreiheit (AF) und die Bedingung (FH) der Existenz von festverzinslichen Handelsstrategien vorausgesetzt. Aus der in Abschnitt 3.9.4 gezeigten Martingaleigenschaft eines diskontierten dividendenlosen Finanzinstruments $S^j$ ($\delta^j = 0$) lässt sich nun die Aussage herleiten (Beweis folgt unten), dass für ***alle*** **dividendenlosen Finanzinstrumente** $S^j$ (im

Fall $S_s^j(\omega) \neq 0 \; \forall \, \omega \in \Omega$, z. B. bei $S_s^j > 0$) im Zeitintervall $[s,s+1]$ die bedingte Erwartung der **stochastischen Rendite**

$$r_{s+1}^j := \frac{S_{s+1}^j - S_s^j}{S_s^j}$$

bezüglich des formalen W-Maßes $Q$ unter der Hypothese $\mathcal{F}_s$ gleich ist und mit dem zum Zeitintervall $[s,s+1]$ gehörigen einperiodischen risikolosen (deterministischen) Zinssatz $r_{s+1}$ übereinstimmt:

$$E_Q^{\mathcal{F}_s}(r_{s+1}^j) = r_{s+1} \quad \forall \, j \in J \text{ mit } \delta_j = 0 \qquad (r_{s+1} = 1/\rho_{s+1} - 1).$$

Weiter lässt sich zeigen, dass dann auch noch der $Q$-Erwartungswert $E_Q(r_{s+1}^j) = E_Q^{\mathcal{F}_0}(r_{s+1}^j)$ der Rendite $r_{s+1}^j$ (bezüglich dem auf $\mathcal{P}(\Omega)$ gegebenen W-Maß $Q$) gleich dem deterministischen Zinssatz $r_{s+1}$ des Zeitintervalls $[s,s+1]$ ist:

$$E_Q(r_{s+1}^j) = r_{s+1}.$$

Aus diesem Grund wird das W-Maß $Q$ auch **risikoloses bzw. risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß** genannt.

**Beweis** für die Übereinstimmung der bedingten Erwartung der Rendite der dividendenlosen Finanzinstrumente mit dem einperiodischen deterministischen Zinssatz: Es seien $j \in J$ und $s \in \{0,\ldots,T\text{-}1\}$ mit $\delta^j = 0$ und $S_s^j \neq 0$ ($S_s^j(\omega) \neq 0 \; \forall \, \omega \in \Omega$) fest fixiert. Mit den Eigenschaften[83] der bedingten Erwartung $E_Q^{\mathcal{F}_s}(.)$ erhält man aus der Martingaleigenschaft eines diskontierten dividendenlosen Finanzinstruments $S^j$ speziell für $t = s+1$ zunächst die Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= \left(E_Q^{\mathcal{F}_s}(d_{s+1}S_{s+1}^j) - d_sS_s^j\right)\Big/ d_{s+1} \\
&= E_Q^{\mathcal{F}_s}(S_{s+1}^j) - q_{s+1}S_s^j && (E_Q^{\mathcal{F}_s}(.) \text{ linear; } d_s/d_{s+1} = 1/\rho_{s+1} = q_{s+1}) \\
&= E_Q^{\mathcal{F}_s}(S_{s+1}^j) - S_s^j - r_{s+1}S_s^j && (q_{s+1} = 1 + r_{s+1}) \\
&= E_Q^{\mathcal{F}_s}(S_{s+1}^j) - E_Q^{\mathcal{F}_s}(S_s^j) - r_{s+1}S_s^j && (\mathcal{F}_s\text{-messbares } S_s^j \text{ herausziehen aus bed. Erw.}) \\
&= E_Q^{\mathcal{F}_s}(S_{s+1}^j - S_s^j) - r_{s+1}S_s^j && (\text{Linearität von } E_Q^{\mathcal{F}_s}(.)\,).
\end{aligned}$$

Für den $\mathcal{F}_{s+1}$-messbaren Zuwachs

$$\Delta_{s+1}^j := S_{s+1}^j - S_s^j$$

ist also die bedingte Erwartung bezüglich des formalen W-Maßes $Q$ unter der Hypothese $\mathcal{F}_s$ gegeben durch

$$E_Q^{\mathcal{F}_s}(\Delta_{s+1}^j) = r_{s+1}S_s^j \,.$$

Da die Zustandsfunktion $S_s^j$ $\mathcal{F}_s$-messbar und somit auf jedem $A_s \in \mathcal{P}_s$ konstant ist, ist auch die Zustandsfunktion $1\big/S_s^j$ auf jedem $A_s \in \mathcal{P}_s$ konstant, damit $\mathcal{F}_s$-messbar und auch $\mathcal{F}_{s+1}$-messbar ($\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_{s+1}$). Daher ist die stochastische Rendite

---

[83] Eigenschaften der bedingten Erwartung (Linearität, Monotonie, Positivität, Dreiecksungleichung, Erwartungstreue, Iterations- oder Turmeigenschaft, Messbares Herausziehen) findet man z. B. bei Bauer (2002) WT, S. 120–127, 140, Deck (2006), S. 121f, und speziell für endliches $\Omega$ und ein auf $\mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset\}$ positives W-Maß $Q$ bei Kremer (2011), S. 378, 382f.

$$r_{s+1}^j := \frac{S_{s+1}^j - S_s^j}{S_s^j} = \Delta_{s+1}^j \cdot \frac{1}{S_s^j}$$

des Finanzinstruments $S^j$ im Zeitintervall $[s,s+1]$ als Produkt der $\mathcal{F}_{s+1}$-messbaren Funktionen $\Delta_{s+1}^j$ und $1/S_s^j$ ebenfalls $\mathcal{F}_{s+1}$-messbar. Für ihre bedingte Erwartung $E_Q^{\mathcal{F}_s}(r_{s+1}^j)$ bezüglich des W-Maßes $Q$ unter der Hypothese $\mathcal{F}_s$ erhält man

$$\begin{aligned} E_Q^{\mathcal{F}_s}(r_{s+1}^j) &= E_Q^{\mathcal{F}_s}(\Delta_{s+1}^j \frac{1}{S_s^j}) \\ &= \frac{1}{S_s^j} E_Q^{\mathcal{F}_s}(\Delta_{s+1}^j) = r_{s+1} \qquad (\mathcal{F}_s\text{-messbares } 1/S_s^j \text{ herausziehen}). \end{aligned}$$

Somit ist die bedingte Erwartung $E_Q^{\mathcal{F}_s}(r_{s+1}^j)$ der stochastischen Rendite $r_{s+1}^j$ gleich der im Marktmodell vorliegenden deterministischen (risikolosen) Rendite $r_{s+1}$ des Zeitintervalls $[s,s+1]$:

$$E_Q^{\mathcal{F}_s}(r_{s+1}^j) = r_{s+1}.$$

Weiter ist dann auch noch der $Q$-Erwartungswert der Rendite $r_{s+1}^j$ (bezüglich dem auf $\mathcal{P}(\Omega)$ gegebenen W-Maß $Q$) gleich dem einperiodischen deterministischen Zinssatz $r_{s+1}$:[84]

$$\begin{aligned} E_Q(r_{s+1}^j) &= \sum_{\omega\in\Omega} r_{s+1}^j(\omega)Q(\omega) = \sum_{A_s\in\mathcal{P}_s} \sum_{\substack{A_{s+1}\subseteq A_s \\ A_{s+1}\in\mathcal{P}_{s+1}}} r_{s+1}^j(A_{s+1})Q(A_{s+1}) \qquad (r_{s+1}^j \ \mathcal{F}_{s+1}\text{-messbar}) \\ &= \sum_{A_s\in\mathcal{P}_s} Y_s(A_s)Q(A_s) \qquad (\text{Berechnung von } Y_s(A_s) = E_Q^{\mathcal{F}_s}(r_{s+1}^j)(A_s)\ ) \\ &= r_{s+1} \sum_{A_s\in\mathcal{P}_s} Q(A_s) \qquad (Y_s(A_s) = r_{s+1} \text{ konst. } \forall\, A_s \in \mathcal{P}_s) \\ &= r_{s+1} \qquad (\sum_{A_s\in\mathcal{P}_s} Q(A_s) = Q(\Omega) = 1 \text{ für Part. } \mathcal{P}_s \text{ von } \Omega \text{ und } W\text{-Maß } Q). \end{aligned}$$

□

Hinsichtlich des „wirklichen" W-Maßes $P$, das auf den historischen Daten der Preisentwicklung von Wertpapieren beruht, ist für risikoaverse Anleger die erwartete Rendite für ein riskanteres Wertpapier höher als für ein weniger riskantes oder ein risikoloses Wertpapier. Der Kurs des Wertpapiers stellt sich nämlich so ein, dass die Rendite des Wertpapiers der von den Anlegern unter Beachtung des Risikos erwarteten Rendite entspricht. Die erwartete Rendite verschiedener Wertpapiere unter dem W-Maß $P$ unterscheidet sich also entsprechend dem Risiko.[85]

---

[84] Diese Aussage ergibt sich auch aus einer Eigenschaft (Erwartungstreue, „totaler Erwartungswert") der bedingten Erwartung $E_Q^{\mathcal{C}}(X)$ einer $Q$-integrierbaren $\mathcal{A}$-messbaren Funktion $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ unter der Hypothese $\mathcal{C}$ ($\mathcal{A}$ $\sigma$-Algebra in $\Omega$, $\mathcal{C}$ Unter-$\sigma$-Algebra von $\mathcal{A}$, $Q$ W-Maß auf $\mathcal{A}$), nämlich dass der $Q$-Erwartungswert der bedingten Erwartung mit dem $Q$-Erwartungswert der Funktion $Q$-fast sicher übereinstimmt: $E_Q(\,E_Q^{\mathcal{C}}(X)\,) = E_Q(X)$ $Q$-f.s. (siehe Bauer (2002) WT, S. 120, Deck (2006), S. 121, Kremer (2011), S. 378, 447, (2017), S. 202, Bäuerle u. Rieder (2017), S. 179).

[85] Betrachtungen zum Zusammenhang zwischen Risiko und Rendite und zur risikoneutralen Bewertung findet man beispielsweise bei Hull (2012), S. 165, 330, 396, 538f.

In dem hier verwendeten Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ mit den Eigenschaften (AF) und (FH), das auf die Preisprozesse $S^j$ einer Auswahl von Wertpapieren aufbaut, kann mit Hilfe der Abbildungen $V_0$ und $L$, des Unterraums $\mathcal{M} = L(\ker V_0)$ und des normierten Diskontierungsprozesses $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1+}$ jedoch ein im Modell entwickeltes theoretisches (formales, synthetisches) W-Maß $Q = Q_T = \Phi_T/d_T$, das sog. Preismaß, angegeben werden, bezüglich dem die erwartete Rendite *aller* im Modell verwendeten dividendenlosen Wertpapiere $S^j$ in jedem Intervall $[s,s+1]$ gleich einem im Modell errechneten risikolosen (deterministischen) Zinssatz $r_{s+1}$ ist. Die Bewertung der dividendenlosen Wertpapiere $S^j$ des Marktmodells erfolgt unter dem Preismaß $Q$ also risikoneutral. Wie in Abschnitt 4.5 noch begründet wird, erfolgt die Bewertung aller duplizierbaren Zahlungsprofile $X = (X_t)_{t\in I}$ durch die Summe der mit den risikolosen (deterministischen) Diskontierungsfaktoren $d_t$ diskontierten $Q$-Erwartungswerte der Zustandsfunktionen $X_t$ bezüglich des sog. risikoneutralen W-Maßes bzw. sog. Martingalmaßes $Q$. Diese sogenannte **risikoneutrale Bewertung** mit dem Preismaß $Q$ wurde bei der Untersuchung des zeitkontinuierlichen Black-Scholes-Merton-Modells von Cox und Ross im Jahr 1976 entdeckt.[86]

## 3.10 Folgerungen aus der Arbitragefreiheit und der Existenz eines Numéraires

Vorausgesetzt für das Marktmodell sei nun die Arbitragefreiheit (AF) und die Bedingung (NM), dass es ein dividendenloses *positives* Finanzinstrument $S^j$ gibt und o. B. d. A. der Index $j = 1$ sei:[87] [88]

(NM) **Existenz eines Numéraires**: Für das Finanzinstrument $S^1 = (S_t^1(\omega))_{t\in I,\omega\in\Omega}$ und den zugehörigen Dividendenprozess $\delta^1 = (\delta_t^1(\omega))_{t\in I,\omega\in\Omega}$ gelte

$$S^1 > 0,\ \delta^1 = 0 \text{ und } S^{\delta,1} = S^1 > 0.$$

Dieses Finanzinstrument $S^1 = B$ wird als der **Numéraire** (die Recheneinheit, Bezugsgröße, das Referenzwertpapier) für die Finanzinstrumente $S^j$ und die Dividendenprozesse $\delta^j$ ($j = 1,2,\ldots,N$) genommen, sodass deren Kurse in der Einheit des Numéraires folgendermaßen gegeben sind:

$$\tilde{S}_t^j = \frac{S_t^j}{S_t^1}, \qquad \tilde{\delta}_t^j = \frac{\delta_t^j}{S_t^1},$$

[86] Den geschichtlichen Hinweis zur risikoneutralen Bewertung gibt Trautmann (2007) auf S. 331.

[87] Im Gegensatz zur Voraussetzung (FF) eines positiven deterministischen Finanzinstruments $S^1$ in Abschnitt 3.9.2 kann hier bei der Voraussetzung (NM) der Numéraire $S^1 = B$ stochastisch sein, also von den $\omega \in \Omega$ abhängen.

[88] Abweichend davon wird in Abschnitt 5.1.7 für den Numéraire $S^N = B$ der Index $j = N$ gewählt, was den Vorteil hat, dass die Nummerierung der Nichtnuméraire-Wertpapiere $S^j$ von 1 bis $N$ - 1 läuft und diese Papiere einen Vektor $\bar{S}$ mit den Komponentenindizes 1 bis $N$ - 1 bilden.

$$\tilde{S}_t^{\delta,j} = \frac{S_t^{\delta,j}}{S_t^1} = \quad \tilde{S}_t^j + \tilde{\delta}_t^j \qquad (t = 0,\ldots,T).$$

Die mit den stochastischen Abzinsungsfaktoren $1/S_t^1$ des Numéraires $S^1$ auf den Zeitpunkt 0 abgezinsten Kurse $\tilde{S}_t^j$ werden als **relative**, modifizierte oder diskontierte **Wertpapierkurse** bezeichnet, die Dividenden $\tilde{\delta}_t^j$ entsprechend als relative, diskontierte oder modifizierte Dividenden. Speziell für den Numéraire $S^1$ selbst erhält man die relativen Dividenden $\tilde{\delta}_t^1 = 0$ und die konstanten relativen Kurse

$$\tilde{S}_t^{\delta,1} = \tilde{S}_t^1 = 1 \qquad (t = 0,\ldots,T).$$

Da mit der reellwertigen Zustandsfunktion $S_t^1$ (> 0) auch die als deren Kehrwert (reziproker Wert) gebildete Funktion $1/S_t^1$ $\mathcal{F}_t$-messbar[89] ist, sind auch die als Produkt von $1/S_t^1$ und $S_t$ bzw. $\delta_t$ gebildeten relativen Kurse $\tilde{S}_t = S_t/S_t^1$ und relativen Dividenden $\tilde{\delta}_t = \delta_t/S_t^1$ $\mathcal{F}_t$-messbar. Das zu einem Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ mit Numéraire gehörige und aus den relativen Kursen $\tilde{S}_t$ und relativen Dividenden $\tilde{\delta}_t$ gebildete Marktmodell $\left((\tilde{S},\tilde{\delta}),\mathcal{F}\right)$ heißt **relatives** (modifiziertes und auch diskontiertes) **Marktmodell**. Im relativen Marktmodell besteht wegen $\tilde{S}^1 = 1$ also stets die Möglichkeit der Kassenhaltung.

**Anmerkungen zu einem speziellen deterministischen Numéraire und zum Namen „diskontiertes Marktmodell“**

In der Praxis wird der Numéraire $S^1$ häufig als fest verzinsliches (deterministisches) Wertpapier gewählt (siehe auch Abschnitt 3.9.1 zur Sicherung der Bedingung (FH)). Im Marktmodell existiere also das Finanzinstrument $S^1$ ($\delta^1 = 0$) mit den deterministischen Zustandsfunktionen

(FF) $\qquad S_0^1 := a_0 := 1,\ S_t^1 := a_t := q_1 \cdot \ldots \cdot q_t$ für $t = 1,\ldots,T$,

mit den in den Zeitintervallen $[t\text{-}1,t]$ gültigen einperiodischen deterministischen Zinssätzen $r_t \in ]\text{-}1,\infty[$, Zinsfaktoren $q_t = 1 + r_t > 0$ und Diskontfaktoren $\rho_t = 1/q_t$ und den zu den Intervallen $[0,t]$ gehörigen $t$-periodischen deterministischen Aufzinsungsfaktoren

$$a_t = q_1 \cdot \ldots \cdot q_t = 1/(\rho_1 \cdot \ldots \cdot \rho_t)$$

und Diskontierungsfaktoren

$$d_t = 1/a_t = 1/(q_1 \cdot \ldots \cdot q_t) = \rho_1 \cdot \ldots \cdot \rho_t \quad (t = 1,\ldots,T).$$

In Abschnitt 3.9.1 wurde gezeigt, dass in diesem Fall für das Marktmodell die Bedingung (FH), also die Existenz von sog. festverzinslichen Handelsstrategien $\eta^t \in \mathcal{H}_N$, gesichert ist. In diesem Spezialfall ergeben sich die auf den Numéraire $S^1$ bezogenen Kurse bzw. Dividenden

$$\tilde{S}_t^1 = S_t^j/a_t = d_t S_t^j, \quad \tilde{\delta}_t^1 = \delta_t^j/a_t = d_t \delta_t^j$$

als die auf den Zeitpunkt $t = 0$ diskontierten Kurse bzw. Dividenden, sodass in diesem Spezialfall und dann salopp auch im allgemeinen Fall das Marktmodell

---

[89] Da die Zustandsfunktion $S_t^1$ $\mathcal{F}_t$-messbar und somit (bei endlichem oder abzählbarem $\Omega$ nach Abschnitt 2.3) auf jedem $A_t \in \mathcal{P}_t$ konstant ist, ist auch die Zustandsfunktion $1/S_t^1$ auf jedem $A_t \in \mathcal{P}_t$ konstant und damit $\mathcal{F}_t$-messbar. Bei überabzählbarem $\Omega$ kann man die Messbarkeit folgendermaßen begründen: Nach Bauer (1992) MI, S. 41, Beispiel 2 ist die auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetige Funktion $g(x) = 1/x$ Borel-messbar und dann nach S. 42, Satz 7.3 mit $f$ auch die zusammengesetzte Funktion $1/f = g \circ f$ messbar.

$((\tilde{S},\tilde{\delta}),\mathcal{F})$,

$\tilde{S} = (\tilde{S}^1,\ldots,\tilde{S}^N)$, $\tilde{\delta} = (\tilde{\delta}^1,\ldots,\tilde{\delta}^N)$, das aus den auf den Numéraire bezogenen Finanzinstrumenten $\tilde{S}^j$ gebildet wird, auch als ein (mit dem Numéraire $S^1$) diskontiertes Marktmodell bezeichnet wird.

### 3.10.1 Äquivalenz der Arbitragefreiheit bzw. Vollständigkeit im Mehrperiodenmodell zur Arbitragefreiheit bzw. Vollständigkeit im relativen Marktmodell

Der folgende Satz beschreibt den Zusammenhang zwischen ursprünglichem Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ und relativem Marktmodell $((\tilde{S},\tilde{\delta}),\mathcal{F})$ hinsichtlich der Arbitragefreiheit und der Vollständigkeit.[90]

**Satz 3.11 Äquivalenz der Arbitragefreiheit bzw. Vollständigkeit im Mehrperiodenmodell zur Arbitragefreiheit bzw. Vollständigkeit im relativen Marktmodell**

Das ursprüngliche Marktmodell enthalte ein Numéraire $S^1 = B$. Es gilt dann:

1) Das relative Marktmodell $((\tilde{S},\tilde{\delta}),\mathcal{F})$ ist genau dann arbitragefrei, wenn das ursprüngliche Mehrperiodenmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ arbitragefrei ist.

2) Das relative Marktmodell ist genau dann vollständig, wenn dies für das ursprüngliche Mehrperiodenmodell gilt.

**Beweis:** 1) Beweis der Aussage über die Arbitragefreiheit (AF) der beiden Marktmodelle: Für die analog zur Portfolioauszahlung $L_t(h)$ des Marktmodells $((S,\delta),\mathcal{F})$ jetzt auch für das relative Marktmodell $((\tilde{S},\tilde{\delta}),\mathcal{F})$ definierte Portfolioauszahlung $\tilde{L}_t(h)$ einer Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ gilt

$$\begin{aligned}\tilde{L}_t(h) &= \tilde{V}_t(h) - \tilde{R}_t(h) = \tilde{S}_t^{\delta}\cdot h_t - \tilde{S}_t \cdot h_{t+1}\\ &= (S_t^{\delta}\cdot h_t - S_t \cdot h_{t+1})/S_t^1\\ &= (V_t(h) - R_t(h))/S_t^1\\ &= L_t(h)/S_t^1.\end{aligned}$$

Demnach ist die Arbitragefreiheit des relativen Marktmodells $((\tilde{S},\tilde{\delta}),\mathcal{F})$, dass also kein $h \in \mathcal{H}_N$ existiert mit

$$\begin{aligned}&\tilde{V}_0(h)(\omega) = V_0(h)(\omega)/S_0^1 = 0 && \forall\ \omega \in \Omega,\\ &\tilde{L}_t(h)(\omega) = L_t(h)(\omega)/S_t^1(\omega) \geq 0 && \forall\ (t,\omega) \in I \times \Omega \text{ und}\\ &\tilde{L}_{t'}(h)(\omega') = L_{t'}(h)(\omega')/S_{t'}^1(\omega') > 0 && \text{für mindestens ein } (t',\omega') \in I \times \Omega,\end{aligned}$$

wegen $S^1 > 0$ gleichbedeutend dazu, dass es kein $h \in \mathcal{H}_N$ gibt mit $V_0(h)(\omega) = 0$ auf $\Omega$, $L_t(h)(\omega) \geq 0$ auf $I \times \Omega$ und $L_{t'}(h)(\omega') > 0$ für ein $(t',\omega') \in I \times \Omega$, also zur Arbitragefreiheit des ursprünglichen Markt-

---

90 Für diese beiden Aussagen gibt Kremer (2017) auf S. 174f (Satz 5.1) einen Beweis durch die Rückführung auf die enthaltenen Einperiodenmodelle. Hinsichtlich der Arbitragefreiheit gibt Kremer (2011) auf S. 64 (Satz 1.76) einen Beweis für das Einperiodenmodell und auf S. 213 (Satz 3.82) einen Beweis für das Mehrperiodenmodell durch die Rückführung auf die enthaltenen Einperiodenmodelle.

modells $((S,\delta),\mathcal{F})$.

2) Zum Beweis der Aussage über die Vollständigkeit der beiden Marktmodelle $((\tilde{S},\tilde{\delta}),\mathcal{F})$ und $((S,\delta),\mathcal{F})$ kann man die bijektive lineare Abbildung $f: \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$ verwenden, die jedem $X \in \mathcal{W}$ den mit dem fest gewählten Numéraire $S^1$ diskontierten Prozess $\tilde{X} \in \mathcal{W}$ zuordnet:

$$X = (X_0,\ldots,X_T)^\top \in \mathcal{W} \mapsto \tilde{X} = f(X) = (f_0(X_0),\ldots,f_T(X_T))^\top \in \mathcal{W} \text{ mit}$$
$$X_t \in \mathcal{W}_{t,1} \mapsto f_t(X_t) = X_t / S_t^1 \in \mathcal{W}_{t,1}.^{91}$$

Jede der dabei auftretenden Abbildungen $f_t: \mathcal{W}_{t,1} \longrightarrow \mathcal{W}_{t,1}$ ist nämlich linear und bijektiv und besitzt die bijektive lineare Umkehrabbildung $f_t^{-1}(Y_t) = Y_t \cdot S_t^1$. Damit ist die Umkehrabbildung $f^{-1}$ des Automorphismus (bijektiven Endomorphismus) $f$ von $\mathcal{W}$ gegeben durch die Zuordnungsvorschrift

$$f^{-1}(Y) = (f_0^{-1}(Y_0),\ldots,f_T^{-1}(Y_T))^\top = (Y_0 \cdot S_0^1,\ldots,Y_T \cdot S_T^1)^\top.$$

Mit dieser Hilfsabbildung $f$ erhält man die Beziehungen

$$\tilde{L}(h) = f(L(h)) \text{ und}$$
$$L(h) = f^{-1}(\tilde{L}(h)).$$

„⇐“: Falls nun das Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ vollständig und ein beliebiges $Y \in \mathcal{W}$ vorgegeben ist, gibt es zu $X := f^{-1}(Y) \in \mathcal{W} = L(\mathcal{H}_N)$ ein $h \in \mathcal{H}_N$ mit $X = L(h)$. Damit gilt auch

$$Y = f(X) = f(L(h)) = \tilde{L}(h),$$

womit die Vollständigkeit des relativen Marktmodells $((\tilde{S},\tilde{\delta}),\mathcal{F})$ gezeigt ist.

„⇒“: Analog folgt bei vollständigem relativen Marktmodell $((\tilde{S},\tilde{\delta}),\mathcal{F})$ und beliebig vorgegebenem $X \in \mathcal{W}$ mit $Y := f(X) \in \mathcal{W} = \tilde{L}(\mathcal{H}_N)$ aus der Darstellung $Y = \tilde{L}(h)$, $h \in \mathcal{H}_N$, dann auch die Darstellung

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(\tilde{L}(h)) = L(h),$$

also die Vollständigkeit des Marktmodells $((S,\delta),\mathcal{F})$.

Eine kürzere Begründung der Aussage zur Vollständigkeit der Marktmodelle erfolgt mit dem Dimensionssatz für eine lineare Abbildung, nach dem der Automorphismus $f$ dimensionserhaltend ist und daher $\dim \tilde{L}(\mathcal{H}_N) = \dim f(L(\mathcal{H}_N)) = \dim L(\mathcal{H}_N)$ gilt. Demzufolge stimmt der Unterraum $\tilde{L}(\mathcal{H}_N)$ von $\mathcal{W}$ genau dann mit $\mathcal{W}$ überein ($\dim \tilde{L}(\mathcal{H}_N) = \dim \mathcal{W}$), wenn dies für den Unterraum $L(\mathcal{H}_N)$ gilt ($\dim L(\mathcal{H}_N) = \dim \mathcal{W}$). □

### 3.10.2 Folgerungen aus der Existenz des konstanten Finanzinstruments im relativen Marktmodell

Da im relativen Marktmodell stets das spezielle auf $I \times \Omega$ konstante Finanzinstrument

$$\tilde{S}^1 = \tilde{B} = 1$$

mit dem für alle Zeitpunkte $t \in \{0,1,\ldots,T\}$ konstanten $t$-periodischen Aufzinsungsfaktor

$$\tilde{S}_t^1 = \tilde{a}_t = \tilde{a} = 1$$

---

[91] Da die Zustandsfunktion $S_t^1$ $\mathcal{F}_t$-messbar und somit bei endlichem oder abzählbarem $\Omega$ (nach Abschnitt 2.3) auf jedem $A_t \in \mathcal{P}_t$ konstant ist, ist auch die Zustandsfunktion $1/S_t^1$ auf jedem $A_t \in \mathcal{P}_t$ konstant und damit $\mathcal{F}_t$-messbar. Analog begründet man die $\mathcal{F}_t$-Messbarkeit des Produkts der $\mathcal{F}_t$-messbaren Funktionen $X_t$ und $1/S_t^1$. Damit ist für $X \in \mathcal{W}$ das $f$-Bild $f(X)$ $\mathcal{F}$-adaptiert und $f(X) \in \mathcal{W}$.

auftritt, also die Bedingung (FF) erfüllt ist, ist nach Abschnitt 3.9.1 bei vorausgesetzter Arbitragefreiheit (AF) auch die Voraussetzung (FH), d. h. die Existenz von festverzinslichen Handelsstrategien, gesichert. Demnach existiert nach Abschnitt 3.9.3 auch stets ein Preismaß $\tilde{Q} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ im relativen Marktmodell.

In Abschnitt 3.9.1 wurde in dem an die Definition der Bedingung (FF) anschließenden Beweis begründet, dass die aus dem festverzinslichen Finanzinstrument $S^1$ errechneten einperiodischen Diskontfaktoren $\rho_t \in ]0,\infty[$ und $t$-periodischen Diskontierungsfaktoren $d_t = \rho_1 \cdot \ldots \cdot \rho_t$ genau die sind, die sich bei gültiger Arbitragefreiheit (AF) aus der Bedingung (FH) gemäß den Abschnitten 3.9.1 und 3.9.2 im Marktmodell ergeben. Daher erhält man hier die zum relativen Marktmodell gehörigen $t$-periodischen deterministischen Diskontierungsfaktoren

$$\tilde{d}_t = 1/\tilde{a}_t = 1/\tilde{S}^1_t = 1 \qquad (t \in \{0,1,\ldots,T\}).$$

Die zugehörigen einperiodischen deterministischen Diskontfaktoren sind gegeben durch

$$\tilde{\rho}_t = \tilde{d}_t / \tilde{d}_{t-1} = 1,$$

die einperiodischen deterministischen Zinsfaktoren durch

$$\tilde{q}_t = 1/\tilde{\rho}_t = 1$$

und die einperiodischen deterministischen Zinssätze durch

$$\tilde{r}_t = \tilde{q}_t - 1 = \tilde{r} = 0 \qquad (t \in \{1,\ldots,T\}).$$

Weitere Folgerungen aus der Existenz des konstanten Numéraires $\tilde{S}^1 = 1$ im relativen Marktmodell werden in Abschnitt 5.1.7 hergeleitet und dabei insbesondere ein wichtiger Vorteil des spezieller definierten relativen Marktmodells gegenüber dem ursprünglichen Marktmodell bei der Behandlung von sog. selbstfinanzierenden Handelsstrategien aufgezeigt: Im relativen Marktmodell mit seinem konstanten Numéraire $\tilde{S}^1 = \tilde{B} = 1$ ist der kumulierte Gewinn $\tilde{K}_t(h)$ unabhängig vom Numéraireanteil der sog. selbstfinanzierenden Handelsstrategie $h$. Außerdem kann bei beliebiger Vorgabe des relativen Startkapitaleinsatzes $\tilde{v}_0 \in \mathbb{R}$ und des Nichtnuméraireanteils $\bar{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$ der Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ mit passender Festlegung des Numéraireanteils eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ bestimmt werden (Satz 5.2).

### 3.10.3 Relative Preisprozesse der dividendenlosen Finanzinstrumente als Martingale bezüglich des Preismaßes $Q$

Unter der Voraussetzung der Arbitragefreiheit (AF) des ursprünglichen Marktmodells mit Numéraire bzw. der Arbitragefreiheit des relativen Marktmodells existiert dann in letzterem nach Abschnitt 3.6.1 ein normierter Diskontierungsprozess

$$\tilde{\Phi} \in \tilde{\mathcal{M}}^{\perp 1+} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}^+,$$

$\tilde{\mathcal{M}} = \tilde{L}(\ker \tilde{V}_0) = \tilde{L}(\ker V_0)$, und nach Abschnitt 3.9.3 ein für die $\sigma$-Algebren $\mathcal{F}_t$ $(t \in I)$ einheitliches Preismaß

$$\tilde{Q} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1],$$

$\tilde{Q} = \tilde{Q}_t = \tilde{\Phi}_t / \tilde{d}_t = \tilde{\Phi}_t$ auf $\mathcal{F}_t$, mit dem sich nach Abschnitt 4.5 der Preis $\pi(X)$ eines Zahlungsprofils $X \in \tilde{L}(\mathcal{H}_N)$ als Summe der $\tilde{Q}$-Erwartungswerte der Zustandsfunktionen $X_t$ ergibt:

$$\pi(X) = \sum_{t=0}^{T} \tilde{d}_t \cdot E_{\tilde{Q}}(X_t) = \sum_{t=0}^{T} E_{\tilde{Q}}(X_t) .$$

Weiter gilt wegen $\tilde{d}_t = 1$, $\tilde{d}_t \tilde{S}_t^j = \tilde{S}_t^j$, $\tilde{d}_t \tilde{\delta}_t^j = \tilde{\delta}_t^j$ ($t \in I$) für die mit dem Numéraire $S^1$ diskontierten Preisprozesse $(\tilde{S}_t^j)_{t \in I}$ des relativen Marktmodells die oben in Abschnitt 3.9.4 bewiesene Darstellung[92]

$$\tilde{S}_s^j = E_{\tilde{Q}}^{\mathcal{F}_s}(\tilde{S}_t^j) + \sum_{i=s+1}^{t} E_{\tilde{Q}}^{\mathcal{F}_s}(\tilde{\delta}_i^j) \qquad \text{für } s \le t.$$

Speziell für die **dividendenlosen Preisprozesse** $S^j$ ($\delta^j = 0$, $\tilde{\delta}^j = 0$) ist der jeweils zugehörige mit dem Numéraire $S^1$ diskontierte Preisprozess $(\tilde{S}_t^j)_{t \in I}$ des relativen Marktmodells selbst ein Martingal bezüglich des Preismaßes $\tilde{Q}$ und der Filtration $\mathcal{F}$:

$$\tilde{S}_s^j = E_{\tilde{Q}}^{\mathcal{F}_s}(\tilde{S}_t^j) \qquad \text{für } s \le t.$$

Insbesondere für $s = 0$ erhält man hier, dass

$$\tilde{S}_0^j = E_{\tilde{Q}}^{\mathcal{F}_0}(\tilde{S}_t^j) = E_{\tilde{Q}}(\tilde{S}_t^j)$$

gilt, also der Erwartungswert der Preis-Zustandsfunktion $\tilde{S}_t^j$ ($t \in I$) des Finanzinstruments $\tilde{S}^j$ mit dessem Preis $\tilde{S}_0^j$ zum Zeitpunkt $s = 0$ übereinstimmt. Im arbitragefreien relativen Marktmodell entwickeln sich also die dividendenlosen relativen Preisprozesse $(\tilde{S}_t^j)_{t \in I}$ gemäß dem (formalen) Preismaß $\tilde{Q}$ wie das Kapital eines Spielers in einem fairen Spiel.[93] Das zum relativen Marktmodell $((\tilde{S}, \tilde{\delta}), \mathcal{F})$ gehörige Preismaß $\tilde{Q}$ wird auch **Martingalmaß** (bezüglich des dividendenlosen relativen Preisprozesses $\tilde{S}$) genannt.

Aufgrund der zu Beginn von Kapitel 2 für das Marktmodell vorausgesetzten Positivität der Eintrittswahrscheinlichkeiten $P(\{\omega\})$ aller Zustände $\omega \in \Omega$ und da auch das Preismaß $\tilde{Q}$ auf den Elementarereignissen $\{\omega\}$ positiv ist, besitzen die W-Maße $P$ und $\tilde{Q}$ die gleichen Nullmengen (nämlich nur die leere Menge $\emptyset$) und werden somit als äquivalent bezeichnet. Das Preismaß $\tilde{Q}$ wird daher auch ein (zu $P$) **äquivalentes Martingalmaß** (bezüglich des dividendenlosen relativen Preisprozesses $\tilde{S}$) genannt.

---

92 Die Formel für die mit einem Numéraire $S^1$ diskontierten Preis-Zustandsfunktionen und diskontierten Dividenden-Zustandsfunktionen bringt Kremer (2011) auf S. 217 in Folgerung 3.88 (speziell für $t = T$). Die Martingaleigenschaft der mit dem Numéraire diskontierten dividendenlosen Preisprozesse $(\tilde{S}_t^j)_{t \in I}$ findet man bei Kremer (2011), S. 217, und (2017), 176.

93 Diese Deutung der Preisentwicklung der dividendenlosen relativen Preisprozesse in einem arbitragefreien Markt als faires Spiel bezüglich dem formalen W-Maß findet man bei Kallsen (2009), S. 38.

**Charakterisierung der spezielleren Arbitragefreiheit** (Afsf) **durch die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes**
Im Abschnitt 5.1.11 wird mit Satz 5.5, b) bei einem Marktmodell mit dividendenlosen Preisprozessen $S^j$ ($\delta^j = 0$ für alle $j \in J$) und einem Numéraire $B > 0$ für das zugehörige relative Marktmodell die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes schon unter der schwächeren Voraussetzung der spezielleren Arbitragefreiheit (AFsf) bewiesen, bei der nur die endfälligen Arbitragegelegenheiten, die mit sog. selbstfinanzierenden Handelsstrategien dupliziert werden, ausgeschlossen werden.
Außerdem wird dort gezeigt, dass umgekehrt die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes im relativen Marktmodell auch hinreichend ist für die speziellere Arbitragefreiheit (AFsf) im Endzeitpunkt $T$. Darüber hinaus wird in den Abschnitten 5.1.11 und 5.1.12 diese speziellere Arbitragefreiheit auch im dividendenversehenen Marktmodell durch die Existenz eines relativen Diskontvektors im relativen Marktmodell oder eines positiven $\mathcal{M}_T$-Normalenvektors im ursprünglichen Marktmodell charakterisiert. Die Berechnung eines Diskontvektors im ursprünglichen oder relativen Marktmodell oder eines äquivalenten Martingalmaßes mit einem rekursiven linearen Berechnungsschema wird in Abschnitt 5.3.13 behandelt.

**Einen alternativen Nachweis** eines äquivalenten Martingalmaßes und eines Diskontierungsprozesses mittels der **diskreten stochastischen Analysis** anstelle der linearalgebraischen Methode wird bei Kremer[94] dargestellt, wo neben der allgemeinen Arbitragefreiheit noch etliche zusätzliche Voraussetzungen verwendet werden (Marktmodell ist ohne Dividenden, mit einem festverzinslichen Finanzinstrument $B > 0$ ausgestattet und vollständig, das W-Maß $P$ für die Eintrittswahrscheinlichkeiten der Kursentwicklungen besitzt keine nichttrivialen Nullmengen, Aufspaltungsindex $\nu = N$). Dabei kommen u. a. folgende Begriffe und Sätze zur Anwendung: Skalarprodukt $[X_t,Y_t]_P = E_P(X_t \cdot Y_t)$ zweier $\mathcal{F}_t$-messbarer Zustandsfunktionen $X_t$ und $Y_t$ als $P$-Erwartungswert des Produkts $X_t \cdot Y_t$ (bei $P(\{\omega\}) > 0$ $\forall\, \omega \in \Omega$), das von einer $\mathcal{F}_T$-messbaren Zustandsfunktion $Y_T$ erzeugte Martingal $X_t = E_P(Y_T | \mathcal{F}_t)$ bezüglich dem W-Maß $P$ und der Filtration $\mathcal{F}$, Doob-Zerlegung[95] $X = A + M$ ($A_0 = a$) eines adaptierten stochastischen Prozesses $X$ zu vorgegebenem $a \in \mathbb{R}$ in einen vorhersehbaren Prozess $A$ (Kompensator) und ein Martingal $M$ (Innovation), Kovariations-Prozess $[X,Y]$ zweier stochastischer Prozesse $X$ und $Y$, vorhersehbarer Kovariations-Prozess $\langle X,Y\rangle^P$ zweier adaptierter stochastischer Prozesse $X$ und $Y$ unter Verwendung der bedingten Erwartung $E_P(\Delta X_s \Delta Y_s | \mathcal{F}_{s-1})$ bezüglich der Filtration $\mathcal{F}$ und des W-Maßes $P$, diskretes stochastisches Integral (Itô-Integral[96]) $(Y \bullet X)_t := \int_0^t Y\, dX$ von $Y$ (Integrand) bezüglich (nach) $X$ (Integrator) über dem Intervall $[0,t]$ für zwei adaptierte stochastische Prozesse $Y$ und $X$, stochastisches Exponential $X_t = \mathcal{E}_t(W)$ eines stochastischen Prozesses $W$, Martingal-Darstellungssatz, bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $\mathcal{L}_t = E_P(\frac{Q}{P} | \mathcal{F}_t) = E_P^{\tau}(\frac{Q}{P})$ zweier äquivalenter W-Maße $P$ und $Q$ mit $P(\{\omega\})$, $Q(\{\omega\}) > 0$ $\forall\, \omega \in \Omega$ als das von $Q/P$ erzeugte $P$-Martingal,

---

94 Die Behandlung der Martingalmaße und Diskontierungsprozesse mittels diskreter stochastischer Analysis findet man bei Kremer (2017), S. 184–186.

95 Die Doob-Zerlegung ist benannt nach dem US-amerikanischen Mathematiker J. L. Doob (1910–2004).

96 Das Itô-Integral ist benannt nach dem japanischen Mathematiker Itô Kiyoshi (1915–2008).

Satz von Girsanov[97] mit der Existenz eines zu $P$ äquivalenten W-Maßes $Q$, für welches zu vorgegebenem $P$-Martingal $X$ und vorgegebenem vorhersehbaren Prozess $\theta$ der Prozess $Y_t = X_t + \int_0^t \theta \, ds$ ein $Q$-Martingal ist. Auf diesem Weg wird auch eine Brücke geschlagen von der zeitdiskreten zur zeitstetigen Finanzmathematik.

[97] Der Satz von Girsanov ist benannt nach dem russischen Mathematiker I. V. Girsanov (1934–1967).

# 4 Interpretationen der Bewertung nach dem Duplikationsprinzip

Für die in Abschnitt 3.3 durchgeführte Preisfindung bzw. Bewertung von Zahlungsprofilen nach dem Duplikationsprinzip werden jetzt noch verschiedene Interpretationen angegeben. In einem Marktmodell mit gültigem LOP (Law of One Price) kann die Bewertung auch als Abstandsmessung und als Beurteilung nach dem Duplizierungskonzept mit der Beurteilungskurve der Sofortentnahme und einem Supplement (Ergänzungsgeschäft) vom Kapitalmarkt gedeutet werden. Im arbitragefreien und vollständigen Marktmodell kann die Bewertung außerdem als verallgemeinerte Barwertberechnung mit im Marktmodell existierenden stochastischen Diskontierungsfaktoren beschrieben werden. Weiter kann im arbitragefreien Marktmodell mit der Voraussetzung der Duplizierbarkeit der deterministischen Arrow-Debreu-Papiere die Bewertung als verallgemeinerte Barwert-Bewertung angesehen werden, wobei der Preis als die Summe der mit den risikolosen Diskontierungsfaktoren $d_t$ abgezinsten Erwartungswerte der Zahlungen $X_t$ bezüglich der formalen W-Maße $Q_t$ angegeben wird. Unter der zusätzlichen Voraussetzung der Existenz von festverzinslichen Handelsstrategien oder insbesondere bei Existenz eines festverzinslichen Finanzinstruments kann der Preis auch als der mit den risikolosen Diskontierungsfaktoren $d_t$ gebildete Barwert der Erwartungswerte der Zahlungen $X_t$ bezüglich eines für alle $t \in I$ einheitlichen Preismaßes $Q$, eines innerhalb des Marktmodells gebildeten formalen (synthetischen) Wahrscheinlichkeitsmaßes $Q$ auf $\mathcal{P}(\Omega)$, interpretiert werden. Weiter ist unter dieser zusätzlichen Voraussetzung, wie in Abschnitt 3.9.4 gezeigt wird, für alle dividendenlosen Finanzinstrumente $S^j$ des Marktmodells der diskontierte Preisprozess $(d_t S_t^j)_{t\in I}$ ein Martingal bezüglich dieses Preismaßes $Q$. Schließlich kann nach Abschnitt 3.10.3 in dem mit einem Numéraire $B$ diskontierten arbitragefreien Marktmodell die Entwicklung der dividendenlosen relativen Preisprozesse $\tilde{S}^j = S^j/B$ selbst bezüglich dem formalen W-Maß $\tilde{Q}$ als Martingal beschrieben werden und somit als faires Spiel gedeutet werden.

## 4.1 Bewertung als Abstandsmessung

Für das Marktmodell sei das Law of One Price (LOP) vorausgesetzt und $\vartheta$ der nach Abschnitt 3.3.3 eindeutig bestimmte Bewertungsprozess in $L(\mathcal{H}_N)$ ($\vartheta \in L(\mathcal{H}_N) \cap \mathcal{M}^\perp$ mit $\vartheta_0 = 1$). Mit dem orientierten **Abstand**

$$d'(X) := \pi(X)/\|\vartheta\| = \vartheta^\top X/\|\vartheta\|$$

($\|\vartheta\| = (\vartheta^\top\vartheta)^{1/2}$, $\vartheta^\top\vartheta = \sum_{t=0}^{T}\sum_{k=1}^{k_t}\vartheta_t(A_{t,k})^2$ ) eines Punktes $X \in L(\mathcal{H}_N)$ von der Hyperebene

$$\mathcal{M} = L(\mathcal{H}_N) \cap \{\vartheta\}^\perp = \{Z \in L(\mathcal{H}_N) : \pi(Z) = \vartheta^\top Z = 0\}$$

in $L(\mathcal{H}_N)$ erhält man neben der Preisfunktion $\pi = \langle\vartheta,.\rangle_{\mathcal{W}} = \vartheta^\top$ eine weitere Linearform $d' = \vartheta^\top/\|\vartheta\|$ auf $\mathcal{W}$, die sich von $\pi$ nur durch den positiven konstanten Faktor $1/\|\vartheta\|$ unter-

scheidet. Die beiden Linearformen $d'$ und $\pi$ liefern demnach als Nutzenfunktionen die gleiche Präferenzordnung[1] auf $L(\mathcal{H}_N)$.

Speziell im deterministischen Fall mit den auf $\Omega$ konstanten Zustandsfunktionen $X_t = X_t(\Omega)$ und $\vartheta_t = \vartheta_t(\Omega)$ $(t \in I)$ berechnet sich der Abstand

$$d'(X) = \vartheta^{\mathsf{T}} X / \left\| \vartheta \right\| = \sum_{t=0}^{T} X_t \vartheta_t \, / \left\| \vartheta \right\|$$

mit dem deterministischen Bewertungsvektor $\vartheta = (\vartheta_0,\ldots,\vartheta_T)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{T+1}$ und seiner Norm $\left\| \vartheta \right\| = (\vartheta_0^{\,2} + \ldots + \vartheta_T^{\,2})^{1/2}$. Daher kann die Bewertung und der Vergleich der Zahlungsprofile $X$ in $L(\mathcal{H}_N)$ nach dem Duplikationsprinzip (mit dem Startkapitaleinsatz von Duplikationsstrategien als Maßstab) wie bei deterministischen Zahlungsströmen auch als Abstandsmessung von der Hyperebene $\mathcal{M}$ der Kapitalmarktgeschäfte interpretiert werden. Damit hat man eine erste Brücke von der Bewertung deterministischer zeitdiskreter Zahlungsströme zur Bewertung stochastischer zeitdiskreter Zahlungsströme. Eine entsprechende Interpretation der Bewertung als Abstandsmessung für die zum Zeitpunkt $t = T$ endfälligen Zahlungsprofile $X_T \in \mathbb{R}^{\Omega}$ erfolgt in Abschnitt 5.3.9.

Eine grafische Darstellung der Abstandsmessung für $X \in L(\mathcal{H}_N)$ zur Hyperebene $\mathcal{M}$ in $L(\mathcal{H}_N)$ mit dem Bewertungsprozess $\vartheta \in L(\mathcal{H}_N)$ wird in Abbildung 4.1 für den deterministischen Fall und $T = 1$ gegeben. Es wird für das Zahlungsprofil $X \in L(\mathcal{H}_N)$ der Abstand $d'(X)$ von der Hyperebene $\mathcal{M}$ in $L(\mathcal{H}_N)$ und die zugehörige eindeutige orthogonale additive Zerlegung

$$X = W + Y$$

mit $W = d'(X)\vartheta / \left\| \vartheta \right\| \in \operatorname{lin} \vartheta$, $Y \in \mathcal{M}$ und $W \perp Y$ dargestellt.
Weiter wird in der Abbildung 4.1 auch schon die erst im nächsten Abschnitt 4.2 behandelte Duplizierung von $X$ mit der eindeutigen additiven Zerlegung

$$X = V + C(X),$$

$V = \overline{V}(\mu(X)) = \pi(X)\mathbf{1}_{0,\Omega} \in \mathcal{V} = \operatorname{lin} \mathbf{1}_{0,\Omega}$, $C(X) \in \mathcal{M}$, innerhalb $L(\mathcal{H}_N)$ angegeben, bei welcher der Beurteilungskurvenpunkt $V$ den gleichen Preis und den gleichen Hyperebenenabstand wie $X$ besitzt.

[1] Eine Anmerkung zur Vielfalt der Präferenzordnungen zu Nutzenfunktionen findet man bei Pleier (2021) zu Beginn des Kapitels 6: Zwei Nutzenfunktionen beschreiben genau dann die gleiche Präferenzordnung, wenn es eine streng monoton steigende Transformation gibt, sodass die eine Nutzenfunktion die Komposition der anderen Nutzenfunktion und der Transformation ist.

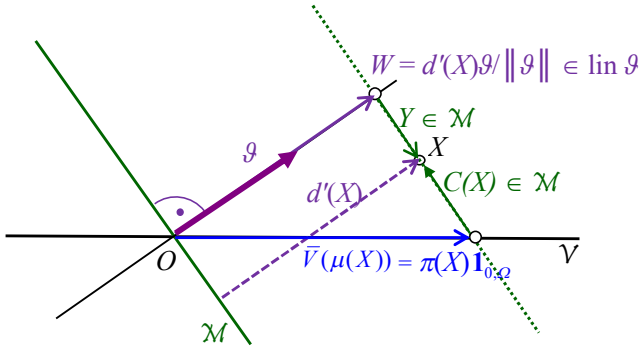



**Abb. 4.1** Die Bewertung des Zahlungsprofils $X \in L(\mathcal{H}_N)$ durch den orientierten Abstand $d'(X)$ von der Hyperebene $\mathcal{M}$ bzw. durch den Beurteilungskurvenpunkt $\pi(X)\mathbf{1}_{0,\Omega}$

## 4.2 Bewertung nach dem Duplizierungskonzept mit einem Supplement vom Kapitalmarkt und der Beurteilungskurve der Sofortentnahme

Für das Marktmodell sei das Law of One Price (LOP) vorausgesetzt und $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1} \subseteq \mathcal{A}$ ein normierter Bewertungsprozess ($\Psi_0 = 1$; Existenz nach Abschnitt 3.3.3) für die $X \in L(\mathcal{H}_N)$. In Abschnitt 2.8.2 wurde die Abbildung $L$ additiv zerlegt in die linearen Abbildungen $\breve{V}$ und $\breve{L}$ und für den als $L$-Bild von $\ker \breve{V}$ definierten Unterraum $\mathcal{M} := L(\ker \breve{V})$ von $L(\mathcal{H}_N)$ auch die Beziehung $\mathcal{M} = \breve{L}(\mathcal{H}_N)$ bewiesen. Weiter konnte unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$ die Übereinstimmung $\mathcal{V} := \breve{V}(\mathcal{H}_N) = \lim\{\mathbf{1}_{0,\Omega}\} = \mathcal{E}$ gezeigt werden und der Bildraum $L(\mathcal{H}_N)$ von $L$ als direkte Summe seiner Unterräume $\mathcal{V}$ und $\mathcal{M}$ dargestellt werden:

$$L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{M}.$$

Für jedes duplizierbare Zahlungsprofil $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ erhält man daher mit dem nach dem Duplikationsprinzip eindeutig bestimmten Preis

$$\mu := \mu(X) := \pi(X) = \langle \Psi, X \rangle_{\mathcal{W}} = V_0(h)$$

nach den Umformungen in Abschnitt 3.7.2

$$\begin{aligned} X &= L(h) = \breve{V}(h) + \breve{L}(h) \\ &= V_0(h)\,\mathbf{1}_{0,\Omega} + C(h) \\ &= \pi(X)\mathbf{1}_{0,\Omega} + C(h) \end{aligned}$$

mit $\breve{V}(h) \in \mathcal{V}$ und $\breve{L}(h) = C(h) \in \mathcal{M}$ die Duplizierung (Nachbildung, additive Zerlegung)

$$X = \bar{V}(\mu(X)) + C(h)(X) \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{M}$$

mit der speziellen stochastischen (hier deterministischen) Beurteilungskurve $\bar{V}(\mu) = \mu \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} = \mu \cdot (1,0,\ldots,0)^{\mathsf{T}}$ der Sofortentnahme,

$$\bar{V}_0(\mu,\omega) = \mu \quad \text{für } t = 0,$$
$$\bar{V}_t(\mu,\omega) = 0 \quad \text{für } t = 1,\ldots,T,\ \omega \in \Omega,\ \mu \in \mathbb{R},$$

und dem indifferenten Supplement (Ergänzungsgeschäft) $C(h)(X)$ vom Kapitalmarkt $\mathcal{M} = \check{L}(\mathcal{H}_N)$ des Marktmodells ($\pi(C(h)(X)) = 0$).

Zunächst sind das Duplikationsprinzip und das Duplizierungskonzept als verschiedene Methoden zur Bewertung eines Zahlungsstroms $X \in L(\mathcal{H}_N)$ definiert: Bei der ersten Methode wird eine Handelsstrategie $h$ für das Portfolio derart bestimmt, dass zu den Zeitpunkten $t = 0,\ldots,T$ und den Ereignissen $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$ ($k = 1,\ldots,k_t$) der (Aus-)Zahlungswert $L_t(h)$ gleich der Zahlungsstromkomponente $X_t$ ist. Dabei ergibt sich zum Zeitindex $t = 0$ der Startkapitaleinsatz $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0$ als Bewertungsmaßstab (Preis) und zu den Zeitindizes $t = 1,\ldots,T$ jeweils der Vermögenswert $V_{t-1}(h) = S_{t-1}^{\delta} \cdot h_{t-1}$, der (Aus-)Zahlungswert $L_{t-1}(h)$, der Reinvestitionswert $R_{t-1}(h) = V_{t-1}(h) - L_{t-1}(h) = S_{t-1} \cdot h_t$ und der daraus im Zeitintervall $[t\text{-}1,t]$ sich rein zufallsabhängig entwickelnde Vermögenswert $V_t(h) = S_t^{\delta} \cdot h_t$. Speziell zum Zeitpunkt $t = T$ erhält man wegen $h_{T+1} = 0$ die Werte $R_T(h) = 0$ und $X_T = L_T(h) = V_T(h) = S_T^{\delta} \cdot h_T$. In Abschnitt 3.2 wird dargestellt, wie zu vorgegebenem Zahlungsprofil $X \in L(\mathcal{H}_N)$ eine Duplikationsstrategie $h$ und der Startkapitaleinsatz $V_0(h)$ durch die Lösung eines gestaffelten linearen Gleichungssystems bestimmt werden kann.
Bei der zweiten Methode mit der Beurteilungskurve der Sofortentnahme wird der Zahlungsstrom $X$ additiv zerlegt in einen Vektor $\bar{V}(\mu(X)) = \mu(X) \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} \in \mathcal{V}$ auf der Beurteilungskurve $\bar{V}(\mu)$ und ein Kapitalmarktgeschäft $C(X) \in \mathcal{M}$ und dann die 0-te Komponente $\mu(X)$ von $\bar{V}(\mu(X))$ als Bewertungsmaßstab für $X$ verwendet. Eine Begründung für die Existenz und Einzigkeit einer derartigen additiven Zerlegung von $X \in L(\mathcal{H}_N)$ ergibt sich bei gültigem LOP nach Satz 3.3, 20) von Abschnitt 3.4.1, da der Bildraum $L(\mathcal{H}_N)$ von $L$ die direkte Summe seiner Unterräume $\mathcal{V}$ und $\mathcal{M}$ ist. Diese eindeutige additive Zerlegung des Zahlungsprofils $X \in L(\mathcal{H}_N)$ in den Beurteilungskurvenpunkt $\bar{V}(\mu(X)) \in \mathcal{V}$ und das Supplement $C(X)$ vom Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ ist in obiger Abbildung 4.1 dargestellt.

Bei vorausgesetztem LOP ist der Beurteilungsparameter $\mu = \mu(X)$ gleich dem eindeutig bestimmten Preis $\pi(X)$ von $X$ bzw. gleich dem Vermögenswert $V_0(h)$, der bei einer Handelsstrategie $h$ zum Zeitpunkt $t = 0$- als Startkapital in das Portfolio zur Duplikation des Zahlungsprofils $X$ investiert werden muss. Dieser Beurteilungsparameter $\mu(X)$ kann mit einem Bewertungsprozess $\Psi$ auch ohne das Supplement $C(h)(X)$ eindeutig bestimmt werden: $\mu = \mu(X) = \langle \Psi, X \rangle_{\mathcal{W}} = \Psi^{\mathsf{T}} X$.
Aufgrund der gleichen resultierenden Nutzenfunktion $\mu(X) = \pi(X)$ liefern das Duplizierungskonzept und das Duplikationsprinzip die gleiche Präferenzordnung auf der Menge $L(\mathcal{H}_N)$ der duplizierbaren Zahlungsprofile. Bei den gemäß der Bedingung (DP) mit Handelsstrategien duplizierbaren stochastischen Zahlungsströmen kommt unter der Voraussetzung (LOP) also auch das Bewertungskonzept der Duplizierung mit Kapitalmarktgeschäften und

einer speziellen Beurteilungskurve wie bei den deterministischen Zahlungsströmen zur Anwendung.[2] Die Bewertung nach dem Konzept der Duplizierung liefert also eine zweite Brücke von der Bewertung deterministischer zeitdiskreter Zahlungsströme zur Bewertung stochastischer zeitdiskreter Zahlungsströme.
Eine entsprechende Interpretation der Bewertung der zum Zeitpunkt $t = T$ endfälligen Zahlungsprofile $X_T \in \mathbb{R}^{\Omega}$ als Duplizierung mit einer Beurteilungskurve in $\mathcal{V}_T$ und einem NE-Ergänzungsgeschäft in $\mathcal{M}_T$ wird in Abschnitt 5.3.9 gegeben.

**Duplizierung bei vollkommenem Kapitalmarkt mit beliebiger stochastischer Beurteilungskurve**
Analog zur Duplizierung der Zahlungsströme $X \in L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{V} + \mathcal{M}$ mit der speziellen Beurteilungskurve $W(\mu) = \bar{V}(\mu) = \mu \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega}$ der Sofortentnahme kann auch eine Duplizierung

$$X = W(\mu(X)) + C(X) \in L(\mathcal{H}_N)$$

mit einem indifferent (neutral, weder günstig noch ungünstig) beurteilten Kapitalmarktgeschäft

$$C(X) \in \mathcal{M}$$

und einer beliebig gewählten stochastischen Beurteilungskurve

$$W : \mu \in ]a,b[ \mapsto W(\mu) = (W_t(\mu,\omega))_{t\in I,\omega\in\Omega} \in L(\mathcal{H}_N),$$

$-\infty \le a < 0 < b \le +\infty$, zur Bewertung eines Zahlungsprofils

$$X \in \mathcal{D} := W(]a,b[) + \mathcal{M} \ (\subseteq L(\mathcal{H}_N))$$

verwendet werden. Die Beurteilungskurve (Bewertungskurve, Zielsetzungskurve, Präferenzkurve) präzisiert dabei im Sinne einer standardisierten Festlegung der Zeitpräferenz, wie der Entscheider in Abhängigkeit vom reellen Parameter $\mu \in ]a,b[$ die bei der Nachbildung durch ein Kapitalmarktgeschäft auftretende Marge (Spanne, Differenz) als Margenzahlungsstrom (Differenzzahlungsstrom) in Komponenten $W_t(\mu,A_{t,k})$) auf die Zeitpunkte $t \in I$ und Ereignisse $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$ aufteilen will.

Für die Parameterdarstellung der Beurteilungskurve wird gefordert, dass sie als Funktion des Beurteilungsparameters $\mu$ stetig bezüglich der euklidischen Norm von $\mathcal{W}$ und streng monoton steigend bezüglich der strengen Halbordnung $\succ$ von $\mathcal{W}$ ist. Die zu dieser sog. inhomogenen Beurteilungskurve $W(\mu)$ gehörige sog. homogene Beurteilungskurve

$$V(\mu) := W(\mu) - W(0)$$

ist dann ebenfalls stetig und streng monoton steigend und verläuft durch den Nullpunkt:

$$V(\mu) \prec 0 \text{ für } \mu < 0,\ V(0) = 0,\ V(\mu) \succ 0 \text{ für } \mu > 0.$$

Weiter wird verlangt, dass die Beurteilungskurve $W(\mu)$ an beiden Intervallgrenzen $a$ und $b$ des Definitionsbereichs unbeschränkt ist:

$$\left\| W(\mu) \right\| \longrightarrow +\infty \text{ bei } \mu \longrightarrow a,$$
$$\left\| W(\mu) \right\| \longrightarrow +\infty \text{ bei } \mu \longrightarrow b.$$

Diese Unbeschränktheit von $W(\mu)$ an den Intervallgrenzen $a$ und $b$ ist gleichbedeutend zur Existenz von Argumenten $(s,A_s) \in I \times \mathcal{P}_s$ und $(t,A_t) \in I \times \mathcal{P}_t$ mit

$$V_s(\mu,A_s) \longrightarrow -\infty \text{ bei } \mu \longrightarrow a \text{ und}$$
$$V_t(\mu,A_t) \longrightarrow +\infty \text{ bei } \mu \longrightarrow b$$

und somit zur Unbeschränktheit der mit einem (strikt) positiven Prozess $\Phi \in \mathcal{W}$ gebildeten streng monoton steigenden reellwertigen Funktion

$$\alpha(\mu) := \Phi^{\top} V(\mu) = \sum_{t=0}^{T} \sum_{k=1}^{k_t} \Phi_t\,(A_{t,k})^{\top} V_t\ (\mu, A_{t,k})$$

---

[2] Eine ausführliche Untersuchung der Konzepte Duplizierung (Nachbildung, additive Zerlegung) und Replizierung (Glattstellung, additive Ergänzung) mit einem Kapitalmarktgeschäft und einer allgemeinen Beurteilungskurve (Präferenzkurve) für *sichere* Zahlungsströme und einen vollkommenen bzw. unvollkommenen Kapitalmarkt findet man bei Pleier (2021).

an den Intervallgrenzen $a$ und $b$:

$$\alpha(\mu) \longrightarrow +\infty \quad \text{bei } \mu \longrightarrow b,$$
$$\alpha(\mu) \longrightarrow -\infty \quad \text{bei } \mu \longrightarrow a.$$

Die Funktion $\alpha : ]a,b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ ist wegen der strengen Monotonie injektiv. Wegen der Unbeschränktheit nach oben und nach unten ist die stetige Funktion $\alpha$ nach dem Zwischenwertsatz[3] von Bolzano auch surjektiv. Insgesamt bildet also $\alpha$ das Intervall $]a,b[$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab.

Es soll nun für jedes $X \in L(\mathcal{H}_N)$ eine eindeutige derartige Duplizierung gesichert sein. Es soll also 1) eine derartige Duplizierung existieren und 2) der Beurteilungskurvenpunkt $W(\mu(X))$ und dann auch das Supplement (Ergänzungsgeschäft) $C(X) \in \mathcal{M}$ durch $X$ eindeutig bestimmt sein. Eine hinreichende Bedingung ist hierfür bei vollkommenem Kapitalmarkt die Arbitragefreiheit (AF) $\mathcal{M} \cap \mathcal{U}_{>0} = \emptyset$ und damit die Existenz eines Diskontierungsprozesses $\Phi$ ($\Phi \in \mathcal{M}^{\perp} \cap \mathcal{U}_{>0}$ , $\Phi_0 = 1$).

Nachweis der Einzigkeit: Aus obiger Duplizierungsgleichung von $X \in L(\mathcal{H}_N)$ nach dem Duplizierungskonzept (mittels Beurteilungskurve und Kapitalmarktgeschäft) erhält man nämlich nach Linksmultiplikation mit $\Phi^{\mathsf{T}}$ die reellwertige Gleichung

$$\begin{aligned} \Phi^{\mathsf{T}}X &= \Phi^{\mathsf{T}}W(\mu(X)) + \Phi^{\mathsf{T}}C(X) \\ &= \Phi^{\mathsf{T}}W(\mu(X)) && (\Phi^{\mathsf{T}}C(X) = 0) \\ &= \Phi^{\mathsf{T}}V(\mu(X)) + \Phi^{\mathsf{T}}W(0) \\ &= \alpha(\mu(X)) + \Phi^{\mathsf{T}}W(0), \end{aligned}$$

daraus wegen der Bijektivität der Abbildung $\alpha : ]a,b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ den eindeutig bestimmten Beurteilungsparameter

$$\mu(X) = \alpha^{-1}(\Phi^{\mathsf{T}}X - \Phi^{\mathsf{T}}W(0)),$$

den eindeutig bestimmten Beurteilungskurvenpunkt $W(\mu(X))$ und das eindeutig bestimmte Kapitalmarktgeschäft $C(X) = X - W(\mu(X))$. Eine für $X \in L(\mathcal{H}_N)$ vorliegende Duplizierung nach dem Duplizierungskonzept ist also eindeutig bestimmt.

Nachweis der Existenz: Wie eben gezeigt wurde, kann man zu $X \in L(\mathcal{H}_N)$ den Beurteilungsparameter $\mu(X)$, den Beurteilungskurvenpunkt $W(\mu(X)) \in L(\mathcal{H}_N)$ und dann auch den Differenzvektor $C(X) := X - W(\mu(X)) \in L(\mathcal{H}_N)$ bestimmen. Damit hat man für $X$ die additive Zerlegung

$$X = W(\mu(X)) + C(X).$$

Aufgrund der Festlegung von $\mu(X)$ gilt

$$\begin{aligned} \Phi^{\mathsf{T}}C(X) &= \Phi^{\mathsf{T}}X - \Phi^{\mathsf{T}}V(\mu(X)) - \Phi^{\mathsf{T}}W(0) \\ &= \Phi^{\mathsf{T}}X - \Phi^{\mathsf{T}}W(0) - \alpha(\mu(X)) = 0 \end{aligned}$$

und dann

$$C(X) \in L(\mathcal{H}_N) \cap \{\Phi\}^{\perp} = \mathcal{M}.$$

Jedes $X \in L(\mathcal{H}_N)$ lässt sich also eindeutig additiv zerlegen in einen Beurteilungskurvenpunkt $W(\mu(X))$ und ein Kapitalmarktgeschäft $C(X) \in \mathcal{M}$.

---

[3] Der Zwischenwertsatz oder Nullstellensatz wurde zuerst im Jahr 1817 von dem böhmischen Mathematiker, Philosophen und Theologen Bernard Bolzano (1781–1848) und später noch von dem deutschen Mathematiker Karl Weierstraß (1815–1897) bewiesen. Er ist einer der wichtigsten Sätze über reellwertige stetige Funktionen und präzisiert die Aussage, dass der Graph einer stetigen Funktion ohne Absetzen gezeichnet werden kann. Eine Verallgemeinerung dieses Satzes ist die Aussage, dass bei einer stetigen Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ zwischen den metrischen Räumen $X$ und $Y$ das Bild (der Wertebereich) einer bogenweise (kurvenweise, weg-) zusammenhängenden Menge $M \subseteq X$ ebenfalls bogenweise zusammenhängend ist (Lexikon der Mathematik, Bd. 1 (2000), S. 243f.). Beweise für den Zwischenwertsatz findet man beispielweise bei Hildebrandt, Bd. 1 (2006), S. 152; Erwe, Bd. 1 (1967), S. 114f.; Grauert und Lieb, Bd. I (1967), S. 76f.

Damit gehört zu jeder Beurteilungskurve $W(\mu)$ eine $L(\mathcal{H}_N)$-wertige Präferenzfunktion (Bewertungsfunktion) $w(X) := W(\mu(X))$, eine (reellwertige) Nutzenfunktion $\mu(X)$ und eine Präferenzordnung $\succeq_W$ auf dem Unterraum $L(\mathcal{H}_N)$. Für die Nutzenfunktionen $\mu(X)$ und $\pi(X)$ gilt die Beziehung

$$\pi(X) = \Phi^\top X = \beta(\mu(X)) = \beta \circ \mu(X)$$

mit der streng monoton steigenden Transformation

$$\beta(\mu) := \alpha(\mu) + \Phi^\top W(0),$$

sodass die beiden Nutzenfunktionen auf $L(\mathcal{H}_N)$ die gleiche Präferenzordnung liefern. Bei einem arbitragefreien vollkommenen Kapitalmarkt liefert das Duplizierungskonzept (mittels Beurteilungskurve und Ergänzungsgeschäft vom Kapitalmarkt $\mathcal{M}$) für jede beliebige Beurteilungskurve zur Präzisierung der Zeitpräferenz also nur eine **einzige Präferenzordnung**, nämlich die Bewertung mit der durch das Duplikationsprinzip festgelegten Preisfunktion $\pi$ bzw. mit der stochastischen Diskontierung (Barwertberechnung) gemäß nachfolgendem Abschnitt 4.3.

Einfache Beispiele für Beurteilungskurven sind die deterministischen homogen linearen Kurven

$$W(\mu) = V(\mu) = \mu \cdot A$$

mit schwach positivem deterministischen Zahlungsprofil $A = (A_0,\ldots,A_T) \geq 0$, wobei also die Zustandsfunktionen $A_t(\omega) = A_t$ $(t \in I)$ auf $\Omega$ konstant und nichtnegativ sind, mindestens eine davon positiv ist und $A = A_0 \mathbf{1}_{0,\Omega} + \ldots + A_T \mathbf{1}_{T,\Omega} \in L(\mathcal{H}_N)$ gesichert ist. Spezialfälle hiervon sind die Beurteilungskurve $V(\mu) = \mu \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega}$ der Sofortentnahme, die Beurteilungskurve $V(\mu) = \mu \cdot \mathbf{1}_{T,\Omega}$ der Endentnahme und die Beurteilungskurve $V(\mu) = \mu \cdot (0,1,\ldots,1)^\top$ der Annuitätenentnahme.

## 4.3 Bewertung als Diskontierung der Zahlungen $X_t(A_{t,k})$ mittels stochastischer Diskontierungsfaktoren $d_{t,k}$

Bei vorausgesetzter Arbitragefreiheit (AF) und Vollständigkeit (VS) des Marktmodells existiert nach Abschnitt 3.6.1 ein normierter positiver $\mathcal{M}$-Normalenvektor (normierter Diskontierungsprozess) $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1+} \subseteq \mathcal{A}^+$ und existieren nach Abschnitt 3.8.1 im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells die $t$-periodischen stochastischen AD-Kassageschäfte

$$\widehat{\xi}^{t,k} = \left(-d_{t,k}, 0, .., 0, \mathbf{1}_{A_{t,k}}, 0, .., 0\right)^\top = \mathbf{1}_{t,A_{t,k}} - d_{t,k} \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega}$$

und die zu den Zeitintervallen $[0,t]$ und Ereignissen $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$ $(t \in I, k \in \{1,\ldots,k_t\})$ gehörigen $t$-periodischen stochastischen Diskontierungsfaktoren $d_{t,k} = \Phi_t(A_{t,k})$. Für jedes duplizierbare Zahlungsprofil $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{W}$ erhält man den eindeutig bestimmten Preis[4]

$$\begin{aligned} \pi(X) &= \Phi^\top X = \langle \Phi, X \rangle_{\mathcal{W}} = \sum_{t=0}^{T} \sum_{k=1}^{k_t} \Phi_t(A_{t,k}) X_t(A_{t,k}) \\ &= \sum_{t=0}^{T} \sum_{k=1}^{k_t} d_{t,k} \cdot X_t(A_{t,k}) \\ &= B_T(X, \Phi) \end{aligned}$$

durch die stochastische Diskontierung (Abzinsung) der Zahlungen $X_t(A_{t,k})$ des Zahlungs-

[4] Die Formel für diese Preisberechnung wird bei Kremer (2017), S. 62 (2.29), (2011), S. 179 (3.22), angegeben, wobei aber noch keine Deutung als stochastische Diskontierung mit stochastischen Diskontierungsfaktoren erfolgt.

profils $X$ mit den stochastischen Diskontierungsfaktoren (Abzinsungsfaktoren) $d_{t,k} = \Phi_t(A_{t,k})$ auf eine gleichwertige sichere Zahlung im Zeitpunkt $s = 0$. Der Preis $\pi(X)$ ist also der Barwert $B_T(X,\Phi)$ von $X$, der mit dem stochastischen Diskontierungsvektor (Ereignispreisvektor)

$$\begin{aligned}\Phi &= (1;\Phi_1(A_{1,1}),..,\Phi(A_{1,k_1});\ldots;\Phi_T(\omega_1),..,\Phi_T(\omega_K))^\mathsf{T}\\ &= (1;d_{1,1},..,\ d_{1,k_1};\ldots;d_{T,1},..,d_{T,K})^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{n_1}\end{aligned}$$

berechnet wird.

Diese zunächst rein rechnerische Ermittlung des Preises $\pi(X)$ als Barwert der Zahlungen $X_t(A_{t,k})$ von $X$ kann unter den Voraussetzungen (AF) und (VS) auch als spezielle Replizierung (Glattstellung, additive Ergänzung) im Raum $L(\mathcal{H}_N)$ des Marktmodells ökonomisch interpretiert werden, da die Transposition der Zahlungen von $X$ von den verschiedenen Zeitpunkten $t \in I$ und Ereignissen $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$ aus auf den Zeitpunkt $s = 0$ und das sichere Ereignis $A_0 = \Omega$ tatsächlich durch Kombination von $X$ mit dem Kapitalmarktgeschäft

$$\begin{aligned}Z &= -\sum_{t=0}^{T}\sum_{k=1}^{k_t} X_t(A_{t,k})\widehat{\xi}_{t,k}\\ &= \sum_{t=0}^{T}\sum_{k=1}^{k_t} d_{t,k}\cdot X_t(A_{t,k})\cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} - \sum_{t=0}^{T}\sum_{k=1}^{k_t} X_t(A_{t,k})\cdot \mathbf{1}_{t,A_{t,k}}\\ &= \pi(X)\cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} - X \in \mathcal{M}\end{aligned}$$

durchgeführt werden kann:

$$X + Z = \pi(X)\cdot \mathbf{1}_{0,\Omega}\,.$$

Das Finanzgeschäft $Z$ ist als Linearkombination der Kapitalmarktgeschäfte $\widehat{\xi}^{t,k}$ ebenfalls ein Kapitalmarktgeschäft. Die Zugehörigkeit von $Z = \pi(X)\cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} - X = -\widehat{X}$ zum Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ ergibt sich aber auch dadurch, dass mit $X \in L(\mathcal{H}_N)$ nach Abschnitt 3.7.3 auch $\widehat{X} = X - \pi(X)\mathbf{1}_{0,\Omega} \in \mathcal{M}$ gilt. Dahinter steht die zu Beginn von Abschnitt 3.2 angegebene Beobachtung, dass die Duplizierbarkeit eines Zahlungsprofils $X \in \mathcal{W}$ unabhängig von der deterministischen Komponente $X_0$ ist.

Auch hier ist wieder ersichtlich, dass bei der Preisbestimmung die tatsächlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten der bei der Modellierung des Preisprozesses $S$ auftretenden Ereignisse $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$ nicht eingehen, sondern nur der innerhalb des Marktmodells ermittelte Ereignispreisvektor bzw. Diskontierungsprozess $\Phi$ verwendet wird.

Speziell für ein deterministisches Zahlungsprofil $X$ sind für jedes $t \in I$ die Funktionswerte $X_t(A_{t,k}) = X_t$ konstant für alle $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$. Somit ist der Preis

$$\begin{aligned}\pi(X) &= \sum_{t=0}^{T} X_t \sum_{k=1}^{k_t} d_{t,k} = \sum_{t=0}^{T} d_t\cdot X_t\\ &= P^\mathsf{T}X = B_T(X;P)\end{aligned}$$

von $X$ die Summe der mit den deterministischen Diskontierungsfaktoren $d_t$ abgezinsten Zahlungen $X_t$, also der durch die Diskontierung mit dem deterministischen Diskontierungsvektor (Preisvektor) $P = (d_0,\ldots,d_T)^\mathsf{T}$ berechnete Barwert $B_T(X;P) = P^\mathsf{T}X$ der Zahlungen $X_t$ ($t = 0,\ldots,T$). Die Bewertung der duplizierbaren stochastischen Zahlungsströme kann daher als eine vom deterministischen Fall auf den stochastischen Fall verallgemeinerte stochasti-

sche Diskontierung bzw. verallgemeinerte Barwertberechnung interpretiert werden. Neben den oben beschriebenen Brücken mittels Abstandsmessung und Duplizierungskonzept liefert diese stochastische Barwertberechnung also eine dritte Brücke von der Bewertung deterministischer zeitdiskreter Zahlungsströme zur Bewertung stochastischer zeitdiskreter Zahlungsströme.
Eine entsprechende Interpretation der Bewertung als Diskontierung bzw. Barwertberechnung für die zum Zeitpunkt $t = T$ endfälligen Zahlungsprofile $X_T \in \mathbb{R}^{\Omega}$ erfolgt in Abschnitt 5.3.11, 1).

## 4.4 Bewertung als Diskontierung der $Q_t$-Erwartungswerte der Zahlungen $X_t$ bezüglich der Preismaße $Q_t$ mit deterministischen Diskontierungsfaktoren $d_t$

Es sei nun die Arbitragefreiheit (AF) des Marktmodells und die Bedingung (DP$\zeta^t$) der Duplizierbarkeit der deterministischen Arrow-Debreu-Papiere $\zeta^t = \mathbf{1}_t = \mathbf{1}_{t,\Omega} = (0,..,0,1,0,..0)^{\mathsf{T}}$ für alle $t \in I$ vorausgesetzt. Die Duplizierkarkeit der AD-Papiere $\zeta^t$ ist nach Abschnitt 3.8.2 (für $C = \Omega$) äquivalent zur Duplizierbarkeit der zugehörigen $t$-periodischen deterministischen AD-Kassageschäfte $\widehat{\zeta}^t = \zeta^t - d_t \mathbf{1}_{0,\Omega}$ bzw. zur Inzidenz $\widehat{\zeta}^t \in \mathcal{M}$.
Man erhält dann mit einem nach Abschnitt 3.6.1 existierenden normierten Diskontierungsprozess $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1+} \subseteq \mathcal{A}^+$ für jedes duplizierbare Zahlungsprofil $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ $(\subseteq \mathcal{W})$ den eindeutig bestimmten Preis $\pi(X)$ durch

$$\begin{aligned}\pi(X) &= \Phi^{\mathsf{T}} X = \langle \Phi, X \rangle_{\mathcal{W}} = \sum_{t=0}^{T} \sum_{k=1}^{k_t} \Phi_t(A_{t,k}) X_t(A_{t,k}) \\ &= \sum_{t=0}^{T} d_t \sum_{k=1}^{k_t} Q_t(A_{t,k}) X_t(A_{t,k}) \\ &= \sum_{t=0}^{T} d_t \cdot E_Q(X_t)\end{aligned}$$

mit den zu den Zeitintervallen $[0,t]$ gehörigen risikolosen (deterministischen) Diskontierungsfaktoren

$$d_t = \pi(\zeta^t) = \sum_{k=1}^{k_t} \Phi_t(A_{t,k}) = \Phi_t(\Omega) \in \mathbb{R}_+ = ]0,\infty[$$

und den zu den innerhalb des Marktmodells bestimmten formalen W-Maßen $Q_t = \Phi_t / d_t$ (siehe Abschnitt 3.7.4) gehörigen Erwartungswerten

$$E_{Q_t}(X_t) = \sum_{k=1}^{k_t} Q_t(A_{t,k}) X_t(A_{t,k}) = \langle Q_t, X_t \rangle_{\mathcal{W}_{t,1}}$$

der ($Q_t$-integrierbaren) $\mathcal{T}_t$-messbaren reellwertigen Zustandsfunktionen $X_t$. Damit ist der Preis

$$\pi(X) = \sum_{t=0}^{T} d_t \cdot E_{Q_t}(X_t)$$

$$= (1,d_1,\ldots,d_T)\,(X_0, E_{Q_1}(X_1),\ldots, E_{Q_T}(X_T))^{\mathsf{T}}$$
$$= P^{\mathsf{T}}\mathfrak{E}^{\mathbf{Q}}(X)$$
$$= B_T(\mathfrak{E}^{\mathbf{Q}}(X);P)$$

der mit dem deterministischen Diskontierungsvektor (Preisvektor) $P := (d_0,\ldots,d_T)^{\mathsf{T}}$ berechnete Barwert $B_T(\mathfrak{E}^{\mathbf{Q}}(X);P)$ des deterministischen $(T+1)$-Tupels

$$\mathfrak{E}^{\mathbf{Q}}(X) := (X_0, E_{Q_1}(X_1),\ldots, E_{Q_T}(X_T))^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{T+1}$$

der $Q_t$-Erwartungswerte $E_{Q_t}(X_t)$ der Zustandsfunktionen $X_t$.[5] Der in der Bezeichnung $\mathfrak{E}^{\mathbf{Q}}(X)$ verwendete Vektor $\mathbf{Q}$ ist das $(T+1)$-Tupel $\mathbf{Q} := (Q_0,\ldots,Q_T)^{\mathsf{T}}$ der W-Maße $Q_t : \mathcal{F}_t \longrightarrow [0,1]$. In der nachfolgenden Abbildung 4.2 sind zu den Zeitpunkten $t \in I$ die $Q_t$-Erwartungswerte $E_{Q_t}(X_t)$ und zum Zeitpunkt $t = 0$ die mit den deterministischen Diskontierungsfaktoren $d_t = \Phi_t(\Omega)$ diskontierten Erwartungswerte $d_t \cdot E_{Q_t}(X_t)$ und der Barwert $B_T(\mathfrak{E}^{\mathbf{Q}}(X);P)$ der Erwartungswerte dargestellt.

Eine hinreichende Bedingung für (DP$\zeta^t$), also die Existenz der deterministischen AD-Papiere $\zeta^t$ in $L(\mathcal{H}_N)$ bzw. der $t$-periodischen deterministischen AD-Kassageschäfte $\widehat{\zeta}^t$ in $\mathcal{M}$ und damit der tatsächlichen Verfügbarkeit der deterministischen Diskontierungsfaktoren $d_t$ wurde in Abschnitt 3.9.2 durch die Bedingung (FH) der Existenz von festverzinslichen Handelsstrategien angegeben.

Auch hier bei dieser Interpretation der Preisbestimmung ist wieder ersichtlich, dass die bei der mathematischen Modellierung der Preisentwicklung der $N$ ausgewählten Finanzinstrumente $S^j$ des Marktmodells auftretenden tatsächlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten der Ereignisse $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$ nicht eingehen. Stattdessen treten bei der jetzt wahrscheinlichkeitstheoretischen Berechnung unter Verwendung von Erwartungswerten formale (synthetische) Wahrscheinlichkeitsmaße $Q_t$ auf, die in Abhängigkeit von den modellierten Preisprozessen $S^j$ mittels der Abbildungen $V_0$ und $L$, des Unterraums $\mathcal{M} = L(\ker V_0)$ und des Prozesses $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1+}$ $(\subseteq \mathcal{W})$ innerhalb des Marktmodells bestimmt werden.

Speziell für ein deterministisches Zahlungsprofil $X$ ist $X_t(A_{t,k}) = X_t$ konstant für alle $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$ und somit der Erwartungwert von $X_t$ gleich der tatsächlichen Zahlung $X_t$:

$$E_{Q_t}(X_t) = X_t \sum_{k=1}^{k_t} Q_t(A_{t,k}) = X_t \cdot Q_t(\Omega) = X_t.$$

Daher ist der Preis

$$\pi(X) = \sum_{t=0}^{T} d_t \cdot X_t = P^{\mathsf{T}}X$$

von $X$ die Summe der diskontierten Zahlungen $X_t$, also der durch die Diskontierung mit dem deterministischen Diskontierungsvektor (Preisvektor) $P = (d_0,\ldots,d_T)^{\mathsf{T}}$ berechnete Barwert $B_T(X;P) = P^{\mathsf{T}}X$ der Zahlungen $X_t$ $(t = 0,\ldots,T)$. Die Bewertung der duplizierbaren

[5] Die Interpretation der Bewertung als deterministische Diskontierung der $Q_t$-Erwartungswerte der $X_t$ findet man z. B. bei Kremer (2011), S. 180.

stochastischen Zahlungsströme kann daher als eine vom deterministischen Fall auf den stochastischen Fall verallgemeinerte Diskontierung bzw. verallgemeinerte Barwertberechnung interpretiert werden. Neben den oben beschriebenen Brücken mittels Abstandsmessung, Duplizierungskonzept und stochastischer Barwertberechnung liefert diese deterministische Barwertberechnung von Erwartungswerten mit deterministischen Diskontierungsfaktoren also eine weitere Brücke von der Bewertung deterministischer zeitdiskreter Zahlungsströme zur Bewertung stochastischer zeitdiskreter Zahlungsströme.
Eine entsprechende Interpretation des Preises als Erwartungswert bezüglich eines formalen W-Maßes für die zum Zeitpunkt $t = T$ endfälligen Zahlungsprofile $X_T \in \mathbb{R}^\Omega$ erfolgt in Abschnitt 5.3.11, 2).

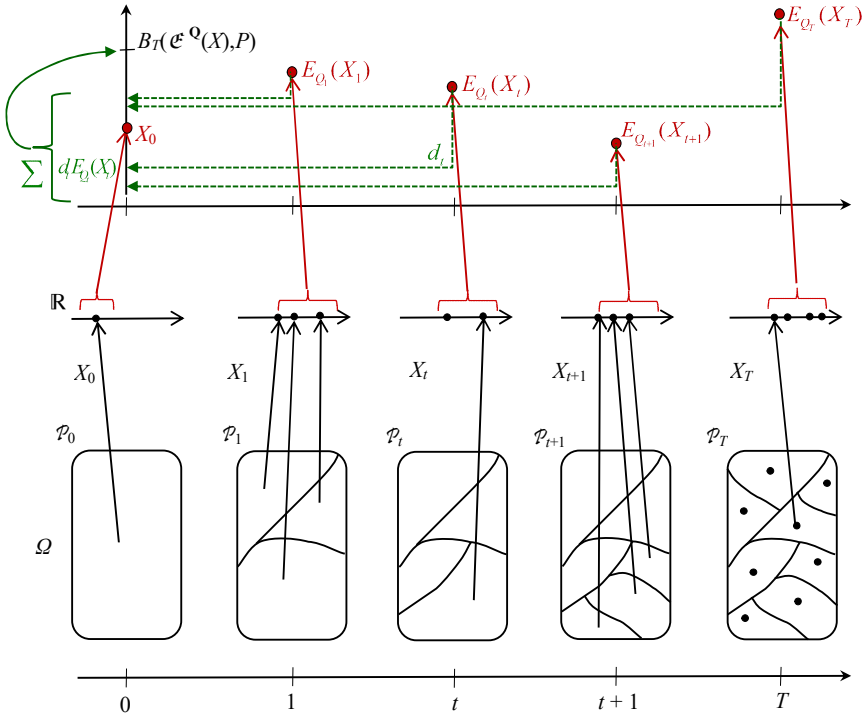



**Abb. 4.2** Der Preis des Zahlungsprofils $X$ als Barwert der Erwartungswerte der Zustandsfunktionen $X_t$

## 4.5 Bewertung als Diskontierung der $Q$-Erwartungswerte der Zahlungen $X_t$ bezüglich des Preismaßes $Q$ mit deterministischen Diskontierungsfaktoren $d_t$

Neben der Arbitragefreiheit (AF) sei jetzt noch die Bedingung (FH), also die Existenz von sogenannten festverzinslichen Handelsstrategien vorausgesetzt. Mit der expliziten Verwendung der Voraussetzung (FH) und der daraus hergeleiteten Rekursionsformel für die Dis-

kontierungsfaktoren $d_t$ wurde in Abschnitt 3.9.3 gezeigt, dass jedes der oben verwendeten W-Maße $Q_t : \mathcal{F}_t \longrightarrow [0,1]$ die Einschränkung $Q\big|_{\mathcal{F}_t}$ des W-Maßes $Q = Q_T : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ ($\mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$ = Potenzmenge von $\Omega$), des sogenannten für alle $t \in I$ einheitlichen Preismaßes des Marktmodells, auf die Unter-$\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist. Damit ist nun der Preis $\pi(X)$ von $X \in L(\mathcal{H}_N)$ die Summe der mit den risikolosen (deterministischen) Diskontierungsfaktoren $d_t$ diskontierten $Q$-Erwartungswerte der Zustandsfunktionen $X_t$ bezüglich des im Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ entwickelten Preismaßes $Q$:

$$\begin{aligned}\pi(X) &= \sum_{t=0}^{T} d_t \cdot E_Q(X_t)\\ &= (1,d_1,\ldots,d_T)(X_0, E_Q(X_1),\ldots, E_Q(X_T))^{\mathsf{T}}\\ &= P^{\mathsf{T}} E_Q(X)\\ &= B_T(E_Q(X);P)\end{aligned}$$

mit dem deterministischen Diskontierungsvektor (Preisvektor) $P := (d_0,\ldots,d_T)^{\mathsf{T}}$ und dem deterministischen $(T+1)$-Tupel

$$E_Q(X) := E_Q((X_0,\ldots,X_T)^{\mathsf{T}}) := (E_Q(X_0),\ldots, E_Q(X_T))^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{T+1}$$

der $Q$-Erwartungswerte $E_Q(X_t)$ der Zustandsfunktionen $X_t$ bezüglich des Preismaßes $Q : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$. Der Preis $\pi(X)$ des Zahlungsprofils $X$ ist also der mit dem deterministischen Preisvektor $P$ berechnete Barwert $B_T(E_Q(X);P)$ des $(T+1)$-Tupels $E_Q(X)$ der $Q$-Erwartungswerte $E_Q(X_t)$.[6] Auch bei dieser jetzt doch wahrscheinlichkeitstheoretischen Preisbestimmung unter Verwendung von Erwartungswerten tritt also die tatsächliche Wahrscheinlichkeitsverteilung der Preisentwicklung der dem Modell zugrunde gelegten Finanzinstrumente nicht auf, sondern stattdessen ein im Modell bestimmtes formales (synthetisches) W-Maß $Q$, das einheitliche Preismaß $Q$.

Speziell für ein deterministisches Zahlungsprofil $X$ ist jede Zustandsfunktion $X_t(A_{t,k}) = X_t$ konstant für alle $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$, somit $E_Q(X_t) = X_t$ $(t \in I)$ und demnach der Preis

$$\pi(X) = \sum_{t=0}^{T} d_t \cdot X_t = P^{\mathsf{T}} X = B_T(X;P)$$

von $X$ die Summe der diskontierten Zahlungen $X_t$. Der Preis $\pi(X)$ ist dann also der mittels Diskontierung mit dem deterministischen Diskontierungsvektor (Preisvektor) $P$ berechnete Barwert $B_T(X;P)$ der deterministischen Zahlungen $X_t$ $(t = 0,\ldots,T)$. Die Bewertung der duplizierbaren stochastischen Zahlungsströme mittels einer Diskontierung bzw. Barwertberechnung ist also eine Verallgemeinerung der entsprechenden Bewertung der duplizierbaren deterministischen Zahlungsströme. Neben den oben beschriebenen Brücken mit der verallgemeinerten Bewertung nach der Abstandsmessung, dem Duplizierungskonzept und stochastischer Barwertberechnung ist also mit der verallgemeinerten Barwertberechnung von Erwartungswerten mit deterministischem Preisvektor noch eine weitere Brücke geschlagen von der Bewertung deterministischer zeitdiskreter Zahlungsströme zur Bewertung stochastischer zeitdiskreter Zahlungsströme.

---

[6] Die Interpretation der Bewertung als deterministische Diskontierung der $Q$-Erwartungswerte der $X_t$ findet man z. B. bei Kremer (2011), S. 203.

# 5 Spezialfall der endfälligen Zahlungen

## 5.1 Spezielle sf-Arbitragefreiheit (AFsf), Diskontvektoren und äquivalente Martingalmaße

Die Bestimmung des Preises einer sog. europäischen Call-Option auf eine Aktie war Anfang der 1970er Jahre das Ausgangsproblem der modernen stochastischen Finanzmathematik. Dieses elementare Beispiel[1] eines zustandsabhängigen Zahlungsprofils wird auch meist in der Literatur zur Einführung in die stochastische Finanzmathematik verwendet. In diesem Zusammenhang behandeln etliche Literaturstellen[2] im Mehrperiodenmodell speziell die Zahlungsprofile

$$X = (0,\ldots,0,X_T)^\top$$

des $\mathcal{W}$-Unterraums

$$\mathcal{W}(T) := \{X \in \mathcal{W} : X_t(A_{t,k}) = 0 \text{ für alle } t \in \{0,\ldots,T\text{-}1\}, A_{t,k} \in \mathcal{P}_t\},$$

die höchstens zum Endzeitpunkt $t = T$ von Null verschieden sein können, also nur eine **endfällige stochastische Zahlung** $X_T$ enthalten. Diese endfälligen Zahlungsprofile $X$ entsprechen bijektiv den zum Endzeitpunkt $T$ gehörigen $\mathcal{F}_T$-messbaren Zustandsfunktionen

$$X_T : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

also wegen $\mathcal{F}_T = \mathcal{P}(\Omega)$ bzw. $\mathcal{P}_T = \{\{\omega_1\},\ldots,\{\omega_K\}\}$ den beliebigen reellwertigen Zustandsfunktionen $X_T$ auf $\Omega$ ($X_T \in \mathcal{W}_{T,1} = \mathbb{R}^\Omega = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\}$ mit der Bezeichnung $\mathcal{W}_{t,1}$ von Abschnitt 2.6.2). An die Stelle des $n_1$-dimensionalen Raums $\mathcal{W}$ ($n_1 = 1 + k_1 + \ldots + k_{T\text{-}1} + K$) von Abschnitt 2.6.3 tritt hier bei der Betrachtung der niedrigerdimensionale $K$-dimensionale Raum $\mathcal{W}(T) = O \times \ldots O \times \mathbb{R}^\Omega$ oder $\mathcal{W}_{T,1} = \mathbb{R}^\Omega = \mathbb{R}^K$ ($K = |\Omega|$).

**Beispiele** für derartige endfällige Zahlungsprofile (Zahlungsansprüche) $X_T$: [3]

- Europäische Call-Option (Kaufoption) oder Put-Option (Verkaufsoption) mit Basispreis (Strike-Preis) $K$;
- Forward-Kontrakt; dagegen ordnet sich ein börsengehandelter Future mit seinen zwischenzeitlichen Marginzahlungen hier nicht ein;
- Binäre (digitale) Call- oder Put-Option mit Basispreis $K$ in europäischer oder amerikanischer Variante;
- Knock-Out-Option (als Call- oder Put-Option) mit Basispreis $K$ und Barriere (Knock-Out-Höhe) $B$ verfällt, falls der Kurs $S_t$ innerhalb der Laufzeit die Barriere erreicht: Up-and-Out-Option, falls ein $B > S_0$ als obere Barriere über dem Startwert $S_0$ festgelegt ist, und Down-and-Out-Option, falls ein $B < S_0$ eine untere Barriere ist;
- Knock-In-Option mit Basispreis $K$ und Barriere $B$ bleibt nur gültig, wenn der Kurs innerhalb der Laufzeit die Barriere mindestens einmal erreicht;
- Digitale Barriere-Option mit Barriere $B$ und Nennwert $N$ statt eines Strikes $K$;

---

1 Literatur zur Behandlung dieses Beispiels ist im Vorwort angegeben.

2 Eine Behandlung derartiger Zahlungsprofile findet man beispielsweise bei Bäuerle u. Rieder (2017), 7–58, Kallsen (2009), S. 35–48, Korn (2014), S. 32–45, Kremer (2011), S. 9–14, 299–305, Kühn (2016), S. 25–40.

3 Literatur: Bäuerle u. Rieder (2017), S. 14.

- Asiatische Call- oder Put-Option, sowohl vom europäischen als auch amerikanischen Typ, bei der die Auszahlung zum Ausübungstag $T$ nicht vom Schlusskurs $S_T$, sondern von einem (arithmetischen oder geometrischen) Mittelwert der Kurse zu vereinbarten Zeitpunkten abhängt.

### 5.1.1 sf-Duplizierbarkeit und selbstfinanzierende Handelsstrategien

Für die Duplizierung der endfälligen Zahlungsprofile $X \in \mathcal{W}(T)$ kommen nur sog. selbstfinanzierende Handelsstrategien (**sf-Handelsstrategien**) $h \in \mathcal{H}_N$ zum Einsatz, deren Zahlungsprofile $L(h)$ in den Zeitpunkten $t = 0,\ldots,T\text{-}1$ den Wert Null aufweisen:

(SF) $\qquad L_t(h) = 0$ für $t = 0, 1, \ldots, T\text{-}1.$

Die Bedingung $L_t(h) = V_t(h) - R_t(h) = 0$ bzw. $V_t(h) = R_t(h)$ bedeutet dabei, dass der gesamte zum Zeitpunkt $t_-$ vor dem Wertpapierhandeln vorhandene Vermögenswert $V_t(h) = S_t^{\delta} \cdot h_t$ des Portfolios auch zum Zeitpunkt $t_+$ als Reinvestitionswert $R_t(h) = S_t \cdot h_{t+1}$ wieder in das Portfolio investiert wird. Nach dem Start mit dem Startkapital $V_0(h)$ des Portfolios im Zeitpunkt $0_-$ ($< 0$) wird zu jedem Zeitpunkt $t = 0, \ldots, T\text{-}1$ dem Portfolio weder Kapital entnommen noch Kapital hinzugefügt, sodass die Handelsstrategie $h$ als selbstfinanzierend bezeichnet wird. Der Vermögenswert $V_T(h)$ des Portfolios einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie zum Endzeitpunkt $T$ entwickelt sich also allein aus dem Startkapitaleinsatz $V_0(h)$ des Portfolioinhabers zum Zeitpunkt $0_-$, dem Handel zu den Zeitpunkten $t = 0, 1, \ldots, T\text{-}1$ und der jeweils anschließenden rein zufallsabhängigen Entwicklung (Wertänderung $G_t(h)$) der Reinvestitionswerte $R_{t-1}(h)$ zu den Vermögenswerten $V_t(h)$ in den Zeitintervallen $[t\text{-}1,t]$. Diese zeitliche Entwicklung des Vermögenswerts $V_t(h)$ wird in der Abbildung 5.1 dargestellt. Der dabei auch aufgeführte zufallsbedingte Gewinn $G_t(h)$ des Portfolios im Zeitintervall $[(t\text{-}1)_+,t_-]$ und der kumulierte Gewinn $K_T(h)$ im Zeitintervall $[0,T]$ werden im nachfolgenden Abschnitt 5.1.5 definiert.

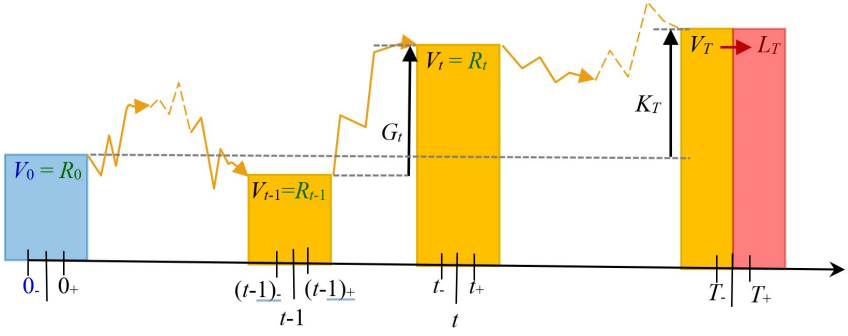



**Abb. 5.1** Die zeitliche Entwicklung des Vermögenswerts $V_t(h)$ aus dem Startkapitaleinsatz $V_0(h)$ bis zur Portfolioauszahlung $L_T(h) = V_T(h)$ zum Endzeitpunkt $T$ bei einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie $h$, der Gewinn $G_t(h)$ des Zeitpunkts $t$ und der kumulierte Gewinn $K_T(h)$ zum Endzeitpunkt $T$

Die Menge $\mathcal{H}_N^{sf}$ der selbstfinanzierenden Handelsstrategien ist als Durchschnitt der Kerne $\ker L_t$ der linearen Abbildungen $L_t$ ($t = 0,\ldots,T\text{-}1$) bzw. als $L$-Urbild $L^{-1}(\mathcal{W}(T))$ des linearen Unterraums $\mathcal{W}(T)$ von $\mathcal{W}$ ein linearer Unterraum von $\mathcal{H}_N$:

$$\mathcal{H}_N^{sf} := \{h \in \mathcal{H}_N : L_0(h) = \ldots = L_{T\text{-}1}(h) = 0\} = \bigcap_{t=0}^{T-1} \ker L_t$$
$$= \{h \in \mathcal{H}_N : L(h) = (0,\ldots,0,L_T(h))^\top \in \mathcal{W}(T)\} = L^{-1}(\mathcal{W}(T)).$$

Für die Unterräume

$$\ker L = \ker L_0 \cap \ldots \cap \ker L_T \text{ und}$$
$$\mathcal{H}_N^{sf} = \ker L_0 \cap \ldots \cap \ker L_{T\text{-}1}$$

gilt die Inklusion

$$\ker L \subseteq \mathcal{H}_N^{sf}.$$

Für das $L$-Bild von $\mathcal{H}_N^{sf}$ gilt

$$L(\mathcal{H}_N^{sf}) = L(\mathcal{H}_N) \cap \mathcal{W}(T).$$

Es liegt für ein $X = (0,\ldots,0,X_T)^\top \in \mathcal{W}(T)$ die **sf-Duplizierbarkeit** in $\mathcal{W}(T)$ mittels der Abbildung $L$ genau dann vor, wenn für das zugehörige $X_T \in \mathbb{R}^\Omega$ die sf-Duplizierbarkeit in $\mathbb{R}^\Omega$ mittels der Abbildung $L_T = V_T$ vorliegt:

(DPsf) $X = (0,\ldots,0,X_T)^\top \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$

$\Leftrightarrow$

(DPsfT) $X_T \in L_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = V_T(\mathcal{H}_N^{sf}) =: \mathcal{V}_T.$

**Berechnung einer sf-Duplikationsstrategie**

Wie im allgemeinen Fall eines Zahlungsprofils $X \in L(\mathcal{H}_N)$ in Abschnitt 3.2 erfolgt auch für ein duplizierbares endfälliges Zahlungsprofil $X \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ die rekursive Berechnung einer sf-Duplikationsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ durch das Lösen des gestaffelten Gleichungssystems

(DP$A_{t\text{-}1,k}$) $S_t^\delta(A_{t,m})^\top h_t(A_{t-1,k}) = Z_t(A_{t,m})$ $(A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k})$,

$t = T,\ldots,0$, jetzt aber mit dem vorgegebenen Zahlungsprofil

$$X_T = (X_T(\omega_1),\ldots, X_T(\omega_K))^\top \in \mathbb{R}^\Omega,$$

den speziellen Zahlungskomponenten

$$X_t(A_{t,m}) = 0 \qquad (t = 0,\ldots T\text{-}1,\ A_{t,m} \in \mathcal{P}_t)$$

und den rechten Seiten

$$Z_T(A_{T,m}) = X_T(A_{T,m}) \quad \text{für } t = T,\ A_{T,m} \in \mathcal{P}_T,$$
$$Z_t(A_{t,m}) = S_t(A_{t,m})^\top h_{t+1}(A_{t,m}) \quad \text{für } t = 0,\ldots,T\text{-}1,\ A_{t,m} \in \mathcal{P}_t.$$

Bei der sf-Duplizierung eines endfälligen Zahlungsprofils $X \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ bzw. $X_T \in L_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ sind die rechten Seiten $Z_t(A_{t,m})$ für den Zeitindex $t = T$ durch die Zahlungskomponenten $X_T(\omega_m)$ und für die Zeitindizes $t = 0,\ldots,T\text{-}1$ durch die Reinvestitionswerte $R_t(h)(A_{t,m}) = S_t(A_{t,m})^\top h_{t+1}(A_{t,m})$ der sf-Duplikationsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ im Zeitpunkt $t$ und Ereignis $A_{t,m}$ gegeben.

**Unterraum $\mathcal{M}_T$ der NE-Zahlungsprofile**

Eine weitere bijektive Beziehung wie für die sf-duplizierbaren Zahlungsprofile $X \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ und $X_T \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ erhält man auch für die jeweils mit dem Startkapitaleinsatz $V_0(h) = 0$ sf-duplizierbaren Zahlungsprofile in $\mathcal{W}(T)$ und in $\mathbb{R}^\Omega$. Dazu betrachtet man den in $L(\mathcal{H}_N^{sf})$ und in $\mathcal{M} = L(\ker V_0)$ gelegenen Unterraum

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(T) &:= \mathcal{M} \cap L(\mathcal{H}_N^{sf}) = L(\ker V_0) \cap L(\mathcal{H}_N^{sf}) \\ &= \{Z \in \mathcal{M} : Z_t(A_{t,k}) = 0 \text{ für alle } t = 0,\ldots,T\text{-}1 \text{ und } A_{t,k} \in \mathcal{P}_t\} \\ &= L(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0) \qquad \text{(Hilfssatz 5.10, b wg. } \ker L \subseteq \mathcal{H}_N^{sf}) \\ &=: L(\ker^{sf} V_0)\end{aligned}$$

der **endfälligen Kapitalmarktgeschäfte** $Z = L(h)$, die also durch selbstfinanzierende Handelsstrategien $h \in \ker V_0$ mit der Abbildung $L$ dupliziert werden, und den in $L_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ ($\subseteq \mathcal{W}_{T,1} = \mathbb{R}^\Omega$) gelegenen Unterraum

$$\mathcal{M}_T := L_T(\ker^{sf} V_0) := V_T(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0)\,^4 \subseteq V_T(\mathcal{H}_N^{sf}) =: \mathcal{V}_T$$

der Zahlungsprofile $Z_T = L_T(h)$, die durch selbstfinanzierende Handelsstrategien $h \in \ker V_0$ mit der Abbildung $L_T$ dupliziert werden. Es gilt

$$\begin{aligned}&Z = (0,\ldots,0,Z_T)^\mathsf{T} \in \mathcal{M}(T) = L(\ker^{sf} V_0) \\ &\Leftrightarrow \\ &Z_T \in \mathcal{M}_T = L_T(\ker^{sf} V_0).\end{aligned}$$

Für die lineare Abbildung

$$V_0^{sf} := V_0\big|_{\mathcal{H}_N^{sf}} : \mathcal{H}_N^{sf} \longrightarrow \mathbb{R}^\Omega,$$

also die Einschränkung der Abbildung $V_0 : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathbb{R}^\Omega$ auf den Unterraum $\mathcal{H}_N^{sf}$ der sf-Handelsstrategien, ist der Kern gegeben durch

$$\begin{aligned}\ker^{sf} V_0 &:= \ker V_0^{sf} = \{h \in \mathcal{H}_N^{sf} : V_0^{sf}(h) = 0\} \\ &= \mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0.\end{aligned}$$

Dieser Kern ist der Durchschnitt von $\mathcal{H}_N^{sf}$ mit dem Kern $\ker V_0$ der linearen Abbildung $V_0 : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathbb{R}^\Omega$ bzw. $v_0 : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathbb{R}$ ($V_0(h) = v_0(h)\mathbf{1}_\Omega$, $v_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 \in \mathbb{R}$). Analog wird der Kern der linearen Abbildung $V_T : \mathcal{H}_N^{sf} \longrightarrow \mathbb{R}^\Omega$ und der weiter unten noch folgenden linearen Abbildung $K_T : \mathcal{H}_N^{sf} \longrightarrow \mathbb{R}^\Omega$ mit $\ker^{sf} V_T$ und $\ker^{sf} K_T$ bezeichnet.

Da der Unterraum $\mathcal{M}_T$ bei den nachfolgenden Betrachtungen eine wichtige Rolle spielt, sollen seine Vektoren mit einem Namen versehen werden. Ein endfälliges Kapitalmarktgeschäft $Z = L(h) \in \mathcal{M}(T)$ ($h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0$) wird wegen $V_0(h) = 0$, $L_0(h) = 0$, damit auch $R_0(h) = V_0(h) - L_0(h) = 0$, und wegen $L_t(h) = 0$ für $t = 1,\ldots,T\text{-}1$ hier als Kapitalmarktgeschäft mit Nulleinsatz zu allen Zeitpunkten $t < T$ oder kurz als **NE-Geschäft** (Nulleinsatz-Geschäft)

---

[4] Im Spezialfall $T = 1$ des Einperiodenmodells in Kapitel 6 ist dieser Unterraum $\mathcal{M}_1 = D^\mathsf{T}(\ker S_0^\mathsf{T})$ mit der Matrix $D^\mathsf{T} = (S_1^\delta(\omega_k)^\mathsf{T})_{k=1,\ldots,K}$, welche die $K$ Zeilen $S_1^\delta(\omega_k)^\mathsf{T}$ besitzt. Es nimmt nämlich $L_1(h) = V_1(h) = D^\mathsf{T} h_1$ für selbstfinanzierende $h = (h_0,h_1)^\mathsf{T} \in \mathcal{H}_N^{sf} = \mathbb{R}^{2N} \cap \{L_0(h) = 0\}$ mit $R_0(h) = V_0(h) = 0$ die gleichen Werte an wie $D^\mathsf{T} h_1$ für die $h_1 \in \mathbb{R}^N$ mit $R_0(h) = S_0^\mathsf{T} h_1 = 0$.

bezeichnet. Das zugehörige Zahlungsprofil $Z_T \in \mathcal{M}_T$ wird **NE-Zahlungsprofil** genannt. Damit sind die NE-Zahlungsprofile $Z_T \in \mathcal{M}_T$ genau die $T$-ten Komponenten der endfälligen Kapitalmarktgeschäfte $Z = (0,\ldots,0,Z_T)^\top \in \mathcal{M}(T)$.

Die rekursive **Berechnung einer speziellen sf-Handelsstrategie** $h \in \ker^{sf} V_0$, also einer sf-Handelsstrategie mit dem Startkapitaleinsatz $V_0(h) = 0$, kann unter den mathematisch-technischen Voraussetzungen

(AWS$^\delta$) $\quad S_0^\delta(\Omega) \neq (0,\ldots,0)^\top \in \mathbb{R}^N$,

(WS0,$T$-1) $\quad S_t(A_{t,m}) \neq (0,\ldots,0)^\top \in \mathbb{R}^N \ \forall\, t \in \{0,\ldots,T\text{-}1\}, A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$

folgendermaßen durchgeführt werden. Für die Auflösung des zugehörigen Gleichungssystems

$$0 = V_0(h)(\Omega) = S_0^\delta(\Omega)^\top h_0(\Omega),$$
$$0 = L_t(h)(A_{t,m}) = S_t^\delta(A_{t,m})\, h_t(A_{t,m}) - S_t(A_{t,m}) h_{t+1}(A_{t,m}),$$

$A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$, $t = 0,\ldots,T\text{-}1$, nach einem $h \in \mathcal{H}_N$ löst man zuerst

$$S_0^\delta(\Omega)^\top h_0(\Omega) = 0$$

nach $h_0$ auf und dann sukzessive bei $t = 0$ beginnend und bis $t = T - 1$ fortschreitend die weiteren Gleichungen

$$S_t(A_{t,m})^\top h_{t+1}(A_{t,m}) = S_t^\delta(A_{t,m})^\top h_t(A_{t,m})$$

für jedes $A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$ bei gegebener reellwertiger rechter Seite nach der Unbekannten $h_{t+1}(A_{t,m}) \in \mathbb{R}^N$, genauer nach deren $N$ Komponenten $h_{t+1}^j(A_{t,m})$ $(j = 1,\ldots,N)$, auf der linken Seite auf. Nach der Auflösung nach $h_{t+1}(A_{t,m})$ setzt man noch $h_{t+1}(A_{t+1,p}) := h_{t+1}(A_{t,m})$ in den Nachfolgerknoten $A_{t+1,p} \subseteq A_{t,m}$ von $A_{t,m}$ für den nächsten $t$-Schritt. Damit bekommt man sukzessive für $t = 0,\ldots,T$ die Zustandsfunktionen $h_t$ einer sf-Handelsstrategie $h$ mit dem Startkapitaleinsatz $V_0(h) = 0$. Als zugehöriges Zahlungsprofil erhält man in $\mathcal{W}(T)$ ein endfälliges Kapitalmarktgeschäft

$$Z = (0,\ldots,0,Z_T)^\top = L(h) \in \mathcal{M}(T)$$

und in $\mathbb{R}^\Omega$ ein NE-Zahlungsprofil

$$Z_T = V_T(h) = S_T^\top h_T \in \mathcal{M}_T.$$

## 5.1.2 sf-Arbitragefreiheit

Bei der Behandlung der $L$-duplizierbaren endfälligen Zahlungsprofile $X \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ bzw. der zum Endzeitpunkt $T$ gehörigen $V_T$-duplizierbaren Zahlungsprofile $X_T \in L_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ wird dann auch noch eine speziellere sf-Arbitragefreiheit (AFsf) hinsichtlich selbstfinanzierender Handelsstrategien definiert. Im Einklang mit der Definition einer allgemeinen Arbitragegelegenheit in Abschnitt 3.6.1 liefert speziell eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ beim Zeitpunkt $T$ eine Arbitragegelegenheit, wenn

$$V_0(h) = 0,\ L_t(h) = 0 \text{ für } t = 0, 1, \ldots, T\text{-}1 \text{ und } V_T(h) = L_T(h) \gneq 0$$

gilt. Die letzte Bedingung bedeutet explizit

$V_T(h)(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$ und

$V_T(h)(\omega') > 0$ für mindestens ein $\omega' \in \Omega$.

Das Marktmodell heißt **sf-arbitragefrei**, wenn es keine selbstfinanzierende Arbitragegelegenheit (**sf-Arbitragegelegenheit**) gibt:

(AFsf) $\nexists\, h \in \mathcal{H}_N$ mit $V_0(h) = 0$, $L_t(h) = 0$ für $t = 0,\ldots,T\text{-}1$ und $V_T(h) \gneq 0$
$\Leftrightarrow \nexists\, h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0$ mit $V_T(h) \gneq 0$.

Mit einer speziellen sf-Arbitragegelegenheit $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ liegt auch eine allgemeine Arbitragegelegenheit $h \in \mathcal{H}_N$ ($V_0(h) = 0 \wedge L(h) \gneq 0$) vor. Die allgemeine Arbitragefreiheit (AF) beinhaltet somit auch die speziellere sf-Arbitragefreiheit:

(AF) $\Rightarrow$ (AFsf).

Mit dem schwach positiven Orthanten

$$\mathcal{W}_{\gneq 0} = \{X \in \mathcal{W} : X \gneq 0\}$$

von $\mathcal{W}$ und dem schwach positiven Orthanten

$$\mathbb{R}^{\Omega}_{\gneq 0} = \{X_T \in \mathbb{R}^{\Omega} : X_T \gneq 0\}$$

von $\mathbb{R}^{\Omega} \cong \mathbb{R}^K$ bedeutet die sf-Arbitragefreiheit (AFsf) in der Mengenschreibweise, dass $\mathcal{M}(T)$ und $\mathcal{W}_{\gneq 0}$ disjunkt sind bzw. dass $\mathcal{M}_T$ und $\mathbb{R}^{\Omega}_{\gneq 0}$ disjunkt sind:

(AFsf) $\Leftrightarrow$ (AFsf$\mathcal{M}(T)$) $\quad \mathcal{M}(T) \cap \mathcal{W}_{\gneq 0} = \emptyset$
$\Leftrightarrow$ (AFsf$\mathcal{M}_T$) $\quad \mathcal{M}_T \cap \mathbb{R}^{\Omega}_{\gneq 0} = \emptyset$.

Als eine notwendige Bedingung für die sf-Arbitragefreiheit (AFsf) wird in Abschnitt 5.3.12 bei den Erläuterungen zu Satz 5.12 die Gültigkeit des Law of One Price (LOPsfT) bzw. (LOP) begründet: Aus der Nichtgültigkeit von (LOPsfT) folgt nämlich unter der Voraussetzung (ZVU) oder unter der Voraussetzung (NM) eines Numéraires $B$ im ursprünglichen Marktmodell die Nichtgültigkeit von (AFsf).

(ZVU) $\wedge$ (AFsf) $\Rightarrow$ (LOPsfT);
(NM) $\wedge$ (AFsf) $\Rightarrow$ (LOPsfT).

Die Charakterisierung (AFsf$\mathcal{M}_T$) der sf-Arbitragefreiheit mittels des Unterraums $\mathcal{M}_T$ der NE-Zahlungsprofile ist nach dem Alternativsatz 3.7 von Abschnitt 3.6.1 auch äquivalent zu einer Charakterisierung mittels eines positiven Normalenvektors $\Phi_T$ von $\mathcal{M}_T$ bzw. eines mit der Komponentensumme

$$\kappa(x) := x_1 + \ldots + x_K \qquad (x = (x_1,\ldots,x_K)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^K)$$

normierten positiven Normalenvektors $Q_T$ von $\mathcal{M}_T$: $\kappa(Q_T) = 1$. Diese Äquivalenz wird unten beim Beweis von Satz 5.7, dem modifizierten ersten Hauptsatz der Preistheorie, verwendet, wo auch eine etwas ausführlichere Darstellung erfolgt. Die entsprechende Charakterisierung (AFsf$\tilde{\mathcal{M}}_T$) der sf-Arbitragefreiheit im relativen Marktmodell in Abschnitt 5.1.8 wird beim Beweis von Satz 5.6, dem ersten Hauptsatz der Preistheorie, angewandt.

(AFsf) $\Leftrightarrow$ (AFsf$\mathcal{M}_T{}^{\perp +}$) $\quad \exists\, \Phi_T \in \mathcal{M}_T{}^{\perp +} := \mathcal{M}_T{}^{\perp} \cap \{X_T > 0\}$
$\Leftrightarrow$ (AFsf$\mathcal{M}_T{}^{\perp 1+}$) $\quad \exists\, Q_T \in \mathcal{M}_T{}^{\perp 1+} := \mathcal{M}_T{}^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = 1, X_T > 0\}$

### 5.1.3 Äquivalenz der sf-Arbitragefreiheit im ursprünglichen Marktmodell und der sf-Arbitragefreiheit im relativen Marktmodell

Analog zur Beweisführung von Satz 3.11, 1) in Abschnitt 3.10.1 für die allgemeine Arbitragefreiheit ergibt sich auch die Äquivalenz hinsichtlich der sf-Arbitragefreiheit im ursprünglichen und im relativen Marktmodell. Dazu werden statt der Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N$ im Beweis von Satz 3.11 hier jetzt die sf-Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ verwendet, für die noch die Bedingungen $\tilde{L}_t(h)(\omega) = L_t(h)(\omega)/S_t^1(\omega) = 0$ für $t = 0,\ldots,T\text{-}1$ erfüllt sind. Die zu (AFsf$\mathcal{M}_T$) analoge mengentheoretische Beschreibung (AFsf$\tilde{\mathcal{M}}_T$) der sf-Arbitragefreiheit im relativen Marktmodell wird in Abschnitt 5.1.8 angegeben.

**Satz 5.1 Äquivalenz der sf-Arbitragefreiheit im ursprünglichen Marktmodell und relativen Marktmodell**

Das zu einem Numéraire des ursprünglichen Marktmodells gebildete relative Marktmodell ist genau dann sf-arbitragefrei, wenn das ursprüngliche Marktmodell sf-arbitragefrei ist. Es gilt also die Äquivalenz

$$(\text{AFsf}\mathcal{M}_T) \Leftrightarrow (\text{AFsf}\tilde{\mathcal{M}}_T).$$

Falls im ursprünglichen Marktmodell ein Numéraire $B$ mit deterministischem $B_T$ vorliegt, so stimmen nach Abschnitt 5.1.7 die Unterräume $\mathcal{M}_T$ und $\tilde{\mathcal{M}}_T$ überein und die Aussage von Satz 5.1 wird trivial.

### 5.1.4 sf-Arbitragefreiheit im Mehrperiodenmodell und Arbitragefreiheit in den Einperiodenmodellen

Eine selbstfinanzierende Arbitragegelegenheit ist eine spezielle Arbitragegelegenheit, die bei einem Startkapitaleinsatz Null und den zwischenzeitlichen Auszahlungen $L_t(h)$ ($t = 0,\ldots,T\text{-}1$) vom Wert Null den risikofreien Gewinn genau zum Endzeitpunkt $t = T$ liefert. Die sf-Arbitragefreiheit (AFsf) mit dem Ausschluss nur der selbstfinanzierenden Arbitragegelegenheiten ist also eine schwächere Bedingung als die allgemeine Arbitragefreiheit (AF). Bei der sf-Arbitragefreiheit und der allgemeinen Arbitragefreiheit gilt keine analoge Aussage wie bei der in Abschnitt 5.3.2 begründeten Äquivalenz von LOPsfT (Law of One Price für die sf-Duplikationsstrategien von $X \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$) und LOP (Law of One Price für beliebige Duplikationsstrategien von $X \in L(\mathcal{H}_N)$). Speziell für das Einperiodenmodell kann mit Satz 6.5 in Abschnitt 6.2.4 unter der zusätzlichen Voraussetzung (GI) die Äquivalenz von (Afsf) und (AF) gezeigt werden.

Eine selbstfinanzierende Arbitragegelegenheit kann auch dann noch auftreten, wenn alle zu den Ausgangsknoten $A_{T\text{-}1,k} \in \mathcal{P}_{T\text{-}1}$ und deren Nachfolgerknoten $A_{T,m} \in \mathcal{P}_T$ ($A_{T,m} \subseteq A_{T\text{-}1,k}$) gehörigen Einperiodenmodelle arbitragefrei sind. Dies kann mit dem im Beispiel 3.4, Fall II) in Abschnitt 3.4.4 angegebenen Mehrperiodenmodell, in dem die zu den Ausgangsknoten $A_{1,1}$ und $A_{1,2}$ gehörigen Einperiodenmodelle arbitragefrei sind, gezeigt werden: Durch die Handelsstrategie

$$h = (h_0;h_1;h_2)^\mathsf{T} = (0{,}0;\text{-}2.4158,2.5768;66/29,0,0,0)^\mathsf{T}$$

mit $h_0 = 0$ und damit $V_0(h) = 0$ wird nämlich das Zahlungsprofil

$$X = (X_0;X_1;X_2)^\mathsf{T} = (0;0,0;132,66,0,0)^\mathsf{T}$$

mit $X_0 = X_1 = 0$ und $X_2 \gneq 0$ dupliziert, sodass $h$ eine selbstfinanzierende Arbitragegelegenheit ist.

Aus der Arbitragefreiheit (AF) nur in allen Einperiodenmodellen der Ausgangsknoten $A_{T\text{-}1,k}$ des Zeitpunkts $T$-1 kann also noch nicht auf die speziellere sf-Arbitragefreiheit (AFsf) beim Zeitpunkt $T$ geschlossen werden.
Nach Satz 3.10 in Abschnitt 3.6.3 folgt aber aus der Arbitragefreiheit (AF) in allen enthaltenen Einperiodenmodellen auch die allgemeine Arbitragefreiheit (AF) im Mehrperiodenmodell und dann auch die sf-Arbitragefreiheit (AFsf) im Mehrperiodenmodell.
Analog zur Aussage von Satz 3.10 in Abschnitt 3.6.3 mit der Äquivalenz der allgemeinen Arbitragefreiheit (AF) im Mehrperiodenmodell zur Arbitragefreiheit (AF) in den enthaltenen Einperiodenmodellen wird in Satz 5.3 von Abschnitt 5.1.9 mit einem Beweis innerhalb des relativen Marktmodells noch die Äquivalenz der sf-Arbitragefreiheit des Mehrperiodenmodells (mit Numéraire) zur sf-Arbitragefreiheit aller enthaltenen Einperiodenmodelle angegeben.

Um die Charakterisierung der spezielleren Arbitragefreiheit (AFsf) durch die Existenz eines sog. äquivalenten Martingalmaßes oder Diskontvektors im relativen Marktmodell (Satz 5.5 in Abschnitt 5.1.11) bzw. durch die Existenz eines positiven $\mathcal{M}_T$-Normalenvektors oder Diskontvektors im ursprünglichen Marktmodell (Satz 5.6 in Abschnitt 5.1.12) zu beweisen, sind nun noch einige Hilfsmittel für das ursprüngliche und für das relative Marktmodell bereitzustellen. Es sind dies die Charakterisierung der Selbstfinanzierungsbedingung (SF) mittels der Vermögenswerte im ursprünglichen und relativen Marktmodell (Abschnitte 5.1.5 und 5.1.7), die Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit (AFsf) mittels der kumulierten Gewinne im ursprünglichen und relativen Marktmodell (Abschnitte 5.1.6 und 5.1.8) und die Charakterisierung eines Martingalmaßes $\tilde{Q}$ im dividendenlosen relativen Marktmodell mittels des $\tilde{Q}$-erwarteten kumulierten Gewinns vom Wert Null für alle sf-Handelsstrategien bzw. als einen $\kappa$-normierten ($\kappa(\tilde{Q}) = 1$) nichtnegativen $\tilde{\mathcal{M}}_T$-Normalenvektor $\tilde{Q}$ (zum Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$ der relativen NE-Zahlungsprofile; Abschnitt 5.1.10, Satz 5.4).

## 5.1.5 Charakterisierung der Selbstfinanzierungsbedingung (SF) im ursprünglichen Marktmodell

Für die Beschreibung der zeitlichen Entwicklung des Portfolios einer Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ wird jetzt ergänzend zu Abschnitt 2.7 im ursprünglichen Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ neben dem aus Vermögensprozess $V(h)$ und Reinvestitionsprozess $R(h)$ errechneten (Aus-)Zahlungsprozess $L(h) = V(h) - R(h)$ noch der **Gewinnprozess** (Ertragsprozess) $G(h)$ definiert:

$$\begin{aligned} G(h) &= (G_t(h))_{t\in I} \quad \text{mit} \\ G_0(h) &:= 0, \\ G_t(h) &:= V_t(h) - R_{t\text{-}1}(h) = S_t^\delta \cdot h_t - S_{t\text{-}1}\cdot h_t \\ &= \Delta S_t^\delta \cdot h_t \end{aligned}$$

mit den dividendenversehenen Preisdifferenzen

$$\Delta S_t^\delta := S_t^\delta - S_{t\text{-}1} \quad \text{für } t = 1,\ldots,T.$$

Die Zustandsfunktion $G_t(h)$ liefert den Zuwachs vom Reinvestitionswert $R_{t\text{-}1}(h)$ des Zeitpunkts $(t\text{-}1)_+$ nach dem Handeln zum Vermögenswert $V_t(h)$ im Zeitpunkt $t_-$ vor dem Handeln, also die rein zufallsbedingte Wertänderung (als Gewinn oder Verlust) des Portfolios im Zeitintervall $[(t\text{-}1)_+,t_-]$. Eine grafische Darstellung für den Gewinn $G_t(h)$ wird in Abbildung 5.2 gegeben. Jede der Gewinn-Zustandsfunktionen $G_t(h)$ ist $\mathcal{F}_t$-messbar und somit der Gewinnprozess $G(h)$ $\mathcal{F}$-adaptiert.

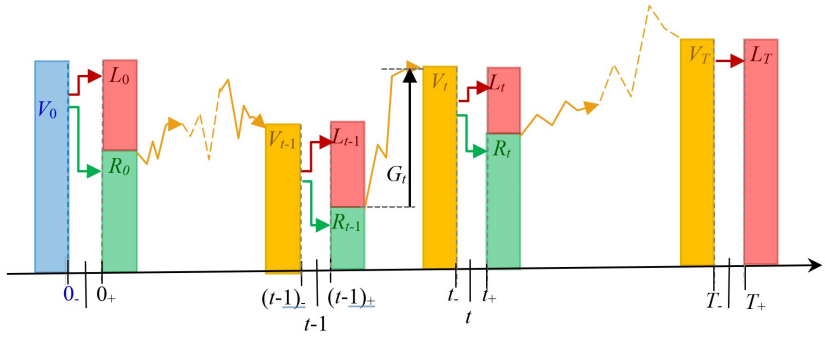



**Abb. 5.2** Präzisierung der zeitlichen Entwicklung des Portfoliowerts mittels Gewinn $G_t(h)$, Vermögenswert $V_t(h)$, Reinvestitionswert $R_t(h)$ und Portfolioauszahlung $L_t(h)$ zum Zeitpunkt $t$

Es wird nun ein Zusammenhang zwischen den Vermögenswerten $V_t(h)$, den Gewinnwerten $G_t(h)$ und den Auszahlungswerten $L_t(h)$ hergeleitet. Für die Verrechnung des zum Zeitpunkt 0 gehörigen Werts $V_0(h)$ mit den auf den Zeitpunkt $t$ bezogenen Werten $V_t(h)$, $G_t(h)$, $L_t(h)$, $K_t(h)$ und $A_t(h)$ werden die dabei auftretenden Zustandsfunktionen jetzt nicht als Funktionen auf den Partitionen $\mathcal{P}_0$ und $\mathcal{P}_t$ von $\Omega$, sondern als Zustandsfunktionen auf $\Omega$ bzw. als Elemente des Funktionenraums $\mathbb{R}^\Omega$ betrachtet. Beispielsweise ist

$$V_t(h)(\omega) = \sum_{k=1}^{k_t} S_t^\delta(A_{t,k})^\top h_t(A_{t,k}) \cdot \mathbf{1}_{A_{t,k}}(\omega)$$

und insbesondere

$$V_0(h)(\omega) = v_0(h) \cdot \mathbf{1}_\Omega(\omega)$$

mit $v_0(h) = S_0^\delta(\Omega)^\top h_0(\Omega) \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{1}_\Omega(\omega) = 1 \; \forall\, \omega \in \Omega$. Bisher wurde die Bezeichnung $V_0(h)$ sowohl für die auf $\mathcal{P}_0 = \{\Omega\}$ definierte Abbildung als auch für die auf $\Omega = \{\omega_1,\ldots,\omega_K\}$ definierte Abbildung verwendet. Die Rolle der Abbildung $V_0(h) : \mathcal{P}_0 = \{\Omega\} \longrightarrow \mathbb{R}$ wird jetzt aber von $v_0(h)$ übernommen und $V_0(h)$ nur noch als Zustandsfunktion $V_0(h) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ angesehen. Es gilt nun

$$V_t(h) = V_0(h) + \sum_{s=1}^{t} \Delta V_s(h) \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} \Delta V_s(h) &= V_s(h) - V_{s\text{-}1}(h) \\ &= V_s(h) - R_{s\text{-}1}(h) + R_{s\text{-}1}(h) - V_{s\text{-}1}(h) \\ &= G_s(h) - L_{s\text{-}1}(h), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} V_t(h) &= V_0(h) + \sum_{s=1}^{t} G_s(h) - \sum_{r=0}^{t-1} L_r(h) \\ &= V_0(h) + K_t(h) - A_t(h) \qquad (t = 1,\ldots,T) \end{aligned}$$

mit dem **kumulierten Gewinn**

$$K_t(h) := \sum_{s=1}^{t} G_s(h)$$

des Zeitraums $[0,t]$ und der **kumulierten Auszahlung**

$$A_t(h) := \sum_{r=0}^{t-1} L_r(h)$$

des Zeitraums $[0,t\text{-}1]$. Weiter definiert man für den Zeitpunkt $t = 0$

$$K_0(h) := 0$$

und

$$A_0(h) := 0.$$

Der Vermögenswert $V_t(h)$ des Portfolios zum Zeitpunkt $t$ berechnet sich also als Summe von Startkapital $V_0(h)$ und dem durch die Kursänderungen der Wertpapiere verursachten kumulierten Gewinn $K_t(h)$ abzüglich der kumulierten Auszahlung $A_t(h)$.[5]

**Unabhängigkeit des kumulierten Gewinns $K_T(h)$ vom Startportfoliovektor $h_0$**

Die Gewinne $G_s(h) = \Delta S_s^{\delta} \cdot h_s$ $(s \geq 1)$ sind jeweils nur von dem Portfoliovektor $h_s$ und von keinem anderen Portfoliovektor $h_t$ der Zeitindizes $t \neq s$ abhängig. Da der kumulierte Gewinn $K_T(h)$, $h \in \mathcal{H}_N$, des Endzeitpunkts $T$ sich nur aus den Gewinnen $G_s(h)$ $(1 \leq s \leq T)$ aufsummiert, ist er nicht abhängig vom Startportfoliovektor $h_0$, sondern nur abhängig von den nachfolgenden Portfoliovektoren $h_1, \ldots, h_T$:

$$K_T(h) = K_T(\hat{h}) \text{ mit } \hat{h} = (0,h_1,\ldots,h_T)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{H}_N.$$

**Charakterisierung der Selbstfinanzierungsbedingung (SF) mittels der Vermögenswerte, dem Startkapitaleinsatz und der kumulierte Gewinne**

Speziell für selbstfinanzierende Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ $(L_s(h) = 0$ für $0 \leq s \leq T\text{-}1)$ ist

$$A_t(h) = 0 \qquad (t = 0,1,\ldots,T)$$

und somit

(SFV) $$V_t(h) = V_0(h) + K_t(h) \qquad (t = 0,1,\ldots,T).$$

Diese additive Zerlegung (SFV) des Vermögenswerts $V_t(h)$ in den Startkapitaleinsatz $V_0(h) = v_0(h)\cdot\mathbf{1}_\Omega$ des Portfolioinhabers zum Zeitpunkt 0 und den (rein zufallsbedingt aus dem Handel resultierenden) kumulierten Gewinn $K_t(h)$ des Zeitpunkts $t$ ist sogar charakteristisch für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie: Aus ihr ergibt sich nämlich auch

$$V_t(h) - V_{t-1}(h) = K_t(h) - K_{t-1}(h) = G_t(h) = V_t(h) - R_{t-1}(h),$$

also $V_{t-1}(h) = R_{t-1}(h)$ und $L_{t-1}(h) = V_{t-1}(h) - R_{t-1}(h) = 0$ für $t = 1,\ldots,T$, sodass $h$ selbstfinanzierend ist. Es gilt also die folgende Charakterisierung der Selbstfinanzierungsbedingung (SF) einer Handelsstrategie:[6]

(SF) $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$

$\Leftrightarrow$ (SFV) $h \in \mathcal{H}_N$ mit $V_t(h) = V_0(h) + K_t(h)$ $\qquad (t = 0,1,\ldots,T).$

In der Prozess-Schreibweise lautet diese additive Zerlegung (SFV)

$$V(h) = v_0(h) \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} + K(h).$$

---

5 Diese Aussage findet man bei Kremer (2011), S. 161, Satz 3.39.

6 Diese Charakterisierung einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie bringt Kremer (2011) auf S. 162 in Folgerung 3.40.

Eine grafische Darstellung des kumulierten Gewinns $K_T(h) = V_T(h) - V_0(h)$ des Endzeitpunkts $T$ für eine sf-Handelsstrategie wird in Abbildung 5.1 gegeben. Der kumulierte Gewinn $K_T(h)$ einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ zum Endzeitpunkt $T$ ist im Allgemeinen kein Portfoliowert eines speziellen Portfolios, sondern ein theoretisches Differenzzahlungsprofil, das sich als Differenz des Portfolio-Vermögenswerts $V_T(h)$ des Zeitpunkts $T$ und des Startkapitaleinsatzes $V_0(h)$ des Zeitpunkts 0 berechnet.
Eine weitere SF-Charakterisierung $(\mathrm{SFh}^N\hat{S})$ mit der rekursiven Auflösung der Gleichung (SFV) nach $h_t^N$ wird in Abschnitt 5.1.7 in der Anmerkung zur (SF)-Charakterisierung im ursprünglichen Marktmodell in Analogie zur entsprechenden Charakterisierung $(\mathrm{SFh}^N)$ im relativen Marktmodell gegeben.

**Charakterisierung von (SF) bei dividendenlosen Wertpapieren**
Falls alle Wertpapiere $S^j$ dividendenlos ($\delta^j = 0$) sind, gilt $S_t^\delta = S_t$,

$$\begin{aligned}
\Delta S_t^\delta &= S_t - S_{t-1} =: \Delta S_t,\\
G_t(h) &= \Delta S_t \cdot h_t,\\
K_t(h) &= \sum_{s=1}^{t} h_s \cdot \Delta S_s
\end{aligned}$$

und für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie die charakteristische Beziehung

(SFV0)
$$\begin{aligned}
V_t(h) &= V_0(h) + \sum_{s=1}^{t} h_s \cdot \Delta S_s\\
&= V_0(h) + \int_0^t h\, dS \qquad (t = 0,1,\ldots,T)
\end{aligned}$$

mit dem **diskreten stochastischen Integral**

$$(h \bullet S)_t := \int_0^t h\, dS := \sum_{s=1}^{t} h_s \cdot \Delta S_s$$

von $h$ nach (bezüglich) $S$ mit dem Integranden $h$ und dem Integrator $S$.

**Unterraum $\mathcal{M}_T$ der NE-Zahlungsprofile als $K_T$-Bild**
Mit der Beziehung (SFV) erhält man für den Unterraum $\mathcal{M}_T$ der NE-Zahlungsprofile, der als das $V_T$-Bild des Kerns $\ker^{sf} V_0$ der Abbildung $V_0 : \mathcal{H}_N^{sf} \longrightarrow \mathbb{R}^\Omega$ definiert ist, auch die Darstellung als $K_T$-Bild $K_T(\ker^{sf} V_0)$ des Unterraums $\ker^{sf} V_0$ bei der linearen Abbildung $K_T : \mathcal{H}_N^{sf} \longrightarrow \mathbb{R}^\Omega$, die jeder selbstfinanzierenden Handelsstrategie $h$ den kumulierten Gewinn $K_T(h)$ des Zeitpunkts $T$ zuordnet:

**Unterraum $\mathcal{M}_T$ als $K_T$-Bild**

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_T &= K_T(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0)\\
&\subseteq K_T(\mathcal{H}_N^{sf}) =: \mathcal{K}_T .
\end{aligned}$$

**Beweis**: Wegen (SFV) gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_T &:= L_T(\ker^{sf} V_0) = V_T(\ker^{sf} V_0)\\
&= \{V_T(h) = V_0(h) + K_T(h) : h \in \mathcal{H}_N^{sf},\ V_0(h) = 0\}
\end{aligned}$$

$$= \{K_T(h) : h \in \mathcal{H}_N^{sf},\ V_0(h) = 0\} = K_T(\ker^{sf} V_0)$$
$$\subseteq \{K_T(h) : h \in \mathcal{H}_N^{sf}\} = K_T(\mathcal{H}_N^{sf}) =: \mathcal{K}_T. \qquad \square$$

Zu beachten ist, dass die NE-Zahlungsprofile $Z_T = V_T(h) \in \mathcal{M}_T$, $h \in \ker^{sf} V_0$, als ökonomische Werte durch die Portfolio-Vermögenswerte zum Zeitpunkt $T$ von selbstfinanzierenden Handelsstrategien mit Startkapitaleinsatz Null realisiert werden. Dagegen sind die Zahlungsprofile $Y_T = K_T(h) \in \mathcal{K}_T$, $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$, des kumulierten Gewinns zunächst keine ökonomischen Werte, sondern rein theoretische Differenzzahlungsprofile, die sich als Differenz der Vermögenswerte $V_T(h)$ und $V_0(h)$ von sf-Handelsstrategien zu den verschiedenen Zeitpunkten $T$ und 0 berechnen. Die Zahlungsprofile $Y_T \in \mathcal{K}_T$ werden im Folgenden als **KG-Zahlungsprofile** (KG = kumulierter Gewinn bei $t = T$) bezeichnet. Während im Unterraum $\mathcal{M}_T$ nur KG-Zahlungsprofile von sf-Handelsstrategien mit Startkapitaleinsatz Null auftreten, werden im umfassenderen Unterraum $\mathcal{K}_T$ auch KG-Zahlungsprofile von sf-Handelsstrategien mit einem von Null verschiedenen Startkapitaleinsatz erfasst.
Die ökonomische Interpretierbarkeit der KG-Zahlungsprofile $Y_T \in \mathcal{K}_T := K_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ und der Startkapital-Zahlungsprofile $U_T \in \mathcal{V}_0 := V_0(\mathcal{H}_N^{sf})$ als Vermögenswerte $X_T \in \mathcal{V}_T$ wird in Abschnitt 5.3.5 unter der Voraussetzung (ZVU) gezeigt: $\mathcal{K}_T \subseteq \mathcal{V}_T$, $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_T$.
Für den entsprechenden Unterraum

$$\tilde{\mathcal{M}}_T := \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker \tilde{V}_0)$$

der relativen NE-Zahlungsprofile im relativen Marktmodell liegt aber stets die Übereinstimmung mit dem Unterraum

$$\tilde{\mathcal{K}}_T := \tilde{K}_T(\mathcal{H}_N^{sf})$$

der relativen KG-Zahlungsprofile vor (Beweis folgt in Abschnitt 5.1.7). Die Unterräume $\mathcal{M}_T$, $\mathcal{M}_T^{\perp}$, $\tilde{\mathcal{M}}_T$ und $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ spielen eine wichtige Rolle bei der Charakterisierung des Law of One Price und bei der Bereitstellung eines Bewertungsvektors für die endfälligen sf-duplizierbaren Zahlungsprofile in Abschnitt 5.3.3.

### 5.1.6 Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit im ursprünglichen Marktmodell mittels der kumulierten Gewinne

Mit Hilfe des oben hergeleiteten Zusammenhangs (SFV) zwischen Vermögensprozess $V(h)$ und kumuliertem Gewinnprozess $K(h)$ im ursprünglichen Marktmodell bei der Charakterisierung einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie $h$ kann eine Charakterisierung der Arbitragefreiheit (AFsf) mittels des kumulierten Gewinns $K_T(h)$ angegeben werden. Die Arbitragefreiheit (AFsf) ist dadurch definiert, dass es keine selbstfinanzierende Handelsstrategie $h$ gibt mit

$$V_0(h) = 0 \ \wedge \ V_T(h) \gneq 0.$$

Wegen (SFV) (für $t = T$: $V_T(h) = V_0(h) + K_T(h)$) erhält man die zu (AFsf) äquivalente Bedingung[7]

[7] Diese Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit im ursprünglichen Marktmodell geben Bäuerle u. Rieder (2017) auf S. 11 in Bemerkung 2.1 b).

(AFsfK) $\nexists\, h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ mit $V_0(h) = 0$ und $K_T(h) \gneq 0$.

Aufgrund der obigen Darstellung von $\mathcal{M}_T$ als $K_T$-Bild $K_T(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0)$ ist diese Bedingung (AFsfK) in der Mengenschreibweise wieder äquivalent zur bereits angegebenen Bedingung (AFsf$\mathcal{M}_T$) $\mathcal{M}_T \cap \mathbb{R}^{\Omega}_{\gneq 0} = \emptyset$.

## 5.1.7 Charakterisierungen der Selbstfinanzierungsbedingung (SF) im relativen Marktmodell

Es werden nun die verschiedenen Prozesse zur Beschreibung der Wertentwicklung des Portfolios im *relativen* Marktmodell betrachtet. Dies erfolgt zunächst noch für Wertpapiere $S^j$ ($j = 1,\ldots,N$) mit Dividenden. Dividendenlose Wertpapiere werden dann bei der Charakterisierung eines Martingalmaßes im relativen Marktmodell zugrunde gelegt. Wie bereits in Abschnitt 3.10 mit anderer Nummerierung der Wertpapiere beschrieben wurde, sind jetzt für das Marktmodell $N$ - 1 mit Dividenden $\delta^j$ versehene Wertpapiere $S^j$ ($S^{\delta,j} = S^j + \delta^j$, $j = 1,\ldots,N$ - 1) und ein dividendenloser positiver **Numéraire**

(NM) $B := S^N > 0$

(als Recheneinheit, Bezugsgröße, Referenzwertpapier; $\delta^N = 0$) ausgewählt. Bei der Nummerierung wird jetzt o. B. d. A. (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) der Numéraire als $N$-tes Wertpapier gewählt, sodass die Nummerierung der Nichtnuméraire-Wertpapiere $S^j$ von 1 bis $N$ - 1 läuft und der zugehörige Nichtnuméraire-Anteil $\overline{h}$ der Handelsstrategien $h$ bei den Komponenten $h_j$ ebenfalls eine Nummerierung von 1 bis $N$ - 1 besitzt. Der Numéraire $B$ ist hier noch stochastisch, wird also nicht wie meist üblich deterministisch, also auf $\Omega$ konstant, gewählt (z. B. $B_t = u_t \cdot \mathbf{1}_\Omega$ mit $u_t = (1 + r)^t$ für $t \in I$ mit deterministischem reellen Zinssatz $r \geq 0$).

Mit den **relativen** (diskontierten oder modifizierten) **Wertpapierkursen**

$$\tilde{S}_t^j = \frac{S_t^j}{B_t}, \quad \tilde{S}_t^{\delta,j} = \frac{S_t^{\delta,j}}{B_t}$$

($j = 1,\ldots,N$, $t = 0,\ldots,T$) ergibt sich speziell für den relativen Kurs des Numéraires $B = S^N$ der Wert $\tilde{B}_t = S_t^N / B_t = 1$ für alle $t \in I$. Wie auch in Abschnitt 3.10 schon erwähnt wurde, besitzt das relative Marktmodell somit die folgende besondere Eigenschaft:

Im **relativen Marktmodell** existiert stets das spezielle auf $I \times \Omega$ **konstante Finanzinstrument** $\tilde{S}^N = \tilde{B} = 1$, also ein konstanter relativer Numéraire $\tilde{B}$:

$$\tilde{S}_t^N = \tilde{B}_t = 1 \text{ für alle } t \in I.$$

Demzufolge existieren in dem aus den relativen Wertpapierkursen gebildeten relativen Marktmodell mit diesem festverzinslichen Finanzinstrument $\tilde{S}^N$ (siehe Definition (FF)) auch festverzinsliche Handelsstrategien $\eta^t = \eta_t^t \mathbf{1}_{t,\Omega}$ ($t = 1,\ldots,T$) gemäß der Definition (FH) in Abschnitt 3.9.1. Die Existenz dieses konstanten relativen Numéraires $\tilde{B}$ bedeutet die Möglichkeit der Kassenhaltung bei der Investition in dieses Finanzinstrument. Das relative Marktmodell ist infolge seiner Definition und insbesondere der Ausstattung mit dem konstanten relativen Numéraire $\tilde{B} = 1$ von speziellerer Struktur als das ursprüngliche Marktmodell. Dies begründet auch eine im vorliegenden Abschnitt 5.1.7 noch herzuleitende besondere Charakterisierung einer sf-Handelsstrategie und deren relativen Vermögenswerts und damit gegen-

über dem ursprünglichen Marktmodell einen wichtigen Vorteil bei einer passenden Auswahl einer sf-Handelsstrategie. Anwendungen dieses Vorteils werden im Anschluss an Satz 5.2 angeführt. Außerdem besitzt das relative Marktmodell auch schon die entsprechenden Eigenschaften (ZVUrel), die im ursprünglichen Marktmodell für weiterreichende Aussagen im Abschnitt 5.3.5 mit der Bedingung (ZVU) erst noch vorausgesetzt werden müssen. Somit steht mit dem relativen Marktmodell neben dem ursprünglichen Marktmodell ein Marktmodell zur Verfügung, das in vielfältiger Weise mit dem ursprünglichen Marktmodell verbunden ist und in dem schon weitergehende Aussagen ohne zusätzliche Voraussetzungen möglich sind. Die enge Verknüpfung von ursprünglichem und relativem Marktmodell zeigt sich beispielsweise in der Äquivalenz der Begriffe sf-Arbitragefreiheit (AFsf) (Satz 5.1 in Abschnitt 5.1.3), Selbstfinanzierungsbedingung (SF) (Abschnitt 5.1.7), sf-Vollständigkeit (Abschnitt 5.2.3), Law of One Price LOPsfT (Abschnitt 5.3.4), Arbitragefreiheit (AF) und Vollständigkeit (VS) (Satz 3.11 in Abschnitt 3.10.1).
Es wird jetzt bei den weiteren Betrachtungen in Kapitel 5 aber nicht wie im Abschnitt 3.10 die allgemeine Arbitragefreiheit (AF) vorausgesetzt, aus der dort noch weitere Folgerungen geschlossen wurden. Es werden hier nur die spezieller definierten Begriffe der sf-Arbitragefreiheit, der sf-Vollständigkeit und des LOPsf (der Gültigkeit des LOP speziell für die sf-Duplikationsstrategien von endfälligen Zahlungsprofilen $X \in \mathcal{W}(T)$) untersucht.

In dem aus den relativen Kursen $\tilde{S}_t$ und relativen Dividenden $\tilde{\delta}_t$ gebildeten relativen Marktmodell $\left((\tilde{S},\tilde{\delta}),\mathcal{F}\right)$ berechnen sich der relative (diskontierte oder modifizierte) Vermögensprozess $\tilde{V}(h)$, Reinvestitionsprozess $\tilde{R}(h)$, Auszahlungsprozess $\tilde{L}(h)$, Gewinnprozess $\tilde{G}(h)$, kumulierte Gewinnprozess $\tilde{K}_t(h)$ und kumulierte Auszahlungsprozess $\tilde{A}_t(h)$ folgendermaßen:

$$
\begin{aligned}
\tilde{V}_t(h) &= \tilde{S}_t^{\delta} \cdot h_t &&= \frac{S_t^{\delta}}{B_t} \cdot h_t &&= \frac{V_t(h)}{B_t}, \\
\tilde{R}_t(h) &= \tilde{S}_t \cdot h_{t+1} &&= \frac{S_t}{B_t} \cdot h_{t+1} &&= \frac{R_t(h)}{B_t}, \\
\tilde{L}_t(h) &= \tilde{V}_t(h) - \tilde{R}_t(h) &&= \frac{L_t(h)}{B_t} && (t = 0,\ldots,T), \\
\tilde{G}_t(h) &= \tilde{V}_t(h) - \tilde{R}_{t-1}(h) &&= \Delta\tilde{S}_t^{\delta} \cdot h_t \\
&= \frac{V_t(h)}{B_t} - \frac{R_{t-1}(h)}{B_{t-1}} &&= \frac{S_t^{\delta}}{B_t} \cdot h_t - \frac{S_{t-1}}{B_{t-1}} \cdot h_t && (t = 1,\ldots,T), \\
\tilde{G}_0(h) &:= 0, \\
\tilde{K}_t(h) &= \sum_{s=1}^{t} \tilde{G}_s(h) &&= \sum_{s=1}^{t} \Delta\tilde{S}_s^{\delta} \cdot h_s && (t = 1,\ldots,T), \\
\tilde{K}_0(h) &:= 0, \\
\tilde{A}_t(h) &= \sum_{r=0}^{t-1} \tilde{L}_r(h) &&= \sum_{r=0}^{t-1} \frac{L_r(h)}{B_r} && (t = 1,\ldots,T), \\
\tilde{A}_0(h) &:= 0.
\end{aligned}
$$

**Unabhängigkeit des relativen kumulierten Gewinns $\tilde{K}_T(h)$ vom Startportfoliovektor $h_0$**
Wie der kumulierte Gewinn $K_T(h)$ des Endzeitpunkts $T$ im ursprünglichen Marktmodell ist auch der relative kumulierte Gewinn $\tilde{K}_T(h)$ nicht von $h_0$ abhängig, sondern nur von den Zustandsfunktionen $h_1, \ldots, h_T$ abhängig.

**Formale Zerlegung der Portfoliovektoren in Numéraireanteil und Nichtnuméraireanteil**
Der zum Zeitpunkt $t \in I$ gehörige Portfoliovektor

$$h_t = (h_t^1, \ldots, h_t^{N-1}, h_t^N)^\top = (\overline{h}_t, h_t^N)^\top$$

einer Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ lässt sich formal zerlegen in zwei Teilvektoren, nämlich in den Numéraireanteil

$$\beta_t := h_t^N$$

und den Portfoliovektor

$$\overline{h}_t := (h_t^1, \ldots, h_t^{N-1})^\top$$

für die restlichen $N$ - 1 Nichtnuméraire-Wertpapiere im Portfolio. Der Vektorraum der zu den $N$ - 1 Wertpapieren $S^j$ ($j$ = 1,…,$N$-1) gebildeten $\mathbb{R}^{N-1}$-wertigen Handelsstrategien

$$\overline{h} = (\overline{h}_t)_{t \in I} = (\overline{h}_0, \ldots, \overline{h}_T)^\top$$

wird mit $\mathcal{H}_{N-1}$ bezeichnet:

$$\mathcal{H}_{N-1} = \mathcal{H}_{N-1}(\mathcal{F}) = \{\overline{h} \in (\mathbb{R}^{N-1})^{I \times \Omega} : \overline{h} \ \mathcal{F}\text{-vorhersehbar}\}.$$

Neben diesen $\mathbb{R}^{N-1}$-wertigen Handelsstrategien $\overline{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$ für die Nichtnuméraire-Wertpapiere $S^1, \ldots, S^{N-1}$ treten noch die reellwertigen Handelsstrategien

$$h^N = (h_0^N, \ldots, h_T^N)^\top = \beta = (\beta_0, \ldots, \beta_T)^\top \in \mathcal{H}_1$$

für den Numéraire $B = S^N$ auf:

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1(\mathcal{F}) = \{\beta \in \mathbb{R}^{I \times \Omega} : \beta \ \mathcal{F}\text{-vorhersehbar}\}.$$

**Formale Zerlegung der relativen Preiszustandsfunktionen in Numéraireanteil und Nichtnuméraireanteil**
Analog zu dieser Zerlegung der Handelsstrategien $h$ lassen sich auch die relativen Preiszustandsfunktionen $\tilde{S}_t^\delta$ und $\tilde{S}_t$ jeweils formal aufspalten in die $N$-te Komponente, nämlich die auf $I \times \Omega$ konstante reellwertige relative Numérairezustandsfunktion

$$\tilde{S}_t^{\delta,N} = \tilde{S}_t^N = \tilde{B}_t = 1$$

und den restlichen Anteil aus erster bis ($N$ - 1)-ter Komponente als $\mathcal{F}_t$-messbare $\mathbb{R}^{N-1}$-wertige Zustandsfunktion $\overline{S}_t^\delta$ bzw. $\overline{S}_t$ :

$$\tilde{S}_t^\delta = (\overline{S}_t^\delta, 1)^\top \quad \text{mit } \overline{S}_t^\delta := (\tilde{S}_t^{\delta,1}, \ldots, \tilde{S}_t^{\delta,N-1})^\top,$$

$$\tilde{S}_t = (\overline{S}_t, 1)^\top \quad \text{mit } \overline{S}_t := (\tilde{S}_t^1, \ldots, \tilde{S}_t^{N-1})^\top \qquad (t \in I).$$

Zu beachten ist, dass sich die hierbei verwendeten Preiszustandsfunktionen mit dem oberen Querstrich aus den ersten $N$ - 1 Komponenten der *relativen* Preiszustandsfunktionen zusammensetzen.
Anzumerken ist, dass die folgenden Aussagen zum relativen Marktmodell, das aus einem ursprünglichen Marktmodell mit Numéraire gebildet wird, auch für ein ursprüngliches

Marktmodell speziell mit dem konstanten Numéraire $S^N = B = 1$ (Möglichkeit der Kassenhaltung mit Zinssatz 0) gelten.[8]

**Folgerungen aus der Konstanz des relativen Numéraires für die additive Zerlegung der relativen reellwertigen Zustandsfunktionen in Numéraireanteil und Nichtnuméraireanteil**

Mittels dieser formalen Zerlegung der $\mathbb{R}^N$-wertigen Zustandsfunktionen bei den Handelsstrategien und den relativen Preisprozessen lässt sich für die daraus abgeleiteten relativen reellwertigen Zustandsfunktionen $\tilde{V}_t(h)$, $\tilde{R}_t(h)$, $\tilde{L}_t(h)$ und $\tilde{G}_t(h)$ bei der Skalarproduktbildung (siehe Abschnitt 2.7) auf der Ebene der Argumente (unabhängigen Größen) $(t,\omega) \in I \times \Omega$ das Skalarprodukt des $\mathbb{R}^N$ additiv zerlegen in einen Numéraireanteil und einen restlichen Anteil (Nichtnuméraireanteil): Man erhält nämlich im relativen Marktmodell unter Verwendung der Konstanz des relativen Numéraires

$$\tilde{S}_t^{\delta,N} \;=\; \tilde{S}_t^N \;=\; \tilde{B}_t \;=1 \qquad (j = N;\, t \in I)$$

zunächst die Preisdifferenzen

$$\begin{aligned}
&\Delta\tilde{S}_t^{\delta,N} \;=\; \Delta\tilde{S}_t^N \;:=\; \tilde{S}_t^N \;-\; \tilde{S}_{t-1}^N \;= 1 - 1 = 0 && (j = N;\, t = 1,\ldots,T),\\
&\Delta\overline{S}_t^{\delta} \;:=\; \overline{S}_t^{\delta} \;-\; \overline{S}_{t-1}, &&\\
&\Delta\overline{S}_t \;:=\; \overline{S}_t \;-\; \overline{S}_{t-1} && (\text{zu } j = 1,\ldots,N\text{-}1;\, t = 1,\ldots,T),\\
&\Delta\tilde{S}_t^{\delta} \;=\; (\Delta\overline{S}_t^{\delta}, \Delta\tilde{S}_t^{\delta,N})^{\mathsf{T}} \;=\; (\Delta\overline{S}_t^{\delta}, 0)^{\mathsf{T}}, &&\\
&\Delta\tilde{S}_t \;=\; (\Delta\overline{S}_t, \Delta\tilde{S}_t^N)^{\mathsf{T}} \;=\; (\Delta\overline{S}_t, 0)^{\mathsf{T}}, &&
\end{aligned}$$

dann daraus die Darstellungen als reinen Nichtnuméraireanteil für

$$\tilde{G}_t(h) \;= \Delta\tilde{S}_t^{\delta} \cdot h_t = \sum_{j=1}^{N-1} \Delta\tilde{S}_t^{\delta,j} h_t^j + 0 \cdot h_t^N = \Delta\overline{S}_t^{\delta} \cdot \overline{h}_t \;=: \overline{G}_t(\overline{h}) \qquad (t = 1,\ldots,T),$$

$$\tilde{K}_t(h) \;=\; \sum_{s=1}^{t} \tilde{G}_s(h) \;=\; \sum_{s=1}^{t} \Delta\overline{S}_s^{\delta} \cdot \overline{h}_s \qquad =:\; \overline{K}_t(\overline{h}) \qquad (t = 1,\ldots,T),$$

$$\overline{K}_0(\overline{h}) := \overline{G}_0(\overline{h}) \;:= 0$$

und die additiven Zerlegungen in Nichtnuméraireanteil und Numéraireanteil für

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_t(h) \;&=\; \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{S}_t^{\delta,j} h_t^j \;+ 1 \cdot h_t^N \;\;\; = \overline{S}_t^{\delta} \cdot \overline{h}_t \;+\; h_t^N,\\
\tilde{R}_t(h) \;&=\; \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{S}_t^{j} h_{t+1}^j \;+ 1 \cdot h_{t+1}^N \;\;\; = \overline{S}_t \cdot \overline{h}_{t+1} \;+\; h_{t+1}^N,\\
\tilde{L}_t(h) \;&=\; \overline{S}_t^{\delta} \cdot \overline{h}_t \;-\; \overline{S}_t \cdot \overline{h}_{t+1} \;+\; h_t^N \;-\; h_{t+1}^N\\
\tilde{A}_t(h) \;&=\; \sum_{r=0}^{t-1} \tilde{L}_r(h) \;=\; \sum_{r=0}^{t-1} \left( \overline{S}_r^{\delta} \cdot \overline{h}_r \;-\overline{S}_r \cdot \overline{h}_{r+1} \right) \;+\; h_0^N \;-\; h_t^N \qquad (t \in I).
\end{aligned}$$

---

[8] Für die Gültigkeit der entsprechenden Formeln zur Herleitung des nachfolgend dargestellten Vorteils beim relativen Marktmodell würde zunächst sogar genügen, dass das Finanzinstrument $B$ nur hinsichtlich des Zeitparameters $t \in I$ konstant ist: $B_t = \beta \;\forall\, t \in I$ mit einem $\beta \in \mathbb{R}^{\Omega}$, $\beta > 0$. Wegen des deterministischen $B_0$ ist dann aber auch $\beta$ und der gesamte Prozess $B$ deterministisch und o. E. (nach Division mit $\beta \in \mathbb{R}$) auch hier $B = \beta = 1$.

Weiter erhält man den oben in Abschnitt 5.1.5 schon analog für das ursprüngliche Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ hergeleiteten Zusammenhang der Größen $\tilde{V}_t(h)$, $\tilde{V}_0(h)$ und $\tilde{G}_t(h)$, $\tilde{L}_t(h)$ bzw. $\tilde{K}_t(h)$, $\tilde{A}_t(h)$:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_t(h) &= \tilde{V}_0(h) + \tilde{K}_t(h) - \tilde{A}_t(h)\\ &= \tilde{V}_0(h) + \overline{K}_t(\overline{h}) - \sum_{r=0}^{t-1}\tilde{L}_r(h)\\ &= \tilde{V}_0(h) + \sum_{s=1}^{t}\Delta\overline{S}_s^{\delta}\cdot\overline{h}_s - \sum_{r=0}^{t-1}\left(\overline{S}_r^{\delta}\cdot\overline{h}_r - \overline{S}_r\cdot\overline{h}_{r+1}\right) + h_0^N - h_t^N\,.\end{aligned}$$

Der relative Vermögenswert $\tilde{V}_t(h)$ des Portfolios zum Zeitpunkt *t* berechnet sich also als Summe von relativem Startkapital $\tilde{V}_0(h)$ und dem durch die Kursänderungen der Wertpapiere verursachten relativen kumulierten Gewinn $\tilde{K}_t(h)$ abzüglich der relativen kumulierten Auszahlung $\tilde{A}_t(h)$.[9] Der relative kumulierte Gewinn $\tilde{K}_t(h)$ einer Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ zum Zeitpunkt *t* ist zunächst per Definition kein ökonomischer Wert wie zum Beispiel ein Portfoliowert $\tilde{V}_t(h)$. Er ist als theoretische Größe definiert, die sich berechnet, indem vom relativen Portfolio-Vermögenswert $\tilde{V}_t(h)$ des Zeitpunkts *t* der relative Startkapitaleinsatz $\tilde{V}_0(h)$ des Zeitpunkts 0 abgezogen und die relativen Portfolio-Auszahlungen $\tilde{L}_r(h)$ des Zeitraums $[0,t\text{-}1]$ addiert werden. Beim Beweis der Aussage $\tilde{\mathcal{K}}_T = \tilde{\mathcal{M}}_T$ mit Hilfe des nachfolgenden Satzes 5.2 wird aber noch gezeigt, dass im relativen Marktmodell der zum Endzeitpunkt *T* gehörige relative kumulierte Gewinn $\tilde{K}_T(h)$ einer *selbstfinanzierenden* Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ auch mit einem NE-Zahlungsprofil $\tilde{V}_T(g)$ $(g \in \ker^{sf} V_0)$ übereinstimmt und somit ökonomisch als Portfoliowert interpretiert werden kann.

**Unabhängigkeit des relativen kumulierten Gewinns $\tilde{K}_T(h)$ vom Numéraireanteil $h^N$ als wichtiger Vorteil bei der SF-Charakterisierung**

Infolge der Konstanz des relativen Numéraires $\tilde{B}_t = 1$ $(t \in I)$ im relativen Marktmodell und damit dem Verschwinden der zugehörigen relativen *N*-ten Preisdifferenzen $\Delta\tilde{S}_t^{\delta,N} = \Delta\tilde{S}_t^N$ hängt der relative Gewinn $\tilde{G}_s(h) = \overline{G}_s(\overline{h}) = \Delta\overline{S}_s^{\delta}\cdot\overline{h}_s$ $(s = 1,\ldots,T)$ nur von dem Nichtnuméraireanteil $\overline{h}_s = (h_s^1,\ldots,h_s^{N-1})^{\mathsf{T}}$ des Portfoliovektors $h_s$ und nicht von dessem Numéraireanteil $h_s^N$ ab. Demzufolge hängt auch der relative kumulierte Gewinn

$$\tilde{K}_T(h) = \overline{K}_T(\overline{h})$$

des Endzeitpunkts $T$ nur von den Nichtnuméraireanteilen $\overline{h}_s$ und nicht von den Numéraireanteilen $h_s^N$ $(1 \le s \le T)$ ab. Außerdem hängt der relative kumulierte Gewinn $\overline{K}_T(\overline{h})$, wie oben schon analog im ursprünglichem Marktmodell begründet wurde, nicht von $h_0$ ab und damit insbesondere auch nicht von dessem Numéraireanteil $\overline{h}_0^N$ $(s = 0)$ ab. Insgesamt hängt

[9] Diese Aussage für das relative Marktmodell findet man bei Kremer (2011), S. 214.

also der relative kumulierte Gewinn $\tilde{K}_T(h) = \overline{K}_T(\overline{h})$ nur vom Nichtnumäraireanteil $\overline{h} = (h_t^1,...,h_t^{N-1})_{t\in I}$ und nicht vom Numäraireanteil $h^N = (h_t^N)_{t\in I}$ der Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ ab. Diese im ursprünglichen Marktmodell im Allgemeinen (d. h. wenn nicht auch hier schon ein konstanter Numéraire[10] $S^N = B = \beta$ existiert) nicht vorliegende Eigenschaft des kumulierten Gewinns liefert zusammen mit den daraus noch resultierenden Beziehungen (SF$\overline{\text{K}}$) und (SFh$^{\text{N}}$) einen im nachfolgenden Satz 5.2 b) beschriebenen **wichtigen Vorteil** des relativen Marktmodells bei der Arbeit mit *selbstfinanzierenden* Handelsstrategien:
Bei beliebiger Wahl der reellen Zahl $\tilde{v}_0$ und der Nichtnumäraire-Handelsstrategie $\overline{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$ und mit passender Festlegung des Numäraireanteils $h^N$ durch die Bedingung (SFh$^{\text{N}}$) $h_t^N = \tilde{V}_0(h) + \overline{K}_t(\overline{h}) - \overline{S}_t^{\delta} \cdot \overline{h}_t$ ist die Summe des relativen Startkapitaleinsatzes $\tilde{v}_0 \mathbf{1}_\Omega$ und des relativen kumulierten Gewinns $\overline{K}_T(\overline{h})$ der Handelsstrategie $\overline{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$ der relative Vermögenswert $\tilde{V}_T(h)$ einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie $h = (\overline{h}, h^N)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{H}_N^{sf}$. In den Anwendungen dieser Darstellung (SF$\overline{\text{K}}$) kann durch passende beliebige Wahl von $\tilde{v}_0 \in \mathbb{R}$ und $\overline{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$ der relative kumulierte Gewinn $\overline{K}_T(\overline{h})$ und dann auch der relative Vermögenswert $\tilde{V}_T(h)$ einer sf-Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ geeignet bestimmt werden.

**Charakterisierungen der Selbstfinanzierungsbedingung (SF) im relativen Marktmodell**

Eine Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ ist im ursprünglichen Marktmodell genau dann selbstfinanzierend, also mit der Eigenschaft
(SF) $\quad L_t(h) = 0$ für $t = 0, 1, \ldots, T\text{-}1$
versehen, wenn für sie
($\widetilde{\text{SF}}$) $\quad \tilde{L}_t(h) = L_t(h)/B_t = 0$ für $t = 0,\ldots,T\text{-}1$
gilt, wenn sie also im relativen Marktmodell selbstfinanzierend ist.

Analog zur entsprechenden Charakterisierung (SFV) der Selbstfinanzierungsbedingung (SF) im ursprünglichem Marktmodell ergibt sich daher mit der obigen additiven Zerlegung des relativen Vermögenswerts $\tilde{V}_t(h)$ wegen $\tilde{A}_t(h) = 0$ für $t \in I$ die folgende Charakterisierung der Selbstfinanzierungsbedingung ($\widetilde{\text{SF}}$) im relativen Marktmodell mittels der relativen Vermögenswerte $\tilde{V}_t(h)$, dem relativen Startkapitaleinsatz $\tilde{V}_0(h)$ und der relativen kumulierten Gewinne $\tilde{K}_t(h)$:

$$
\begin{aligned}
h \in \mathcal{H}_N^{sf} \quad &\Leftrightarrow (\text{SF}\tilde{\text{V}}) \quad \tilde{V}_t(h) = \tilde{V}_0(h) + \tilde{K}_t(h) && (t \in I)\\
&\Leftrightarrow (\text{SF}\overline{\text{K}}) \quad \tilde{V}_t(h) = \tilde{V}_0(h) + \overline{K}_t(\overline{h})\\
&\qquad\qquad\quad = \tilde{V}_0(h) + \sum_{s=1}^{t} \Delta\overline{S}_s^{\delta} \cdot \overline{h}_s && (t \in I).
\end{aligned}
$$

Für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie hat man also eine additive Zerlegung des relativen Vermögenswerts $\tilde{V}_t(h)$ zum Zeitpunkt $t$ in den relativen Startkapitaleinsatz $\tilde{V}_0(h)$

[10] Für einen konstanten Numéraire $S^N = B = \beta$ ist $B_t = \beta = B_0$ deterministisch für alle $t \in I$ mit einem $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ und o. E. $\beta = 1$.

$= \tilde{v}_0(h) \cdot \mathbf{1}_\Omega$ ($\tilde{v}_0(h) = v_0(h)/B_0 = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 / B_0$) des Zeitpunkts 0 und den relativen kumulierten Gewinn $\tilde{K}_t(h) = \overline{K}_t(\overline{h})$ des Zeitpunkts $t$, der sich nur aus dem Nichtnuméraireanteil $\overline{h}$ der Handelsstrategie berechnet. In der Prozess-Schreibweise lautet die additive Zerlegung (SF$\overline{\text{K}}$)

$$\tilde{V}(h) = \tilde{v}_0(h) \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} + \overline{K}(\overline{h}).$$

Zu beachten ist, dass bei dieser additiven Zerlegung (SF$\overline{\text{K}}$) des relativen Vermögenswertes $\tilde{V}_t(h)$ einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie $h$ der Numérairanteil $h^N = (h_0^N, ..., h_T^N)^\mathsf{T}$ nur in das relative Startkapital

$$\tilde{V}_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 / B_0 = (\overline{S}_0^{\delta\mathsf{T}} \overline{h}_0 + S_0^{\delta,N} h_0^N) / B_0$$

(und zwar nur mit $h_0^N$) eingeht und nicht benötigt wird zur Berechnung des relativen kumulierten Gewinns $\overline{K}_t(\overline{h})$. Der erste Summand $\tilde{V}_0(h)$ hängt nur von $h_0$ ab und der zweite Summand $\overline{K}_t(\overline{h})$ nur vom Nichtnumérairanteil $\overline{h}$. Aus dieser im relativen Marktmodell gültigen Beziehung (SF$\overline{\text{K}}$) zwischen Vermögenswert $\tilde{V}_t(h)$, Startkapitaleinsatz $\tilde{V}_0(h)$ und kumuliertem Gewinn $\tilde{K}_t(h) = \overline{K}_t(\overline{h})$ einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie $h$ und der obigen additiven Zerlegung

$$\tilde{V}_t(h) = h_t^N + \overline{S}_t^\delta \cdot \overline{h}_t$$

in Numérairanteil $h_t^N$ und Nichtnumérairanteil $\overline{S}_t^\delta \cdot \overline{h}_t$ folgt dann ein Zusammenhang zwischen dem Numérairanteil $h_t^N$ von $h$ des Zeitpunkts $t$, dem deterministischen relativen Startkapital $\tilde{V}_0(h) = V_0(h)/B_0$ von $h$ und den Nichtnumérairanteilen $\overline{h}_s$ von $h$ des Zeitintervalls $[1,t]$, der wegen der Unabhängigkeit des relativen kumulierten Gewinns $\tilde{K}_t(h) = \overline{K}_t(\overline{h})$ vom Numérairanteil $h^N$ eine einfache Auflösung der Gleichung nach dem Numérairanteil $h_t^N$ ermöglicht:

$$h_t^N + \overline{S}_t^\delta \cdot \overline{h}_t = \tilde{V}_t(h) = \tilde{V}_0(h) + \overline{K}_t(\overline{h}) \quad \text{bzw.}$$

$$(\text{SFh}^\text{N}) \qquad h_t^N = \tilde{v}_0 \mathbf{1}_\Omega + \sum_{s=1}^{t} \Delta\overline{S}_s^\delta \cdot \overline{h}_s - \overline{S}_t^\delta \cdot \overline{h}_t \qquad (t \in I).$$

Beispielsweise erhält man für $t = 0, 1$ die Auflösungen

$$h_0^N = \tilde{v}_0 \mathbf{1}_\Omega - \overline{S}_0^\delta \cdot \overline{h}_0,$$
$$h_1^N = \tilde{v}_0 \mathbf{1}_\Omega - \overline{S}_0 \cdot \overline{h}_1.$$

Für eine Handelsstrategie $h$ ist diese Beziehung (SFh$^\text{N}$) ebenfalls charakteristisch für die Selbstfinanzierungsbedingung ($\widetilde{\text{SF}}$), da aus ihr auch wieder die zu ($\widetilde{\text{SF}}$) äquivalente Eigenschaft (SF$\tilde{\text{V}}$) folgt:

$$h \in \mathcal{H}_N^{sf} \iff (\text{SFh}^\text{N}) \quad h_t^N = \tilde{v}_0 \mathbf{1}_\Omega + \sum_{s=1}^{t} \Delta\overline{S}_s^\delta \cdot \overline{h}_s - \overline{S}_t^\delta \cdot \overline{h}_t \qquad (t \in I).$$

Diese Charakterisierung (SFh$^\text{N}$) im relativen Marktmodell liefert einen Vorteil bei der Arbeit mit selbstfinanzierenden Handelsstrategien, indem sie eine Alternative bietet, wie eine beliebige selbstfinanzierende Handelsstrategie ausgewählt werden kann. Nach dem folgenden

Satz 5.2 a)[11] können dazu der Nichtnumérairеanteil $\overline{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$ und das Startkapital $\tilde{V}_0(h) = \tilde{v}_0 \mathbf{1}_\Omega$ ($\tilde{v}_0 \in \mathbb{R}$) völlig beliebig gewählt werden und dann mit dem dadurch eindeutig bestimmten Numérairеanteil $h_t^N$ der Nichtnumérairеanteil $\overline{h}$ zu einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie $h$ ergänzt werden. Die selbstfinanzierenden Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ können identifiziert werden mit den Paaren $(\tilde{v}_0, \overline{h}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}_{N-1}$ aus einer reellen Zahl $\tilde{v}_0$ und einer $\mathbb{R}^{N-1}$-wertigen Handelsstrategie $\overline{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$:

$$h = (\overline{h}, h^N)^\mathsf{T} = (h^1, \ldots, h^{N-1}, h^N)^\mathsf{T} \in \mathcal{H}_N^{sf} \overset{\text{Bijektion}}{\leftrightarrow} (\tilde{v}_0, \overline{h}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}_{N-1}.$$

Anstatt die selbstfinanzierenden Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ durch die allgemeineren Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N$ mit den in der Selbstfinanzierungsbedingung (SF) angeführten linearen Gleichungen $L_t(h) = 0$ ($t = 0, \ldots, T\text{-}1$) zu beschreiben, können sie auch durch beliebige Paare $(\tilde{v}_0, \overline{h}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}_{N-1}$ ohne weitere Bedingung dargestellt werden. Der bereits erwähnte Vorteil des relativen Marktmodells gegenüber einem allgemeinen ursprünglichen Marktmodell (ohne konstanten Numéraire $S^N = B$) beruht aber darauf, dass nach beliebiger und passender Wahl von $(\tilde{v}_0, \overline{h})$ für eine sf-Handelsstrategie $h$ der relative kumulierte Gewinn $\overline{K}_T(\overline{h})$ nur von $\overline{h}$ und nicht von $h^N$ und der relative Vermögenswert $\tilde{V}_T(h)$ gemäß (SF$\overline{\text{K}}$) nur von $\tilde{v}_0$ und $\overline{h}$ abhängen.

**Satz 5.2 Charakterisierung einer sf-Handelsstrategie und deren relativen Vermögenswerts**

Das Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ besitze einen Numéraire $B = S^N$.

**a) Charakterisierung der selbstfinanzierenden Handelsstrategien im relativen Marktmodell mittels relativem Startkapitaleinsatz und Nichtnumérairеanteil**

Die Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ ist genau dann eine selbstfinanzierende Handelsstrategie, also

$$h = (\overline{h}, h^N)^\mathsf{T} \in \mathcal{H}_N^{sf} = L^{-1}(\mathcal{W}(T)),$$

wenn bei beliebiger Vorgabe des $\mathcal{F}$-vorhersehbaren $\mathbb{R}^{N-1}$-wertigen Nichtnumérairеanteils

$$\overline{h} := (h^1, \ldots, h^{N-1})^\mathsf{T} \in \mathcal{H}_{N-1}$$

und des Werts

$$\tilde{v}_0 \in \mathbb{R}$$

für das relative Startkapital $\tilde{V}_0(h) = \tilde{v}_0 \mathbf{1}_\Omega$ daraus die $\mathcal{F}_{t-1}$-messbaren Numérairеanteile $h_t^N = \beta_t$ der Zustandsfunktionen

$$h_t = (h_t^1, \ldots, h_t^{N-1}, h_t^N)^\mathsf{T} = (\overline{h}_t, h_t^N)^\mathsf{T}$$

jeweils mittels folgender Gleichung bestimmt werden:

$$(\text{SF}\beta) \qquad \beta_t = \tilde{v}_0 \mathbf{1}_\Omega + \sum_{s=1}^{t} \Delta\overline{S}_s^\delta \cdot \overline{h}_s - \overline{S}_t^\delta \cdot \overline{h}_t \qquad (t \in I).$$

[11] Diesen Satz zur Charakterisierung der Selbstfinanzierung (SF) mittels (SFh$^N$) findet man für dividendenversehene Wertpapiere bei Kremer (2011), S. 214, Satz 3.83, und für dividendenlose Wertpapiere bei Kallsen (2009), S. 36, Lemma 3.6, Kühn (2016), S. 31, Satz 1.14 und Bäuerle u. Rieder (2017), S. 9, Lemma 2.1.

**b) Charakterisierung des relativen Vermögenswerts einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie als Summe eines relativen Startkapitaleinsatzes und des kumulierten Gewinns des Nichtnumérairеanteils einer Handelsstrategie**

Ein Zahlungsprofil $\tilde{X}_T \in \mathbb{R}^{\Omega}$ ist genau dann der relative Vermögenswert $\tilde{V}_T(h)$ einer sf-Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$, wenn es gemäß der SF-Charakterisierung (SF$\overline{\text{K}}$) die Summe eines relativen Startkapitaleinsatzes $\tilde{v}_0 \mathbf{1}_{\Omega}$ und des relativen kumulierten Gewinns $\overline{K}_T(\overline{h})$ einer Nichtnumémaire-Handelsstrategie $\overline{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$ ist:

$$\tilde{X}_T \in \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf}) \Leftrightarrow \tilde{X}_T = \tilde{v}_0 \mathbf{1}_{\Omega} + \overline{K}_T(\overline{h}) \text{ mit } \tilde{v}_0 \in \mathbb{R},\ \overline{h} \in \mathcal{H}_{N-1}.$$

**Beweis:** a) „⇒“: Für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ wurde oben bereits die Gleichung (SFh$^N$) und damit die im Satz angegebene Gleichung (SF$\beta$) hergeleitet, wobei $\beta_t = h_t^N$ ($t \in I$) und $\tilde{v}_0$ der Wert der $\mathcal{F}_0$-messbaren und damit auf $\Omega$ konstanten Zustandsfunktion $\tilde{V}_0(h)$ ist.

„⇐“: Mit der beliebigen Wahl von $\overline{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$ und $\tilde{v}_0 \in \mathbb{R}$ und der im Satz für die $t \in I$ angegebenen Festlegung (SF$\beta$) von $\beta_t$ ist tatsächlich $h_t^N := \beta_t$ eine $\mathcal{F}_{t-1}$-messbare Zustandsfunktion, da der in der Summe für den Index $s = t$ auftretende Summand $\overline{S}_t^{\delta} \cdot \overline{h}_t$ nachfolgend noch abgezogen wird. Die Zustandsfunktion $h_t^N$ ergänzt somit $\overline{h}_t$ zur $\mathcal{F}_{t-1}$-messbaren Zustandsfunktion $h_t = (\overline{h}_t, h_t^N)^{\mathsf{T}}$, sodass $h = (h_0,\ldots,h_T)^{\mathsf{T}}$ eine Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ ist. Aufgrund der Definition von $h_t^N$ stimmt die Gleichung (SF$\beta$) mit der Gleichung (SFh$^N$) überein, die gleichbedeutend zur Selbstfinanzierungsbedingung (SF) von $h$ ist.

b) „⇒“: Für den Vermögenswert $\tilde{V}_T(h)$ einer sf-Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ wurde oben mit (SF$\overline{\text{K}}$) bereits die Darstellung als Summe des relativen Startkapitaleinsatzes $\tilde{V}_0(h) = \tilde{v}_0 \mathbf{1}_{\Omega}$, $\tilde{v}_0 \in \mathbb{R}$, und des relativen kumulierten Gewinns $\overline{K}_t(\overline{h})$ des Nichtnumémaireanteils $\overline{h}$ der Handelsstrategie $h$ gezeigt.

„⇐“: Zu einem Zahlungsprofil $\tilde{X}_T = \tilde{v}_0 \mathbf{1}_{\Omega} + \overline{K}_T(\overline{h})$ mit $\tilde{v}_0 \in \mathbb{R}$ und $\overline{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$ gibt es nach Beweisteil a) eine sf-Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ mit dem relativen Startkapitaleinsatz $\tilde{V}_0(h) = \tilde{v}_0 \mathbf{1}_{\Omega}$, dem Nichtnumémaireanteil $\overline{h}$, dem gemäß (SF$\beta$) bestimmten Numéraireanteil $h^N = \beta$, mit dem relativen kumulierten Gewinn $\tilde{K}_t(h) = \overline{K}_t(\overline{h})$ und daher gemäß (SF$\overline{\text{K}}$) dem relativen Vermögenswert

$$\tilde{V}_T(h) = \tilde{V}_0(h) + \overline{K}_T(\overline{h}) = \tilde{X}_T .$$ □

**Anmerkung zur entsprechenden SF-Charakterisierung im ursprünglichen Marktmodell** mit der beliebigen Wahl von $v_0$ und $\overline{h}$: Hiermit soll verdeutlicht werden, dass erst bei konstantem Numéraire $S^N = B = 1$ sich die besondere Darstellung (SF$\overline{\text{K}}$) für den Vermögenswert einer sf-Handelsstrategie ergibt.

Eine zur SF-Charakterisierung

(SFh$^N$)
$$\begin{aligned} h_t^N &= \tilde{v}_0 \mathbf{1}_{\Omega} + \overline{K}_t(\overline{h}) - \overline{S}_t^{\delta} \cdot \overline{h}_t \\ &= \tilde{v}_0 \mathbf{1}_{\Omega} + \overline{K}_{t-1}(\overline{h}) - \overline{S}_{t-1} \cdot \overline{h}_t \end{aligned} \qquad (t \in I)$$

in einem relativen Marktmodell bzw. einem Marktmodell mit dem konstanten Numéraire 1 analoge Charakterisierung der sf-Handelsstrategien gibt es auch in einem ursprünglichen Marktmodell, in dem das eventuell auch dividendenversehene Finanzinstrument $S^N$ rein formal extra ausgezeichnet ist und nicht notwendig konstant ist (Beweis folgt unten):

$$(\mathrm{SFh}^{\mathrm{N}}\hat{S}) \qquad S_0^{\delta,N} h_0^N = v_0 - \hat{S}_0^{\delta\mathsf{T}} \bar{h}_0 \qquad (t=0),$$

$$S_{t-1}^N h_t^N = v_0 \mathbf{1}_\Omega + \hat{K}_t(\bar{h}) - \hat{S}_t^\delta \cdot \bar{h}_t + \sum_{s=1}^{t-1} \Delta S_s^N h_s^N \qquad (t=1,\ldots,T).$$

Sind nun die in einem Marktmodell im Allgemeinen vorliegenden, also mehr mathematisch-technischen Voraussetzungen

$(\mathrm{AWS}^{\delta,\mathrm{N}})$ $\quad S_0^{\delta,N} \neq 0,$

$(\mathrm{WS}^{\mathrm{N}}0,T\text{-}1)$ $\quad S_t^N(A_{t,m}) \neq 0 \;\; \forall\, A_{t,m} \in \mathcal{P}_t,\; t=0,\ldots,T\text{-}1$

erfüllt, so können mittels der SF-Charakterisierung $(\mathrm{SFh}^{\mathrm{N}}\hat{S})$ ebenfalls zu beliebig vorgegebenen $v_0 \in \mathbb{R}$ und $\bar{h} \in \mathcal{H}_{N\text{-}1}$ alle $N$-ten „Numéraire"-Anteile $h_t^N$ rekursiv bestimmt werden, sodass $h = (\bar{h}, h^N)^\mathsf{T}$ eine sf-Handelsstrategie ist. Damit können auch im ursprünglichen Marktmodell die selbstfinanzierenden Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ identifiziert werden mit den Paaren $(v_0, \bar{h}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}_{N-1}$ aus einer reellen Zahl $v_0$ und einer $\mathbb{R}^{N\text{-}1}$-wertigen Handelsstrategie $\bar{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$.

Im Gegensatz zum relativen Marktmodell mit dem konstanten relativen Numéraire $\tilde{S}^N = \tilde{B} = 1$ ist aber in einem ursprünglichen Modell, in dem das extra ausgezeichnete Finanzinstrument $S^N$ nicht konstant ist, der kumulierte Gewinn

$$K_t(h) = \hat{K}_t(\bar{h}) + \breve{K}_t(h^N)$$

nicht allein durch den „Nichtnuméraire"-Anteil $\bar{h}$ bestimmt, sondern auch noch vom „Numéraire"-Anteil $h^N$ abhängig (Definition der formalen Anteile $\hat{S}_t$, $\hat{S}_t^\delta$, $\hat{K}_t(\bar{h})$ und $\breve{K}_t(h^N)$ im nachfolgenden Beweis). Damit ist auch der Vermögenswert

$$V_t(h) = V_0(h) + \hat{K}_t(\bar{h}) + \breve{K}_t(h^N)$$

nicht allein durch den Startkapitaleinsatz $v_0$ und den „Nichtnuméraire"-Anteil $\bar{h}$ gegeben, sondern auch noch vom „Numéraire"-Anteil $h^N$ abhängig und somit nicht auf einfache Weise durch $v_0$ und $\bar{h}$ festlegbar. Erst die Unabhängigkeit des relativen kumulierten Gewinns $\tilde{K}_t(h) = \bar{K}_t(\bar{h})$ vom „Numéraire"-Anteil $h^N$ und die damit gegebene besondere Darstellung $(\mathrm{SF}\bar{\mathrm{K}})$ $\tilde{V}_t(h) = \tilde{V}_0(h) + \bar{K}_t(\bar{h})$ des relativen Vermögenswerts einer sf-Handelsstrategie mit der Unabhängigkeit von $h^N$ begründet aber den wichtigen Vorteil des relativen Marktmodells gegenüber dem ursprünglichen Modell bei der Arbeit mit selbstfinanzierenden Handelsstrategien.

**Beweis** der SF-Charakterisierung $(\mathrm{SFh}^{\mathrm{N}}\hat{S})$ : Ist im ursprünglichen Marktmodell o. E. das $N$-te (eventuell auch dividendenversehene) Finanzinstrument $S^N$ ausgewählt, so erhält man, wie bereits für den relativen Preisprozess $\tilde{S}$ des relativen Marktmodells dargestellt wurde, auch für den Preisprozess $S$ im ursprünglichen Marktmodell die formale Zerlegung in „Nichtnuméraire"-Anteil $\hat{S}$ und „Numéraire"-Anteil $S^N$:

$$S_t = (\hat{S}_t, S_t^N)^\mathsf{T} \quad \text{mit } \hat{S}_t := (S_t^1, \ldots, S_t^{N-1})^\mathsf{T},$$

$$S_t^\delta = (\hat{S}_t^\delta, S_t^{\delta,N})^\mathsf{T} \quad \text{mit } \hat{S}_t^\delta := (S_t^{\delta,1}, \ldots, S_t^{\delta,N-1})^\mathsf{T} \qquad (t \in I).$$

Die hierbei verwendeten Preiszustandsfunktionen mit dem oberen Dach $\wedge$ setzen sich aus den ersten $N$ - 1 Komponenten der Preiszustandsfunktionen des ursprünglichen Marktmodells zusammen. Damit ergeben sich die additiven Zerlegungen der reellwertigen Zustandsfunktionen in „Nichtnuméraire"-Anteil und „Numéraire"-Anteil:

$$G_t(h) = \Delta S_t^\delta \cdot h_t = \sum_{j=1}^{N-1} \Delta S_t^{\delta,j} h_t^j + \Delta S_t^{\delta,N} h_t^N = \Delta \hat{S}_t^\delta \cdot \bar{h}_t + \Delta S_t^{\delta,N} h_t^N$$

$$=: \hat{G}_t(\bar{h}) + \breve{G}_t(h^N),$$

$$K_t(h) = \sum_{s=1}^{t} G_s(h) = \sum_{s=1}^{t} \Delta\hat{S}_s^{\delta} \cdot \overline{h}_s + \sum_{s=1}^{t} \Delta S_s^{\delta,N} h_s^N$$
$$=: \hat{K}_t(\overline{h}) + \breve{K}_t(h^N),$$
$$V_t(h) = S_t^{\delta} h_t = \sum_{j=1}^{N-1} S_t^{\delta,j} h_t^j + S_t^{\delta,N} h_t^N = \hat{S}_t^{\delta} \cdot \overline{h}_t + S_t^{\delta,N} h_t^N \qquad (t = 1,\ldots,T).$$

Für eine sf-Handelsstrategie ergibt sich aus der SF-Charakterisierung (SFV)

$$V_t(h) = V_0(h) + \hat{K}_t(\overline{h}) + \breve{K}_t(h^N)$$

die äquivalente Gleichung

$$\hat{S}_t^{\delta} \cdot \overline{h}_t + S_t^{\delta,N} h_t^N = v_0 \mathbf{1}_{\Omega} + \sum_{s=1}^{t} \Delta\hat{S}_s^{\delta} \overline{h}_s + \sum_{s=1}^{t-1} \Delta S_s^{\delta,N} h_s^N + (S_t^{\delta,N} - S_{t-1}^N) h_t^N$$

bzw. nach $S_{t-1}^N h_t^N$ aufgelöst

$$S_{t-1}^N h_t^N = v_0 \mathbf{1}_{\Omega} + \sum_{s=1}^{t} \Delta\hat{S}_s^{\delta} \cdot \overline{h}_s - \hat{S}_t^{\delta} \cdot \overline{h}_t + \sum_{s=1}^{t-1} \Delta S_s^{\delta,N} h_s^N \qquad (t = 1,\ldots,T).$$

Diese Bedingung $(\mathrm{SFh}^{\mathrm{N}}\hat{S})$ ist charakteristisch für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie. Außerdem kann unter den Voraussetzungen $(\mathrm{AWS}^{\delta,\mathrm{N}})$ und $(\mathrm{WS}^{\mathrm{N}}0,T\text{-}1)$ mit dieser Gleichung zu vorgegebenen $v_0 \in \mathbb{R}$ und $\overline{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$ der „Numéraire"-Anteil $h^N$ einer sf-Handelsstrategie und damit insgesamt eine sf-Handelsstrategie $h = (\overline{h}, h^N)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{H}_N^{sf}$ bestimmt werden:

Für $t = 0$ kann die Gleichung $v_0 \mathbf{1}_{\Omega} = V_0(h) = S_0^{\delta} h_0 = \hat{S}_0^{\delta} \cdot \overline{h}_0 + S_0^{\delta,N} h_0^N$ bei vorgegebenem Wert $v_0 \in \mathbb{R}$ und vorgegebenem „Nichtnuméraire"-Portfoliovektor $\overline{h}_0$ nach $S_0^{\delta,N} h_0^N$ und dann bei $S_0^{\delta,N} \neq 0$ nach $h_0^N$ aufgelöst werden:

$$S_0^{\delta,N} h_0^N = v_0 \mathbf{1}_{\Omega} - \hat{S}_0^{\delta} \cdot \overline{h}_0$$

Weiter ergibt sich aus der obigen Gleichung für $S_{t-1}^N h_t^N$ beispielsweise für $t = 1$

$$S_0^N h_1^N = v_0 \mathbf{1}_{\Omega} + \Delta\hat{S}_1^{\delta} \cdot \overline{h}_1 - \hat{S}_1^{\delta} \cdot \overline{h}_1$$

und für $t = 2$

$$S_1^N h_2^N = v_0 \mathbf{1}_{\Omega} + \Delta\hat{S}_1^{\delta} \cdot \overline{h}_1 + \Delta\hat{S}_2^{\delta} \cdot \overline{h}_2 - \hat{S}_2^{\delta} \cdot \overline{h}_2 + \Delta S_1^N h_1^N .$$

Bei Vorgabe des Startkapitaleinsatzes $v_0 \in \mathbb{R}$ und des „Nichtnuméraire"-Anteils $\overline{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$ können unter den Voraussetzungen $(\mathrm{AWS}^{\delta,\mathrm{N}})$ und $(\mathrm{WS}^{\mathrm{N}}0,T\text{-}1)$ also die „Numéraire"-Anteile $h_0^N$ und $h_1^N$ berechnet werden. Weiter kann dann, wenn $h_1^N$ schon bestimmt ist, auch der „Numéraire"-Anteil $h_2^N$ berechnet werden. Allgemein kann der „Numéraire"-Anteil $h_t^N$ berechnet werden, wenn die Numéraireanteile $h_s^N$ für $s = 1$ bis $s = t - 1$ schon bestimmt sind. Zu vorgegebenen $v_0 \in \mathbb{R}$ und $\overline{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$ können also alle Numéraireanteile $h_t^N$ mittels $(\mathrm{SFh}^{\mathrm{N}}\hat{S})$ derart rekursiv bestimmt werden, dass $h = (\overline{h}, h^N)^{\mathrm{T}}$ eine sf-Handelsstrategie ist. Für diese sf-Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ sind aber der kumulierte Gewinn $K_t(h)$ und der Vermögenswert $V_t(h)$ nicht nur vom „Nichtnuméraire"-Anteil $\overline{h}$, sondern auch vom „Numéraire"-Anteil $h^N$ abhängig. □

Wichtige **Anwendungen** der in Satz 5.2 b) für das relative Marktmodell gegebenen Charakterisierung $(\mathrm{SF}\breve{\mathrm{K}})$ des Vermögenswerts einer sf-Handelsstrategie erfolgen beispielsweise beim Beweis

- der Mengenidentitäten $\tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{K}}_T = \overline{\mathcal{K}}_T$ weiter unten in diesem Abschnitt 5.1.7,
- von Satz 5.3 „b) ⇒ a)" in Abschnitt 5.1.9 und

- einer speziellen sf-Duplizierung von $\mathbf{1}_\Omega$ für den Nachweis von $\mathfrak{E}_T = \tilde{\mathcal{V}}_0 \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_T$ in Abschnitt 5.3.5 (Beweisteil a),

bei denen jeweils neben dem relativen Startkapitaleinsatz $\tilde{v}_0 \in \mathbb{R}$ eine $\mathbb{R}^{N-1}$-wertige Handelsstrategie $\overline{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$ beliebig und passend gewählt wird, dann in eleganter Weise zu einer sf-Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ ergänzt wird und deren relativer Vermögenswert $\tilde{V}_T(h)$ mittels $(\mathrm{SF}\overline{\mathrm{K}})$ dargestellt wird. Eine Anwendung der Mengenidentität $\tilde{\mathcal{K}}_T = \overline{\mathcal{K}}_T$ erfolgt im Beweisteil a) von Satz 5.4 in Abschnitt 5.1.10. Diese Beweisschritte funktionieren nur im relativen Marktmodell und im Allgemeinen nicht im ursprünglichen Marktmodell.

**Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$ der relativen NE-Zahlungsprofile**

Mit der Beziehung (SFṼ) für selbstfinanzierende Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ wird jetzt für den linearen Unterraum

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{M}}_T &:= \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker \tilde{V}_0)\\ &\subseteq \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf}) =: \tilde{\mathcal{V}}_T\end{aligned}$$

der relativen NE-Zahlungsprofile zunächst analog zum ursprünglichen Marktmodell die Darstellung als $\tilde{K}_T$-Bild $\tilde{K}_T(\ker^{sf} V_0)$ des Unterraums $\ker^{sf} V_0 = \ker^{sf} \tilde{V}_0$ bei der linearen Abbildung

$$\tilde{K}_T : h \in \mathcal{H}_N^{sf} \mapsto \tilde{K}_T(h) \in \mathbb{R}^\Omega$$

gezeigt. Darüber hinaus wird im relativen Marktmodell dann noch die Darstellung von $\tilde{\mathcal{M}}_T$ als $\tilde{K}_T$-Bildraum

$$\tilde{\mathcal{K}}_T := \tilde{K}_T(\mathcal{H}_N^{sf})$$

bewiesen und die Darstellung als $\overline{K}_T$-Bildraum

$$\overline{\mathcal{K}}_T := \overline{K}_T(\mathcal{H}_{N-1})$$

der linearen Abbildung

$$\overline{K}_T : \overline{h} \in \mathcal{H}_{N-1} \mapsto \overline{K}_T(\overline{h}) \in \mathbb{R}^\Omega,$$

die jeder $\mathbb{R}^{N-1}$-wertigen Handelsstrategie $\overline{h}$ den relativen kumulierten Gewinn $\overline{K}_T(\overline{h})$ des Zeitpunkts $T$ zuordnet. Die dabei im Beweis gezeigte Inklusion $\overline{K}_T(\mathcal{H}_{N-1}) \subseteq \tilde{\mathcal{M}}_T$ ist ein schönes Anwendungsbeispiel für die durch Satz 5.2, a) bereitgestellte Beschreibung der selbstfinanzierenden Handelsstrategien durch beliebige Paare $(\tilde{v}_0, \overline{h}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}_{N-1}$ und die Beziehung $(\mathrm{SF}\overline{\mathrm{K}})$.

Im relativen Marktmodell stimmt der Unterraum $\tilde{\mathcal{K}}_T = \tilde{K}_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ der KG-Zahlungsprofile von sf-Handelsstrategien mit beliebigem Startkapitaleinsatz somit überein mit dem Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{K}_T(\ker^{sf} V_0)$ der KG-Zahlungsprofile von sf-Handelsstrategien mit Startkapitaleinsatz Null. Die zunächst als rein theoretische Größen (nämlich als Differenz der Portfoliowerte $\tilde{V}_T(h)$ und $\tilde{V}_0(h)$) definierten KG-Zahlungsprofile $\tilde{K}_T(h)$ $(h \in \mathcal{H}_N^{sf})$ haben hier als NE-Zahlungsprofile $\tilde{V}_T(g)$ $(g \in \ker^{sf} V_0)$ auch eine ökonomische Bedeutung als Portfoliowerte. Diese Aussage beruht auf dem in Satz 5.2, a) beschriebenen Vorteil des relativen

Marktmodells, dass eine sf-Handelsstrategie $h$ mit beliebiger Vorgabe des relativen Startkapitaleinsatzes $\tilde{v}_0$ und des Nichtnuméraireanteils $\bar{h}$ gewählt werden kann und der relative Vermögenswert $\tilde{V}_T(h)$ gemäß (SF$\bar{\text{K}}$) auch nur von $\tilde{v}_0$ und $\bar{h}$ abhängt. Die analoge Aussage ist im ursprünglichen Marktmodell im Allgemeinen nicht gültig.

**Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$ als $\tilde{K}_T$-Bildraum $\tilde{\mathcal{K}}_T$ und $\bar{K}_T$-Bildraum $\bar{\mathcal{K}}_T$**

Mit dem $\tilde{V}_T$-Bild $\tilde{\mathcal{M}}_T := \tilde{V}_T(\ker^{sf}\tilde{V}_0)$, dem $\tilde{K}_T$-Bild $\tilde{K}_T(\ker^{sf}\tilde{V}_0)$, dem $\tilde{K}_T$-Bildraum $\tilde{\mathcal{K}}_T := \tilde{K}_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ und dem $\bar{K}_T$-Bildraum $\bar{\mathcal{K}}_T := \bar{K}_T(\mathcal{H}_{N-1})$ gelten die Mengenidentitäten

$$\tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{K}_T(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker\tilde{V}_0),$$
$$\tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{K}}_T = \bar{\mathcal{K}}_T.$$

**Beweis**: a) „$\tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{K}_T(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker\tilde{V}_0) \subseteq \tilde{K}_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = \tilde{\mathcal{K}}_T$“: Zunächst gilt analog zur Darstellung von $\mathcal{M}_T$ im ursprünglichen Marktmodell hier im relativen Marktmodell

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{M}}_T &:= \tilde{L}_T(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker\tilde{V}_0) = \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker\tilde{V}_0)\\ &= \{\tilde{V}_T(h) = \tilde{V}_0(h) + \tilde{K}_T(h) : h \in \mathcal{H}_N^{sf},\ \tilde{V}_0(h) = 0\} \qquad (\text{SF}\tilde{\text{V}})\\ &= \{\tilde{K}_T(h) : h \in \mathcal{H}_N^{sf},\ \tilde{V}_0(h) = 0\} = \tilde{K}_T(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker\tilde{V}_0)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{M}}_T &= \tilde{K}_T(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker\tilde{V}_0)\\ &\subseteq \{\tilde{K}_T(h) : h \in \mathcal{H}_N^{sf}\} = \tilde{K}_T(\mathcal{H}_N^{sf}) =: \tilde{\mathcal{K}}_T.\end{aligned}$$

Im relativen Marktmodell kann aber darüber hinaus noch die Übereinstimmung der Mengen $\tilde{\mathcal{M}}_T$, $\tilde{\mathcal{K}}_T$ und $\bar{\mathcal{K}}_T$ gezeigt werden.

b) „$\tilde{\mathcal{K}}_T \subseteq \bar{\mathcal{K}}_T$“: Für jede sf-Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ gilt mit dem zugehörigen Nichtnuméraireanteil $\bar{h}$ die Inzidenz $\tilde{K}_T(h) = \bar{K}_T(\bar{h}) \in \bar{K}_T(\mathcal{H}_{N-1}) =: \bar{\mathcal{K}}_T$ und somit die Inklusion $\tilde{\mathcal{K}}_T \subseteq \bar{\mathcal{K}}_T$.

c) „$\bar{\mathcal{K}}_T \subseteq \tilde{\mathcal{M}}_T$“: Zu einer beliebig vorgegebenen Handelsstrategie $\bar{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$ und dem vorgegebenen reellen Wert $\tilde{v}_0 = 0$ gibt es nach Satz 5.2, a) eine sf-Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ mit dem Nichtnuméraireanteil $\bar{h}$, dem relativen Startkapitaleinsatz $\tilde{V}_0(h) = \tilde{v}_0 \mathbf{1}_\Omega = 0$ und den dazu nach (SFβ) geeigneten bestimmten Numéraireanteilen $h_t^N = \beta_t$. Der relative Vermögenswert der Handelsstrategie $h$ ist dann gemäß (SF$\bar{\text{K}}$)

$$\tilde{V}_T(h) = 0 + \bar{K}_T(\bar{h}) = \bar{K}_T(\bar{h}).$$

Für diese beiden Handelsstrategien $\bar{h} \in \mathcal{H}_{N\text{-}1}$ und $h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker\tilde{V}_0$ gilt dann

$$\bar{K}_T(\bar{h}) = \tilde{V}_T(h) \in \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker\tilde{V}_0) = \tilde{\mathcal{M}}_T.$$

Damit folgt die Inklusion $\bar{\mathcal{K}}_T \subseteq \tilde{\mathcal{M}}_T$.

d) „$\tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{K}}_T = \bar{\mathcal{K}}_T$“: Nach a), b) und c) folgen die Inklusionen

$$\tilde{\mathcal{M}}_T \subseteq \tilde{\mathcal{K}}_T \subseteq \bar{\mathcal{K}}_T \subseteq \tilde{\mathcal{M}}_T$$

und damit die Identitäten

$$\tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{K}}_T = \bar{\mathcal{K}}_T.$$

Der Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$ der relativen NE-Zahlungsprofile wird also jeweils auch gebildet durch die Gesamtheit der $\tilde{K}_T$ -Bilder $\tilde{K}_T(h)$ der selbstfinanzierenden $\mathbb{R}^N$-wertigen Handelsstrategien $h$ mit Startkapitaleinsatz Null, durch die Gesamtheit der $\tilde{K}_T$ -Bilder $\tilde{K}_T(h)$ aller selbstfinanzierenden $\mathbb{R}^N$-wertigen Handelsstrategien $h$ und durch die Gesamtheit der $\bar{K}_T$ -Bilder $\bar{K}_T(\bar{h})$ aller $\mathbb{R}^{N-1}$-wertigen Handelsstrategien $\bar{h}$ . □

**Isomorphie der Unterräume $\mathcal{V}_T$ und $\tilde{\mathcal{V}}_T$ bzw. der Unterräume $\mathcal{M}_T$ und $\tilde{\mathcal{M}}_T$**

Der Unterraum

$$\tilde{\mathcal{V}}_T := \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf}) \ (\subseteq \mathbb{R}^{\Omega})$$

der relativen sf-duplizierbaren Zahlungsprofile $\tilde{X}_T = \tilde{V}_T(h)$, $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$, ist das $f_T$-Bild $f_T(\mathcal{V}_T)$ des Unterraums

$$\mathcal{V}_T := V_T(\mathcal{H}_N^{sf}) \ (\subseteq \mathbb{R}^{\Omega})$$

der sf-duplizierbaren Zahlungsprofile $X_T = V_T(h)$, $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$, bei dem durch die Zuordnungsvorschrift $f_T(X_T) = X_T/B_T$ gegebenen Automorphismus (isomorpher Endomorphismus, bijektive lineare Selbstabbildung) $f_T$ von $\mathbb{R}^{\Omega}$. Außerdem ist der Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$ der relativen NE-Zahlungsprofile das $f_T$-Bild $f_T(\mathcal{M}_T)$ des Unterraums $\mathcal{M}_T = V_T(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0)$ :

Mit dem durch $f_T(X_T) = X_T/B_T$ gegebenen Automorphismus $f_T$ von $\mathbb{R}^{\Omega}$ gilt

$$\tilde{\mathcal{V}}_T = f_T(\mathcal{V}_T),$$

$$\tilde{\mathcal{M}}_T = f_T(\mathcal{M}_T).$$

**Beweis:** a) Es gilt

$$\tilde{Z}_T = \tilde{V}_T(h) = V_T(h)/B_T \in \tilde{\mathcal{V}}_T, \ h \in \mathcal{H}_N^{sf},$$

genau dann, wenn

$$\tilde{Z}_T = f_T(Z_T) = Z_T/B_T \text{ mit einem } Z_T = V_T(h) \in \mathcal{V}_T, \ h \in \mathcal{H}_N^{sf},$$

gilt.

b) Es gilt

$$\tilde{Z}_T = \tilde{V}_T(h) = V_T(h)/B_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T, \ h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker \tilde{V}_0,$$

genau dann, wenn

$$\tilde{Z}_T = f_T(Z_T) = Z_T/B_T \text{ mit einem } Z_T = V_T(h) \in \mathcal{M}_T, \ h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0,$$

gilt. □

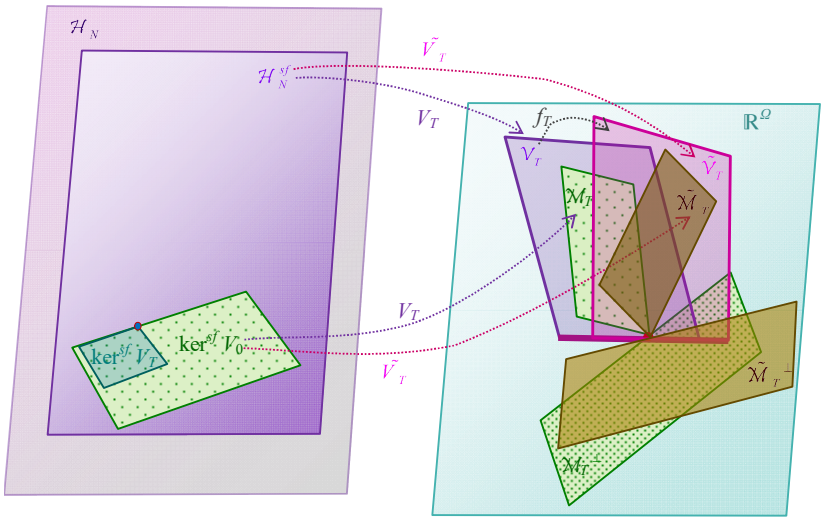



**Abb. 5.3** Die isomorphen Bildräume $\mathcal{V}_T$ und $\tilde{\mathcal{V}}_T$ der Abbildungen $V_T$ und $\tilde{V}_T$, deren isomorphen Unterräume $\mathcal{M}_T$ und $\tilde{\mathcal{M}}_T$ der NE-Zahlungsprofile bzw. relativen NE-Zahlungsprofile und die zugehörigen orthogonalen Komplemente $\mathcal{M}_T^{\perp}$ und $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$

Die Zahlungsprofile $Z_T \in \mathcal{M}_T$ werden durch selbstfinanzierende Handelsstrategien dupliziert, die keinen Startkapitaleinsatz $V_0(h)$ und zu den Zeitpunkten $0 \le t < T$ auch keinen weiteren Kapitaleinsatz $L_t(h)$ des Portfolioinhabers aufweisen, und daher hier als NE-Zahlungsprofile (NE = Nulleinsatz) bezeichnet. Die relativen NE-Zahlungsprofile $\tilde{Z}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T$ sind demnach die mit $B_T$ dividierten (diskontierten) NE-Zahlungsprofile von $\mathbb{R}^\Omega$. In der Abbildung 5.3 werden die zueinander isomorphen Unterräume $\mathcal{V}_T$ und $\tilde{\mathcal{V}}_T$, die zueinander isomorphen Unterräume $\mathcal{M}_T$ und $\tilde{\mathcal{M}}_T$ und deren orthogonalen Komplemente $\mathcal{M}_T^{\perp}$ und $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ im Raum $\mathbb{R}^\Omega$ dargestellt. Im Allgemeinen stimmen nur bei deterministischem $B_T$ die Unterräume $\mathcal{V}_T$ und $\tilde{\mathcal{V}}_T$, die Unterräume $\mathcal{M}_T$ und $\tilde{\mathcal{M}}_T$ und die orthogonalen Komplemente $\mathcal{M}_T^{\perp}$ und $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ überein. Dagegen stimmen die Unterräume

$$\mathcal{V}_0 := V_0(\mathcal{H}_N^{sf}) \text{ und } \tilde{\mathcal{V}}_0 := \tilde{V}_0(\mathcal{H}_N^{sf})$$

stets überein. In der Abbildung 5.4 wird die Lage der Unterräume $\mathcal{V}_T$ und $\tilde{\mathcal{V}}_T$, $\mathcal{M}_T$ und $\tilde{\mathcal{M}}_T$, $\mathcal{M}_T^{\perp}$ und $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ bei deterministischem $B_T$ veranschaulicht.

**Hinreichende Bedingung für die Übereinstimmung der isomorphen Unterräume $\mathcal{V}_T$ und $\tilde{\mathcal{V}}_T$ bzw. $\mathcal{M}_T$ und $\tilde{\mathcal{M}}_T$**

Bei Vorliegen eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ stimmen die Bildräume $\mathcal{V}_T = V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ und $\tilde{\mathcal{V}}_T = \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ überein:

$$\tilde{\mathcal{V}}_T = \mathcal{V}_T.$$

Außerdem stimmt bei deterministischem $B_T$ der Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$ der relativen NE-Zahlungsprofile $\tilde{X}_T = X_T/B_T$ ($X_T \in \mathcal{M}_T$) mit dem Unterraum $\mathcal{M}_T$ der NE-Zahlungsprofile überein:

$$\tilde{\mathcal{M}}_T = \mathcal{M}_T.$$

**Übereinstimmung der Unterräume $\mathcal{V}_0$ und $\tilde{\mathcal{V}}_0$**

Da das $\mathcal{F}_0$-messbare $B_0$ stets deterministisch ist, gilt stets

$$\tilde{\mathcal{V}}_0 = \mathcal{V}_0.$$

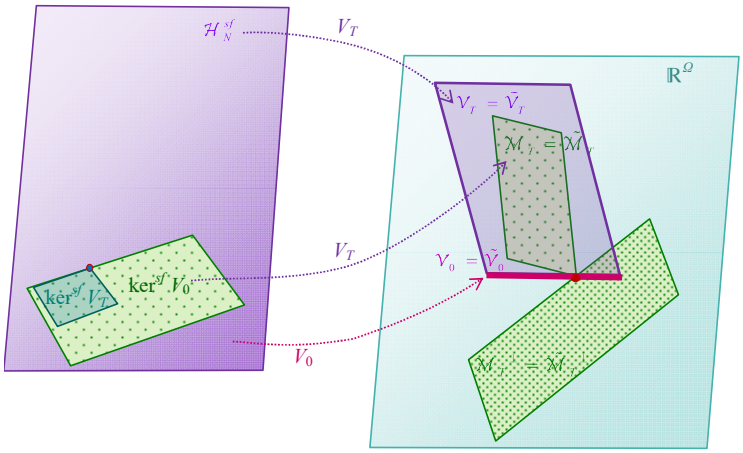



**Abb. 5.4** Übereinstimmung der Unterräume $\mathcal{V}_T$ und $\tilde{\mathcal{V}}_T$, $\mathcal{M}_T$ und $\tilde{\mathcal{M}}_T$, $\mathcal{M}_T^\perp$ und $\tilde{\mathcal{M}}_T^\perp$ bei deterministischem $B_T$

**Beweis:** a) Bei Existenz eine Numéraires mit deterministischem $B_T = u_T \mathbf{1}_\Omega$ ($u_T(\omega) = u_T \in \mathbb{R}$ konstant $\forall\, \omega \in \Omega$, $u_T > 0$) ist für das Zahlungsprofil

$$X_T = V_T(h) \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0) = \mathcal{M}_T,\ h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0,$$

das $f_T$-Bild gegeben durch

$$Y_T := f_T(X_T) = X_T/B_T = X_T/u_T = V_T(h)/u_T = V_T(h/u_T) = V_T(h') \text{ mit}$$

$$h' = h/u_T \in \mathcal{H}_N \qquad (\mathcal{H}_N \text{ Vektorraum}),$$

$$V_0(h') = V_0(h)/u_T = 0 \qquad (V_0 \text{ lineare Abbildung}),$$

$$L_t(h') = L_t(h)/u_T = 0 \text{ für } t = 0,\ldots,T\text{-}1 \qquad (L_t \text{ lineare Abbildung}).$$

Daher ist

$$h' \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0,$$

$$Y_T = V_T(h') \in \mathcal{M}_T$$

und $f_T$ für den Unterraum $\mathcal{M}_T$ eine Selbstabbildung. Es gilt also die Inklusion

$$f_T(\mathcal{M}_T) \subseteq \mathcal{M}_T.$$

Da außerdem für die auf $\mathcal{M}_T$ injektive lineare Abbildung $f_T$ noch $\dim \ker f_T = 0$ und somit nach dem Dimensionssatz für eine lineare Abbildung

$$\dim f_T(\mathcal{M}_T) = \dim \mathcal{M}_T$$

ist, folgt die Übereinstimmung $\tilde{\mathcal{M}}_T = f_T(\mathcal{M}_T) = \mathcal{M}_T$.[12]

b) Bei deterministischem $B_T = u_T \mathbf{1}_\Omega$ ist für das Zahlungsprofil

$$X_T = V_T(h) \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf}) =: \mathcal{V}_T$$

das $f_T$-Bild gegeben durch

$$Y_T := f_T(X_T) = X_T/B_T = V_T(h)/u_T = V_T(h/u_T) = V_T(h') \text{ mit}$$
$$h' = h/u_T \in \mathcal{H}_N ,$$
$$L_t(h') = L_t(h)/u_T = 0 \text{ für } t = 0,\ldots,T\text{-}1.$$

Daher ist

$$h' \in \mathcal{H}_N^{sf} \text{ und}$$
$$Y_T = V_T(h') \in \mathcal{V}_T.$$

Es gilt also die Inklusion

$$f_T(\mathcal{V}_T) \subseteq \mathcal{V}_T.$$

Da $f_T$ injektiv ist, folgt nach dem Dimensionssatz für eine lineare Abbildung die Dimensionsgleichung

$$\dim f_T(\mathcal{V}_T) = \dim \mathcal{V}_T$$

und die Übereinstimmung $\tilde{\mathcal{V}}_T = f_T(\mathcal{V}_T) = \mathcal{V}_T$. Bei deterministischem $B_T$ ist also der Automorphismus $f_T$ von $\mathbb{R}^\Omega$ auch ein Automorphismus von $\mathcal{V}_T$ und ein Automorphismus von $\mathcal{M}_T$.

c) Da $B_0$ stets deterministisch ist, folgt mit dem Automorphismus $f_0(X_T) = X_T/B_0$ von $\mathbb{R}^\Omega$ analog zu b) auch die Übereinstimmung der Bildräume $\tilde{\mathcal{V}}_0 := \tilde{V}_0(\mathcal{H}_N^{sf})$ und $\mathcal{V}_0 := V_0(\mathcal{H}_N^{sf})$ :

$$\tilde{\mathcal{V}}_0 = \tilde{V}_0(\mathcal{H}_N^{sf}) = \{\tilde{V}_0(h) = V_0(h)/B_0 : h \in \mathcal{H}_N^{sf}\} = f_0(\mathcal{V}_0) = \mathcal{V}_0 = V_0(\mathcal{H}_N^{sf}) .$$

Somit ist der Automorphismus $f_0$ von $\mathbb{R}^\Omega$ stets auch ein Automorphismus von $\mathcal{V}_0$. □

### 5.1.8 Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit im relativen Marktmodell mittels der relativen kumulierten Gewinne

Mit Hilfe des oben hergeleiteten Zusammenhangs (SF$\tilde{\text{V}}$) zwischen relativem Vermögensprozess $\tilde{V}(h)$ und relativem kumulierten Gewinnprozess $\bar{K}(\bar{h})$ im relativen Marktmodell zur Charakterisierung einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie $h$ kann eine Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit (AFsf) mittels des relativen kumulierten Gewinns $\tilde{K}_T(h) = \bar{K}_T(\bar{h})$ angegeben werden. Die sf-Arbitragefreiheit (AFsf) ist im ursprünglichen Marktmodell dadurch definiert, dass es keine selbstfinanzierende Handelsstrategie $h$ gibt mit

$$V_0(h) = 0 \ \wedge \ V_T(h) \gneq 0.$$

Wegen (SF$\tilde{\text{V}}$), $B_0 > 0$ und $B_T > 0$ bedeutet dies im relativen Marktmodell, dass es keine selbstfinanzierende Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ gibt mit

$$\tilde{V}_0(h) = V_0(h)/B_0 = 0 \text{ und}$$
$$\bar{K}_T(\bar{h}) = \tilde{V}_T(h) = \frac{V_T(h)}{B_T} \gneq 0.$$

[12] Für endlichdimensionale Unterräume $U$ und $W$ eines Vektorraums folgt aus der Inklusion $U \subseteq W$ und der Dimensionsgleichheit deren Übereinstimmung $U = W$. Literaturhinweise werden in einer Fußnote von Abschnitt 2.8.4 gegeben.

Dies bedeutet die Arbitragefreiheit im relativen Marktmodell. Die Äquivalenz der sf-Arbitragefreiheit im ursprünglichen und im relativen Marktmodell wurde auch schon in Satz 5.1 von Abschnitt 5.1.3 begründet. Man erhält also zur Bedingung (AFsf) der Arbitragefreiheit im ursprünglichen Modell die äquivalente Bedingung[13] (AFsf$\overline{\mathrm{K}}$) im relativen Marktmodell:

$$\begin{aligned}(\mathrm{Afsf}) &\Leftrightarrow (\mathrm{AFsf}\,\overline{\mathrm{K}}) \qquad \nexists\, h \in \mathcal{H}_N^{sf} \ \text{ mit } \tilde{V}_0(h) = 0 \text{ und } \overline{K}_T(\overline{h}) \gneq 0\\ &\Leftrightarrow (\mathrm{AFsf}\,\tilde{\mathcal{M}}_T) \qquad \tilde{\mathcal{M}}_T \cap \mathbb{R}^{\Omega}_{\gneq 0} = \emptyset.\end{aligned}$$

Diese mengentheoretische Charakterisierung (AFsf$\tilde{\mathcal{M}}_T$) der sf-Arbitragefreiheit mittels des Unterraums $\tilde{\mathcal{M}}_T$ der relativen NE-Zahlungsprofile ist nach dem Alternativsatz 3.7 von Abschnitt 3.6.1 auch äquivalent zu einer Charakterisierung mittels eines positiven Normalenvektors von $\tilde{\mathcal{M}}_T$ bzw. eines mit der Komponentensumme

$$\kappa(x) := x_1 + \ldots + x_K \qquad (x = (x_1,\ldots,x_K)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^K)$$

normierten positiven Normalenvektors von $\tilde{\mathcal{M}}_T$. Diese Äquivalenz wird unten in Abschnitt 5.1.11 beim Beweis von Satz 5.5, dem ersten Hauptsatz der Preistheorie, verwendet. Dieser Satz liefert eine Charakterisierung der Arbitragefreiheit (AFsf) mittels der Existenz eines sog. äquivalenten Martingalmaßes im dividendenlosen relativen Marktmodell bzw. mittels der Existenz eines Diskontvektors im dividendenversehenen relativen Marktmodell.

$$\begin{aligned}(\mathrm{Afsf}) &\Leftrightarrow (\mathrm{AFsf}\,\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp+}) \quad \exists\, \tilde{\Phi}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp+} = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{X_T > 0\}\\ &\Leftrightarrow (\mathrm{AFsf}\,\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}) \quad \exists\, \tilde{Q}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+} = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = 1, X_T > 0\}.\end{aligned}$$

Nachfolgend wird nun noch die Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit des Mehrperiodenmodells durch die sf-Arbitragefreiheit aller enthaltenen Einperiodenmodelle bewiesen. Der Beweis erfolgt im relativen Marktmodell, um die Charakterisierung (SF$\overline{\mathrm{K}}$) des Vermögenswerts einer sf-Handelsstrategie verwenden zu können.

[13] Die entsprechende Charakterisierung (AFsfK) im ursprünglichen Marktmodell geben Bäuerle u. Rieder (2017) auf S. 11 in Bemerkung 2.1 b). Sie wird hier in Abschnitt 5.1.6 gegeben.

### 5.1.9 Äquivalenz der sf-Arbitragefreiheit des Mehrperiodenmodells zur sf-Arbitragefreiheit der enthaltenen Einperiodenmodelle

Analog zur Aussage des Satzes 3.10 in Abschnitt 3.6.3 für die allgemeine Arbitragefreiheit (AF) beschreibt nun der folgende Satz[14] die Äquivalenz der sf-Arbitragefreiheit im Mehrperiodenmodell zur sf-Arbitragefreiheit in allen enthaltenen Einperiodenmodellen (lokale sf-Arbitragefreiheit, Einperioden-sf-Arbitragefreiheit). Da der Beweis im relativen Marktmodell erfolgt, wird die Existenz eines Numéraires vorausgesetzt. Es kann dann nämlich im relativen Marktmodell der sich aus der Konstanz des relativen Numéraires $\tilde{B} = 1$ ergebende Vorteil mit der SF-Charakterisierung (SF$\overline{\text{K}}$) verwendet werden. Die Bedingung b) im nachfolgenden Satz bedeutet dabei, dass es zum Zeitpunkt $t$ einen $\mathbb{R}^{N-1}$-wertigen Portfoliovektor

$$\overline{g}_t = (g_t^1, \ldots, g_t^{N-1})^{\mathsf{T}} \in \mathcal{F}_{t-1}$$

für die relativen Nichtnumeraire-Wertpapiere gibt, sodass sich mit der zum Zeitpunkt $t$-1 in Höhe von $\overline{S}_{t-1}\overline{g}_t$ erfolgenden Investition in die relativen Nichtnumeraire-Wertpapiere $\tilde{S}^1$, …, $\tilde{S}^{N-1}$ dann im darauffolgenden Zeitpunkt $t$ ein schwach positiver relativer Gewinn erzielen lässt:

$$\overline{G}_t(\overline{g}_t) = \Delta\overline{S}_t^{\delta} \cdot \overline{g}_t \gtrdot 0.$$

Eine Investition in den relativen Numéraire $\tilde{B} = \tilde{S}^N = 1$ hat keine Auswirkung auf den relativen Gewinn, da für alle Zeitpunkte $t \in I$ der relative Numéraire $\tilde{B}_t = 1$ konstant und somit der zugehörige Zuwachs $\Delta\tilde{B}_t = \Delta\tilde{S}_t^N = 0$ ist. Im Beweisteil „b) ⇒ a)“ wird gezeigt, dass die Zustandsfunktion $\overline{g}_t$ der $t$-te Nichtnumeraireanteil einer sf-Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ mit relativem Startkapitaleinsatz $\tilde{V}_0(h) = 0$ und relativem Vermögenswert $\tilde{V}_T(h) = \overline{K}_T(\overline{h}) \gtrdot 0$, also einer sf-Arbitragegelegenheit $h$ im relativen Marktmodell ist. Weiter wird im Beweisteil „b) ⇔ c)“ gezeigt, dass diese im relativen Marktmodell für den relativen Gewinn mit b) formulierte Bedingung gleichbedeutend dazu ist, dass in einem zu einem Ausgangsknoten $A_{t-1,k}$ gehörigen Einperiodenmodell eine sf-Arbitragegelegenheit $h$ existiert. Damit existiert im Mehrperiodenmodell genau dann eine sf-Arbitragegelegenheit, wenn es in mindestens einem Einperiodenmodell eine sf-Arbitragegelegenheit gibt. Im Umkehrschluss heißt dies, dass das Mehrperiodenmodell genau dann sf-arbitragefrei ist, wenn jedes enthaltene Einperiodenmodell sf-arbitragefrei ist.

**Satz 5.3 Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit im Mehrperiodenmodell durch die sf-Arbitragefreiheit aller enthaltenen Einperiodenmodelle**

Es sei die Existenz eines Numéraires $S^N = B > 0$ im ursprünglichen Marktmodell vorausgesetzt. Im (dividendenversehenen) Mehrperiodenmodell sind dann die folgenden drei Aussagen äquivalent:

---

[14] Diesen Satz mit der Äquivalenz der Aussagen a) und b) unter der hier nicht benötigten Voraussetzung $\delta = 0$ findet man bei Kühn (2016), S. 39, Prop. 1.24 (Einperiodenarbitrage) und bei Bäuerle u. Rieder (2017), S. 12, Theorem 2.1 (lokale Arbitrage).

a) Es existiert eine sf-Arbitragegelegenheit.

b) Es gibt einen Zeitindex $t \in \{1,\ldots,T\}$ und eine $\mathcal{F}_{t-1}$-messbare $\mathbb{R}^{N-1}$-wertige Zustandsfunktion $\overline{g}_t := (g_t^1,\ldots,g_t^{N-1})^\top : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{N-1}$ mit
$$\Delta\overline{S}_t^{\delta} \cdot \overline{g}_t \gneq 0.$$

c) Es existiert ein zu einem Zeitindex $t \in \{1,\ldots,T\}$ und einem Ausgangsknoten $A_{t-1,k} \in \mathcal{P}_{t-1}$ gehöriges Einperiodenmodell, das nicht sf-arbitragefrei ist.

**Beweis:** „a) ⇒ b)“: Nach der Beweisführung von Satz 3.11, 1) in Abschnitt 3.10.1 (mit $\tilde{L}_t(h)(\omega) = 0$ statt $\geq 0$ für $t = 0,\ldots,T\text{-}1$) ist eine sf-Arbitragegelegenheit $g \in \mathcal{H}_N^{sf}$ im ursprünglichen Marktmodell auch eine sf-Arbitragegelegenheit im relativen Marktmodell. In nachfolgenden Beweisteil „b) ⇒ a)“ wird bei der Konstruktion einer sf-Arbitragegelegenheit im relativen Marktmodell plausibel, warum die charakteristische Bedingung in b) im relativen Marktmodell und nicht im ursprünglichen Marktmodell formuliert wird. Es wird nämlich die im Allgemeinen nur im relativen Marktmodell gültige SF-Charakterisierung (SF$\overline{\text{K}}$) verwendet. Zur vorliegenden sf-Arbitragegelegenheit $g \in \mathcal{H}_N^{sf}$ des Mehrperiodenmodells gibt es nun wegen $\tilde{V}_0(g) = 0$ und $\tilde{V}_T(g) \gneq 0$ ein kleinstes $t \in \{1,\ldots,T\}$ mit
$$\tilde{V}_t(g) \gneq 0.$$
Für den Wert $\tilde{V}_{t-1}(g) \ngeq 0$ können dabei zwei Fälle auftreten:

i) $\tilde{V}_{t-1}(g)(\omega) = 0 \;\forall\, \omega \in \Omega$;

ii) $\tilde{V}_{t-1}(g)(\omega\text{‘}) < 0$ für mindestens ein $\omega\text{‘} \in \Omega$.

Im Fall i) ist nach (SF$\tilde{\text{V}}$)
$$\tilde{V}_t(g) - \tilde{V}_{t-1}(g) = \overline{K}_t(g) - \overline{K}_{t-1}(g) = \overline{G}_t(\overline{g}),$$
$$0 \lneq \tilde{V}_t(g) = \tilde{V}_{t-1}(g) + \overline{G}_t(\overline{g})$$
$$= 0 + \Delta\overline{S}_t^{\delta} \cdot \overline{g}_t,$$
also $\Delta\overline{S}_t^{\delta} \cdot \overline{g}_t \gneq 0$ mit der $\mathcal{F}_{t-1}$-messbaren $\mathbb{R}^{N-1}$-wertigen Zustandsfunktion $\overline{g}_t$.

Im Fall ii) verwendet man die nichtleere Menge
$$A := \{\omega \in \Omega : \tilde{V}_{t-1}(g)(\omega) < 0\},$$
für welche die Inzidenz $A \in \mathcal{F}_{t-1}$ gilt und die zugehörige charakteristische Funktion $\mathbf{1}_A$ $\mathcal{F}_{t-1}$-messbar ist. Weiter bildet man damit die $\mathcal{F}_{t-1}$-messbare $\mathbb{R}^{N-1}$-wertige Produktfunktion
$$\overline{h}_t := \overline{g}_t \cdot \mathbf{1}_A$$
und die $\mathcal{F}_t$-messbare reellwertige Zustandsfunktion[15]
$$f_t := \Delta\overline{S}_t^{\delta} \cdot \overline{h}_t = \Delta\overline{S}_t^{\delta} \cdot \overline{g}_t \cdot \mathbf{1}_A = (\tilde{V}_t(g) - \tilde{V}_{t-1}(g)) \cdot \mathbf{1}_A = \overline{G}_t(\overline{g})\,\mathbf{1}_A$$
ist dann auf der Menge $A$ wegen $\mathbf{1}_A = 1 > 0$, $\tilde{V}_t(g) \geq 0$ und $\tilde{V}_{t-1}(g) < 0$ positiv und auf dem Komplement $\Omega \setminus A = \{\omega \in \Omega : \tilde{V}_{t-1}(g)(\omega) \geq 0\}$ wegen $\mathbf{1}_A = 0$ gleich Null, also insgesamt auf $\Omega$ schwach positiv: $f_t \gneq 0$. Durch die Wahl der abgeänderten Zustandsfunktion $\overline{h}_t = \overline{g}_t \cdot \mathbf{1}_A$ bzw. durch den Übergang von der Funktion $\overline{G}_t(\overline{g}) = \Delta\overline{S}_t^{\delta} \cdot \overline{g}_t$ zur Funktion $f_t = \overline{G}_t(\overline{g})\,\mathbf{1}_A = \Delta\overline{S}_t^{\delta} \cdot \overline{h}_t$ wird für $f_t$ der auf $A$ positive Anteil von $\overline{G}_t(\overline{g})$ herausgepickt und der Anteil von $f_t$ auf $\Omega \setminus A$ auf Null gesetzt. Somit erhält man im Fall ii) die Relation $\Delta\overline{S}_t^{\delta} \cdot \overline{h}_t \gneq 0$ mit der $\mathcal{F}_{t-1}$-messbaren $\mathbb{R}^{N-1}$-wertigen Zustandsfunktion $\overline{h}_t$.

---

[15] Die hier verwendeten Aussagen zu messbaren Funktionen findet man bei Bauer (1992) MI, S. 57 (9.2), S. 58 Satz 9.2, S. 59 Satz 9.4.

„b) ⇒ a)“: Zur vorgegebenen $\mathcal{F}_{t-1}$-messbaren $\mathbb{R}^{N-1}$-wertigen Zustandsfunktion $\overline{g}_t$ erhält man innerhalb des relativen Marktmodells nach Satz 5.2, a) von Abschnitt 5.1.7 auf elegante Weise eine sf-Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ mit der Vorgabe des Nichtnumérairanteils $\overline{h}$ durch

$$\overline{h}_t = \overline{g}_t \quad \text{und} \quad \overline{h}_s = 0 \text{ für } s \neq t$$

und der Vorgabe des relativen Startkapitals $\tilde{V}_0(h) = \tilde{v}_0 \mathbf{1}_\Omega = 0$, wenn nur die Numérairanteile $h_s^N$ ($s \in I$) passend gemäß der Bedingung (SFh$^N$) bestimmt werden. Für diese sf-Handelsstrategie $h$ gilt dann nach der speziell im relativen Marktmodell vorliegenden Darstellung (SF$\overline{\text{K}}$) des Vermögenswerts noch

$$\begin{aligned} \tilde{V}_T(h) &= \tilde{V}_0(h) + \overline{K}_T(\overline{h}) \\ &= \tilde{V}_0(h) + \sum_{s=1}^{T} \Delta\overline{S}_s^\delta \cdot \overline{h}_s \\ &= 0 + \Delta\overline{S}_t^\delta \cdot \overline{g}_t \gneq 0 \qquad (\tilde{V}_0(h) = 0, s = t), \end{aligned}$$

sodass $h$ eine sf-Arbitragegelegenheit (im relativen Marktmodell) ist. Diese sf-Handelsstrategie ist nach dem Beweis von Satz 3.11 in Abschnitt 3.10.1 auch eine sf-Arbitragegelegenheit im ursprünglichen Marktmodell.

Formulierung der bereits bewiesenen Äquivalenz der Aussagen a) und b) speziell im **Einperiodenmodell** ($T = 1$): Eine sf-Arbitragegelegenheit $h = (h_0,h_1)^\mathsf{T}$ im Einperiodenmodell existiert demnach genau dann, wenn es (zu $t = 1$) eine $\mathcal{F}_0$-messbare, d. h. auf $A_0 = \Omega$ konstante, $\mathbb{R}^{N-1}$-wertige Zustandsfunktion $\overline{g}_1 := (g_1^1, \ldots, g_1^{N-1})^\mathsf{T}$ gibt mit

$$\Delta\overline{S}_1^\delta \cdot \overline{g}_1 \gneq 0.$$

Eine sf-Arbitragegelegenheit $h = (h_0,h_1)^\mathsf{T}$ im ursprünglichen Einperiodenmodell ist dabei ein Paar $h = (h_0,h_1)^\mathsf{T}$ konstanter Zustandsfunktionen $h_0$, $h_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ mit

$$\begin{aligned} V_0(h) &= S_0^\delta h_0 = 0 && \text{(Startkapitaleinsatz Null)}, \\ L_0(h) &= V_0(h) - R_0(h) = -S_0 h_1 = 0 && \text{(Selbstfinanzierungsbed. SF)}, \\ L_1(h) &= V_1(h) = S_1^\delta h_1 \gneq 0 && \text{(Arbitrage bei } t = 1). \end{aligned}$$

Gemäß dem für das Mehrperiodenmodell angegebenen Beweisschritt „b) ⇒ a)“ wird speziell im Einperiodenmodell die sf-Arbitragegelegenheit $h$ aus der vorgegebenen $\mathbb{R}^{N-1}$-wertigen Zustandsfunktion $\overline{g}_1$ ($t = 1$) folgendermaßen konstruiert: Es werden der Nichtnumérairanteil $\overline{h}$ mit $\overline{h}_1 = \overline{g}_1$ und $\overline{h}_0 = 0$ und das relative Startkapital mit $\tilde{V}_0(h) = \tilde{v}_0 \mathbf{1}_\Omega = 0$ vorgegeben und dann die Numérairanteile $h_0^N$ und $h_1^N$ gemäß der Bedingung (SFh$^N$) bestimmt: $h_0^N = 0$, $h_1^N = -\overline{S}_0 \overline{h}_1$.

„b) ⇔ c)“: Die für das Mehrperiodenmodell ($T \in \mathbb{N}$) in der Aussage b) angegebene Bedingung bedeutet, dass es ein $t \in \{1,\ldots,T\}$ und dazu eine $\mathcal{F}_{t-1}$-messbare $\mathbb{R}^{N-1}$-wertige Zustandsfunktion $\overline{g}_t$ gibt mit

$$f := \Delta\overline{S}_t^\delta \cdot \overline{g}_t \gneq 0.$$

Für die $\mathcal{F}_t$-messbare Funktion $f$ gilt also $f(A_{t,m}) \geq 0$ für alle $A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$ und $f(A_{t,p}) > 0$ für zumindest ein $A_{t,p} \in \mathcal{P}_t$. Mit dem im Informationsbaum des Marktmodells dazu eindeutig bestimmten Vorgängerknoten $A_{t-1,k} \in \mathcal{P}_{t-1}$ ($A_{t,p} \subseteq A_{t-1,k}$) gilt dann

$$\begin{aligned} &\overline{g}_t \text{ konstant auf allen } A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k} && (\overline{g}_t \ \mathcal{F}_{t-1}\text{-messbar}), \\ &f \gneq 0 \text{ auf den } A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}, \text{ d. h.} \\ &f(A_{t,m}) \geq 0 \text{ für alle } A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}, \\ &f(A_{t,p}) > 0 \text{ für mindestens ein } A_{t,p} \subseteq A_{t-1,k}. \end{aligned}$$

Nach der oben beschriebenen Äquivalenz von a) und b) im Einperiodenmodell bedeutet dies, dass in dem zum Ausgangsknoten $A_{t-1,k}$ gehörigen Einperiodenmodell eine sf-Arbitragegelegenheit $h$ exis-

tiert, also ein Paar $h = (h_{t-1},h_t)^\mathsf{T}$ von auf $A_{t-1,k}$ definierten und konstanten Zustandsfunktionen $h_{t-1}$ und $h_t$ (da $h_{t-1}$ und $h_t$ $\mathcal{F}_{t-1}$-messbar), für die auf $A_{t-1,k}$ gilt:

$$V_{t-1}(h) = S^{\delta}_{t-1}h_{t-1} = 0,$$
$$L_{t-1}(h) = V_{t-1}(h) - R_{t-1}(h) = - S_{t-1}h_t = 0,$$
$$V_t(h) = S^{\delta}_t h_t \geq 0.$$ □

Als **Folgerung** aus dem obigen Satz 5.3, nach dem ein Mehrperiodenmodell mit Numéraire $S^N = B$ genau dann sf-arbitragefrei ist, wenn alle enthaltenen Einperiodenmodelle sf-arbitragefrei sind, und aus Satz 3.10 von Abschnitt 3.6.3, nach dem ein Mehrperiodenmodell genau dann arbitragefrei ist, wenn alle enthaltenen Einperiodenmodelle arbitragefrei sind, ergibt sich eine Charakterisierung eines Mehrperiodenmodells, das sf-arbitragefrei und nicht arbitragefrei ist, mittels seiner enthaltenen Einperiodenmodelle.

**Charakterisierung eines sf-arbitragefreien und nicht arbitragefreien Mehrperiodenmodells mittels der enthaltenen Einperiodenmodelle**
Ein Mehrperiodenmodell mit einem Numéraire $S^N = B > 0$ ist genau dann sf-arbitragefrei und nicht arbitragefrei, wenn jedes seiner enthaltenen Einperiodenmodelle sf-arbitragefrei und mindestens ein Einperiodenmodell nicht arbitragefrei ist.

### 5.1.10 Charakterisierung eines Martingalmaßes im dividendenlosen relativen Marktmodell mittels des erwarteten relativen kumulierten Gewinns Null der sf-Handelsstrategien bzw. durch die Orthogonalität zum Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$

Bei der unten in Satz 5.5 (Abschnitt 5.1.11) noch folgenden Charakterisierung der speziellen Arbitragefreiheit (AFsf) im relativem Marktmodell wird der Begriff eines sog. äquivalenten Martingalmaßes im relativen Marktmodell verwendet. Um die dazu benötigte Charakterisierung eines Martingalmaßes mittels der erwarteten relativen kumulierten Gewinne in Satz 5.4 zu ermöglichen, wird jetzt ein Marktmodell $(S,\mathcal{F})$ zugrunde gelegt, bei dem der Preisprozess $S = (S^1,\ldots,S^N)^\mathsf{T}$ der $N$ ausgewählten Wertpapiere (Finanzinstrumente) $S^j$ ($j \in J$) **ohne Dividenden** ist:

$$\delta = (\delta^1,\ldots,\delta^N)^\mathsf{T} = 0.$$

Mit dem Marktmodell ist ein gefilterter Wahrscheinlichkeitsraum (W-Raum) $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{A},P)$ verbunden, bei dem $\Omega$ der Zustandsraum der Kursentwicklungen $\omega_k \in \Omega$, $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra in (über) $\Omega$ mit den beobachtbaren Ereignissen $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ eine in $\mathcal{A}$ gelegene Filtration von $\sigma$-Algebren $\mathcal{F}_t$ ($\subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+1}$) zur Beschreibung der Informationszunahme über den Preisprozess $S = (S^1,\ldots,S^N)^\mathsf{T}$, $P : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ das Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß) für die Angabe der Eintrittswahrscheinlichkeiten der Kursentwicklungen $\omega_k$ ist und o. B. d. A. (siehe dazu Fußnoten in Abschnitt 2.1)

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\Omega\},\ \mathcal{F}_T = \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \text{ und}$$
$$P(\{\omega_k\}) > 0 \text{ für alle } \omega_k \in \Omega.$$

Zwei auf einem Messraum (messbaren Raum) $(\Omega,\mathcal{A})$ definierte W-Maße heißen **äquivalent**, wenn sie die gleichen Nullmengen besitzen. Im hier vorliegenden Fall ist $P(A) > 0$ für alle

$A \in \mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}$, sodass ein weiteres W-Maß $Q$ auf $(\Omega,\mathcal{A})$ genau dann zu $P$ äquivalent ist, wenn ebenfalls $Q(A) > 0$ für alle $A \in \mathcal{A} \setminus \{\emptyset\} = \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset\}$ bzw.

$$Q(\{\omega_k\}) > 0 \text{ für alle } \omega_k \in \Omega$$

gilt. Ein W-Maß $Q$ auf $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{A},P)$ heißt ein **Martingalmaß** oder risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß (bezüglich des *relativen* Preisprozesses $\tilde{S}$ im dividendenlosen relativen Marktmodell), falls *alle relativen* (dividendenlosen) reellwertigen Preisprozesse $\tilde{S}^j = (\tilde{S}_t^j)_{t\in I}$ $(j \in J)$ $\mathcal{F}$-Martingale bezüglich $Q$ sind:

$$\tilde{S}_t^j = E_Q(\tilde{S}_{t+1}^j | \mathcal{F}_t) \text{ } Q\text{-fast sicher}^{16} \text{ für } t \in I, j \in J.$$

Zur Verdeutlichung, dass ein Martingalmaß nach dieser Definition sich stets auf das relative Marktmodell $(\tilde{S},\mathcal{F})$ bezieht, könnte man es statt mit $Q$ besser wie in Abschnitt 3.10.3 mit $\tilde{Q}$ bezeichnen. Es wird aber im Folgenden die einfachere Schreibweise $Q$ verwendet. Bei dem hier vorgegebenen W-Maß $P$ für die Kursentwicklungen mit $P(\{\omega_k\}) > 0$ für alle $\omega_k \in \Omega$ ist ein W-Maß auf $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{A},P)$ ein (zu $P$) **äquivalentes Martingalmaß** genau dann, wenn

$$Q(\{\omega_k\}) > 0 \text{ für alle } \omega_k \in \Omega$$

gilt und $Q$ ein Martingalmaß ist:

$$\tilde{S}_t^j = E_Q(\tilde{S}_{t+1}^j | \mathcal{F}_t) \text{ (sicher) für } t \in I, j \in J.$$

Der folgende Satz gibt nun für das dividendenlose relative Marktmodell in Teil a)[17] eine wahrscheinlichkeitstheoretische (w-theoretische[18]) Charakterisierung eines Martingalmaßes mit Hilfe des Erwartungswerts des relativen kumulierten Gewinns einer Handelsstrategie. In Teil b) erfolgt die linearalgebraische Beschreibung der Menge aller Martingalmaße durch die Teilmenge der nichtnegativen $\kappa$-normierten Zustandsfunktionen im orthogonalen Komplement $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ von $\tilde{\mathcal{M}}_T$. Teil c) beschreibt die Menge aller äquivalenten Martingalmaße durch die Teilmenge der positiven $\kappa$-normierten Zustandsfunktionen in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$.

**Satz 5.4 Charakterisierung eines Martingalmaßes und eines äquivalenten Martingalmaßes im dividendenlosen relativen Marktmodell durch den erwarteten relativen kumulierten Gewinn Null der sf-Handelsstrategien bzw. durch die Orthogonalität des W-Maßes zum Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$**

Es sei $(S,\mathcal{F})$ ein Marktmodell mit einem Numéraire

$$B := S^N > 0$$

und ohne Dividenden:

$$\delta = (\delta^1,\ldots,\delta^N)^{\mathsf{T}} = 0.$$

---

[16] Bei Bauer (1992) MI, S. 80, und (2002) WT, S. 6, sind die Sprechweisen $Q$-fast überall ($Q$-f. ü.) bezüglich eines Maßes $Q$ und $Q$-fast sicher ($Q$-f. s.) bezüglich eines W-Maßes $Q$ für die Gültigkeit einer Eigenschaft dadurch definiert, dass es eine $Q$-Nullmenge $M$ gibt, auf deren Komplement $\Omega \setminus M$ diese Eigenschaft gilt.

[17] Den Teil a) des Satzes findet man bei Bäuerle u. Rieder (2017), S. 39, Theorem 4.3 a).

[18] Die Bezeichnung eines Begriffs als w-theoretisch wird in einer Fußnote von Abschnitt 3.3.2 erklärt, wobei auch ein Literaturhinweis und Beispiele angegeben werden.

a) **W-theoretische Charakterisierung**: Ein W-Maß $Q$ auf $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{A},P)$ ($\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$) ist genau dann ein **Martingalmaß** (im dividendenlosen relativen Marktmodell), wenn für jede Nichtnumeraire-Handelsstrategie $\overline{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$ bzw. jede sf-Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ der zum Endzeitpunkt $T$ gehörige relative kumulierte Gewinn $\overline{K}_T(\overline{h}) = \tilde{K}_T(h) \in \overline{\mathcal{K}}_T = \tilde{\mathcal{K}}_T = \tilde{\mathcal{M}}_T$ den $Q$-Erwartungswert Null besitzt:

(E$\overline{\text{K}}$) $\quad E_Q(\overline{K}_T(\overline{h})) = Q^{\mathsf{T}}\overline{K}_T(\overline{h}) = 0$ für alle $\overline{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$ .

b) **Linearalgebraische Charakterisierung**: Ein W-Maß $Q : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ auf $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{A},P)$ ist genau dann ein **Martingalmaß** (im dividendenlosen relativen Marktmodell), wenn für das W-Maß $Q$ als Zustandsfunktion $Q : \Omega \longrightarrow [0,1]$ in $\mathbb{R}^\Omega$ die Inzidenz

(QNv) $\quad Q \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} = \overline{K}_T(\mathcal{H}_{N-1})^{\perp}$

erfüllt ist, also $Q$ ein nichtnegativer und $\kappa$-normierter Normalenvektor zum Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$ ist. Die Menge der Martingalmaße wird in $\mathbb{R}^\Omega$ also beschrieben durch das konvexe Polyeder

$$\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{X_T \in \mathbb{R}^\Omega : 0 \le X_T \le 1,\ \kappa(X_T) = 1\}$$

mit der Komponentensumme $\kappa(X_T) := X_{T,1} + \ldots + X_{T,K}$. Sie enthält alle W-Maße $Q$, deren zugehörige Zustandsfunktionen nichtnegativ auf $\Omega$, $\kappa$-normiert und orthogonal zum Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T = \overline{K}_T(\mathcal{H}_{N-1})$, also orthogonal zu den relativen kumulierten Gewinnen $\overline{K}_T(\overline{h})$ der Nichtnumeraire-Handelsstrategien $\overline{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$ bzw. orthogonal zu den mit $B_T$ diskontierten NE-Zahlungsprofilen $Z_T \in \mathcal{M}_T$ sind.

c) **Teilmenge der äquivalenten Martingalmaße** bzw. Diskontvektoren: Die Menge aller äquivalenten Martingalmaße $Q : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ wird im Raum $\mathbb{R}^\Omega$ der Zustandsfunktionen $X_T : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ beschrieben durch das (teilweise offene) konvexe Polyeder

$$\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+} := \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{0 < X_T \le 1,\ \kappa(X_T) = 1\}.$$

Sie liefert alle W-Maße $Q$, deren zugehörige Zustandsfunktionen positiv auf $\Omega$, $\kappa$-normiert und orthogonal zu den relativen NE-Zahlungsprofilen (des Unterraums $\tilde{\mathcal{M}}_T$) sind.

**Beweis von a)** W-theoretische Charakterisierung:

„⇒“: Falls das $W$-Maß $Q$ ein Martingalmaß bezüglich des Preisprozesses $\tilde{S}$ ist, so sind definitionsgemäß der dividendenlose $\mathbb{R}^N$-wertige relative Preisprozess

$$\tilde{S} = (\tilde{S}^1,\ldots,\tilde{S}^N)^{\mathsf{T}} = \left((\tilde{S}^1,\ldots,\tilde{S}^N)^{\mathsf{T}}{}_t(\omega)\right)_{t\in I,\omega\in\Omega}$$ [19]

und der dividendenlose $\mathbb{R}^{N-1}$-wertige relative Preisprozess

$$\overline{S} = (\tilde{S}^1,\ldots,\tilde{S}^{N-1})^{\mathsf{T}}$$

[19] Diese letzte Schreibweise für den stochastischen Prozess $\tilde{S}$ soll darauf hinweisen, dass bei der in Abschnitt 2.6.2 angegebenen Tupel-Schreibweise der Wert $(\tilde{S}_t^1(\omega),\ldots,\tilde{S}_t^N(\omega))^{\mathsf{T}}$ des Prozesses erst auf der Ebene der Argumente $(t,\omega) \in I \times \Omega$ geschlossen als $N$-Tupel auftritt und dort für die Multiplikation mit der Handelsstrategie $h$ mittels des Skalarprodukts des $\mathbb{R}^N$ verwendet wird.

jeweils ein $\mathcal{F}$-Martingal bezüglich $Q$. Man erhält die Martingaleigenschaft von $\overline{S}$ auch in der Form

$$\begin{aligned} 0 &= E_Q(\overline{S}_t\,|\mathcal{F}_{t-1}) - \overline{S}_{t-1} \\ &= E_Q(\overline{S}_t\,|\mathcal{F}_{t-1}) - E_Q(\overline{S}_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}) \qquad (\mathcal{F}_{t-1}\text{-messb. } \overline{S}_{t-1} \text{ herauszieh. bei bed. Erw.}^{20}) \\ &= E_Q(\overline{S}_t - \overline{S}_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}) \qquad \text{(Linearität der bed. Erwartung)} \\ &= E_Q(\Delta\overline{S}_t\,|\mathcal{F}_{t-1}) \;\; Q\text{-fast sicher}^{21} \qquad (t = 1,\ldots,T) \end{aligned}$$

bzw. in der Komponentenschreibweise

$$(\mathrm{ME}\tilde{S}) \qquad 0 = E_Q(\Delta\tilde{S}_t^j|\mathcal{F}_{t-1}) \;\; Q\text{-f.s.} \qquad (t = 1,\ldots,T, j = 1,\ldots,N\text{-}1).$$

Für den Numéraire-Index $j = N$ ist diese Eigenschaft im relativen Marktmodell mit seinem konstanten Numéraire $\tilde{S}^N = \tilde{B} = 1$ wegen $\Delta\tilde{S}_t^N = 0$ stets erfüllt. Bei der Darstellung $(\mathrm{ME}\tilde{S})$ der Martingaleigenschaft für den relativen Preisprozess $\tilde{S}$ treten die **dividendenlosen Preisdifferenzen** $\Delta\overline{S}_t^j = \Delta\tilde{S}_t^j = \tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}$ und nicht die dividendenversehenen Preisdifferenzen $\Delta\overline{S}_t^{\delta,j} = \Delta\tilde{S}_t^{\delta,j} = \tilde{S}_t^{\delta} - \tilde{S}_{t-1}$ auf. Um daraus entsprechende Bedingungen für den Gewinn $\overline{G}_t(\overline{h})$, den kumulierten Gewinn $\overline{K}_T(\overline{h})$ oder die relativen NE-Zahlungsprofile $Y_T \in \overline{K}_T(\mathcal{H}_{N-1}) = \tilde{\mathcal{M}}_T$ herzuleiten, wird also die **Voraussetzung** $\delta = 0$ und damit die Übereinstimmung $\Delta\tilde{S}_t^{\delta,j} = \Delta\tilde{S}_t^j$ benötigt.

Aus der Martingaleigenschaft $(\mathrm{ME}\tilde{S})$ folgt mit $\delta = 0$, $\Delta\overline{S}_t^{\delta} = \Delta\overline{S}_t$ und $\overline{G}_t(\overline{h}) = \Delta\overline{S}_t^{\delta} \cdot \overline{h}_t = \Delta\overline{S}_t \cdot \overline{h}_t$ für beliebiges $\overline{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$ zunächst für die bedingte Erwartung von $\overline{G}_t(\overline{h})$

$$\begin{aligned} (\mathrm{BE}\overline{G}) \qquad E_Q(\overline{G}_t(\overline{h})|\mathcal{F}_{t-1}) &= E_Q(\Delta\overline{S}_t \cdot \overline{h}_t|\mathcal{F}_{t-1}) \qquad (\delta = 0) \\ &= E_Q(\sum_{j=1}^{N-1}\Delta\tilde{S}_t^j h_t^j\,|\mathcal{F}_{t-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} E_Q(\Delta\tilde{S}_t^j h_t^j\,|\mathcal{F}_{t-1}) \qquad \text{(Linearität der bed. Erw.)} \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} h_t^j E_Q(\Delta\tilde{S}_t^j\,|\mathcal{F}_{t-1}) \qquad (\mathcal{F}_{t-1}\text{-messbares } h_t^j \text{ herausziehen}) \\ &= 0 \;\; Q\text{-f.s.} \qquad (\mathrm{ME}\tilde{S}: E_Q(\Delta\tilde{S}_t^j\,|\mathcal{F}_{t-1}) = 0 \; Q\text{-f.s.}; t = 1,\ldots,T). \end{aligned}$$

Bei fest gedachtem $t \in \{1,\ldots,T\}$ ist also die $\mathcal{F}_{t-1}$-messbare Funktion

$$k := E_Q(\overline{G}_t(\overline{h})|\mathcal{F}_{t-1}) = 0 \text{ auf } \Omega \setminus M$$

mit einer $Q$-Nullmenge $M$ ($\subseteq \Omega$) und demzufolge

$$E_Q(k) = \int_\Omega k dQ = \int_{\Omega\setminus M} k dQ + \int_M k dQ = 0 + 0 = 0,^{22}$$

---

20 Eigenschaften der bedingten Erwartung (Linearität, Monotonie, Positivität, Dreiecksungleichung, Erwartungstreue, Iterations- oder Turmeigenschaft, Messbares Herausziehen) findet man z. B. bei Bauer (2002) WT, S. 120–127, 140, Deck (2006), S. 121f, und speziell für endliches $\Omega$ und ein auf $\mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset\}$ positives W-Maß $Q$ bei Kremer (2011), S. 378, 382f.

21 Da in den Teilen a) und b) des Satzes das W-Maß $Q$ nicht zu $P$ äquivalent vorausgesetzt ist, also nicht positiv auf $\mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset\}$, sondern nur nichtnegativ auf $\mathcal{P}(\Omega)$ ist, gilt die Martingaleigenschaft nur $Q$-f.s. und nicht $Q$-sicher. Bei einem auf $\mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset\}$ positiven W-Maß $Q$ gilt die Martingaleigenschaft $(\mathrm{ME}\tilde{S})$ sicher (statt nur $Q$-f.s.), sodass die Betrachtungen mit der $Q$-Nullmenge $M$ weggelassen werden können.

22 Die additive Zerlegung des Integrals und das Verschwinden des zweiten Integrals über einer Nullmenge folgt nach Bauer (1992) MI, S. 78, (12.8‘) und S. 81, Korollar 13.3.

also der Erwartungswert der bedingten Erwartung

$$E_Q(E_Q(\bar{G}_t(\bar{h})|\mathcal{F}_{t-1})) = 0.$$

Bei dem hier auf endlichem $\Omega$ vorliegenden diskreten W-Maß $Q$ kann $E_Q(k) = 0$ auch folgendermaßen geschlossen werden: Die bedingte Erwartung $k$ ist $\mathcal{F}_{t-1}$-messbar und somit auf den $A_{t-1} \in \mathcal{P}_{t-1}$ jeweils konstant. Für jedes $A_{t-1} \in \mathcal{P}_{t-1}$ mit $k(A_{t-1}) \neq 0$ folgt die Inklusion $A_{t-1} \subseteq M$ und $Q(A_{t-1}) \leq Q(M) = 0$. Also ist

$$\begin{aligned} E_Q(k) &= \sum_{\omega\in\Omega} k(\omega)Q(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\substack{A_{t-1}\in\mathcal{P}_{t-1}:\\ k(A_{t-1})=0}} k(A_{t-1})Q(A_{t-1}) + \sum_{\substack{A_{t-1}\in\mathcal{P}_{t-1}:\\ k(A_{t-1})\neq 0}} k(A_{t-1})Q(A_{t-1}) = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Weiter ist dann für $t \in \{1,\ldots,T\}$ der Erwartungswert von $\bar{G}_t(\bar{h})$

(E$\bar{G}$) $$\begin{aligned} E_Q(\bar{G}_t(\bar{h})) &= E_Q(E_Q(\bar{G}_t(\bar{h})|\mathcal{F}_{t-1})) \qquad \text{(Erwartungstreue der bed. Erw.)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt nun die für $\bar{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$ zu beweisende Eigenschaft für den Erwartungswert von $\bar{K}_T(\bar{h})$

(E$\bar{K}$) $$\begin{aligned} E_Q(\bar{K}_T(\bar{h})) &= E_Q(\sum_{s=1}^{T} \bar{G}_s(\bar{h})) \\ &= \sum_{s=1}^{T} E_Q(\bar{G}_s(\bar{h})) = 0 \qquad \text{(Linearität des Erwartungswerts).} \end{aligned}$$

Die hier für beliebige Handelsstrategien $\bar{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$ begründete Aussage (E$\bar{K}$) gilt wegen der im relativen Marktmodell vorliegenden Mengenidentität $\bar{\mathcal{K}}_T = \bar{K}_T(\mathcal{H}_{N-1}) = \tilde{K}_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = \tilde{\mathcal{K}}_T$ auch für den relativen kumulierten Gewinn $\tilde{K}_T(h)$ beliebiger sf-Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$:

$$E_Q(\tilde{K}_T(h)) = 0 \;\forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf}.$$

Die zu (E$\bar{K}$) äquivalente Aussage

$$Q^{\mathsf{T}}\bar{K}_T(\bar{h}) = 0 \;\;\forall\; \bar{h} \in \mathcal{H}_{N-1} \text{ bzw.}$$

$$Q^{\mathsf{T}}Y_T = 0 \qquad \forall\, Y_T \in \bar{K}_T(\mathcal{H}_{N-1}) = \tilde{\mathcal{M}}_T \text{ oder}$$

(QNv) $$Q \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp},$$

dass also das W-Maß $Q$ ein $\kappa$-normierter nichtnegativer Normalenvektor von $\tilde{\mathcal{M}}_T$ ist, wird in Beweisteil b) begründet.

„⇐“: Für die umgekehrte Beweisrichtung wird vorausgesetzt, dass für alle sf-Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ bzw. für alle $\mathbb{R}^{N-1}$-wertigen Handelsstrategien $\bar{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$ der $Q$-Erwartungswert des relativen kumulierten Gewinns $\bar{K}_T(\bar{h})$ gleich Null ist. Zu zeigen ist die Martingaleigenschaft (ME$\tilde{S}$) für den relativen Preisprozess $\tilde{S}$:

$$E_Q(\Delta\tilde{S}_t^j|\mathcal{F}_{t-1}) = 0 \;\; Q\text{-fast sicher für } t = 1,\ldots,T, j = 1,\ldots,N.$$

Für den Numéraire-Index $j = N$ ist diese Eigenschaft wegen $\Delta\tilde{S}_t^N = 0$ stets erfüllt. Für festen Wertpapier-Index $j \in \{1,\ldots,N\text{-}1\}$ und festen Zeitpunkt $t \in \{1,\ldots,T\}$ ist nun also nachzuweisen, dass die $\mathcal{F}_{t-1}$-messbare Zustandsfunktion

$$g := E_Q(\Delta\tilde{S}_t^j|\mathcal{F}_{t-1}),$$

also die bedingte Erwartung der $\mathcal{F}_t$-messbaren Zustandsfunktion $\Delta\tilde{S}_t^j = \tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}$ unter der Hypothese $\mathcal{F}_{t-1}$, $Q$-fast sicher den Wert Null hat. Zunächst gilt, dass die mit $g$ gebildeten Mengen

$C_+ := \{g > 0\} = \{\omega \in \Omega : g > 0\}$ und
$C_- := \{g < 0\} = \{\omega \in \Omega : g < 0\}$

auf denen $g$ von Null verschieden ist, in der $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_{t-1}$ (der sog. $\mathcal{F}_{t-1}$-messbaren Mengen) liegen und die zugehörigen charakteristischen Funktionen $\mathbf{1}_{C_+}$ und $\mathbf{1}_{C_-}$ $\mathcal{F}_{t-1}$-messbar sind.[23] Als Erstes wird nun für die erste Menge $C := C_+$ gezeigt, dass sie das $Q$-Maß Null hat. Um die obige Voraussetzung $(\mathrm{E}\bar{K})$ $[\, E_Q(\bar{K}_T(\bar{h})) = 0 \;\forall\; \bar{h} \in \mathcal{H}_{N-1}\,]$ zu verwenden, definiert man die spezielle $\mathbb{R}^{N-1}$-wertige Handelsstrategie $\bar{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$ durch

$$\bar{h}_s := 0 \text{ für } s \neq t, \qquad \bar{h}_t := \mathbf{1}_C \cdot \mathbf{e}_j,$$

wobei $\mathbf{e}_j$ ($j \in \{1,\ldots,N\text{-}1\}$) der $j$-te Standardbasisvektor des $\mathbb{R}^{N-1}$ ist. Mit dieser Handelsstrategie $\bar{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$ berechnet sich (mit $\delta = 0$)

$$\bar{K}_T(\bar{h}) = \sum_{s=1}^{T} \bar{G}_s(\bar{h}) = \sum_{s=1}^{T} \Delta\bar{S}_s \cdot \bar{h}_s \qquad (\delta = 0)$$

$$= \Delta\bar{S}_t \cdot \mathbf{1}_C \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{1}_C \, \Delta\tilde{S}_t^j \qquad (s = t)$$

und unter Verwendung der Voraussetzung $(\mathrm{E}\bar{K})$

$$\begin{aligned} 0 = E_Q(\bar{K}_T(\bar{h})) &= E_Q(\mathbf{1}_C \Delta\tilde{S}_t^j) \\ &= E_Q(E_Q(\mathbf{1}_C \Delta\tilde{S}_t^j \,|\mathcal{F}_{t-1})) && \text{(Erwartungstreue der bed. Erw.)} \\ &= E_Q(\mathbf{1}_C E_Q(\Delta\tilde{S}_t^j \,|\mathcal{F}_{t-1})) && (\mathcal{F}_{t-1}\text{-messbares } \mathbf{1}_C \text{ herausziehen}) \\ &= E_Q(f) \end{aligned}$$

mit der $\mathcal{F}_{t-1}$-messbaren Zustandsfunktion

$$f := \mathbf{1}_C E_Q(\Delta\tilde{S}_t^j \,|\mathcal{F}_{t-1}) = \mathbf{1}_C \cdot g.$$

Diese Zustandsfunktion $f$ ist positiv auf $C$ und gleich Null auf $\Omega \setminus C$, also insgesamt nichtnegativ. Demzufolge ergibt sich aus

$$\int_\Omega f dQ = E_Q(f) = 0,$$

dass $f = 0$ $Q$-fast überall gilt und daher $Q(C) = 0$ ist.[24] Die Menge $C = C_+$ ist also eine $Q$-Nullmenge. Analog erhält man, dass auch die Menge $C_-$ eine $Q$-Nullmenge ist. Daher ist die Funktion $g$ nur auf der $Q$-Nullmenge $C_+ \cup C_-$ von Null verschieden, also $g = 0$ $Q$-fast überall. Damit ist die Martingaleigenschaft für den relativen Preisprozess $\tilde{S}$ nachgewiesen und $Q$ ist ein Martingalmaß bezüglich $\tilde{S}$.

**Beweis von b)** Linearalgebraische Charakterisierung:
Zur Charakterisierung der Martingaleigenschaft $(\mathrm{ME}\tilde{S})$

$$E_Q(\Delta\bar{S}_t \,|\mathcal{F}_{t-1}) = 0 \;\; Q\text{-f.s.} \qquad (t = 1,\ldots,T)$$

des relativen Preisprozesses $\tilde{S}$ wurde in Beweisteil a) die Eigenschaft $(\mathrm{E}\bar{K})$ hergeleitet. Man identifiziert nun das W-Maß $Q = Q_T$ auf $\mathcal{P}(\Omega)$ mit der zugehörigen Zustandsfunktion

$$Q \in \{X_T \in \mathbb{R}^\Omega : 0 \le X_T \le 1,\ \kappa(X_T) = 1\},$$

welche nichtnegativ ist und die Komponentensumme

$$\kappa(X_T) := X_{T,1} + \ldots + X_{T,K} = X_T(\{\omega_1\}) + \ldots + X_T(\{\omega_K\}) = 1$$

---

[23] Die Messbarkeit der hier angegebenen Mengen $C_+$ und $C_-$ und der zugehörigen charakteristischen Funktionen findet man bei Bauer (1992) MI, S. 57, 58.

[24] Nach Bauer (1992) MI, S. 81, Satz 13.2, gilt: Für eine nichtnegative (numerische und speziell für eine reellwertige) Zustandsfunktion $f$ auf $\Omega$ ist $\int_\Omega f dQ = 0$ gleichbedeutend dazu, dass $f = 0$ $Q$-fast überall auf $\Omega$ gilt.

besitzt. Weiter identifiziert man die beiden Zustandsfunktionen $Q$, $\bar{K}_T(\bar{h}) \in \mathbb{R}^{\Omega}$ jeweils mit ihrem Koordinaten-$K$-Tupel ($K = |\Omega|$) und verwendet für diese das Skalarprodukt des $\mathbb{R}^K$. Die Eigenschaft $(\mathrm{E}\bar{K})$ schreibt sich dann auch in der Form

$$0 = E_Q(\bar{K}_T(\bar{h})) = \sum_{k=1}^{K} \bar{K}_T(\bar{h})(\omega_k) Q(\{\omega_k\})$$
$$= Q^{\top} \bar{K}_T(\bar{h}) \;\forall\; \bar{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$$

bzw. wegen der im relativen Marktmodell vorliegenden Mengenidentität $\bar{\mathcal{K}}_T = \tilde{\mathcal{M}}_T$

$$0 = Q^{\top} Y_T \;\forall\; Y_T \in \bar{K}_T(\mathcal{H}_{N-1}) = \tilde{\mathcal{M}}_T$$

und in der Mengenschreibweise

(QNv) $$Q \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}.$$

Die Zustandsfunktion $Q$ ist ein Normalenvektor zum Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$, kurz ein $\tilde{\mathcal{M}}_T$-Normalenvektor. Die Menge der Martingalmaße $Q = Q_T$ entspricht also im Raum $\mathbb{R}^{\Omega}$ der auf $\Omega$ definierten Zustandsfunktionen der Teilmenge

$$\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{X_T \in \mathbb{R}^{\Omega} : 0 \le X_T \le 1,\, \kappa(X_T) = 1\},$$

die alle W-Maße beschreibt, deren zugehörigen nichtnegativen $\kappa$-normierten Zustandsfunktionen orthogonal zum Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$ sind. Diese **Menge der Martingalmaße** ist als Durchschnitt des linearen Unterraums $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$, der abgeschlossenen linearen Halbräume $\{X_{T,k} \ge 0\}$, der abgeschlossenen affinen Halbräume $\{X_{T,k} \le 1\}$ ($k = 1,\ldots,K$) und der affinen Hyperebene $\{\kappa(X_T) = 1\}$ ein (abgeschlossenes) konvexes Polyeder (Durchschnitt von endlich vielen abgeschlossenen affinen Halbräumen).

**Beweis von c):**
Ein auf $\mathcal{P}(\Omega)$ definiertes W-Maß $Q$ ist genau dann ein (zu $P$) äquivalentes Martingalmaß, wenn zusätzlich zu der in b) bewiesenen Inzidenz

$$Q \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{X_T \in \mathbb{R}^{\Omega} : 0 \le X_T \le 1,\, \kappa(X_T) = 1\}$$

noch $Q(A) > 0$ für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset\}$ gilt bzw. für die zugehörige Zustandsfunktion $Q$ noch $Q(\omega_k) > 0$ für alle $\omega_k \in \Omega$ gilt. Die **Menge der äquivalenten Martingalmaße** wird also beschrieben durch die Zustandsfunktionen in der Teilmenge

$$\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+} := \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{X_T \in \mathbb{R}^{\Omega} : 0 < X_T \le 1,\, \kappa(X_T) = 1\}.$$

Diese Menge $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$ der äquivalenten Martingalmaße ist als Durchschnitt des linearen Unterraums $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$, der offenen linearen Halbräume $\{X_T(\omega_k) > 0\}$ ($k = 1,\ldots,K$), der abgeschlossenen affinen Halbräume $\{X_T(\omega_k) \le 1\}$ ($k = 1,\ldots,K$) und der affinen Hyperebene $\{\kappa(X_T) = 1\}$ ein (teilweise offenes) konvexes Polyeder.

Diese positiven $\kappa$-normierten Zustandsfunktionen $Q \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ im relativen Marktmodell können nach dem Abschnitt 5.3.11, 1) als positive Bewertungsvektoren zur Bestimmung des relativen Preises $\tilde{\pi}(\tilde{X}_T) = Q^{\top} \tilde{X}_T$ eines sf-duplizierbaren relativen Zahlungsprofils $\tilde{X}_T \in \tilde{\mathcal{V}}_T$ und nach Abschnitt 5.3.8 auch zur Bestimmung des Preises $\pi(X_T) = B_0 \cdot Q^{\top}(X_T/B_T)$ eines sf-duplizierbaren Zahlungsprofils $X_T \in \mathcal{V}_T$ verwendet werden. Sie werden auch als **Diskontvektoren**[25] bezeichnet, da bei der Preisberechnung eine Barwertberechnung auftritt, bei der die Diskontierungsfaktoren $Q_k = Q(\omega_k)$ zur Anwendung kommen. □

[25] Wie in Abschnitt 3.8.1 werden hier die zu dem festen Zeitpunkt $T$ gehörige Zustandsfunktion $Q$ bzw. das zugehörige Koordinaten-$K$-Tupel als Diskontvektor bezeichnet, um sie vom einem zu allen Zeitpunkten $t \in I$ gebildeten Diskontierungsvektor $\Phi$ zu unterscheiden.

### 5.1.11 Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit im relativen Marktmodell durch die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes bzw. eines Diskontvektors

Mit Hilfe der Charakterisierung (SFβ) einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie in Satz 5.2 (Abschnitt 5.1.7), der Charakterisierung (AFsf$\tilde{\mathcal{M}}_T$) der sf-Arbitragefreiheit (Abschnitt 5.1.8), den Charakterisierungen eines Martingalmaßes bzw. äquivalenten Martingalmaßes in Satz 5.4 (Abschnitt 5.1.10) und mit dem Alternativsatz 3.7 (Abschnitt 3.6.1) der konvexen Geometrie kann nun der sog. erste Hauptsatz der Preistheorie für endfällige Zahlungsprofile bewiesen werden.
Der Teil b)[26] des nachfolgenden Satzes 5.5 gibt im *dividendenlosen* relativen Marktmodell sowohl eine wahrscheinlichkeitstheoretische Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit durch die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes $Q$ als auch eine linearalgebraische Charakterisierung durch die Existenz eines $\kappa$-normierten positiven Normalenvektors $Q$ zum Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$. Dieser $\tilde{\mathcal{M}}_T$-Normalenvektor

$$Q \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+} := \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = 1, X_T > 0\}$$

ist nach den Abschnitten 5.3.8 und 5.3.10 ein positiver relativer Bewertungsvektor für die Zahlungsprofile $\tilde{X}_T \in \tilde{\mathcal{V}}_T$ und wird daher als relativer Diskontvektor bezeichnet.
Der Teil a) des Satzes ist die Verallgemeinerung von Teil b) auf ein *dividendenversehenes* relatives Marktmodell und charakterisiert die sf-Arbitragefreiheit durch die Existenz eines relativen Diskontvektors $Q$ in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$, mit dem die Preise der relativen Zahlungsprofile $\tilde{X}_T \in \tilde{\mathcal{V}}_T = \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ berechnet werden können. Hier liefert der Diskontvektor $Q$ aber im Allgemeinen kein äquivalentes Martingalmaß, sondern nur ein äquivalentes W-Maß (als ein formales W-Maß des Marktmodells).

Die entsprechende Aussage für ein dividendenversehenes ursprüngliches Marktmodell folgt im nächsten Abschnitt mit Satz 5.6. Dort wird die sf-Arbitragefreiheit durch die Existenz eines $\kappa$-normierten positiven Normalenvektors $Q$ zum Unterraum $\mathcal{M}_T$ charakterisiert. Dieser $\mathcal{M}_T$-Normalenvektor

$$Q \in \mathcal{M}_T^{\perp 1+} := \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = 1, X_T > 0\}$$

des ursprünglichen Modells mit der Normierung $\kappa(Q) = 1$ ist aber im Allgemeinen selbst kein Bewertungsvektor für die Preisberechnung der Zahlungsprofile $X_T \in \mathcal{V}_T = V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$, da im ursprünglichen Modell im Allgemeinen kein konstanter Numéraire vorliegt, der die Mengenidentität $\mathcal{M}_T = \mathcal{K}_T$ sichert. Er liefert aber nach Abschnitt 5.3.8 unter der zusätzlichen Voraussetzung von (ZVU) oder spezieller eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ nach der Normierung auf die Komponentensumme $\kappa(Y_T) = \kappa_0 > 0$ mit dem Vektor

$$Y_T := Q\kappa_0 \in \mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0 +} = \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = \kappa_0, X_T > 0\}$$

---

[26] Den Teil b) des Satzes mit der Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit durch ein äquivalentes Martingalmaß im dividendenlosen Marktmodell findet man bei Bäuerle u. Rieder (2017), S. 42, Theorem 4.4, Kühn (2016), S. 35, Satz 1.21, Kallsen (2009), S: 38, Satz 3.9.

($\kappa_0 := v_0(h) > 0$ für eine sf-Duplikationsstrategie $h$ von $\mathbf{1}_\Omega$; $V_T(h) = \mathbf{1}_\Omega$) einen positiven Bewertungsvektor bzw. Diskontvektor $Y_T$ für die Zahlungsprofile $X_T \in \mathcal{V}_T$.

Durch die beiden Sätze 5.5 und 5.6 wird also deutlich, dass bei der Behandlung der endfälligen Zahlungsprofile $X_T \in \mathbb{R}^\Omega$ die Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit (AFsf) hauptsächlich durch die Existenz eines $\kappa$-normierten positiven Normalenvektors $Q$ zum Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$ bzw. $\mathcal{M}_T$ erfolgt. Die Martingaleigenschaft eines relativen Diskontvektors $Q \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$ ist dagegen nur eine zusätzliche Eigenschaft bei Vorliegen eines dividendenlosen Marktmodells.

**Satz 5.5 Erster Hauptsatz der Preistheorie mit der Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit (AFsf) durch die Existenz eines relativen Diskontvektors im dividendenversehenen relativen Marktmodell bzw. durch die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes im dividendenlosen relativen Marktmodell**

Im Marktmodell $(S,\mathcal{F})$ sei der Preisprozess $S = (S^1,\ldots,S^N)^\mathsf{T}$ mit einem Numéraire

$$B := S^N > 0$$

ausgestattet.

a) **Der Fall eines dividendenversehenen Preisprozesses**: Bei einem Preisprozess $S = (S^1,\ldots,S^N)^\mathsf{T}$ mit Dividenden ist das Marktmodell genau dann sf-arbitragefrei, wenn es mindestens einen **relativen Diskontvektor** $Q$ in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$, d. h. einen $\kappa$-normierten positiven Normalenvektor $Q$ zum Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$ der relativen NE-Zahlungsprofile bzw. ein äquivalentes W-Maß $Q$ in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ gibt.

b) **Der Fall eines dividendenlosen Preisprozesses**: Bei einem Preisprozess $S = (S^1,\ldots,S^N)^\mathsf{T}$ ohne Dividenden ($\delta = (\delta^1,\ldots,\delta^N)^\mathsf{T} = 0$) ist das Marktmodell genau dann sf-arbitragefrei, wenn es mindestens einen relativen Diskontvektor $Q \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$, d. h. einen $\kappa$-normierten positiven Normalenvektor $Q$ zum Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$, bzw. ein **äquivalentes Martingalmaß** $Q$ im relativen Marktmodell gibt.

c) **Teilmenge der äquivalenten W-Maße**: Das teilweise offene konvexe Polyeder

$$\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+} = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{0 < X_T \le 1, \kappa(X_T) = 1\}.$$

der positiven $\kappa$-normierten Zustandsfunktionen, die orthogonal zu den relativen NE-Zahlungsprofilen des Unterraums $\tilde{\mathcal{M}}_T$ sind, liefert genau die äquivalenten W-Maße $Q$ in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$. Diese äquivalenten W-Maße in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ sind speziell im dividendenlosen Marktmodell die äquivalenten Martingalmaße.

**Beweis von a):**
„⇒“: Das Marktmodell sei sf-arbitragefrei. Nach der oben in Abschnitt 5.1.8 angegebenen Charakterisierung (AFsf$\tilde{\mathcal{M}}_T$) der sf-Arbitragefreiheit sind also der lineare Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$ und der schwach positive Orthant $\mathbb{R}^\Omega_{\gneq 0} = \{X_T \in \mathbb{R}^\Omega : X_T \ge 0\} \setminus \{0\}$ von $\mathbb{R}^\Omega$ ($\cong \mathbb{R}^K$) disjunkt:

$$\tilde{\mathcal{M}}_T \cap \mathbb{R}^\Omega_{\gneq 0} = \emptyset.$$

Nach dem Alternativsatz 3.7 existiert dann ein (strikt) positives Zahlungsprofil $\tilde{\Phi}_T$ im orthogonalen Komplement des Unterraums $\tilde{\mathcal{M}}_T$ (ein positiver Normalenvektor des Unterraums $\tilde{\mathcal{M}}_T$),

$$\tilde{\Phi}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \mathbb{R}^{\Omega}_{>0} ,$$

wobei das orthogonale Komplement des Unterraums $\tilde{\mathcal{M}}_T$ bezüglich dem in Abschnitt 2.9 angegebenen Skalarprodukt $\langle X_T, Y_T \rangle$ von $\mathcal{W}_{T,1} = \mathbb{R}^{\Omega}$ bzw. bezüglich dem Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^K$ ($K = |\Omega|$) für die Koordinaten-$K$-Tupel der $X_T$, $Y_T \in \mathbb{R}^{\Omega}$ gebildet wird. Mit der Komponentensumme[27]

$$\kappa(x) := \sum_{k=1}^{K} x_k \quad (x \in \mathbb{R}^K)$$

des $\mathbb{R}^K$ „normiert" ($\kappa$-Normierung), erhält man aus der positiven Zustandsfunktion $\tilde{\Phi}_T$ die „normierte" Zustandsfunktion

$$Q := \tilde{Q}_T := \frac{\tilde{\Phi}_T}{\kappa(\tilde{\Phi}_T)} .$$

Wegen $\kappa(\tilde{\Phi}_T) > 0$ liegt das so normierte

$$Q = (Q(\{\omega_1\}),\ldots,Q(\{\omega_K\}))^{\mathsf{T}} = (Q_1,\ldots, Q_K)^{\mathsf{T}}$$

ebenfalls in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \mathbb{R}^{\Omega}_{>0}$. Es gilt also $Q^{\mathsf{T}} Y_T = 0$ für alle $Y_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T$, $Q > 0$ auf $\Omega$ und $\kappa(Q) = Q_1 + \ldots + Q_K = 1$, sodass $Q$ ein $\kappa$-normierter positiver Normalenvektor zum Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$ ist:

$$Q \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+} := \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{0 < X_T \le 1, \kappa(X_T) = 1\}.$$

Mit dieser Zustandsfunktion $Q \in \mathbb{R}^{\Omega}$ ist auch eine Funktion $Q$ auf der Partition $\mathcal{P}_T = \{(\{\omega_1\},\ldots,(\{\omega_K\}\}$ von $\Omega$ und ein W-Maß $Q$ auf der $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_T = \sigma(\mathcal{P}_T) = \mathcal{P}(\Omega)$ definiert (Erklärung in Abschnitt 3.7.4). Da $Q(\{\omega_k\} > 0$ für alle $\omega_k \in \Omega$ gilt, ist dieses W-Maß $Q$ ein (zu $P$) **äquivalentes W-Maß** in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$. Umgekehrt entspricht jedem äquivalenten W-Maß in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ auch ein $\kappa$-normierter positiver Normalenvektor zum Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$.

Diese Menge $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$ der äquivalenten $W$-Maße ist als Durchschnitt des linearen Unterraums $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$, der offenen linearen Halbräume $\{X_T(\omega_k) > 0\}$ ($k = 1,\ldots,K$), der abgeschlossenen affinen Halbräume $\{X_T(\omega_k) \le 1\}$ ($k = 1,\ldots,K$) und der affinen Hyperebene $\{\kappa(X_T) = 1\}$ ein (teilweise offenes) konvexes Polyeder.

Nach Satz 5.4, c) sind die äquivalenten W-Maße in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ speziell im dividendenlosen Marktmodell genau die **äquivalenten Martingalmaße**. Damit ist auch schon der Teil c) des Satzes bewiesen.

Die $\kappa$-normierte positive Zustandsfunktion $Q$ kann nach den noch folgenden Abschnitten 5.3.8 und 5.3.11 als positiver Bewertungsvektor zur Bestimmung der Preise der Zahlungsprofile $\tilde{X}_T \in \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ und $X_T \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ verwendet werden. Da dabei die Komponenten $Q_k = Q(\omega_k)$ von $Q$ als die Diskontierungsfaktoren einer Barwertberechnung auftreten, wird der Bewertungsvektor $Q \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$ auch als **Diskontvektor** bezeichnet.

„⇐": Aus der Existenz eines $\kappa$-normierten positiven Normalenvektors $Q$ zum Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$ bzw. eines äquivalenten W-Maßes $Q$ folgt

---

[27] Im unten in Abschnitt 5.3 noch behandelten allgemeineren Fall, wenn anstelle der Arbitragefreiheit (AFsf) nur das Law of One Price (LOPsf) vorliegt und die Komponenten des Bewertungsvektors nicht notwendig positiv sind, zeigt sich, dass hier zur Division die Komponentensumme und nicht die Betragssummennorm (Summennorm, 1-Norm) zu verwenden ist. Die Kompenentensumme liefert keine Norm des Vektorraums $\mathbb{R}^K$, da sie nicht positiv definit, d. h. positiv für $x \neq 0$, ist.

$$\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \mathbb{R}_{\gtrdot 0}^{\Omega} \supseteq \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+} \neq \emptyset$$

mit dem (strikt) positiven Orthanten $\mathbb{R}_{\gtrdot 0}^{\Omega} = \{X_T \in \mathbb{R}^{\Omega} : X_T > 0\}$ von $\mathbb{R}^{\Omega}$, daraus nach dem Alternativsatz 3.7 von Abschnitt 3.6.1

$$\tilde{\mathcal{M}}_T \cap \mathbb{R}_{\gtrdot 0}^{\Omega} = \emptyset$$

und nach der Charakterisierung (AFsf $\tilde{\mathcal{M}}_T$) die Arbitragefreiheit im relativen und im ursprünglichen Marktmodell.

**Beweis von b):**
„⇒": Bei vorliegender Arbitragefreiheit (AFsf) existiert nach Beweisteil a) „⇒"ein $\kappa$-normierter positiver Normalenvektor $Q$ zum Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$. Weiter wurde in Beweisteil a) auch schon gezeigt, dass mit dieser Zustandsfunktion $Q \in \mathbb{R}^{\Omega}$ auch eine Funktion $Q$ auf der Partition $\mathcal{P}_T = \{(\{\omega_1\},\ldots,(\{\omega_K\}\}$ von $\Omega$ und ein äquivalentes W-Maß $Q$ auf der $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_T = \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und damit auf allen $\sigma$-Algebren $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_T$ definiert ist ($t \in I$; Erklärung in Abschnitt 3.7.4). Dieses äquivalente W-Maß $Q$ ist nach Satz 5.4, c) im dividendenlosen relativen Marktmodell auch ein äquivalentes Martingalmaß.

„⇐": Für diese Beweisrichtung wird zunächst in 1) ein kurzer linearalgebraischer Beweis und dann in 2) noch ein etwas längerer w-theoretischer Beweis angegeben.
1) Da nach Satz 5.4, c) ein äquivalentes Martingalmaß (im dividendenlosen relativen Marktmodell) auch ein $\kappa$-normierter positiver Normalenvektor $Q$ zum Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$ ist, liefert der obige Beweisteil a) „⇐" mit dem Alternativsatz 3.7 die Begründung für die Aussage b) „⇐".
2) Es sei $Q$ ein äquivalentes Martingalmaß (im dividendenlosen relativen Marktmodell). Zum Nachweis der Arbitragefreiheit (AFsf) jetzt gemäß der Charakterisierung (AFsf $\bar{\mathrm{K}}$) von Abschnitt 5.1.8 ist zu zeigen, dass für jede selbstfinanzierende Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N$ mit $\tilde{V}_0(h) = V_0(h) = 0$ und $\bar{K}_T(\bar{h}) \geq 0$ auch

$$\bar{K}_T(\bar{h}) = 0 \; \forall \; \omega \in \Omega$$

gilt. Allgemein wird nach Satz 5.2, a) in Abschnitt 5.1.7 eine beliebige selbstfinanzierende Handelsstrategie $h$ durch einen beliebig vorgegebenen Wert $\tilde{V}_0(h)$ und eine beliebige Handelsstrategie $\bar{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$ beschrieben. Hier sind nun der spezielle Wert $\tilde{V}_0(h) = 0$ und ein beliebiges $\bar{h} \in \mathcal{H}_{N-1}$ mit $\bar{K}_T(\bar{h}) \geq 0$ gegeben. Nach der in Satz 5.4, a) gegebenen w-theoretischen Charakterisierung $(\mathrm{E}\bar{\mathrm{K}})$ eines Martingalmaßes gilt zunächst

$$\int_{\Omega} \bar{K}_T(\bar{h}) dQ = E_Q(\bar{K}_T(\bar{h})) = 0.$$

und wegen $\bar{K}_T(\bar{h}) \geq 0$ dann $\bar{K}_T(\bar{h}) = 0$ $Q$-fast sicher.[28] Da aber $Q$ sogar ein äquivalentes Martingalmaß ist, also noch $Q > 0$ auf $\mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset\}$ gilt, gibt es in $\mathcal{P}(\Omega)$ keine $Q$-Nullmenge $M \neq \emptyset$. Damit existiert auch keine nichttriviale $Q$-Nullmenge, auf der $\bar{K}_T(\bar{h})$ von Null verschieden ist. Demnach ist $\bar{K}_T(\bar{h}) = 0 \; \forall \; \omega \in \Omega$ und die sf-Arbitragefreiheit nachgewiesen.
Der Nachweis von $\bar{K}_T(\bar{h}) = 0$ kann bei dem hier vorliegenden diskreten W-Maß $Q$ auch folgendermaßen erfolgen: Aus $(\mathrm{E}\bar{K})$

[28] Das $Q$-fast sichere Verschwinden der Zustandsfunktion $\bar{K}_T(\bar{h})$ auf $\Omega$ folgt nach Bauer (1992) MI, S. 81, Satz 13.2.

$$0 = E_Q(\bar{K}_T(\bar{h})) = \sum_{k=1}^{K} Q(\{\omega_k\})\bar{K}_T(\bar{h})(\omega_k)$$

folgt wegen $\bar{K}_T(\bar{h})(\omega_k) \geq 0$ und $Q(\{\omega_k\}) > 0 \; \forall \; k \in \{1,\ldots,K\}$ auch $K_T(h)(\omega_k) = 0 \; \forall \; \omega_k \in \Omega$.

**Beweis von c):**
Der Beweis von c) mit der Beschreibung der äquivalenten W-Maße $Q$ in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ wurde bereits im Beweis von a) erbracht. □

## 5.1.12 Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit im ursprünglichen Marktmodell durch die Existenz eines Diskontvektors

Beim Beweis des obigen ersten Hauptsatzes (Satz 5.5) der Preistheorie für endfällige Zahlungsprofile wird die mengentheoretische Charakterisierung (AFsf$\tilde{\mathcal{M}}_T$) von Abschnitt 5.1.8 für die sf-Arbitragefreiheit im relativen Marktmodell verwendet. Im ursprünglichen Marktmodell führt die entsprechende Charakterisierung (AFsf$\mathcal{M}_T$) bei der Beweisrichtung „⇒“ dagegen im Allgemeinen nicht zu einem äquivalenten *Martingal*maß: Aus der Disjunktheit des linearen Unterraums $\mathcal{M}_T$ und des schwach positiven Orthanten $\mathbb{R}^{\Omega}_{\geq 0}$ erhält man nämlich im nachfolgenden Beweis von Satz 5.6, a) „⇒“ mit dem Alternativsatz 3.7 zwar eine positive Zustandsfunktion $\Phi_T$ im orthogonalen Komplement des Unterraums $\mathcal{M}_T$,

$$\Phi_T \in \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \mathbb{R}^{\Omega}_{>0},$$

und nach der Normierung mit der Komponentensumme und der Fortsetzung von $\Phi_T$ auf die $\sigma$-Algebra $\mathfrak{P}(\Omega)$ auch ein (zu $P$) äquivalentes W-Maß

$$Q \in \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{0 < X_T \leq 1, \kappa(X_T) = 1\} =: \mathcal{M}_T^{\perp 1+},$$

jedoch im Allgemeinen kein äquivalentes Martingalmaß (im relativen Marktmodell)

$$Q \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{0 < X_T \leq 1, \kappa(X_T) = 1\} =: \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}.$$

Nur wenn das Marktmodell dividendenlos ist und wenn noch $\tilde{\mathcal{M}}_T = f_T(\mathcal{M}_T) = \mathcal{M}_T$ (mit $f_T(X_T) = X_T/B_T$) gilt, liefert die Wahl eines positiven $\Phi_T \in \mathcal{M}_T^{\perp 1+}$ auch ein äquivalentes Martingalmaß $Q \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$. Die Übereinstimmung $\tilde{\mathcal{M}}_T = \mathcal{M}_T$ wird beispielsweise für ein deterministisches $B_T$ in Abschnitt 5.1.7 gezeigt.

Die Martingaleigenschaft bezieht sich hier gemäß der Definition eines Martingalmaßes in Abschnitt 5.1.10 üblicherweise auf den relativen dividendenlosen Preisprozess $\tilde{S}$. Im ursprünglichen Marktmodell ist der Preisprozess $S$ im Allgemeinen kein Martingal. So ist z. B. ein deterministischer Numéraire $B = S^N$ mit $B_t = (1 + r)^t$ ($r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $t \in I$) stets für kein W-Maß $Q$ ein Martingal:

$$E_Q(B_{t+1}|\mathcal{F}_t) = B_{t+1} = (1 + r)B_t \neq B_t.$$

Der im relativen Marktmodell $\left((\tilde{S},\tilde{\delta}),\mathcal{F}\right)$ stets existierende spezielle konstante relative Numéraire $\tilde{B} = \tilde{S}^N = 1$ ist aber für ein beliebiges W-Maß $Q$ stets ein Martingal:

$E_Q(\tilde{B}_{t+1}|\mathcal{F}_t) = \tilde{B}_{t+1} = 1 = \tilde{B}_t$ . Die Martingaleigenschaft der übrigen relativen dividendenlosen Nichtnumeraire-Preisprozesse $\tilde{S}^j = (\tilde{S}_0^j,...,\tilde{S}_T^j)^\top$ ($j = 1,\ldots,N\text{-}1$) bezüglich eines äquivalenten W-Maßes $Q$ wird aber erst durch die Arbitragefreiheit (AFsf) gemäß Satz 5.5, b) gesichert.

Falls der dividendenlose Preisprozess $S$ im ursprünglichen Marktmodell ein Martingal bezüglich eines W-Maßes $Q$ ist und ein deterministischer Numéraire $B$ ($B_t = u_t\mathbf{1}_\Omega > 0$, $u_t \in \mathbb{R}$ für $t \in I$) vorliegt, so ist dieser Numéraire notwendig auf $I \times \Omega$ konstant: Wegen

$$u_{t+1}\mathbf{1}_\Omega = B_{t+1} = E_Q(B_{t+1}|\mathcal{F}_t) = B_t = u_t\mathbf{1}_\Omega \qquad (t = 0,\ldots,T\text{-}1)$$

ist nämlich $B_t = u_0\mathbf{1}_\Omega$ und o. E. mit Aufzinsungsfaktor $u_0 = 1$ bzw. Zinssatz $i_0 = u_0 - 1 = 0$. Also liegt dann schon im ursprünglichen Marktmodell mit der Existenz eines konstanten Finanzinstruments $B$ beim Preisprozess die gleiche Situation wie im relativen Marktmodell vor und es gilt auch im ursprünglichen Modell die Charakterisierung eines Martingalmaßes gemäß Satz 5.4 und die Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit (AFsf) gemäß Satz 5.5 b.

Für die Beweisrichtung „⇐“ von Satz 5.5, b zum Nachweis der sf-Arbitragefreiheit genügt anstelle eines äquivalenten Martingalmaßes $Q \in \tilde{\mathcal{M}}_T^\perp$ im relativen Marktmodell tatsächlich aber auch die Existenz eines äquivalenten W-Maßes $Q \in \mathcal{M}_T^\perp$ im ursprünglichen Marktmodell, also ohne die Martingaleigenschaft des relativen Preisprozesses $\tilde{S}$ . Bei Verzicht auf einen Numéraire und die Martingaleigenschaft können dann aber in Satz 5.6 für die Finanzinstrumente auch Dividenden zugelassen werden. Diese Aussage für ein Marktmodell mit Dividenden und ohne Numéraire wird im folgenden modifizierten ersten Hauptsatz 5.6 für endfällige Zahlungsprofile formuliert. Man erhält damit für die sf-Arbitragefreiheit (AFsf) sowohl eine wahrscheinlichkeitstheoretische Charakterisierung mittels der Existenz eines äquivalenten W-Maßes in $\mathcal{M}_T^\perp$ (eines formalen W-Maßes) als auch eine linearalgebraische Charakterisierung durch die Existenz eines auf $\kappa(X_T) = 1$ $\kappa$-normierten positiven Normalenvektors zum Unterraum $\mathcal{M}_T$ der NE-Zahlungsprofile. Die in Satz 5.5 auch schon angegebene linearalgebraische Formulierung und die dadurch mögliche geometrische Interpretation der sf-Arbitragefreiheit (AFsf) durch die Existenz eines $\kappa$-normierten positiven Normalenvektors zum Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$ ($\subseteq \tilde{\mathcal{V}}_T \subseteq \mathbb{R}^\Omega$) liefert hier also die Idee für die entsprechende Interpretation mit dem Unterraum $\mathcal{M}_T$ ($\subseteq \mathcal{V}_T \subseteq \mathbb{R}^\Omega$). Die Verallgemeinerung des ersten Hauptsatzes auf ein dividendenversehenes ursprüngliches oder relatives Marktmodell macht deutlich, dass die Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit (AFsf) im Wesentlichen durch die Existenz eines positiven Normalenvektors zu $\mathcal{M}_T$ oder $\tilde{\mathcal{M}}_T$ erfolgt. Die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes ist dabei nur der Spezialfall für ein dividendenloses relatives Marktmodell (mit dem konstanten relativen Numéraire $\tilde{B} = 1$).

Wie schon zu Beginn des vorherigen Abschnitts 5.1.11 dargestellt wurde, ist im relativen Marktmodell der $\tilde{\mathcal{M}}_T$-Normalenvektor $Q \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$ stets selbst ein Diskontvektor (positiver Bewertungsvektor zur Preisberechnung). Im ursprünglichen Marktmodell dagegen liefert erst der unter der zusätzlichen Voraussetzung ZVU aus dem $\mathcal{M}_T$-Normalenvektor $Q \in \mathcal{M}_T^{\perp 1+}$ durch die Normierung auf die Komponentensumme $\kappa_0 := \pi(\mathbf{1}_\Omega)$ ($> 0$) gewonnene $\mathcal{M}_T$-Normalenvektor $Y_T := \kappa_0 Q \in \mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0 +}$ einen Diskontvektor.

**Satz 5.6 Erster Hauptsatz der Preistheorie mit der Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit (AFsf) eines dividendenversehenen Marktmodells durch die Existenz eines positiven $\mathcal{M}_T$-Normalenvektors bzw. eines äquivalenten *W*-Maßes**

Es sei $((S,\delta),\mathcal{F})$ ein Marktmodell , bei dem kein Numéraire benötigt wird und bei dem auch **Dividenden zugelassen** sind.

a) Das Marktmodell ist genau dann sf-arbitragefrei, wenn es mindestens einen Normalenvektor $Q$ in $\mathcal{M}_T^{\perp 1+}$, d. h. einen auf $\kappa(X_T) = 1$ **$\kappa$-normierten positiven Normalenvektor** zum Unterraum $\mathcal{M}_T$ der NE-Zahlungsprofile, bzw. ein **äquivalentes W-Maß** $Q$ in $\mathcal{M}_T^{\perp}$ gibt.

b) Die **Menge der äquivalenten W-Maße** in $\mathcal{M}_T^{\perp}$ wird im Raum $\mathbb{R}^{\Omega}$ der Zustandsfunktionen $X_T : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ beschrieben durch das teilweise offene konvexe Polyeder

$$\mathcal{M}_T^{\perp 1+} := \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{0 < X_T \leq 1,\ \kappa(X_T) = 1\}.$$

Dieses Polyeder liefert alle W-Maße $Q$, deren zugehörige Zustandsfunktionen positiv auf $\Omega$, $\kappa$-normiert und orthogonal zu den NE-Zahlungsprofilen des Unterraums $\mathcal{M}_T$ sind.

c) Unter der zusätzlichen Voraussetzung von (ZVU) des Abschnitts 5.3.5 oder spezieller eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ ist das Marktmodell genau dann sf-arbitragefrei, wenn ein **Diskontvektor**, d. h. ein auf die Komponentensumme $\kappa(X_T) = \kappa_0\ (> 0)$ $\kappa$-normierter positiver $\mathcal{M}_T$-Normalenvektor $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0 +}$, für die Preisberechnung der sf-duplizierbaren Zahlungsprofile $X_T \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ existiert. Die Menge $\mathcal{A}_T^+$ der Diskontvektoren ist dann gegeben durch das teilweise offene konvexe Polyeder

$$\mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0 +} := \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{0 < X_T \leq \kappa_0,\ \kappa(X_T) = \kappa_0\}.$$

**Beweis von a):**
„⇒“: Das Marktmodell sei sf-arbitragefrei. Nach der oben in Abschnitt 5.1.2 angegebenen Charakterisierung $(\mathrm{AFsf}\mathcal{M}_T)$ der sf-Arbitragefreiheit sind also der lineare Unterraum $\mathcal{M}_T$ und der schwach positive Orthant $\mathbb{R}^{\Omega}_{\gneq 0}$ von $\mathbb{R}^{\Omega}\ (\cong \mathbb{R}^K)$ disjunkt:

$$\mathcal{M}_T \cap \mathbb{R}^{\Omega}_{\gneq 0} = \emptyset.$$

Nach dem Alternativsatz 3.7 ist dies äquivalent zur Existenz eines (strikt) positiven Zahlungsprofils $\Phi_T$ im orthogonalen Komplement des Unterraums $\mathcal{M}_T$, also eines positiven Normalenvektors des Unterraums $\mathcal{M}_T$,

$$\Phi_T \in \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \mathbb{R}^{\Omega}_{\gneq 0} =: \mathcal{M}_T^{\perp +},$$

wobei das orthogonale Komplement des Unterraums $\mathcal{M}_T$ bezüglich des in Abschnitt 2.9 angegebenen Skalarprodukts $\langle X_T, Y_T \rangle$ von $\mathcal{W}_{T,1} = \mathbb{R}^{\Omega}$ bzw. bezüglich des Standardskalarprodukts des $\mathbb{R}^K$ $(K = |\Omega|)$ für die Koordinaten-$K$-Tupel der $X_T$, $Y_T \in \mathbb{R}^{\Omega}$ gebildet wird. Mit der Komponentensumme

$$\kappa(x) := \sum_{k=1}^{K} x_k \quad (x \in \mathbb{R}^K)$$

des $\mathbb{R}^K$ „normiert“, erhält man aus der positiven Zustandsfunktion $\Phi_T$ mit $\kappa(\Phi_T) > 0$ die „normierte“ Zustandsfunktion

$$Q := Q_T := \frac{\Phi_T}{\kappa(\Phi_T)} \in \mathcal{M}_T^{\perp 1+} = \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = 1, 0 < X_T \leq 1\}.$$

Mit der Zustandsfunktion $Q \in \mathbb{R}^{\Omega}$ ist auch eine Funktion $Q$ auf der Partition $\mathcal{P}_T = \{(\{\omega_1\},\ldots,(\{\omega_K\}\}$ von $\Omega$, ein W-Maß $Q$ auf der $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_T = \sigma(\mathcal{P}_T) = \mathfrak{P}(\Omega)$ und damit auf allen $\sigma$-Algebren $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_T$ definiert ($t \in I$; Erklärung in Abschnitt 3.7.4). Da $Q(\{\omega_k\}) > 0$ für alle $\omega_k \in \Omega$ gilt, ist dieses W-Maß $Q$ ein in $\mathcal{M}_T^{\perp}$ gelegenes (zu $P$) **äquivalentes W-Maß** .

Unter der zusätzlichen Voraussetzung (ZVU) von Abschnitt 5.3.4 oder spezieller bei Existenz eines Numéraires $S^N = B$ mit deterministischem $B_T$ ist bei gültiger sf-Arbitragefreiheit (AFsf) und damit gültigem LOPsfT (Begründung in den Erläuterungen zu Satz 5.12 in Abschnitt 5.3.12) der auf die Komponentensumme $\kappa_0 := \pi(\mathbf{1}_\Omega) > 0$ normierte positive $\mathcal{M}_T$-Normalenvektor

$$Y_T := \kappa_0 Q \in \mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0 +}$$

nach den Abschnitten 5.3.8 und 5.3.11 ein **Diskontvektor** (positiver Bewertungsvektor zur Preisberechnung) für die Zahlungsprofile $X_T \in \mathcal{V}_T$. Die Menge $\mathcal{A}_T^+$ der Diskontvektoren ist nach den Abschnitten 5.3.8 und 5.3.10 gegeben durch das teilweise offene konvexe Polyeder $\mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0 +}$ .

„⇐“: Aus der Existenz eines $\kappa$-normierten positiven Normalenvektors $Q \in \mathcal{M}_T^{\perp 1+}$ bzw. eines äquivalenten W-Maßes in $\mathcal{M}_T^{\perp}$ folgt

$$\mathcal{M}_T^{\perp} \cap \mathbb{R}_{>0}^{\Omega} \supseteq \mathcal{M}_T^{\perp 1+} \neq \emptyset$$

mit dem (strikt) positiven Orthanten $\mathbb{R}_{>0}^{\Omega} = \{X_T \in \mathbb{R}^{\Omega} : X_T > 0\}$ von $\mathbb{R}^{\Omega}$, daraus nach dem Alternativsatz 3.7 (in Abschnitt 3.6)

$$\mathcal{M}_T \cap \mathbb{R}_{\gneq 0}^{\Omega} = \emptyset$$

mit dem schwach positiven Orthanten $\mathbb{R}_{\geq 0}^{\Omega} = \{X_T \in \mathbb{R}^{\Omega} : X_T \geqq 0\}$ und nach der Charakterisierung (AFsf$\mathcal{M}_T$) von Abschnitt 5.1.2 die sf-Arbitragefreiheit im Marktmodell.

**Beweis von b):**
Die Menge der äquivalenten W-Maße in $\mathcal{M}_T^{\perp}$ wird im Raum $\mathbb{R}^{\Omega}$ der Zustandsfunktionen $Q : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ beschrieben durch die Teilmenge

$$\mathcal{M}_T^{\perp 1+} := \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{0 < X_T \leq 1, \kappa(X_T) = 1\}.$$

Diese Menge $\mathcal{M}_T^{\perp 1+}$ der äquivalenten W-Maße in $\mathcal{M}_T^{\perp}$ ist als Durchschnitt des linearen Unterraums $\mathcal{M}_T^{\perp}$, der offenen linearen Halbräume $\{X_T(\omega_k) > 0\}$ ($k = 1,\ldots,K$), der abgeschlossenen affinen Halbräume $\{X_T(\omega_k) \leq 1\}$ ($k = 1,\ldots,K$) und der affinen Hyperebene $\{\kappa(X_T) = 1\}$ ein (teilweise offenes) konvexes Polyeder.

**Beweis von c):**
Die Beweisrichtung „⇒“ wurde schon in a) begründet. „⇐“: Umgekehrt folgt aus der Existenz eines Diskontvektors

$$Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0 +}$$

($\kappa_0 > 0$ ist nach Voraussetzung DPsfT$\mathbf{1}_\Omega$+ der Startkapitaleinsatz $v_0(k)$ einer Duplikationsstrategie $k$ von $\mathbf{1}_\Omega$) auch die Existenz eines positiven $\mathcal{M}_T$-Normalenvektors

$$Q_T := Y_T/\kappa_0 \in \mathcal{M}_T^{\perp 1+} \subseteq \mathcal{M}_T^{\perp +}$$

und damit nach a) die sf-Arbitragefreiheit. □

Die Sätze 5.6, a) und 5.5, a) als Versionen des ersten Hauptsatzes besagen, dass das dividendenversehene Marktmodell genau dann sf-arbitragefrei ist, wenn es einen $\kappa$-normierten positiven Normalenvektor $Q \in \mathcal{M}_T^{\perp 1+}$ bzw. $\tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$ gibt. Unter der zusätzlichen Vo-

raussetzung (ZVU) im ursprünglichen Marktmodell oder spezieller eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ liegt die sf-Arbitragefreiheit auch genau dann vor, wenn es einen Diskontvektor $Y \in \mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0 +}$ gibt.

Im Spezialfall des relativen Marktmodells, das stets mit dem konstanten Numéraire $\tilde{S}^N = \tilde{B} = 1$ ausgestattet ist, sind auch stets die zu (ZVU) analogen Bedingungen (ZVUrel) erfüllt (siehe Abschnitt 5.3.5). Insbesondere ist für die relative sf-Duplikationsstrategie $k$ von $\mathbf{1}_\Omega$ der Startkapitaleinsatz $\tilde{\kappa}_0 := \tilde{v}_0(k) = 1$. Demnach ist ein relativer $\kappa$-normierter positiver Normalenvektor $\tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$ selbst auch ein Diskontvektor und im Spezialfall eines dividendenlosen Marktmodells auch ein äquivalentes Martingalmaß. In der Abbildung 5.5 werden die Lage eines relativen Diskontvektors $\tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$, eines $\mathcal{M}_T$-Normalenvektors $Q \in \mathcal{M}_T^{\perp 1+}$ und eines Diskontvektors $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0 +}$ veranschaulicht.

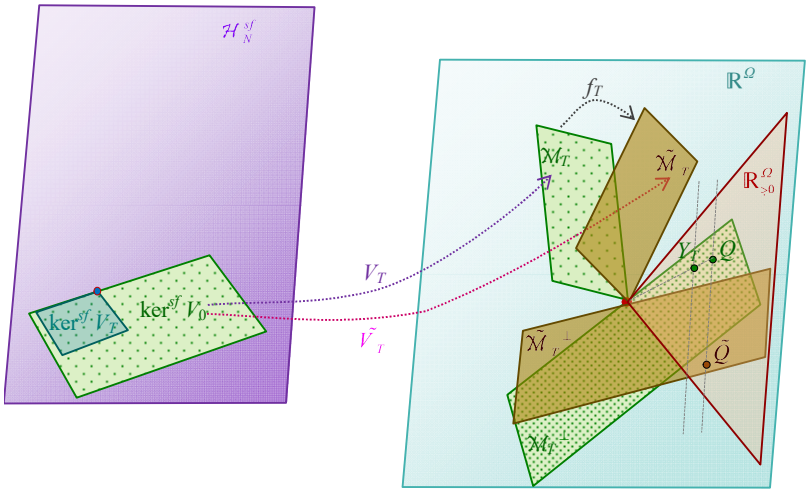



**Abb. 5.5** Ein relativer Diskontvektor $\tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$ für das relative Marktmodell, ein positiver $\mathcal{M}_T$-Normalenvektor $Q \in \mathcal{M}_T^{\perp 1+}$ und ein Diskontvektor $Y \in \mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0 +}$ für das ursprüngliche Marktmodell bei sf-Arbitragefreiheit und unter den Voraussetzungen (ZVU)

## 5.2 Spezielle sf-Vollständigkeit (VSsfT), Diskontvektoren und äquivalente Martingalmaße

Bei der hier in Kapitel 5 vorliegenden Einschränkung der Betrachtung auf die speziellen Zahlungsprofile $X = (0,\ldots,0,X_T)^\mathsf{T} \in \mathcal{W}(T) = O \times \ldots \times O \times \mathbb{R}^\Omega$ bzw. auf die zum Endzeitpunkt $T$ auftretenden Zahlungsprofile $X_T \in \mathcal{W}_{T,1} = \mathbb{R}^\Omega$, die beliebige auf $\Omega$ definierte reellwertige Zustandsfunktionen

$$X_T : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

sind, werden auch spezielle Definitionen der Duplizierbarkeit der Zustandsfunktionen $X_T \in \mathbb{R}^\Omega$, der Vollständigkeit des Marktmodells und der Gültigkeit des LOP bzw. der Arbitragefreiheit im Marktmodell verwendet.

**sf-Duplizierbarkeit und selbstfinanzierende Handelsstrategien**

In Abschnitt 5.1.1 wurde bereits die sf-Duplizierbarkeit von $X_T \in \mathbb{R}^\Omega$ mittels der Abbildung $L_T = V_T$ so definiert, dass sie gleichbedeutend zur Duplizierbarkeit des zugehörigen $X = (0,\ldots,0,X_T)^\mathsf{T} \in \mathcal{W}(T)$ mittels der Abbildung $L$ ist:

(DPsf) $\quad X = (0,\ldots,0,X_T)^\mathsf{T} = L(h) \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$.

Ein zustandsabhängiges reellwertiges Zahlungsprofil (Zahlungsanspruch) $X_T \in \mathbb{R}^\Omega$ heißt also **sf-duplizierbar** (sf-erreichbar), wenn $X_T$ übereinstimmt mit dem durch die Abbildung $L_T = V_T : \mathcal{H}_N^{sf} \longrightarrow \mathbb{R}^\Omega$ vermittelten Zahlungsprofil $L_T(h)$ einer *selbstfinanzierenden* Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$:

(DPsfT) $\quad X_T = L_T(h) \in L_T(\mathcal{H}_N^{sf})$.

Die Übereinstimmung der Zustandsfunktionen $X_T$ und $L_T(h)$ soll dabei für alle Zustände $\omega \in \Omega$ und somit $P$-sicher gelten, wenn $P$ das W-Maß für die Angabe der Eintrittswahrscheinlichkeiten der Kursentwicklungen $\omega$ ist. Anzumerken ist noch, dass in den Bedingungen (DPsf) und (DPsfT) neben der $L_T$-Duplizierbarkeit (DP$V_T$) $X_T = L_T(h) = V_T(h)$ von $X_T$ auch noch die Selbstfinanzierungsbedingung

(SF) $\quad L_t(h) = 0$ für $t = 0, 1, \ldots, T\text{-}1$

für die Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N$ erfasst ist. Nur im Einperiodenmodell ($T = 1$) kann diese Bedingung (SF) $L_0(h) = 0$ außer Acht gelassen werden, da sie für eine Duplikationsstrategie $h$ stets erfüllbar ist (siehe Abschnitt 6.2.1 zur Äquivalenz der $L$-Duplizierbarkeit (DP) von $X = (X_0,X_1)^\mathsf{T}$ mit der $D^\mathsf{T}$-Duplizierbarkeit (DP$D^\mathsf{T}$) von $X_1$ unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$).

Die rekursive **Berechnung einer sf-Duplikationsstrategie** $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ für ein $X \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ erfolgt, wie schon in Abschnitt 5.1 erwähnt wurde, ebenso wie im allgemeinen Fall $X \in L(\mathcal{H}_N)$ von Abschnitt 3.2 durch das zeitlich absteigende Lösen des gestaffelten Gleichungssystems mit den Blöcken (DP$A_{t\text{-}1,k}$), $(t,k) \in \{T,\ldots,0\} \times \{1,\ldots,k_{t\text{-}1}\}$ ($A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$), jetzt aber mit den speziellen Werten $X_t = 0$ für $t = T\text{-}1,\ldots,0$:

(DP$A_{t\text{-}1,k}$) $\quad S_t^\delta(A_{t,m})^\mathsf{T} h_t(A_{t-1,k}) = Z_t(A_{t,m}) \qquad (A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k})$

($t = T,\ldots,0$, $A_{t\text{-}1,k} \in \mathcal{P}_{t\text{-}1}$, $k = 1,\ldots,k_{t\text{-}1}$) mit den jeweils bekannten rechten Seiten

$$Z_t(A_{t,m}) = X_t(A_{t,m}) + S_t(A_{t,m})^\top h_{t+1}(A_{t,m}),$$

also

$$\begin{aligned} Z_T(A_{T,m}) &= X_T(A_{T,m}) && \text{für } t = T, && m = 1,\ldots,k_T = K,\\ Z_t(A_{t,m}) &= S_t(A_{t,m})^\top h_{t+1}(A_{t,m}) && \text{für } t = T\text{-}1,\ldots,0, && m = 1,\ldots,k_t. \end{aligned}$$

### 5.2.1 sf-Vollständigkeit

Das Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ heißt **sf-vollständig**, wenn *jedes* Zahlungsprofil $X_T \in \mathbb{R}^\Omega$ sf-duplizierbar ist, wenn also der $L_T$-Bildraum der Abbildung $L_T : \mathcal{H}_N^{sf} \longrightarrow \mathbb{R}^\Omega$ den gesamten Zielraum $\mathbb{R}^\Omega$ ausfüllt, d. h. die Abbildung $L_T$ surjektiv ist. Gleichbedeutend dazu ist, dass jedes endfällige Zahlungsprofil $X = (0,\ldots,0,X_T)^\top \in \mathcal{W}(T)$ mittels der Abbildung $L$ duplizierbar ist:

(VSsfT) $L_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = \mathbb{R}^\Omega$ bzw.

(VSsf) $L(\mathcal{H}_N^{sf}) = \mathcal{W}(T)$.

Die sf-Vollständigkeit (VSsf) liegt genau dann vor, wenn die $\mathcal{W}(T)$-Basis $\mathbf{1}_{T,\omega_k}$ $(k = 1,\ldots,K)$ in $L(\mathcal{H}_N^{sf})$ liegt, wenn also $\mathbf{1}_{T,\omega_k} \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ für $k = 1,\ldots,K$ gilt. Die sf-Vollständigkeit (VSsfT) liegt genau dann vor, die $\mathbb{R}^\Omega$-Basis $\mathbf{1}_{\omega_k} = \mathbf{e}_k$ $(k = 1,\ldots,K)$ in $L_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = V_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = \mathcal{V}_T$ liegt, wenn also $\mathbf{1}_{\omega_k} \in \mathcal{V}_T$ für $k = 1,\ldots,K$ gilt.

Wenn im Marktmodell die allgemeinere Vollständigkeit (VS) gilt, wenn also alle Zahlungsprofile $X \in \mathcal{W}$ mittels $L$ duplizierbar sind, dann gilt insbesondere auch die speziellere sf-Vollständigkeit (VSsf), bei der nur alle endfälligen Zahlungsprofile $X \in \mathcal{W}(T)$ $(\subseteq \mathcal{W})$ mittels $L$ duplizierbar bzw. alle Zahlungsprofile $X_T \in \mathbb{R}^\Omega$ mittels $L_T$ und selbstfinanzierenden Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ $(L_0(h) = \ldots = L_{T-1}(h) = 0)$ duplizierbar sind:

(VS) $\Rightarrow$ (VSsf).

### 5.2.2 sf-Vollständigkeit des Mehrperiodenmodells und der enthaltenen Einperiodenmodelle

Nach Satz 3.1 von Abschnitt 3.2.5 ist unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) die allgemeinere Vollständigkeit (VS) des Mehrperiodenmodells äquivalent zur Vollständigkeit aller enthaltenen Einperiodenmodelle. Bei der Begründung wird verwendet, dass im Einperiodenmodell die speziellere Vollständigkeit (VSsf), (VSsfT) oder (VS$D^\top$) hinsichtlich endfälliger Zahlungsprofile äquivalent ist zur allgemeinen Vollständigkeit (VS) (Beweis in Abschnitt 6.2.1 mittels der Äquivalenz der verschiedenen Duplizierbarkeiten). Wenn in einem echten Mehrperiodenmodell mit einer Laufzeit $T \geq 2$ nur die spezielle Vollständigkeit (VSsfT) vorliegt, so folgt im Allgemeinen aber nicht die allgemeine Vollständigkeit (VS) des Mehrperiodenmodells bzw. die Vollständigkeit aller Einperiodenmodelle zu den Ausgangsknoten $A_{t-1,k}$, $1 \leq t \leq T$, $k \in \{1,\ldots,k_{t-1}\}$. Dies wird durch das nachfolgende Beispiel 5.1 gezeigt, in dem das Mehrperiodenmodell sf-vollständig ist, aber eines seiner Einperiodenmodelle nicht vollständig ist. Nachfolgend wird mit Satz 5.7, a) begründet, dass aus der speziellen sf-Vollständigkeit (VSsfT) des Mehrperiodenmodells nur die Vollständigkeit der

Einperiodenmodelle mit den zum Zeitpunkt $T$-1 gehörigen Ausgangsknoten $A_{T\text{-}1,k}$ ($k \in \{1,\ldots,k_{T\text{-}1}\}$) folgt. Weiter wird in Teil b) gezeigt, dass unter den zusätzlichen Voraussetzungen (WS1,$T$-1) und gültigem LOP in allen Einperiodenmodellen dann im Mehrperiodenmodell aus der sf-Vollständigkeit (VSsfT) auch die Vollständigkeit (VS) folgt. Nach Beispiel 3.4 in Abschnitt 3.4.4 ist das LOP in allen Einperiodenmodellen aber im Allgemeinen nicht gültig, wenn nur das LOP im Mehrperiodenmodell gefordert wird.

**Satz 5.7 Zusammenhang zwischen der sf-Vollständigkeit (VSsfT) im Mehrperiodenmodell und der Vollständigkeit (VS$D^{\mathsf{T}}$ oder VS) in den enthaltenen Einperiodenmodellen**

a) Falls das Mehrperiodenmodell sf-vollständig ist, so sind alle diejenigen enthaltenen Einperiodenmodelle $D^{\mathsf{T}}$-vollständig, die zu den Ausgangsknoten $A_{T\text{-}1,k}$ ($k \in \{1,\ldots,k_{T\text{-}1}\}$) des Zeitpunkts $T$-1 gehören. Unter der mathematisch-technischen Voraussetzung

(AWS$^{\delta}$) $\quad S_0^{\delta} \neq 0 = (0,\ldots,0)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^N$

sind diese Einperiodenmodelle dann auch noch allgemein vollständig gemäß (VS).

b) Für das Mehrperiodenmodell sei die mathematisch-technische Voraussetzung

(WS1,$T$-1) $\quad S_t(A_{t,m}) \neq 0 = (0,\ldots,0)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^N \;\forall\, t \in \{1,\ldots,T\text{-}1\},\, A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$

erfüllt und das

LOP in allen enthaltenen Einperiodenmodellen

gültig. Falls nun das Mehrperiodenmodell sf-vollständig ist, dann sind alle enthaltenen Einperiodenmodelle $D^{\mathsf{T}}$-vollständig und damit auch das gesamte Mehrperiodenmodell vollständig.

**Beweis:** a) Das Mehrperiodenmodell sei sf-vollständig. Für ein beliebig vorgegebenes Zahlungsprofil $X_T \in \mathbb{R}^{\Omega}$ bzw. $X = (0,\ldots,0,X_T)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{U}(T)$ ist dann das Gleichungssystem $X_T = L_T(h)$ bzw. $X = L(h)$ mit einem $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ lösbar. Nach Abschnitt 3.2.1 bedeutet dies die Lösbarkeit aller Gleichungssystemblöcke

(DP$A_{t\text{-}1,k}$) $\quad S_t^{\delta}(A_{t,m})^{\mathsf{T}} h_t(A_{t-1,k}) = Z_t(A_{t,m}) \qquad (A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k})$

($t = T,\ldots,1,0$; $k = 1,\ldots,k_{t\text{-}1}$; $k_0 = k_{-1} = 1$, $A_{0,1} = A_{-1,1} = \Omega$) mit den sukzessive zeitlich rückwärts errechneten rechten Seiten

$$Z_t(A_{t,m}) = X_t(A_{t,m}) + S_t(A_{t,m})^{\mathsf{T}} h_{t+1}(A_{t,m}), \qquad t = T,\ldots,0;\ m = 1,\ldots,k_t\ (h_{T+1}(A_{T,m}) = 0),$$

für eine beliebige Zustandsfunktion $X_T \in \mathbb{R}^{\Omega}$ und die speziellen Zustandsfunktionen $X_{T\text{-}1} = \ldots = X_0 = 0$.

Insbesondere sind damit für den Zeitindex $t = T$ die Gleichungssysteme (DP$A_{T\text{-}1,k}$) ($k = 1,\ldots,k_{T\text{-}1}$) für beliebig vorgegebene rechte Seiten $Z_T(A_{T,m}) = X_T(A_{T,m}) \in \mathbb{R}$ ($A_{T,m} = \{\omega_m\} \in \mathcal{P}_T$) lösbar, was nach Abschnitt 3.2.2 die Vollständigkeit (VS$D^{\mathsf{T}}$) bzw. (VS) der Einperiodenmodelle mit den Ausgangsknoten $A_{T\text{-}1,k}$ des Zeitpunkts $T$-1 bedeutet. Für den Schluss von der $D^{\mathsf{T}}$-Vollständigkeit (VS$D^{\mathsf{T}}$) auf die allgemeine Vollständigkeit (VS) der Einperiodenmodelle wird dabei die Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) verwendet (siehe Abschnitt 6.2.1).

b) Das Mehrperiodenmodell sei sf-vollständig, es sei die Voraussetzung (WS1,$T$-1) erfüllt und für alle im Mehrperiodenmodell enthaltenen Einperiodenmodelle gelte das LOP. Da in Beweisteil a) die Vollständigkeit (VS$D^{\mathsf{T}}$) für die Einperiodenmodelle zu den Ausgangsknoten $A_{T\text{-}1,k}$ ($k = 1,\ldots,k_{T\text{-}1}$) schon bewiesen wurde, ist jetzt noch für ein beliebiges im Mehrperiodenmodell enthaltenes, zu einem Ausgangsknoten $A_{t\text{-}2,r}$ ($2 \le t \le T$, $r \in \{1,\ldots,k_{t\text{-}2}\}$) gehöriges festes Einperiodenmodell die $D^{\mathsf{T}}$-Vollständigkeit (VS$D^{\mathsf{T}}$) zu zeigen: Es ist also die Lösbarkeit des Gleichungssystemblocks

(DP$A_{t\text{-}2,r}$Y) $\quad S_{t-1}^{\delta}(A_{t-1,k})^{\mathsf{T}} h_{t-1}(A_{t-2,r}) = Y_{t-1}(A_{t-1,k}) \qquad (A_{t\text{-}1,k} \subseteq A_{t\text{-}2,r})$

für beliebig vorgegebene rechte Seiten $Y_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k}) \in \mathbb{R}$ in den Nachfolgerknoten $A_{t\text{-}1,k}$ von $A_{t\text{-}2,r}$ mit einem auf dem Ereignis $A_{t\text{-}2,r}$ konstanten Portfoliovektor $h_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}2,r}) \in \mathbb{R}^N$ nachzuweisen.

Heuristische Bestimmung von Hilfsgrößen:
Nach der beliebigen Vorgabe der rechten Seiten $Y_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k}) \in \mathbb{R}$ ($A_{t\text{-}1,k} \subseteq A_{t\text{-}2,r}$) in den unmittelbaren Nachfolgerknoten $A_{t\text{-}1,k}$ von $A_{t\text{-}2,r}$ für den obigen Gleichungsblock (DP$A_{t\text{-}2,r}$Y) werden nun als Hilfsgrößen auch noch Portfoliovektoren $h_s(A_{s\text{-}1,k})$ in den weiteren Nachfolgerknoten $A_{s\text{-}1,k}$ von $A_{t\text{-}2,r}$ und rechte Seiten $Y_s(A_{s,m})$ in den Nachfolgerknoten $A_{s,m} \subseteq A_{s\text{-}1,k}$ ($\subseteq A_{t\text{-}2,r}$, $s = t,\ldots,T$, $m \in \{1,\ldots,k_s\}$) für die Gleichungsblöcke

(DP$A_{s\text{-}1,k}$Y) $\qquad S_s^{\delta}(A_{s,m})^{\mathsf{T}} h_s(A_{s-1,k}) = Y_s(A_{s,m}) \qquad (A_{s,m} \subseteq A_{s\text{-}1,k})$

geeignet festgelegt. Dies geschieht in der Absicht, schließlich zu einem endfälligen Zahlungsprofil $X_T \in \mathbb{R}^{\Omega}$ zu gelangen, für welches aufgrund der Voraussetzung (VSsf) die sf-Duplizierung (DP) mittels einer sf-Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ im Mehrperiodenmodell möglich ist. Diese sf-Duplizierung von $X_T$ soll dann insbesondere auch die $D^{\mathsf{T}}$-Duplizierung der vorgegebenen Werte $Y_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k})$ ($A_{t\text{-}1,k} \subseteq A_{t\text{-}2,r}$) im obigen Gleichungsblock (DP$A_{t\text{-}2,r}$Y) mittels eines Portfoliovektors $h_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}2,r}) \in \mathbb{R}^N$ irgendwie sicherstellen.
Die Bestimmung der Hilfsgrößen $h_s(A_{s\text{-}1,k})$ und $Y_s(A_{s,m})$ erfolgt dabei zeitlich aufsteigend für die Zeitpunkte $s = t,\ldots,T$, also in umgekehrter Richtung als die zeitlich absteigende Auflösung des Gleichungssystems (DP) mit der Berechnung der rechten Seiten $Z_s(A_{s,m})$ der Gleichungsblöcke (DP$A_{s\text{-}1,k}$) = (DP$A_{s\text{-}1,k}$Z). Das Berechnungsschema wird für $s = t$ in Abbildung 5.6 dargestellt und nachfolgend noch ausführlich besprochen. Schließlich sind dann auch zum Endzeitpunkt $T$ in den Nachfolgerknoten $A_{T,m}$ von $A_{t\text{-}2,r}$ die rechten Seiten $Y_T(A_{T,m})$ ($A_{T,m} \subseteq A_{t\text{-}2,r}$) festgelegt. Man definiert nun zu diesen rechten Seiten ein Zahlungsprofil $X_T \in \mathbb{R}^{\Omega}$ mit

$$X_T(A_{T,m}) = Y_T(A_{T,m}) \qquad \text{für } A_{T,m} \subseteq A_{t\text{-}2,r},$$
$$X_T(A_{T,m}) \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \qquad \text{für } A_{T,m} \not\subseteq A_{t\text{-}2,r}.$$

Da nach der Voraussetzung (VSsfT) das Mehrperiodenmodell sf-vollständig ist, ist insbesondere das eben definierte spezielle Zahlungsprofil $X_T$ sf-duplizierbar, also das zugehörige lineare Gleichungssystem

(DPsfT) $\qquad V_T(h) = X_T$

mit einer sf-Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ lösbar. Dies bedeutet, dass beim zeitlich rückwärts verlaufenden Berechnungsschema alle Gleichungssystemblöcke

(DP$A_{t\text{-}1,k}$) $\qquad S_t^{\delta}(A_{t,m})^{\mathsf{T}} h_t(A_{t-1,k}) = Z_t(A_{t,m}) \qquad (A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k})$

mit passenden Portfoliovektoren $h_t(A_{t\text{-}1,k}) \in \mathbb{R}^N$ lösbar sind ($t = T,\ldots,0$, $A_{t\text{-}1,k} \in \mathcal{P}_{t\text{-}1}$, $k = 1,\ldots,k_{t\text{-}1}$). Dabei sind bei der sf-Duplizierung die rechten Seiten $Z_t(A_{t,m})$ (nach Abschnitt 5.1.1 wegen $X_t = 0$ für $t = T\text{-}1,\ldots,0$) gegeben durch die Zahlungskomponenten $X_T(A_{T,m})$ für $t = T$ und durch die Reinvestitionswerte $R_t(h)(A_{t,m}) = S_t(A_{t,m})^{\mathsf{T}} h_{t+1}(A_{t,m})$ der sf-Duplikationsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ für $t = T\text{-}1,\ldots,0$:

$$Z_T(A_{T,m}) = X_T(A_{T,m}) \qquad \text{für } t = T, \qquad m = 1,\ldots,k_T = K,$$
$$Z_t(A_{t,m}) = S_t(A_{t,m})^{\mathsf{T}} h_{t+1}(A_{t,m}) \qquad \text{für } t = T\text{-}1,\ldots,0, \quad m = 1,\ldots,k_t.$$

Nachfolgend wird noch gezeigt, dass die rechten Seiten $Z_s(A_{s,m})$ von (DP$A_{s\text{-}1,k}$) = (DP$A_{s\text{-}1,k}$Z) übereinstimmen mit den rechten Seiten $Y_s(A_{s,m})$ von (DP$A_{s\text{-}1,k}$Y) in allen Nachfolgerknoten $A_{s,m}$ von $A_{t\text{-}2,r}$ ($s = t\text{-}1,\ldots,T$). Demzufolge ist insbesondere für $s = t$ -1 der Gleichungsblock

(DP$A_{t\text{-}2,r}$Y) = (DP$A_{t\text{-}2,r}$) $\qquad S_{t-1}^{\delta}(A_{t-1,k})^{\mathsf{T}} h_{t-1}(A_{t-2,r}) = Z_{t-1}(A_{t-1,k}) = Y_{t-1}(A_{t-1,k}) \qquad (A_{t\text{-}1,k} \subseteq A_{t\text{-}2,r})$

lösbar und somit das zum Ausgangsknoten $A_{t\text{-}2,r}$ gehörige Einperiodenmodell $D^{\mathsf{T}}$-vollständig.

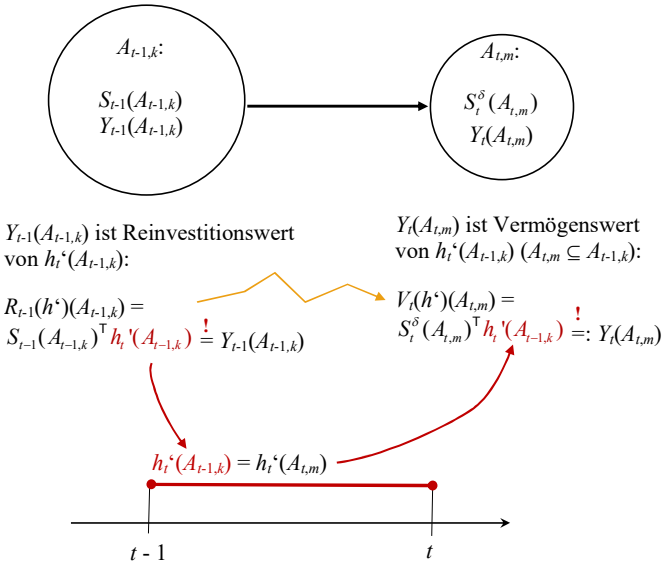



**Abb. 5.6** Schema zur sukzessiven Berechnung der rechten Seiten $Y_t(A_{t,m})$ in den Nachfolgerknoten $A_{t,m}$ von $A_{t-1,k} \subseteq A_{t-2,r}$: Ausgehend vom Kapitaleinsatz $Y_{t-1}(A_{t-1,k}) = R_{t-1}(h)(A_{t-1,k})$ als Reinvestitionswert im Knoten $A_{t-1,k}$ wird dazu ein Portfoliovektor $h_t'(A_{t-1,k})$ bestimmt und der sich zufällig aus $R_{t-1}(h)(A_{t-1,k})$ entwickelnde Vermögenswert $Y_t(A_{t,m}) := V_t(h')(A_{t,m})$ im jeweiligen Nachfolgerknoten $A_{t,m}$ berechnet.

Es soll nun das Berechnungsschema für die Hilfsgrößen $h_s(A_{s-1,k})$ und $Y_s(A_{s,m})$ in den Nachfolgerknoten $A_{s-1,k}$ bzw. $A_{s,m}$ von $A_{t-2,r}$ zuerst für den Zeitpunkt $s = t$ dargestellt werden. Eine grafische Veranschaulichung ist in Abbildung 5.6 gegeben. Dazu betrachtet man im Zeitpunkt $t$ - 1 einen festen unmittelbaren Nachfolgerknoten $A_{t-1,k}$ von $A_{t-2,r}$, für den die zugehörige rechte Seite $Y_{t-1}(A_{t-1,k})$ schon (beliebig) vorgegeben ist. Um nun auch für die Nachfolgerknoten $A_{t,m}$ von $A_{t-1,k}$ die rechten Seiten $Y_t(A_{t,m})$ von

$$(\mathrm{DP}A_{t-1,k}\mathrm{Y}) \qquad S_t^{\delta}(A_{t,m})^{\top} h_t(A_{t-1,k}) = Y_t(A_{t,m}) \qquad (A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k})$$

festzulegen, sollen zunächst ein Portfoliovektor $h_t(A_{t-1,k})$ geeignet bestimmt werden und dann mit diesem die rechten Seiten $Y_t(A_{t,m})$ $(A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k})$ mittels der Gleichung (DP$A_{t-1,k}$Y) definiert werden. Auf diese Weise ist dann der Portfoliovektor $h_t(A_{t-1,k})$ eine Lösung von (DP$A_{t-1,k}$Y).

Zur heuristischen Herleitung einer notwendigen Bedingung für den Portfoliovektor $h_{t-1}(A_{t-1,k})$ nimmt man an, dass der Portfoliovektor $h_{t-1}(A_{t-1,k})$ Bestandteil einer sf-Duplikationsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ ist, bei deren Duplizierungsgleichung (DPsfT) der Wert $Y_{t-1}(A_{t-1,k})$ als rechte Seite auftritt. Demzufolge ist der $\mathcal{F}_{t-2}$-messbare Portfoliovektor $h_{t-1}(A_{t-1,k}) = h_{t-1}(A_{t-2,r})$ $(A_{t-1,k} \subseteq A_{t-2,r})$ eine Lösung des obigen Gleichungsblocks

$$(\mathrm{DP}A_{t-2,r}\mathrm{Y}) \qquad S_{t-1}^{\delta}(A_{t-1,k})^{\top} h_{t-1}(A_{t-2,r}) = Y_{t-1}(A_{t-1,k}) \qquad (A_{t-1,k} \subseteq A_{t-2,r})$$

bzw. im Partitionsereignis $A_{t-1,k}$ der zugehörige Vermögenswert

$$\begin{aligned} V_{t-1}(h)(A_{t-1,k}) &= S_{t-1}^{\delta}(A_{t-1,k})^{\top} h_{t-1}(A_{t-1,k}) \\ &= S_{t-1}^{\delta}(A_{t-1,k})^{\top} h_{t-1}(A_{t-2,r}) \end{aligned}$$

gleich der rechten Seite $Y_{t-1}(A_{t-1,k})$:

$$V_{t-1}(h)(A_{t-1,k}) = Y_{t-1}(A_{t-1,k}).$$

Nicht verwendet wird hier, dass der Portfoliovektor $h_{t-1}(A_{t-1,k})$ auf den Knoten $A_{t-1,k} \subseteq A_{t-2,r}$ konstant ist: $h_{t-1}(A_{t-1,k}) = h_{t-1}(A_{t-2,r})$ $\forall$ $A_{t-1,k} \subseteq A_{t-2,r}$.

Weiter wird beachtet, dass bei einer sf-Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ im Partitionsereignis $A_{t\text{-}1,k}$ ($1 \le t\text{-}1 \le T\text{-}1$) wegen der Selbstfinanzierungsbedingung (SF)

$$V_{t\text{-}1}(h)(A_{t\text{-}1,k}) - R_{t\text{-}1}(h)(A_{t\text{-}1,k}) = L_{t\text{-}1}(h)(A_{t\text{-}1,k}) = 0$$

der Reinvestitionswert $R_{t\text{-}1}(h)(A_{t\text{-}1,k})$ gleich dem Vermögenswert $V_{t\text{-}1}(h)(A_{t\text{-}1,k})$ ist. Demzufolge ist dann auch der Reinvestitionswert $R_{t\text{-}1}(h)(A_{t\text{-}1,k}) = S_{t-1}(A_{t-1,k})^{\mathsf{T}} h_t(A_{t-1,k})$ gleich der rechten Seite $Y_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k})$:

$$R_{t\text{-}1}(h)(A_{t\text{-}1,k}) = Y_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k}).$$

Somit ist der Portfoliovektor $h_t(A_{t\text{-}1,k})$ notwendig Lösung der zum Reinvestitionswert gehörigen linearen Gleichung

$$S_{t-1}(A_{t-1,k})^{\mathsf{T}} h_t(A_{t-1,k}) = Y_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k}).$$

Aufgrund der Voraussetzung (WS1,$T$-1) und wegen $2 \le t \le T$ ist $S_{t-1}(A_{t-1,k}) \neq 0$, sodass diese Gleichung mindestens eine Lösung $h_t'(A_{t-1,k}) \in \mathbb{R}^N$ besitzt.

Mit dieser zum Reinvestitionswert $Y_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k})$ im Knoten $A_{t\text{-}1,k}$ erhaltenen Lösung $h_t(A_{t\text{-}1,k}) = h_t'(A_{t-1,k})$ definiert man nun für die Nachfolgerknoten $A_{t,m}$ von $A_{t\text{-}1,k}$ mittels obiger Gleichung (DP$A_{t\text{-}1,k}$Y) die rechten Seiten

$$Y_t(A_{t,m}) := V_t(h')(A_{t,m}) = S_t^{\delta}(A_{t,m})^{\mathsf{T}} h_t'(A_{t-1,k}) \qquad (A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k})$$

als die Vermögenswerte $V_t(h')(A_{t,m})$ des Portfoliovektors $h_t'(A_{t-1,k})$ im Zeitpunkt $t$, die sich aus dessen Reinvestitionswert $R_{t\text{-}1}(h')(A_{t\text{-}1,k})$ des Zeitpunkts $t$ - 1 entwickeln. Damit ist der Portfoliovektor $h_t'(A_{t-1,k})$ Lösung des Gleichungsblocks

$$(\mathrm{DP}A_{t\text{-}1,k}\mathrm{Y}) \qquad S_t^{\delta}(A_{t,m})^{\mathsf{T}} h_t'(A_{t-1,k}) = Y_t(A_{t,m}) \qquad (A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}).$$

Für den Portfoliovektors $h_t'(A_{t-1,k})$ ist $Y_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k})$ der Reinvestitionswert, aus dem sich seine Vermögenswerte $V_t(h')(A_{t,m})$ in den Nachfolgerknoten $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$ in rein zufälliger Weise entwickeln. Aufgrund von bestimmten Annahmen hat man zumindest ein Verfahren entwickelt, um in den Nachfolgerknoten $A_{t\text{-}1,k}$ von $A_{t\text{-}2,r}$ gewisse Portfoliovektoren $h_t'(A_{t-1,k})$ und in den Nachfolgerknoten $A_{t,m}$ von $A_{t\text{-}2,r}$ rechte Seiten $Y_t(A_{t,m})$ zu bestimmen. Diese Portfoliovektoren $h_t'(A_{t-1,k})$ sind zwar jeweils Lösung der einzelnen Reinvestitionswert-Gleichung

$$R_{t\text{-}1}(h')(A_{t\text{-}1,k}) = S_{t-1}(A_{t-1,k})^{\mathsf{T}} h_t'(A_{t-1,k}) = Y_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k})$$

und damit der einzelnen Vermögenswert-Gleichung

$$V_{t\text{-}1}(h')(A_{t\text{-}1,k}) = S_{t-1}^{\delta}(A_{t-1,k})^{\mathsf{T}} h_{t-1}'(A_{t-1,k}) = Y_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k})$$

aber im Allgemeinen nicht konstant auf $A_{t\text{-}2,r}$. Sie liefern daher im Allgemeinen noch keine auf $A_{t\text{-}2,r}$ konstante Lösung $h_t'(A_{t-2,r})$ des Gleichungsblocks

$$(\mathrm{DP}A_{t\text{-}2,r}\mathrm{Y}) \qquad S_{t-1}^{\delta}(A_{t-1,k})^{\mathsf{T}} h_{t-1}'(A_{t-2,r}) = Y_{t-1}(A_{t-1,k}) \qquad (A_{t\text{-}1,k} \subseteq A_{t\text{-}2,r})$$

und somit nicht die $D^{\mathsf{T}}$-Vollständigkeit des zum Ausgangsknoten $A_{t\text{-}2,r}$ gehörigen Einperiodenmodells. Für diesen Nachweis werden nachfolgend noch die Festlegung der rechten Seiten $Y_s(A_{s,m})$ in den weiteren Nachfolgerknoten $A_{s,m}$ von $A_{t\text{-}2,r}$ und weitere Voraussetzungen wie (WS1,$T$-1), die sf-Vollständigkeit des Mehrperiodenmodells und die Gültigkeit des LOP in den Einperiodenmodellen benötigt.

Festlegung der Portfoliovektoren $h_t'(A_{s-1,k})$ und der rechten Seiten $Y_s(A_{s,m})$ für die Nachfolgerknoten $A_{s,m} \subseteq A_{s\text{-}1,k} \subseteq A_{t\text{-}2,r}$, $s = t,\ldots,T$:

Wie oben für den Zeitpunkt $t$ und die Knoten $A_{t,m}$ ($\subseteq A_{t\text{-}1,k} \subseteq A_{t\text{-}2,r}$) die Berechnung von rechten Seiten $Y_t(A_{t,m})$ dargestellt wurde, so können auch für die nachfolgenden Zeitpunkte $s$ und die zugehörigen Nachfolgerknoten $A_{s,m}$ ($\subseteq A_{t\text{-}1,k}$, $2 \le t < s \le T$) wegen der Voraussetzung (WS1,$T$-1) Portfoliovektoren $h_s'(A_{s-1,k})$ als Lösung der linearen Reinvestitionswert-Gleichung

$$R_{s\text{-}1}(h')(A_{s\text{-}1,k}) = S_{s-1}(A_{s-1,k})^{\mathsf{T}} h_s'(A_{s-1,k}) = Y_{s\text{-}1}(A_{s\text{-}1,k})$$

und dazu rechte Seiten $Y_s(A_{s,m})$ als die Vermögenswerte $V_s(h')(A_{s,m}) = S_s^{\delta}(A_{s,m})^{\mathsf{T}} h_s'(A_{s-1,k})$ von $h_s'(A_{s-1,k})$ berechnet:

$$Y_s(A_{s,m}) := V_s(h')(A_{s,m}) = S_s^{\delta}(A_{s,m})^{\mathsf{T}} h_s'(A_{s-1,k}) .$$

Damit ist dann der Reinvestitionswert des Portfoliovektors $h_s'(A_{s-1,k})$ gleich $Y_{s-1}(A_{s-1,k})$ und der Portfoliovektor $h_s'(A_{s-1,k})$ eine Lösung des Vermögenswert-Gleichungsblocks

$$(\mathrm{DP}A_{s-1,k}\mathrm{Y}) \qquad S_s^{\delta}(A_{s,m})^{\mathsf{T}} h_s'(A_{s-1,k}) = Y_s(A_{s,m}) \qquad (A_{s,m} \subseteq A_{s-1,k}).$$

Zuletzt erhält man die rechten Seiten $Y_T(A_{T,m}) =: X_T(A_{T,m})$ zu den Nachfolgerknoten $A_{T,m} \subseteq A_{t-2,r}$. Die restlichen Werte $X_T(A_{T,m})$ eines Zahlungsprofils $X_T \in \mathbb{R}^{\Omega}$ zu den Knoten $A_{T,m} \in \mathcal{P}_T$ mit $A_{T,m} \not\subseteq A_{t-2,r}$ werden beliebig gewählt.

Existenz einer sf-Duplikationsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ für $X_T$:

Für alle diese $X_T(A_{T,m})$ zusammen mit den speziellen Werten $X_{T-1} = \ldots = X_0 = 0$ ist das Gleichungssystem (DP) $L(h) = X$ zur Duplizierung von $X = (0,\ldots,0,X_T)^{\mathsf{T}}$ bzw. das Gleichungssystem (DPsfT) $V_T(h) = X_T$ zur sf-Duplizierung von $X_T$ aufgrund der Voraussetzung (VSsfT) lösbar. Für die bei der Bestimmung einer sf-Duplikationsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ von $X_T$ jetzt in den Gleichungssystemblöcken

$$(\mathrm{DP}A_{s-1,k}) \qquad S_s^{\delta}(A_{s,m})^{\mathsf{T}} h_s(A_{s-1,k}) = Z_s(A_{s,m}) \qquad (A_{s,m} \subseteq A_{s-1,k})$$

auftretenden rechten Seiten $Z_s(A_{s,m})$ gilt

$$\begin{aligned} Z_T(A_{T,m}) &= X_T(A_{T,m}) = Y_T(A_{T,m}) && \text{für } s = T, \\ Z_s(A_{s,m}) &= X_s(A_{s,m}) + S_s(A_{s,m})^{\mathsf{T}} h_{s+1}(A_{s,m}) \\ &= S_s(A_{s,m})^{\mathsf{T}} h_{s+1}(A_{s,m}) && (X_s(A_{s,m}) = 0) \\ &= R_s(h)(A_{s,m}) && \text{für } 0 \le s \le T-1. \end{aligned}$$

Für die Zeitindizes $s = 0,\ldots,T\text{-}1$ sind die rechten Seiten $Z_s(A_{s,m})$ $(A_{s,m} \subseteq A_{s-1,k})$ der Gleichungsblöcke $(\mathrm{DP}A_{s-1,k})$ durch die Reinvestitionswerte $R_s(h)(A_{s,m})$ der sf-Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ gegeben.

Übereinstimmung der rechten Seiten $Z_s(A_{s,m})$ und $Y_s(A_{s,m})$:

Es wird nun noch zeitlich absteigend mittels vollständiger Induktion nach $s = T,\ldots,t\text{-}1$ begründet, dass die rechten Seiten $Z_s(A_{s,m})$ und $Y_s(A_{s,m})$ für die Nachfolgerknoten $A_{s,m}$ von $A_{t-2,r}$ $(t\text{-}1 \le s \le T)$ übereinstimmen:

$$Z_s(A_{s,m}) = Y_s(A_{s,m}) \quad \text{für } A_{s,m} \subseteq A_{t-2,r},\ s = t\text{-}1,\ \ldots,\ T.$$

Als Induktionsbeginn hat man zum Endzeitpunkt $T$ definitionsgemäß die Übereinstimmung $Z_T(A_{T,m}) = X_T(A_{T,m}) = Y_T(A_{T,m})$. Falls nun im Sinne einer Induktionsannahme für ein festes $s \in [t,T]$ die Übereinstimmung $Z_s(A_{s,m}) = Y_s(A_{s,m})$ für alle $A_{s,m} \subseteq A_{t-2,r}$ richtig ist, kann sie auch für jeden zeitlich vorhergehenden Nachfolgerknoten $A_{s-1,k}$ von $A_{t-2,r}$ gezeigt werden:

Nach der Induktionsannahme stimmen also insbesondere in dem zu einem Ausgangsknoten $A_{s-1,k}$ $(\subseteq A_{t-2,r})$ und dessen Nachfolgerknoten $A_{s,m} \subseteq A_{s-1,k}$ gehörigen Einperiodenmodell die Zustandsfunktionen $Y_s$ und $Z_s$ auf den Knoten $A_{s,m}$ überein $(t \le s \le T)$. Induktionsschluss $s \longrightarrow s - 1$: Aufgrund der Definition der rechten Seiten $Y_s(A_{s,m})$ $(s = t,\ \ldots,\ T,\ A_{s,m} \in \mathcal{P}_s)$ als Vermögenswerte zum Portfoliovektor $h_s'(A_{s-1,k})$ ist dieser Portfoliovektor Lösung des Gleichungsblocks

$$(\mathrm{DP}A_{s-1,k}\mathrm{Y}) \qquad S_s^{\delta}(A_{s,m})^{\mathsf{T}} h_s'(A_{s-1,k}) = Y_s(A_{s,m}) \qquad (A_{s,m} \subseteq A_{s-1,k}).$$

Aufgrund der Bestimmung der Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ als sf-Duplikationsstrategie von $X_T$ ist der Portfoliovektors $h_s(A_{s-1,k})$ eine Lösung des Gleichungsblocks $(\mathrm{DP}A_{s-1,k}) = (\mathrm{DP}A_{s-1,k}\mathrm{Z})$ zu den rechten Seiten $Z_s(A_{s,m})$ $(s = 0,\ldots,T)$:

$$(\mathrm{DP}A_{s-1,k}\mathrm{Z}) \qquad S_s^{\delta}(A_{s,m})^{\mathsf{T}} h_s(A_{s-1,k}) = Z_s(A_{s,m}) \qquad (A_{s,m} \subseteq A_{s-1,k}).$$

Also sind diese beiden Portfoliovektoren $h_s'(A_{s-1,k})$ und $h_s(A_{s-1,k})$ Lösungen der Blöcke $(\mathrm{DP}A_{s-1,k}\mathrm{Y})$ und $(\mathrm{DP}A_{s-1,k}\mathrm{Z})$ mit gleichen rechten Seiten, d. h. Duplikationsportfoliovektoren der gleichen Zustandsfunktion $Y_s = Z_s$ auf den Knoten $A_{s,m}$.

Da im Einperiodenmodell voraussetzungsgemäß das LOP gültig ist und dieses nach Abschnitt 6.2.2 (siehe äquivalente Formulierungen des LOP) äquivalent zum LOP$D^{\mathsf{T}}$ ist, ist der Reinvestitionswert $R_{s\text{-}1}(h)(A_{s\text{-}1,k}) = S_{s\text{-}1}(A_{s\text{-}1,k})^{\mathsf{T}} h_s(A_{s\text{-}1,k})$ für alle Duplikationsportfoliovektoren $h_s(A_{s-1,k})$ von $Y_s = Z_s$ konstant.[29] Es gilt also

$$\begin{aligned} Y_{s\text{-}1}(A_{s\text{-}1,k}) &= R_{s\text{-}1}(h')(A_{s\text{-}1,k}) \\ &= R_{s\text{-}1}(h)(A_{s\text{-}1,k}) \\ &= Z_{s\text{-}1}(A_{s\text{-}1,k}) \end{aligned}$$

und der Induktionsschluss von $s$ auf $s$ - 1 ist erbracht. Damit ist die Übereinstimmung der rechten Seiten $Z_s(A_{s,m})$ und $Y_s(A_{s,m})$ für die Zeitindizes $s = T, \ldots, t$-1 gezeigt.

Lösbarkeit des Gleichungsblocks (DP$A_{t\text{-}2,r}$) für beliebige rechte Seiten $Y_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k})$:
Insbesondere hat man dann auch für $s = t$-1 die Übereinstimmung

$$Y_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k}) = Z_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k}) \text{ für } A_{t\text{-}1,k} \subseteq A_{t\text{-}2,r},$$

sodass das Gleichungssystem

$$(\mathrm{DP}A_{t\text{-}2,r}\mathrm{Y}) \qquad S^{\delta}_{t-1}(A_{t-1,k})^{\mathsf{T}} h_{t-1}(A_{t-2,r}) = Y_{t-1}(A_{t-1,k}) \qquad (A_{t\text{-}1,k} \subseteq A_{t\text{-}2,r})$$

für die beliebig vorgegebenen rechten Seiten $Y_{t\text{-}1}(A_{t\text{-}1,k})$ lösbar und das zugehörige Einperiodenmodell $D^{\mathsf{T}}$-vollständig ist.
Da nun alle im Mehrperiodenmodell enthaltenen Einperiodenmodelle $D^{\mathsf{T}}$-vollständig sind, ist nach Satz 3.1 von Abschnitt 3.2.5 auch das Mehrperiodenmodell vollständig. □

**Beispiel 5.1 Ein Mehrperiodenmodell (Zwei Perioden-Drei Zustände-Zwei Finanzinstrumente-Modell) mit gültiger sf-Vollständigkeit (VSsfT) und mit einem nichtvollständigen Einperiodenmodell**

In dem folgenden Zahlenbeispiel eines Marktmodells ist die Anzahl der dividendenlosen ($\delta = 0$) Finanzinstrumente $N = 2$, die Anzahl der Zeitperioden $T = 2$ und die Anzahl der Zustände $|\Omega| = K = 3$. Die Knoten des Informationsbaums zum Preisprozess $S = S^{\delta}$ sind

$$\begin{aligned} &A_0 := A_{0,1} = \Omega = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}, \\ &A_{1,1} = \{\omega_1\},\ A_{1,2} = \{\omega_2,\omega_3\}, \\ &A_{2,k} = \{\omega_k\} \text{ für } k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Die Filtration $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_t)_{t=0,1,2}$ der Partitionen ist gegeben durch

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_0 = \{A_0\}, \\ &\mathcal{P}_1 = \{A_{1,1},A_{1,2}\}, \\ &\mathcal{P}_2 = \{A_{2,1},A_{2,2},A_{2,3}\} = \{\{\omega_1\},\{\omega_2\},\{\omega_3\}\}. \end{aligned}$$

Der $\mathcal{P}$-adaptierte Preisprozess $S \in \mathcal{W}_2$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} S_0^{\mathsf{T}} &= S_0(A_0)^{\mathsf{T}} &&= (80,100), \\ S_1^{\mathsf{T}} &= (S_1(A_{1,1});S_1(A_{1,2})) &&= (64,72;96,108), \\ S_2^{\mathsf{T}} &= (S_2(\omega_1);S_2(\omega_2);S_2(\omega_3)) &&= (58,132;76.8,99;105.6,81). \end{aligned}$$

Für das Marktmodell ist die mathematisch-technische Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) $S_0^{\delta} \neq 0$ erfüllt. Die mit dem Marktmodell zu duplizierenden und zu bewertenden $\mathcal{P}$-adaptierten endfälligen Zahlungsprofile sind jetzt die speziellen Zahlungsprofile $X = (X_0,X_1,X_2)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{W}(T)$ mit

$$X_0 = 0,\ X_1 = (0,0)^{\mathsf{T}} \text{ und } X_2 = (X_2(\omega_1),X_2(\omega_2),X_2(\omega_3))^{\mathsf{T}} = (X_{2,1}, X_{2,2}, X_{2,3})^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^3.$$

Es wird gezeigt, dass das Mehrperiodenmodell sf-vollständig ist und das zum Ausgangsknoten $A_0$ gehörige Einperiodenmodell nicht vollständig ist.

Das zur Bestimmung einer sf-Duplikationsstrategie $h = (h_0,h_1,h_2)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{H}_N^{sf}$ zu lösende gestaffelte inhomogene lineare Gleichungssystem (DP) $L(h) = X$ lässt sich in drei Teile zerlegen:

---

[29] Weitere Ausführungen zu einem im Mehrperiodenmodell enthaltenen Einperiodenmodell findet man hinsichtlich Duplizierbarkeit, LOP und Vollständigkeit auch noch in Abschnitt 3.2 und hinsichtlich LOP und Bewertungsvektor in Abschnitt 3.4.4 im Beweis von Satz 3.4.

$$(\mathrm{DP}A_{1,k}) \qquad S_2^{\delta}(A_{2,m})^{\mathsf{T}} h_2(A_{1,k}) = X_2(A_{2,m}) \qquad (A_{2,m} \subseteq A_{1,k}), \qquad A_{1,k} \in \mathcal{P}_1,$$

$$(\mathrm{DP}A_{0,1}) \qquad S_1^{\delta}(A_{1,m})^{\mathsf{T}} h_1(A_0) = Z_1(A_{1,m}) = S_1(A_{1,m})^{\mathsf{T}} h_2(A_{1,m}) \qquad (A_{1,m} \subseteq A_0),$$

$$(\mathrm{DP}A_{-1,1}) \qquad S_0^{\delta}(A_0)^{\mathsf{T}} h_0(A_0) = Z_0(A_0) = S_0(A_0)^{\mathsf{T}} h_1(A_0).$$

Der erste Teil wird in der Abbildung 5.7 durch die gelb und grün umrandeten Teilgraphen von Einperiodenmodellen veranschaulicht, der zweite Teil durch den blau umrandeten Teilgraphen eines Einperiodenmodells. Der dritte Teil liefert im Knoten $A_0$ den Startkapitalwert $V_0(h) = Z_0(A_0)$ und die Bemerkung, dass der Portfoliovektor $h_0$ nicht eindeutig bestimmt ist.

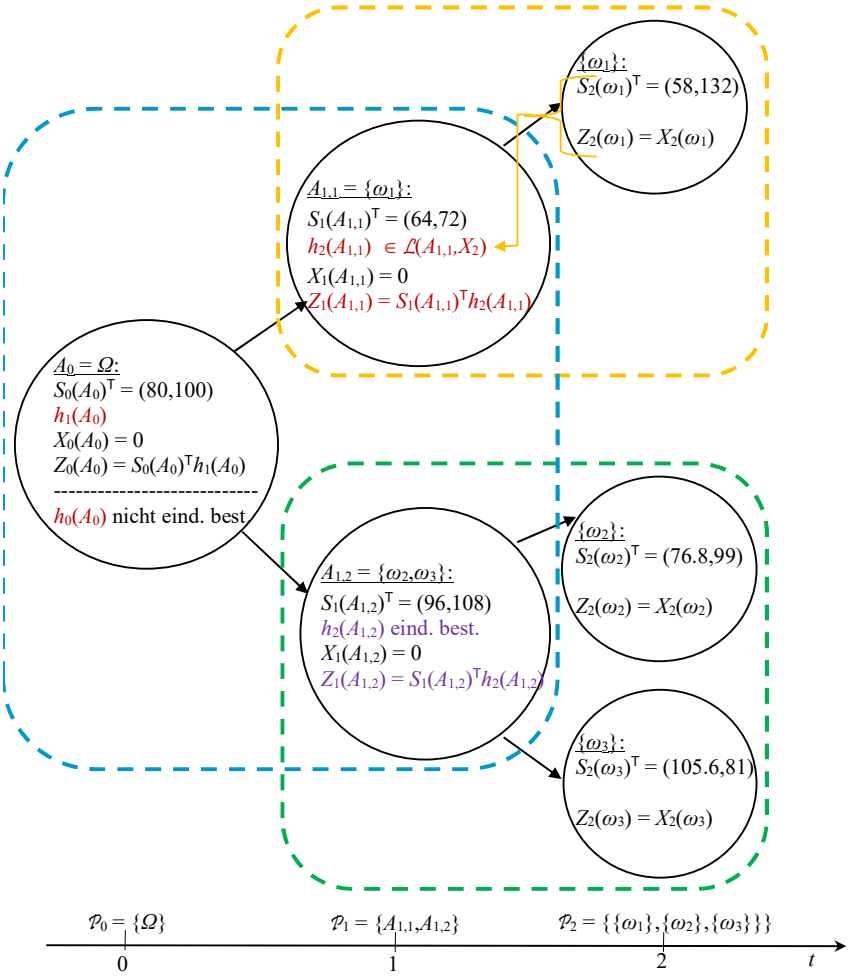



**Abb. 5.7** Der Informationsbaum eines Mehrperiodenmodells mit dem Preisprozess $S = S^{\delta}$ ($\delta = 0$, $N = 2$, $T = 2$, $K = |\Omega| = 3$) und die gestrichelt umrandeten Teilgraphen der enthaltenen Einperiodenmodelle mit dem blau umrandeten nicht vollständigen Einperiodenmodell. In den Knoten $A_{t,k}$ sind neben dem Preisprozesswert $S_t(A_{t,k})$ noch der Zahlungswert $X_t(A_{t,k})$ des Zahlungsprofils $X = (0,0,X_2)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{W}(T)$, die rechte Seite $Z_t$ des jeweiligen Gleichungssystems und der gesuchte Portfoliovektor $h_t$ der sf-Duplikationsstrategie $h = (h_0,h_1,h_2)^{\mathsf{T}}$ aufgeführt.

1) a) Zum Knoten $A_{1,1} = \{\omega_1\}$ der Partition $\mathcal{P}_1$ gehört das gelb umrandete Einperiodenmodell und das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$(\mathrm{DP}A_{1,1}) \qquad \begin{pmatrix} S_2^1(\omega_1) & S_2^2(\omega_1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_2^1(A_{1,1}) \\ h_2^2(A_{1,1}) \end{pmatrix} = X_2(\omega_1) \qquad (\delta = 0)$$

bzw. mit den Zahlenwerten des Preisprozesses

$$\begin{pmatrix} 58 & 132 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_2^1(A_{1,1}) \\ h_2^2(A_{1,1}) \end{pmatrix} = X_2(\omega_1)\,.$$

Zum Gleichungssystem $(\mathrm{DP}A_{1,1})$ erhält man den Zeilenraum

$$\mathcal{Z}(A_{1,1}) := \operatorname{lin}\,\{\, S_2^\delta(\omega_m) \,:\, \omega_m \in A_{1,1}\} = \operatorname{lin}\, S_2^\delta(\omega_1) = \operatorname{lin}\,(58,132)^\mathsf{T},$$

der als lineare Hülle der für die Duplizierung zuständigen Zeilen $S_2^\delta(\omega_1)^\mathsf{T}$ der Matrix des Gleichungssystems gebildet wird, weiter den linearen Lösungsraum

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}(A_{1,1}) &= \mathcal{Z}(A_{1,1})^\perp = \{\, S_2^\delta(\omega_1)\,\}^\perp \\ &= \{\, \hat{h}_2(A_{1,1}) \in \mathbb{R}^2 : S_2^\delta(\omega_1)^\mathsf{T} \hat{h}_2(A_{1,1}) = 0\} \\ &= \operatorname{lin}\,(132,\text{-}58)^\mathsf{T} \end{aligned}$$

des zu $(\mathrm{DP}A_{1,1})$ gehörigen homogenen Gleichungssystems $S_2^\delta(\omega_1)^\mathsf{T} h_2(A_{1,1}) = 0$ und schließlich zu fest vorgegebenem $X_{2,1} = X_2(\omega_1)$ den affinen Lösungsraum $\mathcal{L}(A_{1,1},X_2)$ des inhomogenen Gleichungssystems $(\mathrm{DP}A_{1,1})$ als Minkowski-Summe einer speziellen Lösung $h_2'(A_{1,1}) = (0,X_{2,1}/132)^\mathsf{T}$ von $(\mathrm{DP}A_{1,1})$ und des linearen Lösungsraums $\hat{\mathcal{L}}(A_{1,1})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A_{1,1},X_2) &= h_2'(A_{1,1}) + \hat{\mathcal{L}}(A_{1,1}) \\ &= \{(0,X_{2,1}/132)^\mathsf{T} + \lambda\cdot(132,\text{-}58)^\mathsf{T} : \lambda \in \mathbb{R}\} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem $(\mathrm{DP}A_{1,1})$ ist also für jede beliebige rechte Seite $X_{2,1}$ lösbar und besitzt jeweils einen eindimensionalen affinen Lösungsraum in $\mathbb{R}^2$ für den gesuchten Duplikationsportfoliovektor $h_2(A_{1,1})$.

Es wird jetzt noch begründet, dass der Reinvestitionswert

$$R_1(h)(A_{1,1}) = S_1(A_{1,1})^\mathsf{T} h_2(A_{1,1}) \in \mathbb{R}$$

für alle Duplikationsportfoliovektoren von $X_{2,1} = X_2(\omega_1)$, d. h. für alle

$$h_2(A_{1,1}) \in \mathcal{L}(A_{1,1},X_{2,1}),$$

nicht konstant ist und sogar alle Werte in $\mathbb{R}$ annimmt. Im zum Knoten $A_{1,1}$ gehörigen und gelb umrandeten Einperiodenmodell ist also das LOP nicht gültig. Der für die Reinvestition im Knoten $A_{1,1}$ zuständige Preisvektor $S_1(A_{1,1}) = (64,72)^\mathsf{T}$ liegt hier nämlich nicht im Zeilenraum $\mathcal{Z}(A_{1,1}) = \hat{\mathcal{L}}(A_{1,1})^\perp$ des Gleichungssystems $(\mathrm{DP}A_{1,1})$, sodass die zugehörige Linearform $S_1(A_{1,1})^\mathsf{T} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ einen nichttrivialen Bildraum von $\hat{\mathcal{L}}(A_{1,1})$ besitzt. Es ist also

$$S_1(A_{1,1})^\mathsf{T}(\,\hat{\mathcal{L}}(A_{1,1})\,) = \operatorname{lin}\,(64,72)(132,\text{-}58)^\mathsf{T} = \operatorname{lin}\,4272 = \mathbb{R} \neq O$$

und demzufolge

$$\begin{aligned} S_1(A_{1,1})^\mathsf{T}(\mathcal{L}(A_{1,1},X_2)) &= (64,72)(0,X_{2,1}/132)^\mathsf{T} + (64,72)\,\hat{\mathcal{L}}(A_{1,1}) \\ &= 72X_{2,1}/132 + \mathbb{R} = \mathbb{R}, \end{aligned}$$

also das Bild von $\mathcal{L}(A_{1,1},X_2)$ nicht ein einzelner Punkt von $\mathbb{R}$, sondern ganz $\mathbb{R}$.

Zur Duplizierung von $X_{2,1} = X_2(\omega_1)$ kann also jeder beliebige reelle Reinvestitionswert vorgeschrieben und dazu ein Duplikationsportfoliovektor $h_2(A_{1,1})$ angegeben werden. Diese Eigenschaft wird nachfolgend in 2) noch zum Nachweis von (VSsfT) verwendet.

b) Zum Knoten $A_{1,2} \in \mathcal{P}_1$ gehört das grün umrandete Einperiodenmodell und das Gleichungssystem

$$(\mathrm{DP}A_{1,2}) \qquad \begin{pmatrix} S_2^1(\omega_2) & S_2^2(\omega_2) \\ S_2^1(\omega_3) & S_2^2(\omega_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_2^1(A_{1,2}) \\ h_2^2(A_{1,2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2(\omega_2) \\ X_2(\omega_3) \end{pmatrix} \qquad (\delta = 0)$$

bzw. mit den Zahlenwerten des Preisprozesses

$$\begin{pmatrix} 76.8 & 99 \\ 105.6 & 81 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_2^1(A_{1,2}) \\ h_2^2(A_{1,2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2(\omega_2) \\ X_2(\omega_3) \end{pmatrix}.$$

Da die Determinante der quadratischen Matrix des Gleichungssystems von Null verschieden ist, ist der lineare Lösungsraum $\hat{\mathcal{L}}(A_{1,2})$ des zugehörigen homogenen Gleichungssystems der Nullraum von $\mathbb{R}^2$ und der affine Lösungsraum $\mathcal{L}(A_{1,2},X_2)$ von $(\mathrm{DP}A_{1,2})$ zu jeder beliebig vorgegebenen rechten Seite $(X_2(\omega_2),X_2(\omega_3))^\mathsf{T}$ genau ein Punkt in $\mathbb{R}^2$. Zu jedem $(X_2(\omega_2),X_2(\omega_3))^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^2$ gibt es genau einen Duplikationsportfoliovektor $h_2(A_{1,2}) \in \mathbb{R}^2$ und Reinvestitionswert $R_1(h)(A_{1,2}) = S_1(A_{1,2})^\mathsf{T} h_2(A_{1,2})$.

2) Nach der Betrachtung der Knoten der Partition $\mathcal{P}_1$ gelangt man zum Knoten $A_0$ der Partition $\mathcal{P}_0$. Zu diesem Knoten $A_0 = \Omega \in \mathcal{P}_0$ und seinen Nachfolgerknoten $A_{1,1}$, $A_{1,2} \in \mathcal{P}_1$ gehört das blau umrandete Einperiodenmodell, in dem ein Portfoliovektor $h_1(A_0) = \left(h_1^1(A_0), h_1^2(A_0)\right)^\mathsf{T}$ gesucht wird. Zu seiner Bestimmung verwendet man das Gleichungssystem

$$(\mathrm{DP}A_{0,1}) \qquad \begin{pmatrix} S_1^1(A_{1,1}) & S_1^2(A_{1,1}) \\ S_1^1(A_{1,2}) & S_1^2(A_{1,2}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1^1(A_0) \\ h_1^2(A_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1(A_{1,1}) \\ Z_1(A_{1,2}) \end{pmatrix} \qquad (\delta = 0)$$

bzw. mit den Zahlenwerten des Preisprozesses

$$\begin{pmatrix} 64 & 72 \\ 96 & 108 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1^1(A_0) \\ h_1^2(A_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1(A_{1,1}) \\ Z_1(A_{1,2}) \end{pmatrix}.$$

Die dabei auftretenden rechten Seiten sind jetzt die Reinvestitionswerte der in den obigen Gleichungssystemen bestimmten Duplikationsportfoliovektoren $h_2(A_{1,1})$ und $h_2(A_{1,2})$:

$$Z_1(A_{1,1}) = S_1(A_{1,1})^\mathsf{T} h_2(A_{1,1}) = (64,72)^\mathsf{T} h_2(A_{1,1}),$$
$$Z_1(A_{1,2}) = S_1(A_{1,2})^\mathsf{T} h_2(A_{1,2}) = (96,108)^\mathsf{T} h_2(A_{1,2}).$$

Da in der Matrix des Gleichungssystems $(\mathrm{DP}A_{0,1})$ die Zeilenvektoren $S_1(A_{1,1})^\mathsf{T} = (64,72)$ und $S_1(A_{1,2})^\mathsf{T} = (96,108)$ linear abhängig sind,

$$S_1(A_{1,2})^\mathsf{T} = \mu \cdot S_1(A_{1,1})^\mathsf{T}) \text{ mit } \mu = 1.5,$$

ist das Gleichungssystem nicht für beliebige rechte Seiten $(Y_1(A_{1,1}),Y_1(A_{1,2}))^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^2$ lösbar und somit das zum Knoten $A_0$ gehörige Einperiodenmodell nicht vollständig. Es wird jetzt noch begründet, dass trotzdem das gesamte Mehrperiodenmodell sf-vollständig ist.

Oben wurde schon nachgewiesen, dass für ein beliebig vorgegebenes Zahlungsprofil $X_2 \in \mathbb{R}^3$ die Gleichungssysteme $(\mathrm{DP}A_{1,1})$ und $(\mathrm{DP}A_{1,2})$ lösbar sind. Zu den dabei bestimmten Duplikationsportfoliovektoren $h_2(A_{1,1})$ und $h_2(A_{1,2})$ erhält man mit deren Reinvestitionswerten die rechten Seiten $Z_1(A_{1,1})$ und $Z_1(A_{1,2})$ des jetzt noch zu lösenden Gleichungssystems $(\mathrm{DP}A_{0,1})$. Dieses ist genau dann lösbar, wenn für die rechten Seiten dieselbe Abhängigkeit gilt wie für die Zeilenvektoren, wenn also

$$Z_1(A_{1,2}) = \mu \cdot Z_1(A_{1,1}) \text{ mit } \mu = 1.5$$

gilt. Nun ist bei der Auflösung des vorhergehenden Gleichungssystems $(\mathrm{DP}A_{1,2})$ der Duplikationsportfoliovektor $h_2(A_{1,2})$ und der zugehörige Reinvestitionswert $R_1(h)(A_{1,2}) = S_1(A_{1,2})^\mathsf{T} h_2(A_{1,2})$ eindeutig bestimmt. Letzterer liefert die zum Knoten $A_{1,2}$ gehörige eindeutig bestimmte rechte Seite $Z_1(A_{1,2})$. Für die Lösbarkeit des Gleichungssystems $(\mathrm{DP}A_{0,1})$ ist dann auch die zum Knoten $A_{1,1}$ gehörige rechte Seite $Z_1(A_{1,1})$ eindeutig bestimmt, und zwar durch

$$Z_1(A_{1,1}) = Z_1(A_{1,2})/\mu.$$

Nach der obigen Betrachtung des vorhergehenden Gleichungssystems $(\mathrm{DP}A_{1,1})$ kann nun tatsächlich ein Duplikationsportfoliovektor $h_2(A_{1,1})$ beliebig im eindimensionalen Lösungsraum $\mathcal{L}(A_{1,1},X_2)$ bzw. sein Reinvestitionswert $R_1(h)(A_{1,1}) = S_1(A_{1,1})^\mathsf{T} h_2(A_{1,1})$ beliebig in $\mathbb{R}$ gewählt werden. Insbesondere

kann der Reinvestitionswert $R_1(h)(A_{1,1})$ gleich der hier festgelegten rechten Seite $Z_1(A_{1,1})$ gewählt werden: Wähle $h_2(A_{1,1})$ mit $S_1(A_{1,1})^\mathsf{T} h_2(A_{1,1}) = Z_1(A_{1,1}) = Z_1(A_{1,2})/\mu$. Nach der Auflösung von (DP$A_{1,2}$) und der für die Lösbarkeit von (DP$A_{0,1}$) notwendigen Festlegung der rechten Seite $Z_1(A_{1,1})$ von (DP$A_{1,1}$) kann also noch das Gleichungssystem (DP$A_{1,1}$) gelöst werden. Damit sind für alle Knoten $A_{1,2}$, $A_{1,1}$ und $A_0$ bzw. für die zugehörigen Einperiodenmodelle die Gleichungssysteme auflösbar. Als Lösung des Gleichungssystems (DP$A_{0,1}$) erhält man den Duplikationsportfoliovektor $h_1(A_0)$.

3) Die schließlich allein zum Knoten $A_0 = \Omega$ (ohne Nachfolgerknoten) für den Portfoliovektor $h_0(A_0)$ noch auftretende einzige reellwertige Gleichung

(DP$A_{-1,1}$) $$S_0(A_0)^\mathsf{T} h_0(A_0) = Z_0(A_0)$$

mit dem Zeilenvektor $S_0(A_0)^\mathsf{T} = (80,100)$ und der rechten Seite

$$Z_0 := Z_0(A_0) = S_0(A_0)^\mathsf{T} h_1(A_0)$$

ist wegen (AWS$^\delta$) ( $S_0^\delta = S_0 = (80,100)^\mathsf{T} \neq 0$) stets nach $h_0$ auflösbar. Die Lösungen $h_0 = h_0(A_0) = (h_0^1, h_0^2)^\mathsf{T}$ liegen in einem eindimensionalen affinen Unterraum $\mathcal{L}(A_0, Z_0)$ von $\mathbb{R}^2$:

$$h_0 = (0, Z_0 \cdot 0.01) + h_0^1 \cdot (1, -0.8)^\mathsf{T},\ h_0^1 \in \mathbb{R}.$$

So erhält man insgesamt zu beliebigem Zahlungsprofil $X_2 \in \mathbb{R}^3$ eine sf-Duplikationsstrategie $h = (h_0, h_1, h_2)^\mathsf{T} \in \mathcal{H}_N^{sf}$. Das hier in diesem Zahlenbeispiel dargestellte Mehrperiodenmodell ist also sf-vollständig, obwohl das zum Knoten $A_0$ gehörige Einperiodenmodell nicht vollständig ist. △

### 5.2.3 Äquivalenz der sf-Vollständigkeit des ursprünglichen Marktmodells zur sf-Vollständigkeit des relativen Marktmodells

Da der Automorphismus $f_T(X_T) = X_T/B_T$ von $\mathbb{R}^\Omega$ (Abschnitt 5.1.7, $B_T > 0$) dimensionserhaltend ist, gilt für die Unterräume $L_T(\mathcal{H}_N^{sf})$, $\tilde{L}_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = f_T(L_T(\mathcal{H}_N^{sf}))$ von $\mathbb{R}^\Omega$ die Übereinstimmung $L_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = \mathbb{R}^\Omega$ genau dann, wenn die Übereinstimmung $\tilde{L}_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = \mathbb{R}^\Omega$ gilt.[30] Damit erhält man die folgende Äquivalenz:

Das zu einem Numéraire gebildete relative Marktmodell ist genau dann sf-vollständig, wenn das ursprüngliche Marktmodell sf-vollständig ist.

Mit der zur Abbildung $L_T = V_T = V_T^{sf} : \mathcal{H}_N^{sf} \longrightarrow \mathbb{R}^\Omega$ in Abschnitt 5.3.6 noch definierten adjungierten Abbildung $V_T^{sf*} : \mathbb{R}^\Omega \longrightarrow \mathcal{H}_N^{sf}$ lässt sich die sf-Vollständigkeit auch noch charakterisieren durch

$$\ker V_T^{sf*} = V_T(\mathcal{H}_N^{sf})^\perp = O,$$

also durch die Injektivität der Adjungierten $V_T^{sf*}$ von $V_T$. Analog lässt sich die sf-Vollständigkeit des ursprünglichen bzw. des relativen Marktmodells charakterisieren durch die Injektivität der Adjungierten $\tilde{V}_T^{sf*}$ von $\tilde{V}_T$. Man erhält also die Aussagen:

(VSsfT) $$\Leftrightarrow \ker V_T^{sf*} = O$$
$$\Leftrightarrow \ker \tilde{V}_T^{sf*} = O.$$

[30] Der hierbei verwendete Satz der linearen Algebra und Literaturhinweise hierzu werden in einer Fußnote von Abschnitt 2.8.4 angegeben.

### 5.2.4 Charakterisierung der sf-Vollständigkeit des sf-arbitragefreien relativen Marktmodells ohne bzw. mit Dividenden durch die Existenz von genau einem äquivalenten Martingalmaß bzw. genau einem Diskontvektor

Es wird ein Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ zugrunde gelegt, dessen Preisprozess $S = (S^1,\ldots,S^N)^\intercal$ mit einem Numéraire $B = S^N > 0$ ausgestattet ist. Der Numéraire $B = S^N > 0$ muss bei der hier verwendeten Beweisführung nicht deterministisch, also nicht auf $\Omega$ konstant, gewählt werden. Außerdem wird die Arbitragefreiheit (AFsf) des Marktmodells vorausgesetzt.
Mit Hilfe der Charakterisierungen eines Martingalmaßes in Satz 5.4 und der Charakterisierung der Arbitragefreiheit (AFsf) durch die Existenz von mindestens einem Diskontvektor bzw. äquivalenten Martingalmaß in Satz 5.5 kann nun der sog. zweite Hauptsatz der Preistheorie[31] für endfällige Zahlungsprofile mit der Charakterisierung der Vollständigkeit (VSsfT) eines arbitragefreien Marktmodells bewiesen werden. In Teil a) des Satzes erfolgt für ein dividendenloses Marktmodell die Charakterisierung der sf-Vollständigkeit sowohl w-theoretisch durch die Existenz von genau einem äquivalenten Martingalmaß als auch linearalgebraisch durch die Existenz von genau einem Diskontvektor in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ bzw. einem positiven $\kappa$-normierten Normalenvektor zum Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$ der relativen NE-Zahlungsprofile. Der Teil b) des Satzes ist die Verallgemeinerung von Teil a) auf ein dividendenversehenes relatives Marktmodell und charakterisiert die sf-Vollständigkeit durch die Existenz von genau einem Diskontvektor $Q$ in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$. In Teil c) des Satzes wird noch die Maximalanzahl affin unabhängiger Diskontvektoren bzw. äquivalenter Martingalmaße angegeben. Analoge Aussagen zur Maximalanzahl findet man auch in Abschnit 5.2.5 (Satz 5.9) für Diskontvektoren im ursprünglichen Marktmodell, in Abschnitt 3.5.1 für die Bewertungsprozesse und in Abschnitt 3.6.1 (Satz 3.9) für die Diskontierungsprozesse.

**Satz 5.8 Zweiter Hauptsatz der Preistheorie mit der Charakterisierung der sf-Vollständigkeit (VSsfT) durch die Existenz von genau einem äquivalenten Martingalmaß im sf-arbitragefreien dividendenlosen relativen Marktmodell bzw. durch die Existenz von genau einem Diskontvektor im sf-arbitragefreien dividendenversehenen relativen Marktmodell**

Es sei $((S,\delta),\mathcal{F})$ ein Marktmodell, dessen Preisprozess $S = (S^1,\ldots,S^N)^\intercal$ mit einem Numéraire

$$S^N = B > 0$$

ausgestattet ist und in dem die sf-Arbitragefreiheit (AFsf) vorliegt. Es gelten dann die folgenden Aussagen:

a) Bei einem Preisprozess $S = (S^1,\ldots,S^N)^\intercal$ **ohne Dividenden** ($\delta = (\delta^1,\ldots,\delta^N)^\intercal = 0$) ist das Marktmodell genau dann sf-vollständig, wenn es genau ein **äquivalentes Martingalmaß** bzw. genau einen **relativen Diskontvektor** in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$, d. h. genau einen positiven $\kappa$-normierten Normalenvektor zum Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$, im relativen Marktmodell gibt.

---

[31] Den Teil a) des Satzes mit der w-theoretischen Formulierung von genau einem äquivalenten Martingalmaß findet man bei Bäuerle u. Rieder (2017), S. 47, Theorem 5.1, und Kallsen (2009), S. 59, Satz 4.6.

b) Bei einem Preisprozess $S = (S^1,\ldots,S^N)^\top$ **mit Dividenden** ist das Marktmodell genau dann sf-vollständig, wenn es genau einen **relativen Diskontvektor** in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$, d. h. genau einen positiven $\kappa$-normierten Normalenvektor zum Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$ im relativen Marktmodell, bzw. genau ein **äquivalentes W-Maß** in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ gibt.

c) Ist $p := K$ - dim $V_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = \dim V_T(\mathcal{H}_N^{sf})^\perp = \dim \ker V_T^{sf*}$ $(\in \{0,\ldots,K\},\ K = |\Omega|)$, so ist $p+1$ die Maximalzahl affin unabhängiger relativer Diskontvektoren bzw. äquivalenter W-Maße in

$$\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+} = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{0 < X_T \le 1,\ \kappa(X_T) = 1\}.$$

Im dividendenlosen Marktmodell sind die Diskontvektoren bzw. äquivalenten W-Maße in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ genau die äquivalenten Martingalmaße.

**Beweis von c):** Es wird jetzt bei vorausgesetzter sf-Arbitragefreiheit (AFsf) die maximale Anzahl affin unabhängiger Diskontvektoren bzw. äquivalenter W-Maße in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ in Abhängigkeit von der Dimension $p$ des orthogonalen Komplements $V_T(\mathcal{H}_N^{sf})^\perp$ des $V_T$-Bildraums $V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ bestimmt.[32] Es sei also

$$\begin{aligned} p &:= \dim \ker \tilde{V}_T^{sf*} = \dim \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf})^\perp = K - \dim \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf}) \\ &= K - \dim V_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = \dim V_T(\mathcal{H}_N^{sf})^\perp = \dim \ker V_T^{sf*} \qquad (\dim \tilde{\mathcal{V}}_T = \dim \mathcal{V}_T). \end{aligned}$$

Aufgrund der in Abschnitt 5.1.7 angegebenen Inklusion für die Unterräume $\tilde{\mathcal{M}}_T$ und $\tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf})$,

$$\tilde{\mathcal{M}}_T = \bar{K}_T(\mathcal{H}_{N-1}) = \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0) \subseteq \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf}),$$

erhält man für die orthogonalen Komplemente die umgekehrte Inklusion

$$\ker \tilde{V}_T^{sf*} = \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf})^\perp \subseteq \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}.$$

Da die Arbitragefreiheit (AFsf) vorausgesetzt ist, gibt es nach dem Beweisteil a) „⇒“ von Satz 5.5 zumindest einen relativen Diskontvektor $Q$ in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$, also einen $\kappa$-normierten positiven Normalenvektor $Q$ zum Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$ der relativen NE-Zahlungsprofile:

$$Q \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{0 < X_T \le 1,\ \kappa(X_T) = 1\} =: \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}.$$

Es werden nun die zwei Fälle unterschieden, nämlich dass die sf-Vollständigkeit nicht vorliegt bzw. dass sie vorliegt.

---

[32] Aufgrund der in Abschnitt 5.1.7 begründeten Isomorphie der Bildräume $\mathcal{V}_T$ und $\tilde{\mathcal{V}}_T$ der Abbildungen $V_T$ und $\tilde{V}_T$ besitzen diese die gleiche Dimension. Das orthogonale Komplement $\tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf})^\perp$ des Bildraums von $\tilde{V}_T$ stimmt überein mit dem Kern $\ker \tilde{V}_T^{sf*}$ der zu $\tilde{V}_T = \tilde{V}_T^{sf} : \mathcal{H}_N^{sf} \longrightarrow \mathbb{R}^\Omega$ adjungierten Abbildung $\tilde{V}_T^{sf*} = (\tilde{V}_T^{sf})^* : \mathbb{R}^\Omega \longrightarrow \mathcal{H}_N^{sf}$ (ausführlichere Betrachtungen zu adjungierten Abbildungen folgen in Abschnitt 5.3.6). Man hat hier dieselbe geometrische Situation wie in Abschnitt 2.10.1 bei der orthogonalen additiven Zerlegung von $\mathcal{W}$ in Bildraum Im $L$ und Kern ker $L^*$.

1) Falls die sf-Vollständigkeit (VSsfT) nicht vorliegt, also $\tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf}) \neq \mathbb{R}^{\Omega}$, $\ker \tilde{V}_T^{sf*} \neq O$ bzw. $p \geq 1$ gilt, gibt es (aufgrund der Definition der Dimension eines linearen Unterraums[33]) maximal $p$ linear unabhängige Vektoren im linearen Unterraum $\ker \tilde{V}_T^{sf*}$:

$$Z_T^i \in \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf})^{\perp} = \ker \tilde{V}_T^{sf*} \qquad (i = 1,\ldots,p).$$

Setzt man noch $Z_T^0 := 0$ ($\in \mathbb{R}^{\Omega}$), so erhält man (aufgrund der Definition der affinen Unabhängigkeit[34]) die $p + 1$ affin unabhängigen Vektoren im linearen bzw. affinen Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$:

$$\Phi_T^i := Q + \lambda_i Z_T^i \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \qquad (\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ i = 0,\ldots,p).$$

Durch die passende Wahl der $\lambda_i$, nämlich

$$0 < \lambda_i < \min \{q_k / |z_k^i| : k \text{ mit } z_k^i < 0\} \qquad (q_k := Q(\omega_k),\ z_k^i := Z_T^i(\omega_k)),$$

kann noch die Positivität der $p + 1$ Zustandsfunktionen $\Phi_T^i$ gesichert werden: Bei nichtnegativem $z_k^i$ ist nämlich mit beliebig fixiertem $\lambda_i > 0$ der Funktionswert $\Phi_T^i(\omega_k) = q_k + \lambda_i \cdot z_k^i \geq q_k > 0$. Bei negativem $z_k^i$ ist der Funktionswert $\Phi_T^i(\omega_k) > 0$ genau dann, wenn $q_k > -\lambda_i z_k^i = \lambda_i |z_k^i|$ bzw. $\lambda_i < q_k / |z_k^i|$ durch die Wahl von $\lambda_i$ erreicht wird.

Nach anschließender „Normierung" mit der Komponentensumme

$$\kappa(\Phi_T^i) := \Phi_{T,1}^i + \ldots + \Phi_{T,K}^i$$

($\kappa$-Normierung) erhält man schließlich daraus die $p + 1$ affin unabhängigen $\kappa$-normierten positiven Zustandsfunktionen

$$Q^i := \Phi_T^i / \kappa(\Phi_T^i) \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{0 < X_T \leq 1, \kappa(X_T) = 1\} =: \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+} \qquad (i = 0,\ldots,p),$$

die nach Abschnitt 5.3.11, 1) auch als Diskontvektoren bezeichnet werden. Die $\kappa$-Normierung der $\Phi_T^i$ muss nicht durchgeführt werden, wenn man hier schon verwendet, dass die Vektoren $Y_T^i := \lambda_i Z_T^i \in \ker \tilde{V}_T^{sf*}$ nach Hilfssatz 5.11, II, 7a von Abschnitt 5.3.6 (ohne die zusätzlichen Voraussetzungen, die für Teil I des Hilfssatzes benötigt werden) die Komponentensumme $\kappa(Y_T^i) = 0$ aufweisen und somit für die $\Phi_T^i$ die Komponentensumme schon den Wert 1 besitzt:

$$\kappa(\Phi_T^i) = \kappa(Q) + \kappa(Y_T^i) = 1 + 0 = 1.$$

Aus der Arbitragefreiheit (AFsf) bzw. aus der Existenz eines Diskontvektors $Q \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$ folgt also auch die Existenz von mindestens $p + 1$ affin unabhängigen Diskontvektoren $Q^i \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$, wobei $p := \dim \ker \tilde{V}_T^{sf*}$ ist.

Es wird nun noch begründet, dass $p + 1$ auch die *maximale* Anzahl von affin unabhängigen Diskontvektoren in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$ ist. Dazu wird gezeigt, dass $p + 1$ auch die maximale Anzahl von affin unabhängigen Vektoren im umfassenderen affinen Unterraum

$$\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1} = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = 1\}$$

ist: Die Menge $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$ ist als Durchschnitt des linearen Unterraums $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ und des affinen Unterraums $\{\kappa(X_T) = 1\}$, der als Lösungsraum der inhomogenen linearen Gleichung $\kappa(X_T) = 1$ definiert ist, ein affiner Unterraum des $\mathbb{R}^{\Omega}$. Der affine Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$ ist hier nicht leer, da er wegen (AFsf) den Dis-

---

33 Die Definition einer Basis und die Definition der Dimension eines Vektorraums als Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren des Raumes findet man bei Bröcker (2004), S. 38, 41, Wagner (1981), S. 34, 39, Lexikon der Mathematik, Bd. 1 (2000), S. 169, 419.

34 Eine Familie von $p + 1$ Punkten $a_0, a_1, \ldots, a_p$ eines als affinen Raum betrachteten Vektorraums heißt affin unabhängig, wenn die $p$ zum festen Punkt $a_0$ gebildetenVerbindungsvektoren $a_1 - a_0, \ldots, a_p - a_0$ linear unabhängig sind (Lexikon der Mathematik, Bd. 1 (2000), S. 29).

kontvektor $Q$ enthält. Seine Richtung $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$ - $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$ ist dann der lineare Unterraum $\ker \tilde{V}_T^{sf*}$: Zunächst gilt nämlich die Inklusion

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1} - \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1} &= \{X_T = Y_T - Z_T : Y_T, Z_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}\} \\ &\subseteq \{X_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} : \kappa(X_T) = 0\}.\end{aligned}$$

Die umgekehrte Inklusion „⊇“ ergibt sich folgendermaßen: Aus $X_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ und $\kappa(X_T) = 0$ folgt mit dem bei sf-Arbitragefreiheit existierenden $Q \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+} \subseteq \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$ und mit $Z_T := Q - X_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$, $\kappa(Z_T) = \kappa(Q) - \kappa(X_T) = 1 - 0 = 1$, $Z_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$ auch $X_T = Q - Z_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1} - \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$. Somit ist

$$\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1} - \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1} = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = 0\} =: \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 0}.$$

Die Übereinstimmung der linearen Unterräume $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = 0\}$ und $\ker \tilde{V}_T^{sf*}$ folgt schließlich nach Hilfssatz 5.11, II, 7a in Abschnitt 5.3.6.

Der affine Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$ lässt sich dann mit seiner Richtung $\ker \tilde{V}_T^{sf*}$ und dem speziellen Vektor $Q \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$ darstellen als deren Minkowski-Summe

$$\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1} = Q + \ker \tilde{V}_T^{sf*}.$$

Da $p$ die Dimension der Richtung des affinen Unterraums $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$ ist, gibt es aufgrund der Definition der affinen Unabhängigkeit und der Definition der Dimension eines linearen Unterraums maximal $p + 1$ affin unabhängige Vektoren im affinen Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$.

Da nun in der Teilmenge $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$ (der positiven $\kappa$-normierten Normalenvektoren zum Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$) des affinen Unterraums $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$ bereits $p + 1$ affin unabhängige Vektoren $Q^i$ nachgewiesen wurden, ist $p + 1$ dann auch die Maximalzahl affin unabhängiger Vektoren in der Teilmenge $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$.

2) Der Spezialfall der sf-Vollständigkeit (VSsfT) fügt sich ein mit der Dimension $p = 0$: Es ist dann $\tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = \mathbb{R}^{\Omega}$, $\ker \tilde{V}_T^{sf*} = O$, $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1} = Q + \ker \tilde{V}_T^{sf*} = \{Q\}$, $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+} = \{Q\}$ bzw.

$$|\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}| = 1,$$

sodass genau ein Diskontvektor $Q$ in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ existiert. Umgekehrt folgt bei vorliegender Arbitragefreiheit (AFsf) aus der Bedingung $|\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}| = 1$, also aus der Existenz von genau einem Diskontvektor in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$, auch die sf-Vollständigkeit: In der vorangegangenen Betrachtung zum Fall 1), dass (VSsfT) nicht gültig ist, wurde nämlich mit $p \geq 1$ die Existenz von $p + 1 \geq 2$ Diskontvektoren in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ nachgewiesen.

Abschließend ist noch anzumerken, dass nach Satz 5.4 c speziell im dividendenlosen relativen Marktmodell die Diskontvektoren $Q$ in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ genau die äquivalenten Martingalmaße sind.

**Beweis von b):** Mit der Behandlung der sf-Vollständigkeit in Beweisteil c, 2) ist auch schon die Aussage b) des Satzes bewiesen.

**Beweis von a):** Da nach Satz 5.4 c im dividendenlosen relativen Marktmodell die Diskontvektoren $Q$ in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ genau den äquivalenten Martingalmaßen entsprechen, folgt die Aussage a) aus der Aussage b).

**Zweiter Beweis**[35] **für b)** „⇒“: Nachfolgend wird noch ein zweiter Beweis für die Beweisrichtung

[35] Dieser zweite Beweis erfolgt in Anlehnung an die Beweisführung bei Bäuerle u. Rieder (2017), S. 47–49, Theorem 5.1, für äquivalente Martingalmaße im dividendenlosen relativen Marktmodell, wo der Erwartungswert anstelle des Skalarprodukts und die Voraussetzung eines deterministischen $B_T$ verwendet wird. Diese Voraussetzung für $B_T$ ist aber nur dann beweistechnisch nö-

„⇒“ der Aussage b) angegeben, der sich an die Literatur anlehnt, aber nicht die meist übliche Voraussetzung eines deterministischen $B_T$ benötigt. Unter der Voraussetzung der sf-Vollständigkeit (VSsfT) des Marktmodells ist zu zeigen, dass es nicht zwei verschiedene Diskontvektoren in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ gibt. Da die Arbitragefreiheit (AFsf) vorausgesetzt ist, gibt es nach Satz 5.5 a zumindest einen Diskontvektor in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$. Man nimmt nun an, dass $Q_1, Q_2 \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$ zwei Diskontvektoren sind, und hat $Q_1 = Q_2$ zu zeigen. Nach der für eine beliebige selbstfinanzierende Handelsstrategie $h$ im relativen Marktmodell gültigen Beziehung (SF$\tilde{\text{V}}$) gilt

$$\tilde{V}_T(h) = \tilde{V}_0(h) + \bar{K}_T(\bar{h}) .$$

Da die Zustandsfunktion $\tilde{V}_0(h) = \tilde{v}_0(h)\mathbf{1}_\Omega$ deterministisch ist ($\tilde{v}_0(h) = v_0(h)/B_0 = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 / B_0 \in \mathbb{R}$ unabhängig von $\omega \in \Omega$) und wegen $Q_i \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} = \bar{K}_T(\mathcal{H}_{N-1})^{\perp}$ ($\tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{K}}_T = \bar{\mathcal{K}}_T$ nach Abschnitt 5.1.7) noch

$$Q_i^{\mathsf{T}} \bar{K}_T(\bar{h}) = 0$$

für $i = 1, 2$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} Q_i^{\mathsf{T}} \tilde{V}_T(h) &= Q_i^{\mathsf{T}}(\tilde{V}_0(h) + \bar{K}_T(\bar{h})) \\ &= Q_i^{\mathsf{T}} \tilde{V}_0(h) + Q_i^{\mathsf{T}} \bar{K}_T(\bar{h}) && \text{(Linearität des Skalarprodukts)} \\ &= \tilde{v}_0(h)\, \kappa(Q_i) + 0 && \text{(Deterministisches Herausziehen)} \\ &= \tilde{v}_0(h) && (Q_i^{\mathsf{T}} \mathbf{1}_\Omega = \kappa(Q_i) = 1; \text{ Wert } \tilde{v}_0(h) \text{ ist unabhängig von } Q_i), \end{aligned}$$

also $\Delta^{\mathsf{T}} \tilde{V}_T(h) = 0$ für den Differenzvektor $\Delta := Q_1 - Q_2$ und beliebig vorgegebenes $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$. Demzufolge ist

$$\Delta \in \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf})^{\perp} = \ker \tilde{V}_T^{sf*} .$$

Eine kürzere Begründung für diese Inzidenz schließt direkt aus $Q_1, Q_2 \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+} \subseteq \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ unter Verwendung von Hilfssatz 5.11, II, 7 a in Abschnitt 5.3.6 die Inzidenz

$$\Delta = Q_1 - Q_2 \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = 0\} = \ker \tilde{V}_T^{sf*} .$$

Dies entspricht der Betrachtung in Beweisteil c), nach welcher der lineare Unterraum $\ker \tilde{V}_T^{sf*}$ die Richtung des nichtleeren affinen Unterraums $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$ ist.

Bei vorliegender sf-Vollständigkeit (VSsfT) ist nun $\tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = \mathbb{R}^\Omega$ und $\ker \tilde{V}_T^{sf*} = O$, also $\Delta = 0$ und $Q_1 = Q_2$. □

## 5.2.5 Charakterisierung der sf-Vollständigkeit des sf-arbitragefreien ursprünglichen Marktmodells mit Dividenden durch die Existenz von genau einem positiven Normalenvektor

Wie beim ersten Hauptsatz kann auch eine Modifikation des obigen zweiten Hauptsatzes für endfällige Zahlungsprofile angegeben werden, bei der im Marktmodell kein Numéraire benötigt wird und Dividenden zugelassen sind. Hierbei wird der positive Normalenvektor $Q$ im orthogonalen Komplement $\mathcal{M}_T^{\perp}$ der Menge $\mathcal{M}_T$ der NE-Zahlungsprofile des ursprünglichen Marktmodells gewählt und nicht in der entsprechenden Menge $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ des relativen Marktmodells. In Teil a) des nachfolgenden Satzes erfolgt die Charakterisierung der Voll-

---

tig, wenn die Vollständigkeit durch $V_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = \mathbb{R}^\Omega$ und nicht durch $\tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = \mathbb{R}^\Omega$ beschrieben wird.

ständigkeit sowohl linearalgebraisch durch die Existenz von genau einem positiven $\kappa$-normierten Normalenvektor zum Unterraum $\mathcal{M}_T$ der NE-Zahlungsprofile als auch w-theoretisch durch die Existenz von genau einem äquivalenten W-Maß in $\mathcal{M}_T^{\perp}$. In Teil b) des Satzes wird noch die Maximalanzahl affin unabhängiger $\kappa$-normierter positiver Normalenvektoren bzw. äquivalenter W-Maße in $\mathcal{M}_T^{\perp 1+}$ angegeben. Im Beweis werden die zusätzlichen Voraussetzungen von Abschnitt 5.3.5 verwendet, um zu zeigen, dass höchstens $p+1$ affin unabhängige $\mathcal{M}_T$-Normalenvektoren auftreten und dass aus den $\mathcal{M}_T$-Normalenvektoren auch Diskontvektoren gewonnen werden können.

**Satz 5.9 Zweiter Hauptsatz der Preistheorie mit der Charakterisierung der sf-Vollständigkeit (VSsfT) durch die Existenz von genau einem Diskontvektor im sf-arbitragefreien dividendenversehenen ursprünglichen Marktmodell**

Es sei $((S,\delta),\mathcal{F})$ ein sf-arbitragefreies Marktmodell, bei dem auch **Dividenden zugelassen** sind. Weiter sei die Voraussetzung (ZVU) von Abschnitt 5.3.5 oder spezieller die Existenz eines Numéraires mit deterministischem $B_T$ gesichert. Es gelten dann die folgenden Aussagen:

a) Das Marktmodell ist genau dann sf-vollständig, wenn es genau einen $\kappa$-normierten positiven Normalenvektor $Q$ zum Unterraum $\mathcal{M}_T$ der NE-Zahlungsprofile im ursprünglichen Marktmodell bzw. genau ein äquivalentes W-Maß $Q$ in $\mathcal{M}_T^{\perp}$ bzw. genau einen **Diskontvektor** $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0 +}$ gibt.

b) Ist $p := K$ - dim $V_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = \dim V_T(\mathcal{H}_N^{sf})^{\perp} = \dim \ker V_T^{sf*}$ $(\in \{0,\ldots,K\},\ K = |\Omega|)$, so ist $p+1$ die Maximalzahl affin unabhängiger, auf $\kappa(X_T) = 1$ $\kappa$-normierter, positiver Normalenvektoren bzw. äquivalenter W-Maße in
$$\mathcal{M}_T^{\perp 1+} = \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{0 < X_T \le 1,\ \kappa(X_T) = 1\}$$
bzw. **Diskontvektoren** in
$$\mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0 +} = \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{0 < X_T \le 1,\ \kappa(X_T) = \kappa_0\}.$$

**Beweis von b):** Es wird jetzt bei vorausgesetzter sf-Arbitragefreiheit (AFsf) die maximale Anzahl affin unabhängiger $\kappa$-normierter positiver Normalenvektoren bzw. äquivalenter W-Maße in $\mathcal{M}_T^{\perp}$ in Abhängigkeit von der Dimension $p$ des orthogonalen Komplements $V_T(\mathcal{H}_N^{sf})^{\perp}$ des $V_T$-Bildraums $V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ bestimmt. Es sei also

$$p := \dim \ker V_T^{sf*} = \dim V_T(\mathcal{H}_N^{sf})^{\perp} = K \text{ - dim } V_T(\mathcal{H}_N^{sf}).$$

Aufgrund der Inklusion für die Unterräume $\mathcal{M}_T$ und $V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ von $\mathbb{R}^{\Omega}$,

$$\mathcal{M}_T = V_T(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0) \subseteq V_T(\mathcal{H}_N^{sf}),$$

erhält man für die orthogonalen Komplemente[36] die umgekehrte Inklusion

---

[36] Im Vektorraum $\mathbb{R}^{\Omega}$ stimmt das orthogonale Komplement $V_T(\mathcal{H}_N^{sf})^{\perp}$ des Bildraums von $V_T = V_T^{sf} : \mathcal{H}_N^{sf} \longrightarrow \mathbb{R}^{\Omega}$ überein mit dem Kern $\ker V_T^{sf*}$ der zu $V_T$ adjungierten Abbildung $V_T^{sf*} = (V_T^{sf})^* : \mathbb{R}^{\Omega} \longrightarrow \mathcal{H}_N^{sf}$. Die adjungierte Abbildung $V_T^{sf*} = (V_T^{sf})^*$ von $L_T = V_T = V_T^{sf}$ ist nicht zu verwechseln mit der $T$-ten Komponente $(L^*)_T$ der Adjungierten $L^*$ von $L$. Man hat hier dieselbe

$$\ker V_T^{sf*} = V_T(\mathcal{H}_N^{sf})^\perp \subseteq \mathcal{M}_T{}^\perp .$$

Da die Arbitragefreiheit (AFsf) vorausgesetzt ist, gibt es nach dem Beweisteil „⇒“ von Satz 5.6 a (für das ursprüngliche Marktmodell) zumindest einen $\kappa$-normierten positiven Normalenvektor $Q$ bzw. ein äquivalentes W-Maß $Q$ in $\mathcal{M}_T{}^\perp$:

$$Q \in \mathcal{M}_T{}^\perp \cap \{0 < X_T \le 1, \kappa(X_T) = 1\} =: \mathcal{M}_T{}^{\perp 1+} .$$

Es werden nun zwei Fälle unterschieden, nämlich dass die sf-Vollständigkeit nicht vorliegt bzw. dass sie vorliegt.

1) Falls nun das Marktmodell nicht sf-vollständig ist, gilt

$$V_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = L_T(\mathcal{H}_N^{sf}) \subsetneq \mathbb{R}^\Omega,$$

$$\ker V_T^{sf*} = V_T(\mathcal{H}_N^{sf})^\perp \neq O$$

und $p \ge 1$. Daher gibt es (aufgrund der Definition der Dimension eines linearen Unterraums) maximal $p$ linear unabhängige Vektoren im linearen Unterraum $\ker V_T^{sf*}$:

$$Z_T^i \in \ker V_T^{sf*} \qquad (i = 1,\ldots,p).$$

Setzt man noch $Z_T^0 := 0 \ (\in \mathbb{R}^\Omega)$, so erhält man (aufgrund der Definition der affinen Unabhängigkeit) die $p + 1$ affin unabhängigen Vektoren im linearen bzw. affinen Unterraum $\mathcal{M}_T{}^\perp$:

$$\Phi_T^i := Q + \lambda_i Z_T^i \in \mathcal{M}_T{}^\perp \qquad (Q \in \mathcal{M}_T{}^{\perp 1+}, \lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, i = 0,\ldots,p).$$

Durch die passende Wahl der $\lambda_i$,

$$0 < \lambda_i < \min \{q_k | z_k^i | : k \text{ mit } z_k^i < 0\} \qquad (q_k := Q(\omega_k),\ z_k^i := Z_T^i(\omega_k)),$$

kann noch die Positivität der $p + 1$ Zustandsfunktionen $\Phi_T^i$ gesichert werden (vergleiche Beweis von Satz 5.8, c). Nach anschließender „Normierung“ mit der Komponentensumme erhält man schließlich die $p + 1$ affin unabhängigen Zustandsfunktionen

$$Q^i := \Phi_T^i / \kappa(\Phi_T^i) \in \mathcal{M}_T{}^\perp \cap \{0 < X_T \le 1, \kappa(X_T) = 1\} =: \mathcal{M}_T{}^{\perp 1+} \qquad (i = 0,\ldots,p),$$

die $\kappa$-normierte positive Normalenvektor bzw. (zu $P$) äquivalente W-Maße in $\mathcal{M}_T{}^\perp$ liefern.

Die $\kappa$-Normierung der $\Phi_T^i$ muss nicht durchgeführt werden, wenn man hier schon verwendet, dass die Vektoren $Y_T^i := \lambda_i Z_T^i \in \ker V_T^{sf*}$ nach Hilfssatz 5.11, I, 7 c in Abschnitt 5.3.6 unter der dort angegebenen zusätzlichen Voraussetzung die Komponentensumme $\kappa(Y_T^i) = 0$ aufweisen und somit für die $\Phi_T^i$ die Komponentensumme schon den Wert 1 besitzt:

$$\kappa(\Phi_T^i) = \kappa(Q) + \kappa(Y_T^i) = 1 + 0 = 1.$$

Aus der Arbitragefreiheit (AFsf) bzw. aus der Existenz eines $\kappa$-normierten positiven Normalenvektors $Q$ in $\mathcal{M}_T{}^\perp$ folgt also auch die Existenz von mindestens $p + 1$ affin unabhängigen $\kappa$-normierten positiven Normalenvektoren in $\mathcal{M}_T{}^{\perp 1}$, wobei $p := \dim \ker V_T^{sf*}$ ist.

Aus diesen positiven $\mathcal{M}_T$-Normalenvektoren $Q^i \in \mathcal{M}_T{}^{\perp 1+}$ erhält man außerdem unter der zusätzlichen Voraussetzung von (ZVU) oder spezieller eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ nach Abschnitt 5.3.10 auch $p + 1$ affin unabhängige Diskontvektoren $Y^i = \kappa_0 Q^i \in \mathcal{M}_T{}^{\perp \kappa_0 +}$.

Es wird nun noch begründet, dass $p + 1$ auch die *maximale* Anzahl von affin unabhängigen $\kappa$-normierten positiven Normalenvektoren in $\mathcal{M}_T{}^\perp$ ist. Dazu wird gezeigt, dass $p + 1$ die maximale Anzahl von affin unabhängigen Vektoren im affinen Unterraum

---

geometrische Situation wie in Abschnitt 2.10.1 bei der orthogonalen additiven Zerlegung des Vektorraums $\mathcal{W}$ in Bildraum Im $L$ und Kern ker $L^*$.

$$\mathcal{M}_T^{\perp 1} = \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = 1\}$$

ist: Die Menge $\mathcal{M}_T^{\perp 1}$ ist als Durchschnitt des linearen Unterraums $\mathcal{M}_T^{\perp}$ und des affinen Unterraums $\{\kappa(X_T) = 1\}$, der als Lösungsraum der inhomogenen linearen Gleichung $\kappa(X_T) = 1$ definiert ist, ein affiner Unterraum des $\mathbb{R}^{\Omega}$. Wegen der Arbitragefreiheit (AFsf) enthält $\mathcal{M}_T^{\perp 1}$ den $\kappa$-normierten positiven Normalenvektor $Q$ und ist somit nicht leer. Zu $\mathcal{M}_T^{\perp 1}$ gehört als Richtung der lineare Unterraum $\ker V_T^{sf*}$: Zunächst gilt nämlich die Inklusion

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_T^{\perp 1} - \mathcal{M}_T^{\perp 1} &= \{X_T = Y_T - Z_T : Y_T, Z_T \in \mathcal{M}_T^{\perp 1}\} \\ &\subseteq \{X_T \in \mathcal{M}_T^{\perp} : \kappa(X_T) = 0\}.\end{aligned}$$

Die umgekehrte Inklusion „$\supseteq$“ ergibt sich folgendermaßen: Aus $X_T \in \mathcal{M}_T^{\perp}$ und $\kappa(X_T) = 0$ folgt mit dem bei sf-Arbitragefreiheit existierenden $Q \in \mathcal{M}_T^{\perp 1+} \subseteq \mathcal{M}_T^{\perp 1}$ und mit $Z_T := Q - X_T \in \mathcal{M}_T^{\perp}$, $\kappa(Z_T) = \kappa(Q) - \kappa(X_T) = 1 - 0 = 1$, $Z_T \in \mathcal{M}_T^{\perp 1}$ auch $X_T = Q - Z_T \in \mathcal{M}_T^{\perp 1} - \mathcal{M}_T^{\perp 1}$. Somit ist

$$\mathcal{M}_T^{\perp 1} - \mathcal{M}_T^{\perp 1} = \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = 0\} =: \mathcal{M}_T^{\perp 0}.$$

Die Übereinstimmung der linearen Unterräume $\mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = 0\}$ und $\ker V_T^{sf*}$ folgt schließlich nach Hilfssatz 5.11, I, 7 c in Abschnitt 5.3.6 unter der dort für Teil I des Hilfssatzes verwendeten Voraussetzung von (ZVU) oder eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$.

Der affine Unterraum $\mathcal{M}_T^{\perp 1}$ lässt sich dann mit seiner Richtung $\ker V_T^{sf*}$ und dem speziellen Vektor $Q \in \mathcal{M}_T^{\perp 1}$ darstellen als deren Minkowski-Summe

$$\mathcal{M}_T^{\perp 1} = Q + \ker V_T^{sf*}.$$

Da $p$ die Dimension der Richtung des affinen Unterraums $\mathcal{M}_T^{\perp 1}$ ist, gibt es aufgrund der Definition der affinen Unabhängigkeit und der Definition der Dimension eines linearen Unterraums maximal $p + 1$ affin unabhängige Vektoren im affinen Unterraum $\mathcal{M}_T^{\perp 1}$.

Da nun in der Teilmenge $\mathcal{M}_T^{\perp 1+}$ des affinen Unterraums $\mathcal{M}_T^{\perp 1}$ oben bereits $p + 1$ affin unabhängige Vektoren $Q^i$ nachgewiesen wurden, ist $p + 1$ dann auch die Maximalzahl affin unabhängiger Vektoren in der Teilmenge $\mathcal{M}_T^{\perp 1+}$. Analog folgt, dass $p + 1$ auch die Maximalzahl affin unabhängiger Vektoren in der Teilmenge $\mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0 +}$ ist.

2) Der Spezialfall der sf-Vollständigkeit (VSsfT) fügt sich ein mit der Dimension $p = 0$. Es ist dann $\ker V_T^{sf*} = O$, $\mathcal{M}_T^{\perp 1} = Q + \ker V_T^{sf*} = \{Q\}$, $\mathcal{M}_T^{\perp 1+} = \{Q\}$ bzw.

$$|\mathcal{M}_T^{\perp 1+}| = 1,$$

sodass genau ein $\kappa$-normierter positiver $\mathcal{M}_T$-Normalenvektor bzw. äquivalentes W-Maß $Q$ in $\mathcal{M}_T^{\perp}$ bzw. genau ein Diskontvektor $Y$ existiert. Umgekehrt ergibt sich bei vorliegender Arbitragefreiheit (AFsf) aus $|\mathcal{M}_T^{\perp 1+}| = 1$, also aus der Existenz von genau einem $\kappa$-normierten positiven Normalenvektor in $\mathcal{M}_T^{\perp}$, auch die sf-Vollständigkeit: In der vorausgegangenen Betrachtung zum Fall, dass (VSsfT) nicht gültig ist, wurde nämlich mit $p \geq 1$ die Existenz von $p + 1 \geq 2$ $\kappa$-normierten positiven Normalenvektoren in $\mathcal{M}_T^{\perp}$ nachgewiesen.

**Beweis von a):** Mit der Behandlung der sf-Vollständigkeit in Beweisteil b, 2) ist auch schon die Aussage a) des Satzes bewiesen. □

## 5.3 Law of One Price (LOPsfT) und Bewertungsvektoren

### 5.3.1 Preis eines Zahlungsprofils

Im Einklang mit dem allgemeinen Law of One Price (LOP) auf $L(\mathcal{H}_N)$ für die speziellen endfälligen Zahlungsprofile $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ ($\subseteq L(\mathcal{H}_N) \subseteq \mathcal{W}$), die mit selbstfinanzierenden Handelsstrategien $L$-duplizierbar sind, wird jetzt das speziellere Gesetz des eindeutig bestimmten Preises (englisch: **Law of One Price**, Abk.: LOPsfT) für die zum Endzeitpunkt $T$ gehörigen endfälligen Zahlungsprofile $X_T = L_T(h) \in L_T(\mathcal{H}_N^{sf}) \subseteq \mathbb{R}^{\Omega}$ formuliert, die mit selbstfinanzierenden Handelsstrategien $L_T$-duplizierbar sind. Das allgemeine LOP für die endfälligen Zahlungsprofile wird jetzt mit LOPsf bezeichnet und das LOP für die im Endzeitpunkt $T$ auftretenden Zahlungsprofile $X_T$ mit LOPsfT. Die Äquivalenz der beiden Gesetze LOP und LOPsfT wird im nächsten Abschnitt begründet.
Da für die selbstfinanzierenden Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ insbesondere die Übereinstimmung $V_0(h) = R_0(h)$ gilt, ist das mit dem Portfoliovektor $h_0$ formulierte Gesetz (LOPsfT) auch äquivalent zur nachfolgenden Bedingung (LOP1sfT) für den Portfoliovektor $h_1$:

(LOPsf) Für jedes endfällige sf-duplizierbare $X = (0,\ldots,0,X_T)^{\mathsf{T}} \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ ($\subseteq \mathcal{W}(T)$) gilt:

$$v_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 \text{ ist konstant } \forall\, h \in L^{-1}(\{X\}).$$

Der Wert $\pi(X) := v_0(h)$ ($\in \mathbb{R}$) des Startkapitaleinsatzes $V_0(h) = v_0(h)\mathbf{1}_{\Omega}$ der sf-Duplikationsstrategien $h \in L^{-1}(\{X\})$ von $X$ wird als **Preis** des Zahlungsprofils $X \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ bezeichnet.

(LOPsfT) Für jedes zum Endzeitpunkt $T$ gehörige sf-duplizierbare Zahlungsprofil $X_T \in L_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ ($\subseteq \mathbb{R}^{\Omega}$) gilt:

$$v_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 \text{ ist konstant } \forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap L_T^{-1}(\{X_T\}).$$

Der Wert $\pi(X_T) := v_0(h)$ des Startkapitaleinsatzes $V_0(h) = v_0(h)\mathbf{1}_{\Omega}$ der sf-Duplikationsstrategien $h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap L_T^{-1}(\{X_T\})$ von $X_T$ wird als **Preis** des Zahlungsprofils $X_T \in L_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ bezeichnet.

(LOP1sfT) Für jedes $X_T \in L_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ gilt:

$$r_0(h) = S_0^{\mathsf{T}} h_1 \text{ ist konstant } \forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap L_T^{-1}(\{X_T\}).$$

Der Preis $\pi(X_T) = v_0(h)$ von $X_T$ berechnet sich auch durch den Wert $\pi(X_T) = r_0(h)$ des Reinvestitionswerts $R_0(h) = r_0(h)\mathbf{1}_{\Omega}$ der sf-Duplikationsstrategien $h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap L_T^{-1}(\{X_T\})$ von $X_T$.

Dieses Gesetz (LOPsf), (LOPsfT) bzw. (LOP1sfT) ist notwendig und hinreichend für diese Preisdefinition in $L_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ gemäß dem **Duplikationsprinzip** („Pricing by Duplication“) mittels des Startkapitaleinsatzes $V_0(h)$ der sf-Duplikationsstrategien zum Zeitpunkt $t = 0$.

### 5.3.2 Äquivalenz von LOPsfT und LOP

Nach Abschnitt 5.1.1 gilt $X_T \in L_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ genau dann, wenn $X = (0,\ldots,0,X_T)^\mathsf{T} \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ bzw. $\in L(\mathcal{H}_N)$ erfüllt ist. Falls nun für ein festes $X_T \in L_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ die in (LOPsfT) angegebene Bedingung

$$[V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 \text{ konstant } \forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap L_T^{-1}(\{X_T\})]$$

erfüllt ist, ist auch für das zugehörige $X = (0,\ldots,0,X_T)^\mathsf{T} \in L(\mathcal{H}_N^{sf}) \subseteq L(\mathcal{H}_N)$ wegen der Übereinstimmung der Mengen der sf-Duplikationsstrategien,

$$\begin{aligned} L^{-1}(\{X\}) &= \bigcap_{t=0}^{T} L_t^{-1}(\{X_t\}) = \bigcap_{t=0}^{T-1} \ker L_t \cap L_T^{-1}(\{X_T\}) \\ &= \mathcal{H}_N^{sf} \cap L_T^{-1}(\{X_T\}), \end{aligned}$$

die in (LOP) angegebene Bedingung

$$[V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 \text{ konstant } \forall\, h \in L^{-1}(\{X\})]$$

richtig. Da dann für ein festes Zahlungsprofil $X \in L(\mathcal{H}_N^{sf}) \subseteq L(\mathcal{H}_N)$ das LOP gilt, ist dieses Gesetz nach Satz 3.3, 3 von Abschnitt 3.4.1 auch allgemein in $L(\mathcal{H}_N)$ gültig. Umgekehrt folgt aus dem LOP in $L(\mathcal{H}_N)$ und insbesondere in $L(\mathcal{H}_N^{sf})$ auch das (LOPsfT) in $L_T(\mathcal{H}_N^{sf})$. Somit gilt:

Das LOPsfT in $L_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ ist äquivalent zum LOP in $L(\mathcal{H}_N)$.

Bei gültigem LOPsfT stimmen mit obiger Preisdefinition für die einander bijektiv zugeordneten Zahlungsprofile $X_T = L_T(h) \in L_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ und $X = (0,\ldots,0,X_T)^\mathsf{T} = L(h) \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ die Preise $\pi(X_T)$ und $\pi(X)$ überein. Der Preis $\pi(X_T)$ des im Zeitpunkt $T$ auftretenden sf-duplizierbaren Zahlungsprofils $X_T \in L_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ ist also gleich dem Preis $\pi(X)$ des zugehörigen endfälligen Zahlungsprofils $X = (0,\ldots,0,X_T)^\mathsf{T}$:

Bei gültigem LOP bzw. LOPsfT stimmen für $X = (0,\ldots,0,X_T)^\mathsf{T} \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ und das zugehörige $X_T \in L_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ die Preise überein:

$$\pi(X_T) = v_0(h) = r_0(h) = \pi(X) \;\; \forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap L_T^{-1}(\{X_T\}) = L^{-1}(\{X\}).$$

**Der Unterraum $\mathcal{M}_T$ der NE-Zahlungsprofile**

Insbesondere ist dann auch der Preis $\pi(X_T)$ eines NE-Zahlungsprofils (Definition in Abschnitt 5.1.1)

$$X_T \in \mathcal{M}_T = V_T(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0)$$

gleich dem Preis $\pi(X) = 0$ des zugehörigen endfälligen Kapitalmarktgeschäfts

$$X = (0,\ldots,0,X_T)^\mathsf{T} \in \mathcal{M}(T) = L(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0) = \mathcal{M} \cap \mathcal{W}(T).$$

Analog zu Abschnitt 3.7.1 erhält man daher hier die Aussage, dass bei gültigem LOPsfT die NE-Zahlungsprofile $X_T \in \mathcal{M}_T = V_T(\ker^{sf} V_0)$ genau die sf-duplizierbaren Zahlungsprofile $X_T \in \mathcal{V}_T := V_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = L_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ mit Preis $\pi(X_T) = 0$ sind:

Bei gültigem LOPsfT liegt in $\mathcal{V}_T$ der Preis Null genau für die NE-Zahlungsprofile $X_T \in \mathcal{M}_T$ vor:

$$X_T \in \mathcal{V}_T \text{ mit } \pi(X_T) = 0 \Leftrightarrow X_T \in \mathcal{M}_T.$$

Im nächsten Abschnitt 5.3.3 wird gezeigt, dass die Preisfunktion $\pi : \mathcal{V}_T \longrightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung und damit der Unterraum $\mathcal{M}_T$ eine Hyperebene von $\mathcal{V}_T$ ist.

### 5.3.3 Charakterisierung des LOPsfT durch die Existenz eines Bewertungsvektors

Zur Charakterisierung des LOPsfT können auch die Charakterisierungen des LOP der Abschnitte 3.3.3 und 3.4 in den Räumen $\mathcal{W}$ und $\mathcal{H}_N$ herangezogen werden und evtl. noch für die spezielleren endfälligen Zahlungen umformuliert werden. Beispielsweise wird im Abschnitt 3.3.3 aus der Gültigkeit des LOP die Linearität der Preisfunktion $\pi(X)$ auf $L(\mathcal{H}_N)$ und dann daraus mit Hilfe des Rieszschen Darstellungssatzes ohne zusätzliche Voraussetzung die Existenz eines duplizierbaren Bewertungsprozesses $\vartheta \in L(\mathcal{H}_N)$ mit den zugehörigen Preisgleichungen geschlossen. Außerdem werden in Abschnitt 3.3.3 auch noch andere Beweiswege zur Charakterisierung des LOP durch die Existenz eines Bewertungsprozesses $\Psi \in \mathcal{A}$ mit Preisgleichungen in $L(\mathcal{H}_N)$ angegeben:

(PG$\Psi$) $\qquad \Psi^{\top} L(h) = v_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0 \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_N.$

Speziell für die selbstfinanzierenden Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N^{sf} \subseteq \mathcal{H}_N$ bzw. für die zugehörigen sf-duplizierbaren endfälligen Zahlungsprofile $X_T = V_T(h) \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf}) =: \mathcal{V}_T$ erhält man aus (PG$\Psi$) die **Preisgleichungen**

(PG$\Psi_T$) $\qquad \Psi_T^{\top} V_T(h) = v_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0 \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ bzw.
$\qquad\qquad\quad \Psi_T^{\top} V_T(h) = r_0(h) = S_0^{\top} h_1 \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf}$

mit der $T$-ten Komponente $\Psi_T \in \mathbb{R}^{\Omega}$ von $\Psi$ als **Bewertungsvektor**. Umgekehrt folgt aus der Gültigkeit der Preisgleichungen (PG$\Psi_T$) mit einem $\Psi_T \in \mathbb{R}^{\Omega}$ dann für jedes sf-duplizierbare Zahlungsprofil $X_T = V_T(k) \in \mathcal{V}_T$ ($k \in \mathcal{H}_N^{sf}$) die Konstanz der Startkapitaleinsätze $v_0(h)$ aller sf-Duplikationsstrategien $h$ von $X_T$, also das LOPsfT in $V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ bzw. nach obiger Überlegung auch das LOP in $L(\mathcal{H}_N)$. Die Preisgleichungen (PG$\Psi_T$) mit einem $\Psi_T \in \mathbb{R}^{\Omega}$ sind also charakteristisch für das LOPsfT. Diese Charakterisierung des LOPsfT durch die Preisgleichungen gilt auch ohne die zusätzliche Voraussetzung (AWS$^{\delta}$), wenn man beispielsweise für $\Psi_T$ die $T$-te Komponente $\vartheta_T$ des Bewertungsprozesses $\vartheta$ aus Abschnitt 3.3.3 nimmt.

Im ursprünglichen Marktmodell definiert man die **Menge $\mathcal{A}_T$ der Bewertungsvektoren** $Y_T \in \mathbb{R}^{\Omega}$ für die sf-duplizierbaren Zahlungsprofile $X_T = V_T(h) \in \mathcal{V}_T$ mittels der Preisgleichungen (PG$Y_T$) folgendermaßen:

$$\mathcal{A}_T := \{ Y_T \in \mathbb{R}^{\Omega} : (\mathrm{PG}Y_T)\ Y_T^{\top} V_T(h) = v_0(h)\ \forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf} \}.$$

Damit erhält man die folgende Charakterisierung des LOPsfT:

$$\begin{aligned} \text{LOPsfT} \quad &\Leftrightarrow \exists\, \Psi_T \in \mathbb{R}^{\Omega} \text{ mit den Preisgleichungen } (\mathrm{PG}\Psi_T) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A}_T \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Verschiedene Darstellungen für die Menge $\mathcal{A}_T$ der Bewertungsvektoren werden in Abschnitt 5.3.8 bewiesen. Das Schema in der nachfolgenden Abbildung 5.8 gibt für das Mehrperiodenmodell einen Überblick über den Zusammenhang der verschiedenen Aussagen

zum Law of One Price in den Versionen LOP und LOPsfT und zur Existenz eines Bewertungsprozesses $\Psi$ bzw. Bewertungsvektors $\Psi_T$. Die Definition der Menge $\mathcal{A}$ der Bewertungsprozesse wird in Abschnitt 3.3.3, die Definition der Menge $\mathcal{A}_T$ der Bewertungsvektoren wird oben angegeben. Die Gleichungsdarstellung $\mathcal{A} = \mathcal{M}^{\perp\perp}$ unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) wird in Abschnitt 3.3.3 begründet und die Gleichungsdarstellung $\mathcal{A}_T = \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ unter der Voraussetzung (ZVU) in Abschnitt 5.3.8. Die Existenz eines Bewertungsvektors $\Psi_T$ wird hier in Abschnitt 5.3.3 aus der Existenz eines Bewertungsprozesses $\Psi$ gefolgert und auch mittels des Rieszschen Darstellungssatzes aus der Linearität der Preisfunktion. Obwohl aus der Existenz eines Bewertungsvektors nicht direkt auf die Existenz eines Bewertungsprozesses geschlossen werden kann, sind diese beiden Aussagen dennoch äquivalent wegen der Äquivalenz der beiden Versionen des Law of One Price. Im Mehrperiodenmodell der endfälligen Zahlungen ist also das Law of One Price in den beiden Versionen LOP und LOPsfT jeweils äquivalent zur Existenz eines Bewertungsprozesses und zur Existenz eines Bewertungsvektors.

**Mehrperiodenmodell:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| LOP | $\Leftrightarrow$ | $\mathcal{A} \neq \emptyset$, | d. h. $\exists$ Bewertungsprozess $\Psi \in \mathcal{A}\ (\subseteq \mathcal{M}^\perp)$ |
| $\Updownarrow$ | | | $\Downarrow$ |
| LOPsfT | $\Leftrightarrow$ | $\mathcal{A}_T \neq \emptyset$, | d. h. $\exists$ Bewertungsvektor $\Psi_T \in \mathcal{A}_T\ (\subseteq \mathcal{M}_T^\perp)$ |
| | $\Leftrightarrow$ | $\mathcal{A}_T \neq \emptyset$, | d. h. $\exists$ $\kappa$-norm. $\mathcal{M}_T$-Normalenvektor |
| | (ZVU) | | = Bewertungsvektor $Y_T \in \mathcal{A}_T = \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0+}$ |

**Abb. 5.8** Äquivalenz der Versionen LOP und LOPsfT des Law of One Price und der Existenz eines Bewertungsprozesses $\Psi$ bzw. Bewertungsvektors $\Psi_T$

Ein entsprechendes Schema für das Mehrperiodenmodell zu den verschiedenen Versionen AF und AFsf der Arbitragefreiheit und zur Existenz eines Diskontierungsprozesses $\Phi$ bzw. Diskontvektors $\Phi_T$ wird in Abschnitt 5.3.10 angegeben. Für das Einperiodenmodell findet man das Schema in Abschnitt 6.2.4.

**Eigenschaften eines Bewertungsvektors**

Aus der Gültigkeit der Preisgleichungen speziell für die sf-Handelsstrategien $g \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0$ mit Startkapitaleinsatz $V_0(g) = 0$ bzw. für die NE-Zahlungsprofile $Z_T = V_T(g) \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0) = \mathcal{M}_T$ folgt für den Bewertungsvektor $\Psi_T$ die Inzidenz

$$\Psi_T \in \mathcal{M}_T^\perp$$

und für die Menge $\mathcal{A}_T$ der Bewertungsvektoren die Inklusion

$$\mathcal{A}_T \subseteq \mathcal{M}_T^\perp .$$

Weitere Eigenschaften eines Bewertungsvektors $\Psi_T$ wie z. B.

$$\Psi_T \notin \mathcal{V}_T^\perp = \ker V_T^{sf*},$$

$$\Psi_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$$

können aber nur hergeleitet werden, wenn auch weitere Voraussetzungen für das Marktmodell gefordert werden, wie dies nachfolgend in Abschnitt 5.3.5 mit der Voraussetzung von (ZVU) oder spezieller der Existenz eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ für die Herleitung weiterer LOP-Charakterisierungen innerhalb des Raumes $\mathbb{R}^\Omega$ erfolgt.
Im ursprünglichen Modell ist erst unter der zusätzlichen Voraussetzung (ZVU) von Abschnitt 5.3.5 oder der spezielleren Voraussetzung eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ nach Abschnitt 5.3.7 die Mengendifferenz $\mathcal{V}_T \setminus \mathcal{M}_T \neq \emptyset$, daher $\pi \neq 0$ auf der nichtleeren Menge $\mathcal{V}_T \setminus \mathcal{M}_T$ und demzufolge noch notwendig $\Psi_T \neq 0$. Gemäß der noch folgenden Betrachtung zum Preis von $\mathbf{1}_\Omega = (1,\ldots,1)^\top \in \mathbb{R}^\Omega$ in Abschnitt 5.3.5 erhält man weiter unter der Voraussetzung von (ZVU) oder eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ für den Bewertungsvektor $\Psi_T$ noch die Komponentensumme

$$\kappa(\Psi_T) = \Psi_T^\top \mathbf{1}_\Omega = \pi(\mathbf{1}_\Omega) = \kappa_0 \text{ bzw. } = \kappa_0 = B_0/B_T,$$

also die Inzidenz

$$\Psi_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$$

($\kappa_0 := v_0(k) > 0$ für eine sf-Duplikationsstrategie $k \in \mathcal{H}_N^{sf}$ von $\mathbf{1}_\Omega$ nach der Voraussetzung (DPsfT$\mathbf{1}_\Omega$+)).

**Weiterer Nachweis eines Bewertungsvektors im ursprünglichen Marktmodell**
Bei gültigem LOPsfT kann analog zum Beweis in Abschnitt 3.3.3 aus der Linearität der Abbildungen $V_T : \mathcal{H}_N^{sf} \longrightarrow \mathbb{R}^\Omega$ und $V_0 : \mathcal{H}_N^{sf} \longrightarrow \mathbb{R}^\Omega$ auch die Linearität der Preisfunktion

$$\pi : V_T(\mathcal{H}_N^{sf}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

hergeleitet werden. Eine andere Begründung kann erfolgen, indem man die Übereinstimmung der Preise $\pi(X_T) = \pi(X)$ von $X_T \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ und dem zugehörigen $X = (0,\ldots,0,X_T)^\top \in L(\mathcal{H}_N^{sf}) \subseteq L(\mathcal{H}_N)$ und die schon bewiesene Linearität der Preisfunktion $\pi : L(\mathcal{H}_N) \longrightarrow \mathbb{R}$ verwendet.
Allein aus der Linearität der jetzt betrachteten Preisfunktion $\pi : V_T(\mathcal{H}_N^{sf}) \longrightarrow \mathbb{R}$ folgt dann nach dem Rieszschen Darstellungssatz[37] die Darstellung der Preise $\pi(X_T)$ auf $\mathcal{V}_T = V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ durch das Skalarprodukt

$$\pi(X_T) = \vartheta_T^\top X_T$$

von $\vartheta_T$ und $X_T$ mit einem eindeutig bestimmten *sf-duplizierbaren* Zahlungsprofil

$$\vartheta_T \in \mathcal{V}_T.$$

Mit diesem $\vartheta_T \in \mathcal{V}_T$ gelten die Preisgleichungen

(PG$\vartheta_T$) $\quad \vartheta_T^\top V_T(h) = v_0(h) \;\forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ .

Bei gültigem LOPsfT existiert daher ein eindeutig bestimmter sf-duplizierbarer Bewertungsvektor $\vartheta_T \in \mathcal{M}_T^\perp \cap \mathcal{V}_T$, mit dem die Preise $\pi(X_T)$ der Zahlungsprofile $X_T \in \mathcal{V}_T$ als Ska-

---

[37] Der Rieszsche Darstellungssatz ist benannt nach dem ungarischen Mathematiker Frigyes Riesz (1880–1956). Er beschreibt die eindeutige Darstellung einer auf einem beliebigen endlichdimensionalen euklidischen reellen Vektorraum $V$ definierten Linearform $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ mittels des Skalarprodukts $\langle .,. \rangle : \varphi(v) = \langle \psi, v \rangle$ mit einem eindeutig bestimmten Vektor $\psi \in V$. Einen Beweis findet man in Abschnitt 3.3.3 und bei Kremer (2006), S. 421. Für die Darstellung des Preisfunktionals $\pi$ wird hier auf $V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ das auf $\mathbb{R}^\Omega$ bzw. $\mathbb{R}^K$ definierte Skalarprodukt genommen.

larprodukt berechnet werden können. Wie oben auch noch mit einem anderen Beweisweg begründet wurde ($\Psi_T$ als $T$-te Komponente eines Bewertungsprozesses $\Psi \in \mathcal{A}$), existiert bei gültigem LOPsfT stets ein Bewertungsvektor $\Psi_T \in \mathbb{R}^\Omega$ mit den zugehörigen Preisgleichungen (PG$\Psi_T$). Die Existenz eines Bewertungsvektors mit den Preisgleichungen ist sogar charakteristisch für das LOPsfT. Die nachfolgend in Abschnitt 5.3.5 noch verwendeten Voraussetzungen, mit denen weitere Eigenschaften für $\Psi_T$ hergeleitet werden, sind dazu nicht nötig.

**Unterraum $\mathcal{M}_T$ der NE-Zahlungsprofile als Hyperebene von $\mathcal{V}_T$**

Für den Unterraum $\mathcal{M}_T$ der NE-Zahlungsprofile erhält man nach Abschnitt 5.3.2 die Darstellung als Hyperebene von $\mathcal{V}_T$ mit dem Normalenvektor $\vartheta_T$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_T &= \mathcal{V}_T \cap \{\pi(X_T) = 0\} \\ &= \mathcal{V}_T \cap \{\vartheta_T^\top X_T = 0\} = \mathcal{V}_T \cap \{\vartheta_T\}^\perp.\end{aligned}$$

**LOPsfT und Bewertungsvektor im relativen Marktmodell**

Analog existiert bei gültigem LOPsfT auch im relativen Marktmodell ein eindeutig bestimmter sf-duplizierbarer relativer Bewertungsvektor

$$\tilde{\vartheta}_T \in \tilde{\mathcal{V}}_T \cap \tilde{\mathcal{M}}_T^\perp$$

für die Berechnung der relativen Preise $\tilde{\pi}(\tilde{X}_T)$ der relativen Zahlungsprofile $\tilde{X}_T \in \tilde{\mathcal{V}}_T$ als Skalarprodukt

$$\tilde{\pi}(\tilde{X}_T) = \tilde{\vartheta}_T^\top \tilde{X}_T .$$

Für den Unterraum $\tilde{\mathcal{M}}_T$ der relativen NE-Zahlungsprofile erhält man die Darstellung als Hyperebene von $\tilde{\mathcal{V}}_T$ mit dem Normalenvektor $\tilde{\vartheta}_T$ :

$$\tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{V}}_T \cap \{\tilde{\vartheta}_T^\top \tilde{X}_T = 0\} = \mathcal{V}_T \cap \{\tilde{\vartheta}_T\}^\perp.$$

Mit dem im Abschnitt 5.3.5 ohne die zusätzliche Voraussetzung (DPsfT$\mathbf{1}_\Omega$+) berechneten relativen Preis $\tilde{\pi}(\mathbf{1}_\Omega) = 1$ von $\mathbf{1}_\Omega \in \mathcal{E}_T = \tilde{\mathcal{V}}_0 \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_T$ erhält man aus der Preisgleichung für $\mathbf{1}_\Omega$ die Beziehung

$$1 = \tilde{\pi}(\mathbf{1}_\Omega) = \tilde{\vartheta}_T^\top \mathbf{1}_\Omega = \kappa(\tilde{\vartheta}_T),$$

also die $\kappa$-Normierung $\kappa(\tilde{\vartheta}_T) = 1$ des relativen Bewertungsvektors $\tilde{\vartheta}_T$ und die Inzidenz

$$\tilde{\vartheta}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp\perp} := \tilde{\mathcal{M}}_T^\perp \cap \{\kappa(X_T) = 1\}.$$

Die Vielfalt der Bewertungsvektoren im ursprünglichen und im relativen Marktmodell wird im nachfolgenden Abschnitt 5.3.8 behandelt.

## 5.3.4 Äquivalenz von LOPsfT im ursprünglichen Marktmodell und LOPsfT im relativen Marktmodell

Hinsichtlich des LOPsfT gilt ein weiterer Zusammenhang zwischen relativem Marktmodell und ursprünglichem Marktmodell:

Das LOPsfT im relativen Marktmodell mit den sf-duplizierbaren relativen Zahlungsprofilen in $\tilde{L}_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ ist äquivalent zum LOPsfT im ursprünglichen Marktmodell mit den sf-duplizierbaren Zahlungsprofilen in $L_T(\mathcal{H}_N^{sf})$.

**Beweis:** Die durch $f_T(X_T) := X_T/B_T$ und $f_0(X_T) := X_T/B_0$ ($B_0, B_T \in \mathbb{R}^\Omega$, $B_0, B_T > 0$) gegebenen linearen Abbildungen $f_T, f_0 : \mathbb{R}^\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^\Omega$ sind bijektiv. Weiter ist nach Abschnitt 5.1.7

$$\tilde{V}_0(h) = V_0(h)/B_0 = f_0(V_0(h)) \text{ und}$$

$$\tilde{V}_T(h) = V_T(h)/B_T = f_T(V_T(h))$$

für $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$. Für $h, h' \in \mathcal{H}_N^{sf}$ ist also $\tilde{V}_0(h) = \tilde{V}_0(h')$ genau dann, wenn $V_0(h) = V_0(h')$ gilt, und $\tilde{V}_T(h) = \tilde{V}_T(h')$ genau dann, wenn $V_T(h) = V_T(h')$ gilt. Demzufolge gilt bei fest vorgegebenem $h' \in \mathcal{H}_N^{sf}$ die Bedingung

$$[\tilde{V}_0(h) = \tilde{V}_0(h') \text{ für } h \in \mathcal{H}_N^{sf} \text{ mit } \tilde{V}_T(h) = \tilde{V}_T(h')]$$

genau dann, wenn die Bedingung

$$[V_0(h) = V_0(h') \text{ für } h \in \mathcal{H}_N^{sf} \text{ mit } V_T(h) = V_T(h')]$$

gilt. Dies heißt, dass das LOPsfT in $\tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ genau dann gültig ist, wenn es in $V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ gilt. □

Der „relative" Preis $\tilde{\pi}(\tilde{X}_T)$ eines sf-duplizierbaren relativen Zahlungsprofils $\tilde{X}_T = \tilde{V}_T(h) \in \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf}) \subseteq \mathbb{R}^\Omega$ nach der Preisfunktion $\tilde{\pi}$ im relativen Marktmodell ist analog zum ursprünglichem Marktmodell definiert durch den relativen Startkapitaleinsatz $\tilde{v}_0(h) = v_0(h)/B_0$ einer sf-Duplikationsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ von $\tilde{X}_T$,

$$V_T(h)/B_T = \tilde{V}_T(h) = \tilde{X}_T = X_T/B_T,$$

bzw. einer sf-Duplikationsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ des zugehörigen Zahlungsprofils $X_T = \tilde{X}_T \cdot B_T = V_T(h) \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ im ursprünglichem Modell:

$$\tilde{\pi}(\tilde{X}_T) = \tilde{v}_0(h) = v_0(h)/B_0 = \pi(X_T)/B_0$$

für $h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap \tilde{V}_T^{-1}(\{\tilde{X}_T\}) = \mathcal{H}_N^{sf} \cap V_T^{-1}(\{X_T\})$. Den relativen Preis $\tilde{\pi}(\tilde{X}_T)$ eines relativen Zahlungsprofils erhält man also aus dem Preis $\pi(X_T)$ des zugehörigen Zahlungsprofils im ursprünglichem Modell durch Division mit $B_0$. Im Spezialfall $B_0 = 1$ stimmen beide Preise überein.

### 5.3.5 Additive Zerlegung des $V_T$-Bildraums in Unterräume

Nach dem Vorbild der Charakterisierungen des LOP für allgemeine Zahlungsprofile $X \in \mathcal{W}$ in Abschnitt 3.4.1 sollen nun auch für die endfälligen Zahlungsprofile $X_T \in \mathbb{R}^\Omega$ entsprechende Kriterien in der hier verwendeten speziellen Schreibweise in den Räumen $\mathcal{H}_N^{sf}$ und $\mathbb{R}^\Omega$ hergeleitet werden. Dazu werden im ursprünglichen Marktmodell die bereits in den Abschnitten 5.1.1, 5.1.5 und 5.1.7 angegebenen linearen Unterräume

$$\mathcal{V}_T := V_T(\mathcal{H}_N^{sf}) \quad (\subseteq \mathbb{R}^\Omega),$$

$$\mathcal{M}_T := V_T(\ker^{sf} V_0) = K_T(\ker^{sf} V_0) \quad (\subseteq \mathcal{V}_T),$$

$$\mathcal{K}_T := K_T(\mathcal{H}_N^{sf}) \text{ und}$$

$$\mathcal{V}_0 := V_0(\mathcal{H}_N^{sf}) = \{V_0(h) = v_0(h)\mathbf{1}_\Omega : h \in \mathcal{H}_N^{sf}\} \quad (\subseteq \text{lin}\,\mathbf{1}_\Omega =: \mathcal{E}_T)$$

der sf-duplizierbaren Zahlungsprofile, NE-Zahlungsprofile, KG-Zahlungsprofile und der Startkapitaleinsätze der sf-Handelsstrategien verwendet. Der Unterraum $\mathcal{V}_0$ liegt im eindimensionalen Unterraum

$$\mathcal{E}_T := \text{lin}\,\mathbf{1}_\Omega = \{r\cdot\mathbf{1}_\Omega : r \in \mathbb{R}\}$$

der deterministischen Zahlungsprofile $r\cdot\mathbf{1}_\Omega$, $r \in \mathbb{R}$, von $\mathbb{R}^\Omega$. Um zu zeigen, dass die Startkapitaleinsätze $V_0(h)$ der selbstfinanzierenden Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ nicht alle den Wert Null aufweisen bzw. dass der Unterraum $\mathcal{V}_0$ vom Nullraum verschieden ist, die Dimension 1 besitzt und mit $\mathcal{E}_T$ übereinstimmt,

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{E}_T \neq O,$$

werden die beiden folgenden, im Allgemeinen für Marktmodelle vorliegenden, mathematisch-technischen Voraussetzungen (AWS$^\delta$)[38] und (WS0,$T$-1) verwendet. Außerdem wird zum Nachweis bestimmter Unterraumstrukturen in $\mathbb{R}^\Omega$ noch die Inklusion $\mathcal{E}_T := \text{lin}\,\mathbf{1}_\Omega \subseteq \mathcal{V}_T$, vorausgesetzt, die auch die Inklusion $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_T$ zur Folge hat und die äquivalent ist zur sf-Duplizierbarkeit des speziellen deterministischen Zahlungsprofils $\mathbf{1}_\Omega = (1,\ldots,1)^\top \in \mathbb{R}^\Omega$, d. h. $\mathbf{1}_\Omega = S_T^\delta k_T = V_T(k) \in \mathcal{V}_T$ mit einem $k \in \mathcal{H}_N^{sf}$. Weiter wird noch benötigt, dass der Startkapitaleinsatz $\kappa_0 := v_0(k) = S_0^{\delta\top} k_0 = r_0(k) = S_0^\top k_1$ der sf-Duplikationsstrategie $k$ von $\mathbf{1}_\Omega$ positiv ist.[39] Damit werden für die Behandlung des ursprünglichen Marktmodells also die folgenden Voraussetzungen (ZVU) zugrunde gelegt:

(ZVU) **Zusätzliche Voraussetzungen für das ursprüngliche Marktmodell**:

(AWS$^\delta$) $S_0^\delta(\Omega) \neq (0,\ldots,0)^\top \in \mathbb{R}^N$,

(WS0,$T$-1) $S_t(A_{t,m}) \neq (0,\ldots,0)^\top \in \mathbb{R}^N \;\forall\, A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$, $t = 0,\ldots,T\text{-}1$,

(DPsfT$\mathbf{1}_\Omega$+) $\mathbf{1}_\Omega = V_T(k) \in \mathcal{V}_T$ mittels einer sf-Duplikationsstrategie $k \in \mathcal{H}_N^{sf}$ bei einem Startkapitaleinsatz $\kappa_0 := v_0(k) = r_0(k) > 0$.

Für die oben angegebenen Unterräume des ursprünglichen Marktmodells können dann unter der Voraussetzung (ZVU) die nachfolgenden Mengenidentitäten, Inklusionen und additiven Zerlegungen bewiesen werden.

---

[38] Die Voraussetzung (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$ bzw. $S_0^\delta = S_0 + \delta_0 \gneq 0$ folgt wegen $\delta_0 \geq 0$ auch schon aus der Voraussetzung (WS0,$T$-1) für $t = 0$: $S_0 \neq 0$ bzw. $S_0 \gneq 0$.

[39] Bei einem Startkapitaleinsatz $\kappa_0 = 0$ für die sf-Duplikationsstrategie $k$ von $\mathbf{1}_\Omega$ wäre $k$ eine sf-Arbitragegelegenheit. Bei $\kappa_0 \leq 0$ würde man nur ein Marktmodell mit stets vorhandener Arbitragegelegenheit zulassen: Mit einer Duplikationsstrategie $f = (f_0,0,..,0,0)^\top \in \mathcal{H}_N$ von $\mathbf{1}_{0,\Omega} = (1,0,\ldots,0)^\top \in \mathcal{W}$ (siehe Abschnitt 2.8.4 beim Beweis von $\mathcal{E} \subseteq L(\mathcal{H}_N)$ unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) mit $v_0(f) = S_0^{\delta\top} f_0 = 1$) und einer sf-Duplikationsstrategie $k \in \mathcal{H}_N^{sf}$ von $\mathbf{1}_\Omega \in \mathbb{R}^\Omega$ bzw. von $\mathbf{1}_{T,\Omega} = (0,\ldots,0,1)^\top \in \mathcal{W}$ mit einem $\kappa_0 = v_0(k) \leq 0$ liefert nämlich $g := k - \kappa_0 f \in \mathcal{H}_N$ eine Duplikationsstrategie von $Z := L(g) = \mathbf{1}_{T,\Omega} - \kappa_0\mathbf{1}_{0,\Omega} = (-\kappa_0,0,..,0,1)^\top \gneq 0$ mit $v_0(g) = v_0(k) - \kappa_0 v_0(f) = \kappa_0 - \kappa_0\cdot 1 = 0$, also eine Arbitragegelegenheit. Unter den Voraussetzungen (AF), (AWS$^\delta$) und $\mathbf{1}_\Omega = V_T(k) \in \mathcal{V}_T$ ist also $\kappa_0 = v_0(k) > 0$. Außerdem wird in Abschnitt 5.3.8 begründet, dass bei sf-Arbitragefreiheit für die Existenz eines Diskontvektors (positiven Bewertungsvektors) $Q_T$ notwendig die Bedingung $\kappa_0 > 0$ (statt $\kappa_0 \neq 0$) benötigt wird.

Für die Lagebeziehungen der entsprechenden Unterräume im relativen Marktmodell wird nur die Existenz des relativen Marktmodells, also die Existenz eines Numéraires $S^N = B > 0$ im ursprünglichen Marktmodell, nicht aber die zusätzliche Voraussetzung (ZVU) benötigt. Allgemeiner gelten diese Aussagen des relativen Marktmodells auch in einem ursprünglichen Marktmodell mit einem konstanten Numéraire $B$: $B_t = \beta \in \mathbb{R}\ \forall\ t \in I, \beta > 0$, o. E. $\beta = 1$. Da im relativen Marktmodell stets der konstante relative Numéraire $\tilde{S}^N = \tilde{B} = 1$ existiert, sind nach Abschnitt 5.3.5 auch stets die zu (ZVU) analogen Bedingungen (ZVUrel) für das relative Marktmodell implizit erfüllt. Die Voraussetzung (ZVU) im ursprünglichen Marktmodell dient also dazu, um hier ebenso entsprechende Aussagen wie im relativen Marktmodell zu erhalten.

Im ursprünglichen Marktmodell kann zum Beweis der Mengenidentität $\mathcal{V}_0 = \mathcal{E}_T$ im nachfolgenden Beweisteil c) anstelle der Voraussetzungen (AWS$^\delta$) und (WS0,$T$-1) auch die Existenz eines Numéraires $B$ verwendet werden. Zur Begründung der übrigen Aussagen d), e) und f) im nachfolgenden Beweis kann anstelle von (ZVU) auch die stärkere Voraussetzung der Existenz eines Numéraires $S^N = B > 0$ mit deterministischem $B_T$ verwendet werden. Dass die Voraussetzung eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ die Bedingung (ZVU) beinhaltet, wird nachfolgend noch bei der Betrachtung zum ‚Preis von $\mathbf{1}_\Omega$' gezeigt. Unter dieser Voraussetzung können aufgrund der in Abschnitt 5.1.7 begründeten Mengenidentitäten

$$\tilde{\mathcal{V}}_0 = \mathcal{V}_0,\ \tilde{\mathcal{V}}_T = \mathcal{V}_T,\ \tilde{\mathcal{M}}_T = \mathcal{M}_T$$

die Lagebeziehungen vom relativen auf das ursprüngliche Modell übertragen werden. Auch hierbei erfolgt der Nachweis von $\mathcal{K}_T \subseteq \mathcal{V}_T$ und $\mathcal{V}_0 + \mathcal{K}_T = \mathcal{V}_T$ wie in Beweisteil e) unter Verwendung von $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_T$. Für die sf-duplizierbaren Zahlungsprofile $X_T = V_T(h) \in \mathcal{V}_T$ ($h \in \mathcal{H}_N^{sf}$) wird in Beweisteil f) aus der additiven Zerlegung (SFV) ($t = T$, siehe Abschnitt 5.1.5) der Zahlungsprofile $X_T = V_T(h)$ im Unterraum $\mathcal{V}_0 + \mathcal{K}_T$,

$$V_T(h) = V_0(h) + K_T(h),\ V_0(h) \in \mathcal{V}_0,\ K_T(h) \in \mathcal{K}_T,$$

auch eine additive Zerlegung im Unterraum $\mathcal{V}_0 + \mathcal{M}_T$ hergeleitet:

$$V_T(h) = W_0(h) + M_T(h) \text{ mit } W_0(h) \in \mathcal{V}_0 \text{ und } M_T(h) \in \mathcal{M}_T.$$

Bei der nachfolgenden Betrachtung zum Preis von $\mathbf{1}_\Omega$ wird auch noch gezeigt, dass die im relativen Marktmodell stets vorliegende Duplizierbarkeit von $\mathbf{1}_\Omega$ mit positivem Startkapitaleinsatz unter der Voraussetzung eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ auch auf das ursprüngliche Marktmodell übertragen werden kann.

**Inklusionen und additive Zerlegungen in $\mathcal{V}_T$ und $\tilde{\mathcal{V}}_T$**

1) **Im relativen Marktmodell** gelten die Beziehungen:

$$\tilde{\mathcal{V}}_0 = \mathcal{E}_T \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_T,$$
$$\tilde{\mathcal{V}}_0 + \tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{V}}_T.$$

2) **Im ursprünglichen Marktmodell** gelten unter der Voraussetzung (ZVU) oder spezieller bei Existenz eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ die Beziehungen:

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{E}_T \subseteq \mathcal{V}_T,$$
$$\mathcal{K}_T \subseteq \mathcal{V}_T,$$

$$\mathcal{V}_0 + \mathcal{K}_T = \mathcal{V}_T,$$
$$\mathcal{V}_0 + \mathcal{M}_T = \mathcal{V}_T.$$

Dabei ist für die sf-duplizierbaren Zahlungsprofile $X_T = V_T(h) \in \mathcal{V}_T$ ($h \in \mathcal{H}_N^{sf}$) eine additive Zerlegung

$$V_T(h) = W_0(h) + M_T(h),\ W_0(h) \in \mathcal{V}_0,\ M_T(h) \in \mathcal{M}_T,$$

gegeben durch

$$W_0(h) = V_0(h)/\kappa_0 \text{ und}$$
$$M_T(h) = V_T(h) - W_0(h).$$

Damit liegen der Unterraum $\mathcal{V}_0$ der Startkapitaleinsätze und der Unterraum $\mathcal{K}_T$ der KG-Zahlungsprofile jeweils im Unterraum $\mathcal{V}_T$ der sf-duplizierbaren Zahlungsprofile. Es sind dann also auch die in $\mathcal{V}_0$ und $\mathcal{K}_T$ gelegenen Zahlungsprofile ökonomisch interpretierbar als Portfolio-Vermögenswerte $V_T(h)$ von selbstfinanzierenden Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$. Außerdem spannen die beiden Unterräume $\mathcal{V}_0$ und $\mathcal{K}_T$ und auch die Unterräume $\mathcal{V}_0$ und $\mathcal{M}_T$ den Unterraum $\mathcal{V}_T$ auf.

**Beweis:** Die angegebenen Aussagen werden in den Beweisteilen a) und b) für das relative Marktmodell und in den darauffolgenden Beweisteilen c), d), e) und f) unter der zusätzlichen Voraussetzung (ZVU) für das ursprüngliche Marktmodell bewiesen.

Beweis für das relative Marktmodell:

a) „ $\tilde{\mathcal{V}}_0 = \mathcal{E}_T \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_T$ “:

1. Beweis von $\tilde{\mathcal{V}}_0 = \mathcal{E}_T$ und $\mathcal{E}_T \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_T$ mittels einer speziellen $\tilde{V}_T$ -Duplizierung von $\mathbf{1}_\Omega$:

Es sei die Voraussetzung (NM), also die Existenz eines Numéraires $S^N = B > 0$ im ursprünglichen Marktmodell, und damit die Existenz des relativen Marktmodells gesichert. Im relativen Marktmodell (oder allgemeiner in einem Marktmodell mit konstantem Numéraire $B = 1$) gibt es dann nach Satz 5.2, a von Abschnitt 5.1.7 eine sf-Handelsstrategie $k = (\bar{k}, k^N)^\mathsf{T} \in \mathcal{H}_N^{sf}$ mit dem vorgegebenen relativen Startkapitaleinsatz $\tilde{v}_0(k) = \tilde{v}_0 = 1$, dem vorgegebenen Nichtnumäraireanteil $\bar{k} = 0$, dem nach der Gleichung (SFβ) zugehörigen Numäraireanteil $k^N = \tilde{v}_0 \cdot \mathbf{1}_\Omega = 1$ und damit dem relativen kumulierten Gewinn $\tilde{K}_T(k) = \bar{K}_T(\bar{k}) = 0$. Nach der im relativen Marktmodell gültigen SF-Charakterisierung $(\mathrm{SF}\bar{\mathrm{K}})$ von Abschnitt 5.1.7 ist dann

$$\begin{aligned}\tilde{V}_T(k) &= \tilde{V}_0(k) + \bar{K}_T(\bar{k}) \\ &= \tilde{V}_0(k) + 0 \\ &= \tilde{v}_0(k)\,\mathbf{1}_\Omega = \mathbf{1}_\Omega.\end{aligned}$$

Bei dieser sf-Handelsstrategie $k = (\bar{k}, k^N)^\mathsf{T} = (0,1)^\mathsf{T}$ wird nur in den Numéraire $\tilde{S}^N = \tilde{B} = 1$ investiert: Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Anteil $k_0^N = 1$ des Numéraires mit dem relativen Startkapitaleinsatz $\tilde{v}_0(k) = \tilde{S}_0^N k_0^N = 1 \cdot 1 = 1$ in das Portfolio eingebracht und wegen $k_t^N = 1$ dieser Anteil für die weiteren Zeitpunkte $t = 1,\ldots,T$ gehalten. Für alle Zeitpunkte $t \in I$ hat man dann jeweils den relativen Vermögenswert

$$\begin{aligned}\tilde{V}_t(k) &= \tilde{S}_t^\delta k_t = \bar{S}_t^\delta \bar{k}_t + \tilde{S}_t^N k_t^N \\ &= 0 + 1 \cdot 1 = \mathbf{1}_\Omega.\end{aligned}$$

Demnach gelten die Inzidenzen

$$\mathbf{1}_\Omega = \tilde{V}_T(k) \in \tilde{\mathcal{V}}_T \text{ und}$$

$$\mathbf{1}_\Omega = \tilde{V}_0(k) \in \tilde{\mathcal{V}}_0 .$$

Im relativen Marktmodell (oder allgemeiner in einem Marktmodell mit dem konstanten Numéraire 1) ist also das deterministische Zahlungsprofil $\mathbf{1}_\Omega$ stets sf-duplizierbar. Außerdem gilt stets $\mathbf{1}_\Omega \in \tilde{\mathcal{V}}_0$ . Da $\tilde{\mathcal{V}}_T$ und $\tilde{\mathcal{V}}_0$ lineare Unterräume sind, folgen die Inklusionen

$$\mathcal{E}_T = \text{lin}\, \mathbf{1}_\Omega \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_T \,,\; \mathcal{E}_T = \text{lin}\, \mathbf{1}_\Omega \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_0$$

und, da stets die Inklusion

$$\tilde{\mathcal{V}}_0 = \{ \tilde{V}_0(h) = \tilde{v}_0(h)\, \mathbf{1}_\Omega : h \in \mathcal{H}_N^{sf} \} \subseteq \text{lin}\, \mathbf{1}_\Omega = \mathcal{E}_T$$

gilt, insgesamt $\tilde{\mathcal{V}}_0 = \mathcal{E}_T \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_T$ .

2. Mengentheoretischer Beweis der Inklusion $\tilde{\mathcal{V}}_0 \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_T$ unter Verwendung der Mengenidentität $\tilde{\mathcal{K}}_T = \tilde{\mathcal{M}}_T$ des relativen Marktmodells: Mit den in Abschnitt 5.1.7 für das relative Marktmodell angegebenen Beziehungen (SF$\tilde{\text{V}}$) und $\tilde{\mathcal{K}}_T = \tilde{\mathcal{M}}_T \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_T$ folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{V}}_0 &= \{ \tilde{V}_0(h) = \tilde{V}_T(h) - \tilde{K}_T(h) : h \in \mathcal{H}_N^{sf} \} && \text{(SF}\tilde{\text{V}}\text{)} \\
&\subseteq \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf}) + \tilde{K}_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = \tilde{\mathcal{V}}_T + \tilde{\mathcal{K}}_T \\
&= \tilde{\mathcal{V}}_T + \tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{V}}_T , && (\tilde{\mathcal{K}}_T = \tilde{\mathcal{M}}_T \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_T )
\end{aligned}$$

also

$$\tilde{\mathcal{V}}_0 \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_T .$$

b) „$\tilde{\mathcal{V}}_0 + \tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{V}}_T$“:

Mit der Voraussetzung (NM), mit (SF$\tilde{\text{V}}$), $\tilde{\mathcal{K}}_T = \tilde{\mathcal{M}}_T \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_T$ und der in a) bereits bewiesenen Inklusion $\tilde{\mathcal{V}}_0 \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_T$ folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{V}}_T &= \{ \tilde{V}_T(h) = \tilde{V}_0(h) + \tilde{K}_T(h) : h \in \mathcal{H}_N^{sf} \} && \text{(SF}\tilde{\text{V}}\text{)} \\
&\subseteq \tilde{V}_0(\mathcal{H}_N^{sf}) + \tilde{K}_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = \tilde{\mathcal{V}}_0 + \tilde{\mathcal{K}}_T \\
&= \tilde{\mathcal{V}}_0 + \tilde{\mathcal{M}}_T && (\tilde{\mathcal{K}}_T = \tilde{\mathcal{M}}_T ) \\
&\subseteq \tilde{\mathcal{V}}_T && (\tilde{\mathcal{M}}_T \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_T \,,\; \tilde{\mathcal{V}}_0 \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_T ),
\end{aligned}$$

also

$$\tilde{\mathcal{V}}_T = \tilde{\mathcal{V}}_0 + \tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{V}}_0 + \tilde{\mathcal{K}}_T .$$

Beweis für das ursprüngliche Marktmodell:

c) „$\mathcal{V}_0 = \mathcal{E}_T$“:

1. Beweis mit den Voraussetzungen (AWS$^\delta$) und (WS0,$T$-1):

„$\subseteq$“: Da mit $v_0(h) = S_0^\delta(\Omega)^\top h_0(\Omega) \in \mathbb{R}$ die Inzidenz

$$V_0(h) = v_0(h)\mathbf{1}_\Omega \in \{ r \cdot \mathbf{1}_\Omega : r \in \mathbb{R} \} = \text{lin}\, \mathbf{1}_\Omega = \mathcal{E}_T$$

für jedes $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ erfüllt ist, gilt die Inklusion $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{E}_T$.

„$\supseteq$“: Da das Bild $\mathcal{V}_0 = V_0(\mathcal{H}_N^{sf})$ der linearen Abbildung $V_0 : \mathcal{H}_N^{sf} \longrightarrow \mathbb{R}^\Omega$ ein linearer Unterraum ist, genügt es für die Inklusion $\mathcal{E}_T = \text{lin}\, \mathbf{1}_\Omega \subseteq \mathcal{V}_0$ die Inzidenz

$$\mathbf{1}_\Omega = (1,\ldots,1)^\top \in V_0(\mathcal{H}_N^{sf})$$

zu zeigen. Diese bedeutet die Lösbarkeit der linearen Gleichung

$$\mathbf{1}_\Omega = V_0(h) = v_0(h)\mathbf{1}_\Omega \text{ für ein } h \in \mathcal{H}_N^{sf}$$

bzw. die Lösbarkeit des Gleichungssystems

$$1 = v_0(h)(\Omega) = S_0^\delta(\Omega)^\top h_0(\Omega),$$
$$0 = L_t(h)(A_{t,m}) = S_t^\delta(A_{t,m})\, h_t(A_{t,m}) - S_t(A_{t,m}) h_{t+1}(A_{t,m}),\ A_{t,m} \in \mathcal{P}_t,\ t = 0,\ldots,T\text{-}1$$

für ein $h \in \mathcal{H}_N$. Unter der mathematisch-technischen Voraussetzung (AWS$^\delta$) $S_0^\delta(\Omega) \neq 0$ ist die erste Gleichung $v_0(h) = 1$ nach $h_0(\Omega) \in \mathbb{R}^N$ auflösbar. Die weiteren Gleichungen

$$S_t(A_{t,m})^\top h_{t+1}(A_{t,m}) = S_t^\delta(A_{t,m})^\top h_t(A_{t,m})$$

sind sukzessive bei $t = 0$ beginnend und bis $t = T - 1$ fortschreitend für jedes $A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$ bei gegebener rechter Seite unter der mathematisch-technischen Voraussetzung (WS0,$T$-1) $S_t(A_{t,m}) \neq 0$ nach $h_{t+1}(A_{t,m})$ auf der linken Seite auflösbar. Nach der Auflösung nach $h_{t+1}(A_{t,m})$ setzt man noch $h_{t+1}(A_{t+1,p}) := h_{t+1}(A_{t,m})$ für die Nachfolgerknoten $A_{t+1,p} \subseteq A_{t,m}$ von $A_{t,m}$ zur Verwendung in der nächsten Gleichung für das darauffolgende $t$. Damit ist eine Lösung $h \in \mathcal{H}_N$ für das Gleichungssystem bzw. eine Lösung $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ für die Gleichung $v_0(h) = 1$ bestimmbar. Das Zahlungsprofil $\mathbf{1}_\Omega$ liegt also im Bildraum $V_0(\mathcal{H}_N^{sf})$. Im Einperiodenmodell ($T = 1$, siehe Abschnitt 6.2.1) genügt die Voraussetzung (AWS) ≡ (WS0) $S_0 \neq 0$ bzw. $S_0 \gneq 0$, da daraus wegen $\delta_0 \geq 0$ auch noch $S_0^\delta = S_0 + \delta_0 \gneq 0$ bzw. $\neq 0$, also (AWS$^\delta$) folgt.

2. Beweis mit der Voraussetzung (NM):
Unter der Voraussetzung (NM), dass also ein Numéraire $S^N = B > 0$ im ursprünglichen Marktmodell und damit das relative Marktmodell existiert, folgt mit der in Abschnitt 5.1.7 begründeten Mengenidentität $\mathcal{V}_0 = \tilde{\mathcal{V}}_0$ nach a)

$$\mathcal{V}_0 = \tilde{\mathcal{V}}_0 = \mathcal{E}_T.$$

d) „$\mathcal{V}_0 = \mathcal{E}_T \subseteq \mathcal{V}_T$“:
1. Beweis mit der Voraussetzung (ZVU):
Unter der Voraussetzung (DPsfT$\mathbf{1}_\Omega$+) (hier würde auch $\kappa_0 \neq 0$ anstelle von $\kappa_0 > 0$ genügen) ist $\mathbf{1}_\Omega \in \mathcal{V}_T$,

$$\mathcal{E}_T = \operatorname{lin} \mathbf{1}_\Omega \subseteq \mathcal{V}_T$$

und unter den weiteren Voraussetzungen (AWS$^\delta$) und (WS0,$T$-1) mit c) dann noch

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{E}_T \subseteq \mathcal{V}_T.$$

2. Beweis mit der Voraussetzung eines Numéraires $S^N = B > 0$ mit deterministischem $B_T$:
Unter dieser Voraussetzung folgt nach a) $\tilde{\mathcal{V}}_0 = \mathcal{E}_T \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_T$ und aufgrund der nach Abschnitt 5.1.7 geltenden Identitäten $\tilde{\mathcal{V}}_0 = \mathcal{V}_0$ und $\tilde{\mathcal{V}}_T = \mathcal{V}_T$ dann auch $\mathcal{V}_0 = \mathcal{E}_T \subseteq \mathcal{V}_T$.

e) „$\mathcal{K}_T \subseteq \mathcal{V}_T$ und $\mathcal{V}_0 + \mathcal{K}_T = \mathcal{V}_T$“:
Mit der in Abschnitt 5.1.5 angegebenen Beziehung (SFV) und der in d) unter der Voraussetzung von (ZVU) oder eines Numéraires mit deterministischem $B_T$ bewiesenen Inklusion $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_T$ folgen die weiteren Inklusionen

$$\mathcal{K}_T = \{K_T(h) = V_T(h) - V_0(h) : h \in \mathcal{H}_N^{sf}\} \quad \text{(SFV)}$$
$$\subseteq \mathcal{V}_T + \mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_T \quad (\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_T),$$
$$\mathcal{V}_T = \{V_T(h) = V_0(h) + K_T(h) : h \in \mathcal{H}_N^{sf}\} \quad \text{(SFV)}$$
$$\subseteq \mathcal{V}_0 + \mathcal{K}_T \subseteq \mathcal{V}_T \quad (\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_T, \mathcal{K}_T \subseteq \mathcal{V}_T)$$

und somit die Übereinstimmung

$$\mathcal{V}_T = \mathcal{V}_0 + \mathcal{K}_T.$$

f) „$\mathcal{V}_0 + \mathcal{M}_T = \mathcal{V}_T$“:

1. Beweis mit der Voraussetzung (ZVU):

„$\subseteq$“: Da stets $\mathcal{M}_T \subseteq \mathcal{V}_T$ und unter den Voraussetzungen (AWS$^\delta$), (WS0,$T$-1) und (DPsfT$\mathbf{1}_\Omega$+) nach c) und d) $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_T$ gilt, folgt $\mathcal{V}_0 + \mathcal{M}_T \subseteq \mathcal{V}_T$.

„$\supseteq$“: Gemäß der Voraussetzung (DPsfT$\mathbf{1}_\Omega$+) ist

$$\mathbf{1}_\Omega = V_T(k) \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = \mathcal{V}_T$$

mit einer sf-Handelsstrategie $k \in \mathcal{H}_N^{sf}$, deren Startkapitaleinsatz $\kappa_0 := v_0(k) > 0$ ist.

Zu einem beliebigen festen sf-duplizierbaren Zahlungsprofil $X_T = V_T(h) \in \mathcal{V}_T$ ($h \in \mathcal{H}_N^{sf}$) definiert man die beiden Zahlungsprofile

$$\begin{aligned} W_0(h) &:= V_0(h)/\kappa_0 = \mathbf{1}_\Omega v_0(h)/\kappa_0 = V_T(k)v_0(h)/\kappa_0 \in \mathcal{V}_0 && \text{(es genügt } \kappa_0 \neq 0\text{)}, \\ M_T(h) &:= V_T(h) - W_0(h) \\ &= V_T(h) - V_T(k)v_0(h)/\kappa_0 \\ &= V_T(h - kv_0(h)/\kappa_0) && (V_T \text{ lineare Abbildung}) \\ &= V_T(g) \end{aligned}$$

mit $g = h - kv_0(h)/\kappa_0 \in \mathcal{H}_N^{sf}$ und

$$\begin{aligned} v_0(g) &= v_0(h) - v_0(k)v_0(h)/\kappa_0 && (v_0 \text{ lineare Abbildung}) \\ &= v_0(h) - v_0(k)v_0(h)/v_0(k) && (\kappa_0 = v_0(k)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Demzufolge ist $M_T(h) = V_T(g) \in V_T(\ker^{sf} V_0) = \mathcal{M}_T$. Aufgrund der Definition von $M_T(h)$ erhält man damit für $X_T = V_T(h)$ eine additive Zerlegung

$$X_T = V_T(h) = W_0(h) + M_T(h) \in \mathcal{V}_0 + \mathcal{M}_T.$$

Da $X_T \in \mathcal{V}_T$ beliebig war, folgt auch $\mathcal{V}_T \subseteq \mathcal{V}_0 + \mathcal{M}_T$ und insgesamt $\mathcal{V}_T = \mathcal{V}_0 + \mathcal{M}_T$.

2. Beweis mit der spezielleren Voraussetzung eines Numéraires $S^N = B > 0$ mit deterministischem $B_T$:

Da nach Abschnitt 5.1.7 stets

$$\tilde{\mathcal{V}}_0 = \mathcal{V}_0$$

und bei deterministischem $B_T$ auch noch

$$\tilde{\mathcal{V}}_T = \mathcal{V}_T \text{ und } \tilde{\mathcal{M}}_T = \mathcal{M}_T$$

gilt, folgt mit a) $\tilde{\mathcal{V}}_0 = \mathcal{E}_T \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_T$ auch

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{E}_T \subseteq \mathcal{V}_T$$

und mit der in b) angegebenen additiven Zerlegung von $\tilde{\mathcal{V}}_T$ auch die entsprechende additive Zerlegung von $\mathcal{V}_T$:

$$\mathcal{V}_T = \mathcal{V}_0 + \mathcal{M}_T.$$

Auch unter der Voraussetzung eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ stimmen aber im Allgemeinen die Unterräume $\mathcal{M}_T$ und $\mathcal{K}_T$ nicht überein, sodass dann auch die Unterräume $\tilde{\mathcal{K}}_T$ ($= \tilde{\mathcal{M}}_T = \mathcal{M}_T$) und $\mathcal{K}_T$ voneinander verschieden sind. Bei Vorliegen eines konstanten Numéraires $B = 1$ stimmen $\mathcal{M}_T$ und $\mathcal{K}_T$ überein, sodass dann auch $\tilde{\mathcal{K}}_T$ und $\mathcal{K}_T$ übereinstimmen ($\tilde{\mathcal{K}}_T = \tilde{\mathcal{M}}_T = \mathcal{M}_T = \mathcal{K}_T$). □

**Der Preis von $\mathbf{1}_\Omega$ im relativen Marktmodell und im ursprünglichen Marktmodell**

1) **Im relativen Marktmodell** oder allgemeiner in einem Marktmodell mit konstantem Numéraire $B = \beta \in \mathbb{R}$ ist nach dem vorhergehenden Beweisteil a, 1) das spezielle deterministische Zahlungsprofil $\mathbf{1}_\Omega = (1,\ldots,1)^\intercal \in \mathbb{R}^\Omega$ stets sf-duplizierbar,

$$\mathbf{1}_\Omega = \tilde{V}_T(k), k \in \mathcal{H}_N^{sf},$$

mit dem relativen Startkapitaleinsatz $\tilde{\kappa}_0 := \tilde{v}_0(k) = 1$ (und $\overline{k} = 0$, $k_t^N = \tilde{v}_0(k)\,\mathbf{1}_\Omega = 1\ \forall\ t \in I$, $\tilde{K}_T(k) = \overline{K}_T(\overline{k}) = 0$). Demzufolge ist bei gültigem LOPsfT der relative Preis von $\mathbf{1}_\Omega$ gleich

$$\tilde{\pi}(\mathbf{1}_\Omega) = \tilde{\kappa}_0 = 1.$$

2) **Im ursprünglichen Marktmodell** ist das deterministische Zahlungsprofil $\mathbf{1}_\Omega \in \mathbb{R}^\Omega$ gemäß der Voraussetzung (DPsfT$\mathbf{1}_\Omega$+) sf-duplizierbar,

$$\mathbf{1}_\Omega = V_T(k),\ k \in \mathcal{H}_N^{sf},$$

mit einem Startkapitaleinsatz $\kappa_0 := v_0(k) > 0$. Falls noch das LOPsfT gültig ist, ist der Preis von $\mathbf{1}_\Omega$ gleich

$$\pi(\mathbf{1}_\Omega) = \kappa_0 > 0.$$

Wie in obiger Fußnote bei der Beschreibung der Voraussetzung (ZVU) begründet wird, ist beispielsweise unter den Voraussetzungen (AWS$^\delta$), $\mathbf{1}_\Omega = V_T(k) \in \mathcal{V}_T$ und (AF) die Positivität des Startkapitaleinsatzes $\kappa_0 = v_0(k)$ gesichert:

$$(\mathrm{AWS}^\delta),\ \mathbf{1}_\Omega \in \mathcal{V}_T,\ (\mathrm{AF}) \ \Rightarrow\ \kappa_0 = \pi(\mathbf{1}_\Omega) > 0.$$

**Ein Numéraire $B$ mit deterministischem $B_T$ als hinreichende Bedingung für** (ZVU) **im ursprünglichen Marktmodell**

Falls im ursprünglichen Marktmodell ein

Numéraire $S^N = B > 0$ mit deterministischem $B_T$

vorliegt, folgt nach Beweisteil f, 2) die Inklusion $\mathcal{E}_T \subseteq \mathcal{V}_T$ und die Inzidenz $\mathbf{1}_\Omega \in \mathcal{V}_T$, sodass $\mathbf{1}_\Omega$ sf-duplizierbar ist. Darüber hinaus kann aus der stets vorliegenden sf-Duplikationsstrategie (siehe Beweisteil a) $k = (\overline{k}, k^N)^\intercal = (0,1)^\intercal$ von $\mathbf{1}_\Omega$ des relativen Marktmodells mit relativem Startkapitaleinsatz $\tilde{v}_0(k) = 1 > 0$, dem Nichtnumeraireanteil $\overline{k} = 0$ und dem Numeraireanteil $k^N = \tilde{v}_0 \cdot \mathbf{1}_\Omega = 1$ dann auch eine sf-Duplikationsstrategie $h$ des ursprünglichen Marktmodells mit positivem Startkapitaleinsatz gewonnen werden:

$$\mathbf{1}_\Omega = \tilde{V}_T(k) = V_T(k)/B_T = V_T(k/B_T) = V_T(h)$$

mit $h = k/B_T \in \mathcal{H}_N^{sf}$ und dem Startkapitaleinsatz

$$\kappa_0 := v_0(h) = B_0\tilde{v}_0(h) = B_0\tilde{v}_0(k/B_T) = \tilde{v}_0(k)\,B_0/B_T = B_0/B_T > 0.$$

Bei Vorlage eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ ist also auch die Voraussetzung (DPsfT$\mathbf{1}_\Omega$+) $\mathbf{1}_\Omega = V_T(h) \in \mathcal{V}_T$ mit $\kappa_0 := v_0(h) > 0$ erfüllt. Bei dieser sf-Handelsstrategie $h = k/B_T = (\overline{k}, k^N)^\intercal/B_T = (0,1/B_T)^\intercal$ wird nur in den Numéraire $S^N = B$ investiert. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werden $h_0^N = k_0^N/B_T = 1/B_T$ Anteile des Numéraires $B$ mit dem Startkapitaleinsatz $v_0(h) = B_0 \cdot 1/B_T$ in das Portfolio eingebracht und diese Anteile $h_t^N = 1/B_T$ für die weiteren Zeitpunkte $t = 1,\ldots,T$ gehalten. Zum Endzeitpunkt $t = T$ ist dann für die Anteile $h_T^N = 1/B_T$ von $B_T$ der Vermögenswert $V_T(h) = B_T \cdot h_T^N = \mathbf{1}_\Omega$. Weiter ist bei gültigem LOPsfT der Preis von $\mathbf{1}_\Omega$ im ursprünglichen Modell hier gleich

$$\pi(\mathbf{1}_\Omega) = \kappa_0 = B_0/B_T.$$

Außerdem sind bei Vorliegen eines Numéraires $B = S^N$ mit deterministischem $B_T$ wegen $S_t^{\delta,N} = S_t^N = B_t > 0$ ($t \in I$) auch noch die Bedingungen

(AWS$^{\delta}$) $S_0^{\delta} = (S_0^{\delta,1},...,S_0^{\delta,N-1},B_0)^{\mathsf{T}} \neq 0,$

(WS0,$T$-1) $S_t(A_{t,m}) = (S_t^1(A_{t,m}),...,S_t^{N-1}(A_{t,m}),B_t(A_{t,m}))^{\mathsf{T}} \neq 0 \quad (t = 0,\ldots,T\text{-}1,\ A_{t,m} \in \mathcal{P}_t)$

und damit insgesamt (ZVU) erfüllt.

Im ursprünglichen Marktmodell ist die Voraussetzung eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ hinreichend für das Vorliegen der Voraussetzung (ZVU).

**Die zu** (ZVU) **analoge Voraussetzung ist im relativen Marktmodell stets erfüllt**

Im relativen Marktmodell existiert stets der konstante relative Numéraire $\tilde{S}^N = \tilde{B} = 1$ und dieser ist insbesondere auch ein Numéraire $\tilde{S}^N = \tilde{B} > 0$ mit deterministischem $\tilde{B}_T$. Wie oben für das ursprüngliche Marktmodell begründet wurde, sind dann auch stets die zu (ZVU) analogen Bedingungen (ZVUrel) für das relative Marktmodell erfüllt:

(AW$\tilde{\mathrm{S}}^{\delta}$) $\tilde{S}_0^{\delta} = (\tilde{S}_0^{\delta,1},...,\tilde{S}_0^{\delta,N-1},\tilde{B}_0)^{\mathsf{T}} \neq 0,$

(W$\tilde{\mathrm{S}}$0,$T$-1) $\tilde{S}_t(A_{t,m}) = (\tilde{S}_t^1(A_{t,m}),...,\tilde{S}_t^{N-1}(A_{t,m}),\tilde{B}_t(A_{t,m}))^{\mathsf{T}} \neq 0$ ($t$=0,..,$T$-1, $A_{t,m} \in \mathcal{P}_t$),

(DPsfT$\mathbf{1}_{\Omega}$+rel) $\mathbf{1}_{\Omega} = \tilde{V}_T(h) \in \tilde{\mathcal{V}}_T$, $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ mit $\tilde{\kappa}_0 := \tilde{v}_0(h) > 0.$

Nach den obigen Überlegungen zu einem Numéraire $B$ mit deterministischem $B_T$ existiert dann auch eine relative sf-Duplikationsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ von $\mathbf{1}_{\Omega}$ ($\mathbf{1}_{\Omega} = \tilde{V}_T(h)$) mit dem relativen Startkapitaleinsatz

$$\tilde{\kappa}_0 = \tilde{B}_0 / \tilde{B}_T = 1.$$

Diese letzte Aussage $\tilde{\kappa}_0 = 1$ wurde auch schon oben in Beweisteil a,1) direkt im relativen Marktmodell mittels Satz 5.2, a) bewiesen.

Das relative Marktmodell ist definitionsgemäß von speziellerer Struktur als das ursprüngliche Marktmodell. Aufgrund seiner Ausstattung mit dem konstanten Numéraire $\tilde{B} = 1$ gelten Aussagen des ursprünglichen Marktmodells, die unter der Voraussetzung (ZVU) hergeleitet werden, dann auch im relativen Marktmodell, ohne die entsprechenden Bedingungen extra voraussetzen zu müssen.

### 5.3.6 Adjungierte Abbildungen und Lagebeziehungen einiger Unterräume

Für die Herleitung von Charakterisierungen des Law of One Price LOPsfT für die endfälligen Zahlungsprofile $X_T \in \mathcal{V}_T$ werden als Nächstes noch die Adjungierten verschiedener linearer Abbildungen, Dimensionsgleichungen für einige Unterräume und zwei Hilfssätze über Lagebeziehungen von Unterräumen bereitgestellt.

**Definition der adjungierten Abbildungen**

Die Vektorräume $\mathcal{H}_N^{sf}$ (als linearer Unterraum von $\mathcal{H}_N$) und $\mathcal{W}_{T,1} = \mathbb{R}^{\Omega}$ sind euklidische Vektorräume mit den in Abschnitt 2.9 bereitgestellten Skalarprodukten. Auf dem endlichdimensionalen euklidischen Vektorraum $\mathcal{H}_N^{sf}$ der selbstfinanzierenden Handelsstrategien werden die linearen Abbildungen

$$V_T^{sf} := V_T|_{\mathcal{H}_N^{sf}},\ V_0^{sf} := V_0|_{\mathcal{H}_N^{sf}},\ K_T^{sf} := K_T|_{\mathcal{H}_N^{sf}} : \mathcal{H}_N^{sf} \longrightarrow \mathbb{R}^{\Omega},$$

betrachtet. Diese stimmen als Einschränkungen von Abbildungen auf den Unterraum $\mathcal{H}_N^{sf}$ mit den umfassender definierten Abbildungen

$$V_T,\, V_0,\, K_T : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathbb{R}^\Omega$$

überein und werden daher zur Vereinfachung der Schreibweise auch wieder mit $V_T$, $V_0$ und $K_T$ bezeichnet. Zu diesen linearen Abbildungen sind die eindeutig bestimmten adjungierten Abbildungen[40]

$$V_T^{sf*},\; V_0^{sf*},\; K_T^{sf*} : \mathbb{R}^\Omega \longrightarrow \mathcal{H}_N^{sf}$$

definiert durch die folgenden Eigenschaften:

$$X_T^{\mathsf{T}} V_T(h) = V_T^{sf*}(X_T)^{\mathsf{T}} h\,,$$
$$X_T^{\mathsf{T}} V_0(h) = V_0^{sf*}(X_T)^{\mathsf{T}} h\,,$$
$$X_T^{\mathsf{T}} K_T(h) = K_T^{sf*}(X_T)^{\mathsf{T}} h$$

für alle $X_T \in \mathbb{R}^\Omega$ und $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$. Bei der Identifizierung der Vektoren $h$ in $\mathcal{H}_N^{sf} \subseteq \mathcal{H}_N$ bzw. $X_T$ in $\mathcal{W}_{T,1} = \mathbb{R}^\Omega$ mit ihren Koordinaten-Tupeln wird hier das Standardskalarprodukt des entsprechenden $\mathbb{R}^n$ für die Koordinaten-Tupel verwendet (siehe Abschnitt 2.9). Für die Bildräume und Kerne dieser Abbildungen gelten die folgenden orthogonalen Zerlegungen und Orthogonalitätsbeziehungen:

$$\mathcal{H}_N^{sf} = \ker^{sf} V_T \oplus V_T^{sf*}(\mathbb{R}^\Omega)\,, \qquad (\ker^{sf} V_T)^\perp = V_T^{sf*}(\mathbb{R}^\Omega)\,,$$
$$\mathbb{R}^\Omega = \ker V_T^{sf*} \oplus V_T(\mathcal{H}_N^{sf})\,, \qquad (\ker V_T^{sf*})^\perp = V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$$

($\ker^{sf} V_T := \mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_T$) und analoge Beziehungen für $V_0$, $V_0^{sf*}$ und $K_T$, $K_T^{sf*}$. Die hier auftretenden orthogonalen Komplemente sind mit den entsprechenden Skalarprodukten in den Räumen $\mathcal{H}_N^{sf}$ und $\mathbb{R}^\Omega$ zu bilden.

**Additive Zerlegung der adjungierten Abbildungen**

Aus der durch die Beziehung (SFV) speziell für $t = T$ gegebenen additiven Zerlegung der Zustandsfunktion $V_T(h)$ (siehe Abschnitt 5.1.5) in die deterministische (auf $\Omega$ konstante) Zustandsfunktion $V_0(h) = v_0(h)\cdot\mathbf{1}_\Omega$ und die stochastische Zustandsfunktion $K_T(h)$ erhält man auch eine additive Zerlegung der Adjungierten $V_T^{sf*}$ von $V_T$: Aus den für alle $X_T \in \mathbb{R}^\Omega$ und $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ gültigen Gleichungen

$$\begin{aligned} V_T^{sf*}(X_T)^{\mathsf{T}} h &= X_T^{\mathsf{T}} V_T(h) \\ &= X_T^{\mathsf{T}} V_0(h) + X_T^{\mathsf{T}} K_T(h) \end{aligned}$$

---

[40] Die adjungierte Abbildung zu einer linearen Abbildung wird behandelt bei Kremer (2006), S. 421–423, Kowalsky (1967), S. 136–138, Kowalsky u. Michler (2003), S. 169–172. Bei den adjungierten Abbildungen $V_T^{sf*}$, $V_0^{sf*}$, $K_T^{sf*}$ mit Zielraum $\mathcal{H}_N^{sf}$ kann der Index *sf* als Hinweis auf ihren Zielraum $\mathcal{H}_N^{sf}$ nicht weggelassen werden, da sie im Allgemeinen nicht übereinstimmen mit den zu $V_T$, $V_0$, $K_T : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathbb{R}^\Omega$ gehörigen adjungierten Abbildungen $V_T^*$, $V_0^*$, $K_T^* : \mathbb{R}^\Omega \longrightarrow \mathcal{H}_N$ mit dem Zielraum $\mathcal{H}_N$. Die adjungierte Abbildung $L^*$ einer linearen Abbildung $L$ lässt sich nämlich mittels einer Orthonormalbasis $\{e_1,\ldots,e_m\}$ und des Skalarprodukts $\langle .,. \rangle$ des Zielraums von $L^*$ beschreiben durch die Koordinatendarstellung $L^*(X) := \sum_{i=1}^{m} \langle X, L(e_i)\rangle e_i$. Weitere Betrachtungen zur Adjungierten findet man in Abschnitt 2.10.

$$= V_0^{sf*}(X_T)^\top h \; + \; K_T^{sf*}(X_T)^\top h$$
$$= [\, V_0^{sf*}(X_T) \; + \; K_T^{sf*}(X_T) \,]^\top h,$$

folgt nämlich die additive Zerlegung der Adjungierten $V_T^{sf*}$ von $V_T = V_T^{sf}$ in die Anteile $V_0^{sf*}$ und $K_T^{sf*}$. Dabei lassen sich die Adjungierten $V_T^{sf*}$, $V_0^{sf*}$, $K_T^{sf*}$ in ihrer zu $t = 0$ gehörigen deterministischen Komponente auch noch explizit angeben:

$$\begin{aligned}
V_T^{sf*} &= V_0^{sf*} + K_T^{sf*} \quad \text{mit} \\
V_{0,0}^{sf*}(X_T) &= \lambda(X_T)\cdot S_0^\delta \in \text{lin } S_0^\delta \quad \text{mit einem } \lambda(X_T) \in \mathbb{R}, \\
K_{T,0}^{sf\,*}(X_T) &= \mu(X_T)\cdot S_0^\delta \in \text{lin } S_0^\delta \quad \text{mit einem } \mu(X_T) \in \mathbb{R}, \\
V_{T,0}^{sf\,*}(X_T) &= \nu(X_T)\cdot S_0^\delta \in \text{lin } S_0^\delta \quad \text{mit einem } \nu(X_T) \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

**Beweis:** a) Aus den für alle $X_T \in \mathbb{R}^\Omega$ und $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ gültigen Gleichungen

$$(\, V_T^{sf*}(X_T) \; - [\, V_0^{sf*}(X_T) \; + \; K_T^{sf*}(X_T) \,])^\top h = 0$$

folgt wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts (durch Einsetzen des Ausdrucks in runden Klammern für $h$), dass der Ausdruck in den runden Klammern gleich Null ist, also $V_T^{sf*}(X_T)$ gleich dem Ausdruck in eckigen Klammern ist:

$$V_T^{sf*} = V_0^{sf*} + K_T^{sf*}.$$

b) Mit den speziellen selbstfinanzierenden Handelsstrategien $\breve{h} = (h_0,0,\ldots,0)^\top \in \mathcal{H}_N^{sf}$, $h_0 \in \mathbb{R}^N$ mit (SF) $0 = L_0(\breve{h}) = V_0(\breve{h}) - R_0(\breve{h}) = S_0^{\delta\top} h_0$, gilt

$$0 = X_T^\top V_0(\breve{h}) = V_0^{sf*}(X_T)^\top \breve{h} = V_{0,0}^{sf*}(X_T)^\top h_0$$

für alle $X_T \in \mathbb{R}^\Omega$ und $h_0 \in \{ S_0^\delta \}^\perp$ ($\subseteq \mathbb{R}^N$). Demzufolge ist $V_{0,0}^{sf*}(X_T) \perp h_0 \; \forall \; h_0 \in \{ S_0^\delta \}^\perp$ bzw. $V_{0,0}^{sf*}(X_T) \in \{S_0^\delta\}^{\perp\perp} = \text{lin } S_0^\delta$.

c) Für die in b) angegebenen selbstfinanzierenden Handelsstrategien $\breve{h} = (h_0,0,\ldots,0)^\top \in \mathcal{H}_N^{sf}$, $h_0 \in \{S_0^\delta\}^\perp$, gilt wegen $h_1 = \ldots = h_T = 0$ zunächst $K_T(\breve{h}) = 0$ und dann die reellwertige Gleichung

$$0 = X_T^\top K_T(\breve{h}) = K_T^{sf*}(X_T)^\top \breve{h} = K_{T,0}^{sf\,*}(X_T)^\top h_0$$

für alle $h_0 \in \{ S_0^\delta \}^\perp$. Daher ist $K_{T,0}^{sf\,*}(X_T) \in \{ S_0^\delta \}^{\perp\perp} = \text{lin } S_0^\delta$.

d) Aus b) und c) folgt

$$V_{T,0}^{sf\,*}(X_T) = V_{0,0}^{sf*}(X_T) + K_{T,0}^{sf\,*}(X_T) \in \text{lin } S_0^\delta. \qquad \square$$

**Dimensionsgleichungen für Unterräume**

Mit den in $\mathbb{R}^\Omega$ gelegenen Unterräumen $\mathcal{V}_0 := V_0(\mathcal{H}_N^{sf})$, $\mathcal{M}_T := V_T(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0)$, $\mathcal{M}_T^\perp$, $\mathcal{K}_T := K_T(\mathcal{H}_N^{sf})$, $\mathcal{K}_T^\perp = \ker K_T^{sf*}$, $\mathcal{V}_T := V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ und $\mathcal{V}_T^\perp = \ker V_T^{sf*}$ erhält man die additiven Zerlegungen

$$\mathbb{R}^\Omega = \mathcal{M}_T \oplus \mathcal{M}_T^\perp,$$
$$\mathbb{R}^\Omega = \mathcal{K}_T \oplus \mathcal{K}_T^\perp,$$
$$\mathbb{R}^\Omega = \mathcal{V}_T \oplus \ker V_T^{sf*}$$

und **unter der Voraussetzung** (ZVU) nach Abschnitt 5.3.5, Beweisteil c), e), f), noch die Identität

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{E}_T \neq O$$

und die additiven Zerlegungen

$$\mathcal{V}_T = \mathcal{V}_0 + \mathcal{M}_T,$$
$$\mathcal{V}_T = \mathcal{V}_0 + \mathcal{K}_T.$$

Aus den dabei nach den Abschnitten 5.1.5 und 5.3.5, Beweisteil e), unter der Voraussetzung (ZVU) vorliegenden Inklusionen $\mathcal{M}_T \subseteq \mathcal{K}_T \subseteq \mathcal{V}_T$ erhält man die umgekehrten Inklusionen für die orthogonalen Komplemente:

$$\ker V_T^{sf*} = \mathcal{V}_T^{\perp} \subseteq \mathcal{K}_T^{\perp} \subseteq \mathcal{M}_T^{\perp}.$$

Aus den additiven Zerlegungen ergeben sich nach dem Dimensionssatz[41] für endlich erzeugbare lineare Unterräume (vergleiche auch Beweisteil H von Satz 3.3 in Abschnitt 3.4.1) die folgenden Dimensionsgleichungen:

i) $K = \dim \mathbb{R}^{\Omega} = \dim \mathcal{M}_T + \dim \mathcal{M}_T^{\perp}$,

ii) $K = \dim \mathbb{R}^{\Omega} = \dim \mathcal{K}_T + \dim \mathcal{K}_T^{\perp}$,

iii) $K = \dim \mathbb{R}^{\Omega} = \dim \mathcal{V}_T + \dim \ker V_T^{sf*}$,

iv) $\dim \mathcal{V}_T + \dim (\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T) = \dim \mathcal{V}_0 + \dim \mathcal{M}_T$,

v) $\dim \mathcal{V}_T + \dim (\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{K}_T) = \dim \mathcal{V}_0 + \dim \mathcal{K}_T$.

Für die weiteren Schlussfolgerungen wird jetzt verwendet, dass nach Abschnitt 5.3.5, Beweisteil c), **unter der Voraussetzung** (ZVU) (benötigt wird tatsächlich (AWS$^{\delta}$) und (WS0,*T*-1)) für den Unterraum $\mathcal{V}_0$ die Übereinstimmung $\mathcal{V}_0 = \mathcal{E}_T \neq O$ gilt und somit

$$\dim \mathcal{V}_0 = 1.$$

Im Fall $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O$ ist dann der Unterraum $\mathcal{M}_T$ eine Hyperebene von $\mathcal{V}_T$ und
im Fall $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T \neq O$ stimmt $\mathcal{M}_T$ mit $\mathcal{V}_T$ überein.
Im Fall $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{K}_T = O$ ist analog der Unterraum $\mathcal{K}_T$ eine Hyperebene von $\mathcal{V}_T$ und
im Fall $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{K}_T \neq O$ stimmt der Unterraum $\mathcal{K}_T$ mit $\mathcal{V}_T$ überein.

Aus der ersten, dritten und vierten Dimensionsgleichung folgt auch eine Beziehung für die Dimensionen von $\mathcal{M}_T^{\perp}$ und $\ker V_T^{sf*} = \mathcal{V}_T^{\perp}$:

$$\dim \mathcal{M}_T^{\perp} = K - \dim \mathcal{M}_T \quad \text{(Verw. von i)}$$
$$= \dim \mathcal{V}_T + \dim \ker V_T^{sf*} - \dim \mathcal{M}_T \quad \text{(iii)}$$
$$= \dim \mathcal{V}_0 - \dim (\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T) + \dim \ker V_T^{sf*} \quad \text{(iv)}$$

bzw.

(vi) $$\dim \mathcal{M}_T^{\perp} - \dim \ker V_T^{sf*} = 1 - \dim (\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T) = \begin{cases} 1 & \text{bei } \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O, \\ 0 & \text{bei } \mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{M}_T. \end{cases}$$

Wegen $\dim (\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T) \leq \dim \mathcal{V}_0 = 1$ kann nämlich die Dimension des Durchschnitts $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T$ nur den Wert 0 oder 1 annehmen. Dies bedeutet aufgrund der Dimensionsgleichung, dass für die Dimension von $\ker V_T^{sf*}$ nur die Werte $\dim \mathcal{M}_T^{\perp} - 1$ oder $\dim \mathcal{M}_T^{\perp}$ möglich sind.

---

[41] Den Dimensionssatz (die Dimensionsformel) für endlich erzeugbare Unterräume $U$ und $W$ eines Vektorraums findet man z. B. bei Kowalsky (1967), S. 39, Kowalsky u. Michler (2003), S. 33f, Wagner (1981), S. 46, und Bröcker (2004), S. 46: $\dim (U + W) + \dim (U \cap W) = \dim U + \dim W$.

Im Fall $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O$ ist der Unterraum $\ker V_T^{sf*}$ eine (lineare) Hyperebene von $\mathcal{M}_T^{\perp}$,
im Fall $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T \neq O$ fällt $\ker V_T^{sf*}$ mit $\mathcal{M}_T^{\perp}$ zusammen.

Eine analoge Aussage erhält man mit $\mathcal{K}_T$ anstelle von $\mathcal{M}_T$:

(vii) $$\dim \mathcal{K}_T^{\perp} - \dim \ker V_T^{sf*} = 1 - \dim (\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{K}_T) = \begin{cases} 1 & \text{bei } \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{K}_T = O, \\ 0 & \text{bei } \mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{K}_T. \end{cases}$$

Im Fall $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{K}_T = O$ ist $\ker V_T^{sf*}$ eine (lineare) Hyperebene von $\mathcal{K}_T^{\perp}$ und
im Fall $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{K}_T \neq O$ fällt $\ker V_T^{sf*}$ mit $\mathcal{K}_T^{\perp}$ zusammen.

Im nachfolgenden Abschnitt 5.3.7 wird gezeigt, dass der triviale Durchschnitt $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O$ charakteristisch für das LOPsfT ist, während der triviale Durchschnitt $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{K}_T = O$ wegen $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T \subseteq \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{K}_T$ aber nur hinreichend und nicht notwendig für das LOPsfT ist.
Außerdem gelten entsprechende Aussagen im relativen Marktmodell, jedoch ohne die Voraussetzung (ZVU) und mit der zusätzlichen Mengenidentität $\tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{K}}_T$.

**Lagebeziehungen für Unterräume**

Es werden zunächst die verschiedenen Möglichkeiten für die Inklusionen $\mathcal{M}_T \subseteq \mathcal{K}_T \subseteq \mathcal{V}_T$ im ursprünglichen Marktmodell und $\tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{K}}_T \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_T$ im relativen Marktmodell dargestellt. Anschließend werden in Hilfssatz 5.11 weitere Lagebeziehungen für Unterräume im allgemeinen Fall, also noch ohne Voraussetzung des LOPsfT, angegeben. Aufgrund der nach den Abschnitten 5.1.1, 5.1.5, 5.1.7, 5.3.5 und 5.3.6 stets bestehenden Inklusionen

$$\mathcal{M}_T \subseteq \mathcal{K}_T \subseteq \mathcal{V}_T,$$
$$\ker V_T^{sf*} = \mathcal{V}_T^{\perp} \subseteq \mathcal{K}_T^{\perp} \subseteq \mathcal{M}_T^{\perp},$$
$$\tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{K}}_T \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_T,$$
$$\ker \tilde{V}_T^{sf*} = \tilde{\mathcal{V}}_T^{\perp} \subseteq \tilde{\mathcal{K}}_T^{\perp} = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$$

und der Dimensionsgleichungen der Abschnitte 5.3.6 und 5.3.7 können im ursprünglichen und im relativen Marktmodell nur noch folgende drei Lagebeziehungen für die Unterräume $\mathcal{M}_T$, $\mathcal{K}_T$, $\mathcal{V}_T$ bzw. $\tilde{\mathcal{M}}_T$, $\tilde{\mathcal{K}}_T$, $\tilde{\mathcal{V}}_T$ auftreten. Dabei unterscheiden sich die Fälle 1) und 2) nur im ursprünglichen Marktmodell und nicht im relativen Marktmodell.

**Lagebeziehungen der Unterräume $\mathcal{M}_T$, $\mathcal{K}_T$, $\mathcal{V}_T$ bzw. $\tilde{\mathcal{M}}_T$, $\tilde{\mathcal{K}}_T$, $\tilde{\mathcal{V}}_T$:**
Für die Aussagen zum ursprünglichen Marktmodell sei die Voraussetzung (ZVU) erfüllt.
**Bei gültigem** LOPsfT ($\Leftrightarrow \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O$ nach Abschnitt 5.3.7) sind dann zwei Fälle von Lagebeziehungen möglich:

1) $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{K}_T \neq O$: $\mathcal{M}_T \subsetneq \mathcal{K}_T = \mathcal{V}_T$ und $\ker V_T^{sf*} = \mathcal{K}_T^{\perp} \subsetneq \mathcal{M}_T^{\perp}$,
$\tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{K}}_T \subsetneq \tilde{\mathcal{V}}_T$ und $\ker \tilde{V}_T^{sf*} \subsetneq \tilde{\mathcal{K}}_T^{\perp} = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$;

2) $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{K}_T = O$: $\mathcal{M}_T = \mathcal{K}_T \subsetneq \mathcal{V}_T$ und $\ker V_T^{sf*} \subsetneq \mathcal{K}_T^{\perp} = \mathcal{M}_T^{\perp}$,
$\tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{K}}_T \subsetneq \tilde{\mathcal{V}}_T$ und $\ker \tilde{V}_T^{sf*} \subsetneq \tilde{\mathcal{K}}_T^{\perp} = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$.

**Bei ungültigem** LOPsfT ($\Leftrightarrow O \neq \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T \subseteq \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{K}_T$) ist nur ein Fall für die Lagebeziehungen möglich:

3) $\mathcal{M}_T = \mathcal{K}_T = \mathcal{V}_T$ und $\ker V_T^{sf*} = \mathcal{K}_T^{\perp} = \mathcal{M}_T^{\perp}$,

$\tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{K}}_T = \tilde{\mathcal{V}}_T$ und $\ker \tilde{V}_T^{sf*} = \tilde{\mathcal{K}}_T^{\perp} = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$.

Die Lage der Unterräume $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{M}_T$, $\mathcal{K}_T$ und $\mathcal{V}_T$ und die Lage der zugehörigen orthogonalen Komplemente $\mathcal{V}_0^{\perp}$, $\mathcal{M}_T^{\perp}$, $\mathcal{K}_T^{\perp}$ und $\mathcal{V}_T^{\perp} = \ker V_T^{sf*}$ im ursprünglichen Marktmodell wird unter der Voraussetzung (ZVU) und bei gültigem LOPsfT ($\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O$ nach Abschnitt 5.3.7) in der Abbildung 5.9 für den Fall 1) $\mathcal{M}_T \subsetneq \mathcal{K}_T = \mathcal{V}_T$ und in der Abbildung 5.10 für den Fall 2) $\mathcal{M}_T = \mathcal{K}_T \subsetneq \mathcal{V}_T$ veranschaulicht. Für den Fall 2) $\mathcal{M}_T = \mathcal{K}_T \subsetneq \mathcal{V}_T$ wird in Abschnitt 5.3.8 gezeigt, dass hier wie im relativen Marktmodell notwendig jeder Vektor $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp 1}$ einen Bewertungsvektor liefert und demzufolge auch $\kappa_0 = \pi(\mathbf{1}_\Omega) = Y_T^{\top}\mathbf{1}_\Omega = 1$ ist.

Analoge Verhältnisse liegen im relativen Marktmodell vor, wobei hier aber die zusätzliche Voraussetzung (ZVU) nicht benötigt wird, außerdem noch die Mengenidentität $\tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{K}}_T$ gilt und somit bei gültigem LOPsfT ($\tilde{\mathcal{V}}_0 \cap \tilde{\mathcal{M}}_T = O$) nur der Fall 2) auftritt. Weitere Aussagen zur Lagebeziehung wichtiger Unterräume folgen noch für den allgemeinen Fall in Hilfssatz 5.11 und bei Gültigkeit des LOPsfT in Satz 5.12 von Abschnitt 5.3.12.

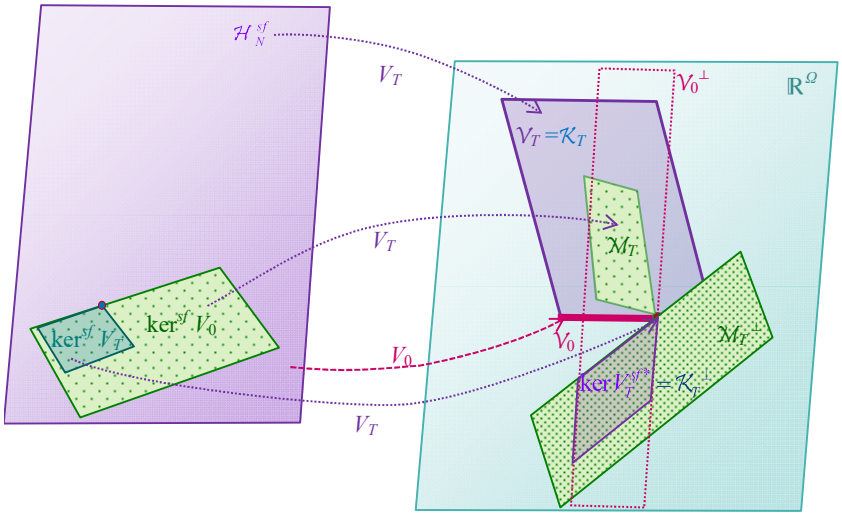



**Abb. 5.9** Die Unterräume $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{M}_T$, $\mathcal{K}_T$ und $\mathcal{V}_T = V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ von $\mathbb{R}^{\Omega}$ und deren orthogonalen Komplemente $\mathcal{V}_0^{\perp}$, $\mathcal{M}_T^{\perp}$, $\mathcal{K}_T^{\perp}$ und $\mathcal{V}_T^{\perp} = \ker V_T^{sf*}$ im Fall 1) $\mathcal{M}_T \subsetneq \mathcal{K}_T = \mathcal{V}_T$

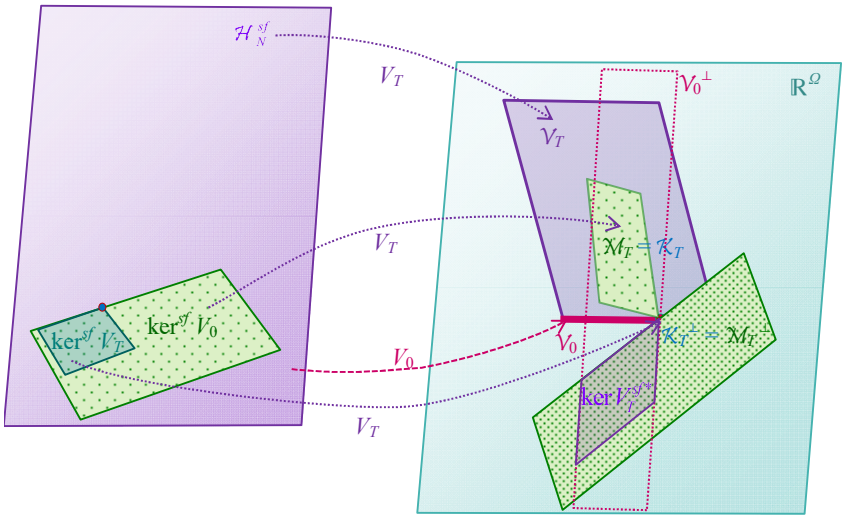



**Abb. 5.10** Die Unterräume $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{M}_T$, $\mathcal{K}_T$ und $\mathcal{V}_T = V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ von $\mathbb{R}^{\Omega}$ und deren orthogonalen Komplemente $\mathcal{V}_0^{\perp}$, $\mathcal{M}_T^{\perp}$, $\mathcal{K}_T^{\perp}$ und $\mathcal{V}_T^{\perp} = \ker V_T^{sf*}$ im Fall 2) $\mathcal{M}_T = \mathcal{K}_T \subsetneq \mathcal{V}_T$

**Hilfssatz 5.10 Direkte Summe der Unterraumbilder einer linearen Abbildung**

a) Für lineare Unterräume $U$, $W$ eines Vektorraums $V$ mit
$$U + W = V$$
und eine lineare Abbildung $f: V \longrightarrow V^*$ gelten für die Unterraumbilder $f(U)$ und $f(W)$ die Beziehungen
$$f(V) = f(U) + f(W),$$
$$f(U \cap W) \subseteq f(U) \cap f(W).$$ [42]

b) Falls für die Unterräume $U$, $W$ von $V = U + W$ noch die Voraussetzung
$$\ker f \subseteq W$$
(oder $\ker f \subseteq U$) erfüllt ist, folgt für die Unterraumbilder noch
$$f(U \cap W) = f(U) \cap f(W).$$
Beispielsweise ist diese zusätzliche Voraussetzung für ein injektives $f$ erfüllt ($\ker f = O$).

c) Falls für die Unterräume $U$, $W$ von $V = U + W$ noch die Voraussetzungen
$$\ker f \subseteq W \text{ und } U \cap W = O$$
erfüllt sind, folgt für die Unterraumbilder noch $f(U) \cap f(W) = O$, sodass der Bildraum $f(V)$ die direkte Summe der Unterraumbilder ist:
$$f(V) = f(U) \oplus f(W).$$

[42] Diese Aussagen von a) über die Summe und den Durchschnitt der Unterraumbilder findet man z. B. bei Wagner (1981), S. 64, Satz 2.2.16.

**Beweis des Hilfssatzes 5.10**:
a) Es gilt $f(U \cap W) \subseteq f(U), f(U \cap W) \subseteq f(W)$, also $f(U \cap W) \subseteq f(U) \cap f(W)$.
Weiter gilt wegen der Linearität von $f$

$$\begin{aligned} f(V) &= \{f(u+w) = f(u) + f(w) : u \in U, w \in W\} \\ &= \{f(u) : u \in U\} + \{f(w) : w \in W\} \\ &= f(U) + f(W). \end{aligned}$$

b) Zu einem Vektor $v' \in f(U) \cap f(W)$ gibt es $u \in U$, $w \in W$ mit $f(u) = v' = f(w)$. Wegen der Linearität von $f$ gilt dann

$$0 = f(u) - f(w) = f(u - w) = f(\Delta) \text{ mit } \Delta := u - w \in V$$

bzw. $\Delta \in \ker f$. Wegen der zusätzlichen Voraussetzung $\ker f \subseteq W$ folgt $\Delta \in \ker f \subseteq W$, wegen der Unterraumeigenschaft von $W$ dann $w + \Delta \in W$, $u = w + \Delta \in U \cap W$ und

$$v' = f(u) \in f(U \cap W).$$

Damit ist auch die nichttriviale Inklusion $f(U) \cap f(W) \subseteq f(U \cap W)$ und zusammen mit a) auch die Übereinstimmung $f(U \cap W) = f(U) \cap f(W)$ gezeigt.

c) Mit der Voraussetzung $U \cap W = O$ folgt nach b) $f(U) \cap f(W) = f(U \cap W) = f(O) = O$. □

**Hilfssatz 5.11 Lagebeziehungen einiger Unterräume von $\mathbb{R}^\Omega$ und $\mathcal{H}_N^{sf}$**

Für die im Teil I) aufgeführten Aussagen über Unterräume des ursprünglichen Marktmodells sei die Voraussetzung (ZVU) von Abschnitt 5.3.5 oder die speziellere Voraussetzung eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ erfüllt. Der Wert $\kappa_0 := v_0(k) > 0$ sei dabei der Startkapitaleinsatz einer sf-Duplikationsstrategie $k$ von $\mathbf{1}_\Omega$. Für die entsprechenden Aussagen im Teil II) für das relative Marktmodell wird nur die Existenz eines Numéraires $B = S^N > 0$ im ursprünglichen Marktmodell vorausgesetzt.

I) Für die $\mathbb{R}^\Omega$- und $\mathcal{H}_N^{sf}$-Unterräume des **ursprünglichen Marktmodells** gelten dann die folgenden Beziehungen:

1) $\mathcal{M}_T \subseteq \mathcal{K}_T \subseteq \mathcal{V}_T$
2) $\mathcal{M}_T^\perp \supseteq \mathcal{K}_T^\perp = \ker K_T^{sf*} \supseteq \mathcal{V}_T^\perp = \ker V_T^{sf*}$
3) $\mathcal{V}_0 = \mathcal{E}_T \subseteq \mathcal{V}_T$
4) $\mathcal{V}_0^\perp = \mathcal{E}_T^\perp = \{X_T \in \mathbb{R}^\Omega : \kappa(X_T) = 0\} \supseteq \mathcal{V}_T^\perp = \ker V_T^{sf*}$ $\quad (\kappa(X_T) := \mathbf{1}_\Omega^\top X_T)$
5) a) $\mathcal{V}_T = \mathcal{V}_0 + \mathcal{K}_T$, b) $\mathcal{V}_T = \mathcal{V}_0 + \mathcal{M}_T$
6) $V_T^{sf*}(\mathbb{R}^\Omega) = V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T) \oplus V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T^\perp)$
7) a) $\ker V_T^{sf*} = \mathcal{K}_T^\perp \cap \mathcal{E}_T^\perp = \mathcal{K}_T^\perp \cap \{\kappa(X_T) = 0\} =: \mathcal{K}_T^{\perp 0}$
   b) $\mathcal{K}_T^\perp \setminus \ker V_T^{sf*} = \mathcal{K}_T^\perp \cap \{\kappa(X_T) \neq 0\}$
   c) $\ker V_T^{sf*} = \mathcal{M}_T^\perp \cap \mathcal{E}_T^\perp = \mathcal{M}_T^\perp \cap \{\kappa(X_T) = 0\} =: \mathcal{M}_T^{\perp 0}$
   d) $\mathcal{M}_T^\perp \setminus \ker V_T^{sf*} = \mathcal{M}_T^\perp \cap \{\kappa(X_T) \neq 0\}$

   Im Falle $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O$, d. h. nach Abschnitt 5.3.7 bei gültigem LOPsfT, gelten außerdem mit einem $\kappa$-normierten Normalenvektor $Y_T$ von $\mathcal{M}_T$, Bewertungsvektor $Y_T \in \mathcal{M}_T^\perp \cap \{\kappa(X_T) = \kappa_0\} =: \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ $(\neq \emptyset)$, dessem $V_T^{sf*}$-Bild $c := V_T^{sf*}(Y_T) \neq 0$ und der zugehörigen linearen Hülle $\mathcal{C} := \text{lin}\{c\} \neq O$ $(\mathcal{C} \subseteq V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T^\perp) \subseteq V_T^{sf*}(\mathbb{R}^\Omega) \subseteq \mathcal{H}_N^{sf})$ die folgenden Beziehungen:
8) a) $V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T^\perp) = \mathcal{C}$, b) $V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T) \cap \mathcal{C} = O$, c) $V_T^{sf*}(\mathbb{R}^\Omega) = V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T) \oplus \mathcal{C}$

9) $V_T^{sf*-1}(\mathcal{C}) = \mathcal{M}_T^{\perp}$

10) $V_T^{sf*-1}(\mathcal{C} \setminus O) = \mathcal{M}_T^{\perp} \setminus \ker V_T^{sf*} = \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) \neq 0\}$

11) $V_T^{sf*-1}(\{c\}) = \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0} = \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = \kappa_0\}$

Im Falle $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T \neq O$ bzw. $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{M}_T$, d. h. bei ungültigem LOPsfT, gilt noch:

12) a) $V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T^{\perp}) = O$, b) $V_T^{sf*}(\mathbb{R}^{\Omega}) = V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T)$

II) Für die $\mathbb{R}^{\Omega}$- und $\mathcal{H}_N^{sf}$-Unterräume des **relativen Marktmodells** gelten die zu den obigen Aussagen des ursprünglichen Marktmodells analogen Beziehungen, wobei noch die Mengenidentität $\tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{K}}_T$ hinzukommt. Die Voraussetzung von (ZVU) oder eines deterministischen $B_T$ wird hier nicht benötigt.

1) $\tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{K}}_T \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_T$

2) $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} = \tilde{\mathcal{K}}_T^{\perp} = \ker \tilde{K}_T^{sf*} \supseteq \tilde{\mathcal{V}}_T^{\perp} = \ker \tilde{V}_T^{sf*}$

3) $\tilde{\mathcal{V}}_0 = \mathcal{E}_T \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_T$

4) $\tilde{\mathcal{V}}_0^{\perp} = \mathcal{E}_T^{\perp} = \{X_T \in \mathbb{R}^{\Omega} : \kappa(X_T) = 0\} \supseteq \tilde{\mathcal{V}}_T^{\perp} = \ker \tilde{V}_T^{sf*}$

5) $\tilde{\mathcal{V}}_T = \tilde{\mathcal{V}}_0 + \tilde{\mathcal{M}}_T$

6) $\tilde{V}_T^{sf*}(\mathbb{R}^{\Omega}) = \tilde{V}_T^{sf*}(\tilde{\mathcal{M}}_T) \oplus \tilde{V}_T^{sf*}(\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp})$

7) a) $\ker \tilde{V}_T^{sf*} = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \mathcal{E}_T^{\perp} = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = 0\} =: \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 0}$

b) $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \setminus \ker \tilde{V}_T^{sf*} = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) \neq 0\}$

Im Falle $\tilde{\mathcal{V}}_0 \cap \tilde{\mathcal{M}}_T = O$, d. h. bei gültigem LOPsfT, gelten außerdem mit einem $\kappa$-normierten Normalenvektor $\tilde{Y}_T$ von $\tilde{\mathcal{M}}_T$, Bewertungsvektor $\tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = 1\} =: \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$ $(\neq \emptyset)$, dessem $\tilde{V}_T^{sf*}$-Bild $\tilde{c} := \tilde{V}_T^{sf*}(\tilde{Y}_T) \neq 0$ und der zugehörigen linearen Hülle $\tilde{\mathcal{C}} := \text{lin}\{\tilde{c}\} \neq O$ $(\tilde{\mathcal{C}} \subseteq \tilde{V}_T^{sf*}(\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}) \subseteq \tilde{V}_T^{sf*}(\mathbb{R}^{\Omega}) \subseteq \mathcal{H}_N^{sf})$ die folgenden Beziehungen:

8) a) $\tilde{V}_T^{sf*}(\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}) = \tilde{\mathcal{C}}$, b) $\tilde{V}_T^{sf*}(\tilde{\mathcal{M}}_T) \cap \tilde{\mathcal{C}} = O$, c) $\tilde{V}_T^{sf*}(\mathbb{R}^{\Omega}) = \tilde{V}_T^{sf*}(\tilde{\mathcal{M}}_T) \oplus \tilde{\mathcal{C}}$

9) $\tilde{V}_T^{sf*-1}(\tilde{\mathcal{C}}) = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$

10) $\tilde{V}_T^{sf*-1}(\tilde{\mathcal{C}} \setminus O) = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \setminus \ker V_T^{sf*} = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) \neq 0\}$

11) $\tilde{V}_T^{sf*-1}(\{\tilde{c}\}) = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1} = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = 1\}$

Im Falle $\tilde{\mathcal{V}}_0 \cap \tilde{\mathcal{M}}_T \neq O$ bzw. $\tilde{\mathcal{V}}_0 \subseteq \tilde{\mathcal{M}}_T$, d. h. bei ungültigem LOPsfT, gilt noch:

12) a) $\tilde{V}_T^{sf*}(\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}) = O$, b) $\tilde{V}_T^{sf*}(\mathbb{R}^{\Omega}) = \tilde{V}_T^{sf*}(\tilde{\mathcal{M}}_T)$

**Beweis des Hilfssatzes 5.11**: Beweis von I):

A) Beweis von 1) und 2): Die in 1) angegebene Inklusion $\mathcal{M}_T \subseteq \mathcal{K}_T$ wird schon in Abschnitt 5.1.5 begründet. Die Inklusion $\mathcal{K}_T \subseteq \mathcal{V}_T$ wird in Abschnitt 5.3.5 in Beweisteil e) unter der Voraussetzung von (ZVU) oder eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ bewiesen.

Die Aussage von 2) ergibt sich aus 1) und der oben angegebenen orthogonalen Zerlegung des Vektorraums $\mathbb{R}^{\Omega}$ in den Bildraum ($K_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ bzw. $V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$) einer linearen Abbildung und den Kern (ker $K_T^{sf*}$ bzw. ker $V_T^{sf*}$) der zugehörigen adjungierten Abbildung (vergleiche auch Abschnitt 2.10.1): Es gilt

$$\mathcal{M}_T{}^{\perp} \supseteq \mathcal{K}_T{}^{\perp} \supseteq \mathcal{V}_T{}^{\perp}$$

mit $\mathcal{K}_T{}^{\perp} = K_T(\mathcal{H}_N^{sf})^{\perp} = \ker K_T^{sf*}$ und $\mathcal{V}_T{}^{\perp} = V_T(\mathcal{H}_N^{sf})^{\perp} = \ker V_T^{sf*}$.

B) Der Beweis von 3) und 5) wird in Abschnitt 5.3.5 (Beweisteile c, d, e, f) unter der Voraussetzung von (ZVU) oder eines Numéraires mit deterministischem $B_T$ erbracht. Die Aussage 4) ergibt sich aus 3).

C) Beweis von 6):
Nach Hilfssatz 5.10 a) ergibt sich mit $f = V_T^{sf*}$:

$$V_T^{sf*}(\mathbb{R}^{\Omega}) = V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T) + V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T{}^{\perp}).$$

Außerdem erhält man nach Hilfssatz 5.10 c) für $f = V_T^{sf*}$ wegen 2) $\ker V_T^{sf*} \subseteq \mathcal{M}_T{}^{\perp}$ und $\mathcal{M}_T \cap \mathcal{M}_T{}^{\perp} = O$ noch

$$V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T) \cap V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T{}^{\perp}) = O,$$

also insgesamt

$$V_T^{sf*}(\mathbb{R}^{\Omega}) = V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T) \oplus V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T{}^{\perp}).$$

D) Beweis von 7 a) $\ker V_T^{sf*} = \mathcal{K}_T{}^{\perp} \cap \mathcal{E}_T{}^{\perp} = \mathcal{K}_T{}^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = 0\} =: \mathcal{K}_T{}^{\perp 0}$:
„$\subseteq$“: Die nach 3) und 1) unter der Voraussetzung von (ZVU) oder eines Numéraires mit deterministischem $B_T$ gültigen Inklusionen $\mathcal{E}_T \subseteq \mathcal{V}_T$ und $\mathcal{K}_T \subseteq \mathcal{V}_T$ sind wegen $\ker V_T^{sf*} = \mathcal{V}_T{}^{\perp}$ äquivalent zu den Inklusionen $\ker V_T^{sf*} = \mathcal{V}_T{}^{\perp} \subseteq \mathcal{E}_T{}^{\perp}$ und $\ker V_T^{sf*} = \mathcal{V}_T{}^{\perp} \subseteq \mathcal{K}_T{}^{\perp}$, also insgesamt äquivalent zur Inklusion

$$\ker V_T^{sf*} \subseteq \mathcal{K}_T{}^{\perp} \cap \mathcal{E}_T{}^{\perp}.$$

„$\supseteq$“: Für den Nachweis der umgekehrten Inklusion „$\supseteq$“ wählt man ein $Y_T \in \mathcal{K}_T{}^{\perp} \cap \mathcal{E}_T{}^{\perp}$ und ein beliebiges $X_T = V_T(h) \in \mathcal{V}_T$ ($h \in \mathcal{H}_N^{sf}$). Mit der additiven Zerlegung (SFV) von $V_T(h)$ folgt wegen $Y_T \in \mathcal{K}_T{}^{\perp} = K_T(\mathcal{H}_N^{sf})^{\perp}$ zunächst

$$\begin{aligned} Y_T{}^{\mathsf{T}} X_T &= Y_T{}^{\mathsf{T}} V_T(h) = Y_T{}^{\mathsf{T}} V_0(h) + Y_T{}^{\mathsf{T}} K_T(h) && \text{(SFV)} \\ &= Y_T{}^{\mathsf{T}} v_0(h) \mathbf{1}_{\Omega} + 0 && (Y_T \in \mathcal{K}_T{}^{\perp}) \\ &= v_0(h) \kappa(Y_T), \end{aligned}$$

und wegen $Y_T \in \mathcal{E}_T{}^{\perp}$ bzw. $\kappa(Y_T) = 0$ dann noch $Y_T{}^{\mathsf{T}} X_T = 0$. Demzufolge ist $Y_T \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf})^{\perp} = \ker V_T^{sf*}$ und

$$\mathcal{K}_T{}^{\perp} \cap \mathcal{E}_T{}^{\perp} \subseteq \ker V_T^{sf*}.$$

Beweis von 7 b) $\mathcal{K}_T{}^{\perp} \setminus \ker V_T^{sf*} = \mathcal{K}_T{}^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) \neq 0\}$:
Nach 7 a) folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_T{}^{\perp} \setminus \ker V_T^{sf*} &= \mathcal{K}_T{}^{\perp} \setminus (\mathcal{K}_T{}^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = 0\}) \\ &= \mathcal{K}_T{}^{\perp} \setminus \{\kappa(X_T) = 0\} \\ &= \mathcal{K}_T{}^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Die Vektoren der Differenzmenge $\mathcal{K}_T{}^{\perp} \setminus \ker V_T^{sf*}$ sind also $\kappa$-normierbar.

Beweis von 7 c) $\ker V_T^{sf*} = \mathcal{M}_T{}^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = 0\}$:
„$\subseteq$“: Nach 1) gilt die Inklusion $\mathcal{M}_T \subseteq \mathcal{V}_T$, nach 3) (Beweisteil d von Abschnitt 5.3.5) gilt unter der Voraussetzung (DPsfT$\mathbf{1}_{\Omega}$+) oder der Voraussetzung eines Numéraires mit deterministischem $B_T$ die In-

klusion $\mathcal{E}_T \subseteq \mathcal{V}_T$. Wegen $\ker V_T^{sf*} = \mathcal{V}_T^\perp$ sind diese Inklusionen äquivalent zu den Inklusionen $\ker V_T^{sf*} = \mathcal{V}_T^\perp \subseteq \mathcal{E}_T^\perp$ und $\ker V_T^{sf*} = \mathcal{V}_T^\perp \subseteq \mathcal{M}_T^\perp$, also insgesamt äquivalent zur Inklusion

$$\ker V_T^{sf*} \subseteq \mathcal{M}_T^\perp \cap \mathcal{E}_T^\perp.$$

„⊇“: Für den Nachweis der umgekehrten Inklusion „⊇“ wählt man ein $Y_T \in \mathcal{M}_T^\perp \cap \mathcal{E}_T^\perp$ und ein beliebiges $X_T = V_T(h) \in \mathcal{V}_T$ ($h \in \mathcal{H}_N^{sf}$). Außerdem wählt man gemäß der Voraussetzung (DPsfT$\mathbf{1}_\Omega$+) eine sf-Duplikationsstrategie $k \in \mathcal{H}_N^{sf}$ von $\mathbf{1}_\Omega$ mit dem Startkapitaleinsatz $\kappa_0 := v_0(k) > 0$. Nach dem Beweisteil f) „⊇“ von Abschnitt 5.3.5 zur additiven Zerlegung $\mathcal{V}_0 + \mathcal{M}_T = \mathcal{V}_T$ besitzt $X_T$ die additive Zerlegung

$$X_T = W_0 + M_T$$

mit $W_0 = V_0(h)/\kappa_0 = \mathbf{1}_\Omega v_0(h)/\kappa_0 \in \mathcal{V}_0$ und $M_T \in \mathcal{M}_T$. Wegen $Y_T \in \mathcal{M}_T^\perp$ und $Y_T \in \mathcal{E}_T^\perp$ bzw. $\kappa(Y_T) = Y_T^\top \mathbf{1}_\Omega = 0$ folgt damit

$$\begin{aligned} Y_T^\top X_T &= Y_T^\top W_0 + Y_T^\top M_T \\ &= Y_T^\top \mathbf{1}_\Omega v_0(h)/\kappa_0 + 0 && (Y_T \in \mathcal{M}_T^\perp) \\ &= \kappa(Y_T)\, v_0(h)/\kappa_0 \\ &= 0 && (\kappa(Y_T) = 0), \end{aligned}$$

$Y_T \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf})^\perp = \ker V_T^{sf*}$ und $\mathcal{M}_T^\perp \cap \mathcal{E}_T^\perp \subseteq \ker V_T^{sf*}$.

Beweis von 7 d) $\mathcal{M}_T^\perp \setminus \ker V_T^{sf*} = \mathcal{M}_T^\perp \cap \{\kappa(X_T) \neq 0\}$:
Nach 7 c) folgt unter der Voraussetzung (DPsfT$\mathbf{1}_\Omega$+)

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_T^\perp \setminus \ker V_T^{sf*} &= \mathcal{M}_T^\perp \setminus (\mathcal{M}_T^\perp \cap \{\kappa(X_T) = 0\}) \\ &= \mathcal{M}_T^\perp \setminus \{\kappa(X_T) = 0\} \\ &= \mathcal{M}_T^\perp \cap \{\kappa(X_T) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Die Vektoren der Differenzmenge $\mathcal{M}_T^\perp \setminus \ker V_T^{sf*}$ sind somit $\kappa$-normierbar. Eine nicht verschwindende Komponentensumme besitzen also nicht nur die Vektoren der Differenzmenge $\mathcal{K}_T^\perp \setminus \ker V_T^{sf*}$, sondern auch die Vektoren der umfassenderen Differenzmenge $\mathcal{M}_T^\perp \setminus \ker V_T^{sf*}$. Im Alggemeinen kann aber in 7 b) und 7 d) die jeweilige Differenzmenge auch leer sein. Erst bei gültigem LOPsfT wird in 8) eine nichtleere Differenzmenge gesichert.

E) Beweis von 8) a) $V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T^\perp) = \mathcal{C}$, b) $V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T) \cap \mathcal{C} = O$, c) $V_T^{sf*}(\mathbb{R}^\Omega) = V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T) \oplus \mathcal{C}$:
a) Im Falle $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O$, d. h. nach Abschnitt 5.3.7 bei gültigem LOPsfT, ist nach der oben begründeten Dimensionsgleichung vi) (in Abschnitt 5.3.6 mit den Voraussetzungen (AWS$^\delta$) und (WS0,$T$-1)) der Unterraum $\ker V_T^{sf*}$ eine Hyperebene von $\mathcal{M}_T^\perp$ und somit die Differenzmenge $\mathcal{M}_T^\perp \setminus \ker V_T^{sf*}$ nichtleer. Zu einem $Z_T \in \mathcal{M}_T^\perp \setminus \ker V_T^{sf*} = \mathcal{M}_T^\perp \cap \{\kappa(X_T) \neq 0\}$ (nach 7 d unter der Voraussetzung DPsfT$\mathbf{1}_\Omega$+) erhält man das normierte

$$Y_T := \kappa_0 Z_T/\kappa(Z_T) \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0} := \mathcal{M}_T^\perp \cap \{\kappa(X_T) = \kappa_0\} \subseteq \mathcal{M}_T^\perp \setminus \ker V_T^{sf*}$$

mit $\kappa(Y_T) = \kappa_0 \neq 0$ und das zugehörige $V_T^{sf*}$-Bild $c := V_T^{sf*}(Y_T) \neq 0$. In Abschnitt 5.3.8 wird mit der Darstellung $\mathcal{A}_T = \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ gezeigt, dass dieser $\kappa$-normierte $\mathcal{M}_T$-Normalenvektor $Y_T$ ein Bewertungsvektor für die Zahlungsprofile $X_T \in \mathcal{V}_T$ ist.

Anzumerken ist hier noch, dass der Funktionswert $V_T^{sf*}(Y_T)$ unabhängig ist von der Wahl des $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$: Für $Y_T$, $Y_T$‘ $\in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ ist nämlich nach 7 c) $\Delta_T := Y_T' - Y_T \in \mathcal{M}_T^\perp \cap \{\kappa(X_T) = 0\} = \mathcal{M}_T^{\perp 0} = \ker V_T^{sf*}$ und somit

$$V_T^{sf*}(Y_T') = V_T^{sf*}(Y_T) + V_T^{sf*}(\Delta_T) = V_T^{sf*}(Y_T).$$

Aus der additiven Zerlegung

$$\mathcal{M}_T^{\perp} = \ker V_T^{sf^*} \oplus \operatorname{lin} Y_T$$

von $\mathcal{M}_T^{\perp}$ folgt für das $V_T^{sf^*}$-Bild von $\mathcal{M}_T^{\perp}$

$$\begin{aligned} V_T^{sf^*}(\mathcal{M}_T{}^{\perp}) &= V_T^{sf^*}(\ker V_T^{sf^*} + \operatorname{lin} Y_T) \\ &= V_T^{sf^*}(\ker V_T^{sf^*}) + V_T^{sf^*}(\operatorname{lin} Y_T) && \text{(Hilfssatz 5.10 a)} \\ &= V_T^{sf^*}(\operatorname{lin} Y_T) \\ &= \operatorname{lin} V_T^{sf^*}(Y_T) && (V_T^{sf^*} \text{ linear}) \\ &= \operatorname{lin} c =: \mathcal{C}. \end{aligned}$$

b) Der Beweis von 8 b) ergibt sich aus 8 a) $V_T^{sf^*}(\mathcal{M}_T{}^{\perp}) = \mathcal{C}$ und 6) $V_T^{sf^*}(\mathcal{M}_T) \cap V_T^{sf^*}(\mathcal{M}_T{}^{\perp}) = O$.

c) Der Beweis von 8 c) ergibt sich aus 6) $V_T^{sf^*}(\mathbb{R}^{\Omega}) = V_T^{sf^*}(\mathcal{M}_T) + V_T^{sf^*}(\mathcal{M}_T{}^{\perp})$ und 8 b).

Beweis von 12) a) $V_T^{sf^*}(\mathcal{M}_T{}^{\perp}) = O$, b) $V_T^{sf^*}(\mathbb{R}^{\Omega}) = V_T^{sf^*}(\mathcal{M}_T)$:

a) Im Falle $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T \neq O$ bzw. $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{M}_T$, d. h. bei ungültigem LOPsfT, ist nach der Dimensionsgleichung vi) von Abschnitt 5.3.6 $\mathcal{M}_T^{\perp} = \ker V_T^{sf^*}$ und somit $V_T^{sf^*}(\mathcal{M}_T{}^{\perp}) = O$.

b) Aus 6) $V_T^{sf^*}(\mathbb{R}^{\Omega}) = V_T^{sf^*}(\mathcal{M}_T) + V_T^{sf^*}(\mathcal{M}_T{}^{\perp})$ folgt mit 12 a) die Aussage 12 b) $V_T^{sf^*}(\mathbb{R}^{\Omega}) = V_T^{sf^*}(\mathcal{M}_T)$.

F) Beweis von 9) $V_T^{sf^{*-1}}(\mathcal{C}) = \mathcal{M}_T^{\perp}$:

„$\supseteq$“: Im Falle $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O$ ist nach 8 a) $V_T^{sf^*}(\mathcal{M}_T{}^{\perp}) = \mathcal{C}$ und somit $\mathcal{M}_T^{\perp} \subseteq V_T^{sf^{*-1}}(\mathcal{C})$.

„$\subseteq$“: Für ein beliebiges $X_T \in \mathbb{R}^{\Omega} = \mathcal{M}_T + \mathcal{M}_T^{\perp}$ ist

$$X_T = Z_T + W_T \text{ mit } Z_T \in \mathcal{M}_T \text{ und } W_T \in \mathcal{M}_T^{\perp}.$$

Nach 8 a) gilt dabei $V_T^{sf^*}(W_T) \in \mathcal{C}$, wobei $\mathcal{C} := \operatorname{lin}\{c\}$ und $c := V_T^{sf^*}(Y_T)$ mit einem $Y_T \in \mathcal{M}_T{}^{\perp\kappa_0}$ ist.

Speziell für ein $X_T \in V_T^{sf^{*-1}}(\mathcal{C})$, d. h. für ein $X_T \in \mathbb{R}^{\Omega}$ mit $V_T^{sf^*}(X_T) \in \mathcal{C}$, folgt dann mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\lambda c = V_T^{sf^*}(X_T) = V_T^{sf^*}(Z_T) + V_T^{sf^*}(W_T) = V_T^{sf^*}(Z_T) + \mu c$$

bzw. mit 8 b) die Inzidenz

$$(\lambda - \mu)c = V_T^{sf^*}(Z_T) \in \mathcal{C} \cap V_T^{sf^*}(\mathcal{M}_T) = O,$$

weiter mit 2) $\ker V_T^{sf^*} \subseteq \mathcal{M}_T^{\perp}$

$$Z_T \in \ker V_T^{sf^*} \cap \mathcal{M}_T \subseteq \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \mathcal{M}_T = O,$$

$Z_T = 0$ und $X_T = W_T \in \mathcal{M}_T^{\perp}$. Damit ist auch die Inklusion $V_T^{sf^{*-1}}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{M}_T^{\perp}$ nachgewiesen.

Beweis von 10) $V_T^{sf^{*-1}}(\mathcal{C} \setminus O) = \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) \neq 0\}$:

Nach 9) und 7 d) folgt

$$\begin{aligned} V_T^{sf^{*-1}}(\mathcal{C} \setminus O) &= V_T^{sf^{*-1}}(\mathcal{C}) \setminus V_T^{sf^{*-1}}(O) = \mathcal{M}_T^{\perp} \setminus \ker V_T^{sf^*} \\ &= \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Beweis von 11) $V_T^{sf^{*-1}}(\{c\}) = \mathcal{M}_T{}^{\perp\kappa_0}$:

Im Falle $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O$ hat man nach Beweisteil E, a) unter der Voraussetzung (ZVU) für $\mathcal{M}_T^{\perp}$ die additive Zerlegung

$$\mathcal{M}_T^{\perp} = \ker V_T^{sf^*} \oplus \operatorname{lin} Y_T$$

mit einem festen $Y_T \in \mathcal{M}_T{}^{\perp\kappa_0} = \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = \kappa_0\} \subseteq \mathcal{M}_T^{\perp} \setminus \ker V_T^{sf^*}$, dessen Funktionswert $c = V_T^{sf^*}(Y_T) \neq 0$ nach E, a) unabhängig von der Wahl des $Y_T \in \mathcal{M}_T{}^{\perp\kappa_0}$ ist.

„$\subseteq$“: Für ein beliebiges $X_T \in V_T^{sf^{*-1}}(\{c\}) \subseteq V_T^{sf^{*-1}}(\mathcal{C}) = \mathcal{M}_T^{\perp}$ erhält man daher die Darstellung

$$X_T = Z_T + \lambda Y_T \text{ mit } Z_T \in \ker V_T^{sf^*},\ \lambda \in \mathbb{R},$$

und für seinen Funktionswert die Gleichung

$$c = V_T^{sf^*}(X_T) = V_T^{sf^*}(Z_T) + \lambda V_T^{sf^*}(Y_T) = 0 + \lambda c = \lambda c \qquad (V_T^{sf^*}(Y_T) = c),$$

also $\lambda = 1$, $X_T = Z_T + Y_T$, nach 7 c) $\kappa(Z_T) = 0$, dann

$$\kappa(X_T) = \kappa(Z_T) + \kappa(Y_T) = 0 + \kappa_0 = \kappa_0$$

und $X_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$.

„$\supseteq$“: Für ein beliebiges $X_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0} \subseteq \mathcal{M}_T^{\perp}$ erhält man mit obiger Zerlegung $\mathcal{M}_T^{\perp} = \ker V_T^{sf^*} \oplus \operatorname{lin} Y_T$, $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$, $c = V_T^{sf^*}(Y_T)$, die Darstellung

$$X_T = Z_T + \lambda Y_T \text{ mit } Z_T \in \ker V_T^{sf^*},\ \lambda \in \mathbb{R},$$

nach 7 c) $\kappa(Z_T) = 0$, weiter

$$\kappa_0 = \kappa(X_T) = \kappa(Z_T) + \lambda\cdot\kappa(Y_T) = 0 + \lambda\cdot\kappa_0 = \lambda\cdot\kappa_0,$$
$$\lambda = 1,\ X_T = Z_T + Y_T,$$
$$V_T^{sf^*}(X_T) = V_T^{sf^*}(Z_T) + V_T^{sf^*}(Y_T) = 0 + c = c$$

und $X_T \in V_T^{sf^*-1}(\{c\})$. Insgesamt ist damit gezeigt, dass die $V_T^{sf^*}$-Urbildmenge von $c$ durch den affinen Unterraum

$$\mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0} = \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = \kappa_0\} = Y_T + \ker V_T^{sf^*}$$

(mit festem $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$) gegeben ist.

Beweis von II): Die Begründung der Aussagen für das relative Marktmodell erfolgt analog zu den Aussagen für das ursprüngliche Marktmodell, jetzt aber unter Verwendung der Identität $\tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{K}}_T$ und der Normierung $\kappa(\tilde{Y}_T) = 1$ für den relativen Bewertungsvektor $\tilde{Y}_T$. Zu beachten ist, dass die Voraussetzung von (ZVU) oder eines deterministischen $B_T$ hier nicht benötigt wird. □

## 5.3.7 Charakterisierungen des LOPsfT mittels einer direkten Summe

Unter der Voraussetzung von (ZVU) oder spezieller eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ kann mittels einer additiven Zerlegung des Raums $\mathcal{V}_T = V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ der sf-duplizierbaren Zahlungsprofile das LOPsfT durch die spezielle **Lagebeziehung** der hierbei auftretenden Unterräume charakterisiert werden, nämlich dass die Unterräume $\mathcal{V}_0$ und $\mathcal{M}_T$ nur den trivialen Durchschnitt besitzen bzw. dass der Bildraum $\mathcal{V}_T$ der Abbildung $V_T$ die direkte Summe der Unterräume $\mathcal{V}_0$ und $\mathcal{M}_T$ ist. Die entsprechenden Charakterisierungen gelten auch im relativen Marktmodell, wobei hier die Voraussetzung (ZVU) nicht benötigt wird.

**Charakterisierung des LOPsfT durch den trivialen Durchschnitt von $\tilde{\mathcal{V}}_0$ und $\tilde{\mathcal{M}}_T$ bzw. von $\mathcal{V}_0$ und $\mathcal{M}_T$**

1) **Im relativen Marktmodell** (oder allgemeiner in einem Marktmodell mit konstantem Numéraire) gilt ohne die Voraussetzung (ZVU):

$$\text{(LOPsfT)} \quad \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{V}}_0 \cap \tilde{\mathcal{M}}_T = O$$
$$\Leftrightarrow \tilde{\mathcal{V}}_0 \oplus \tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{V}}_T.$$

2) **Im ursprünglichen Marktmodell** gilt unter der Voraussetzung von (ZVU) oder spezieller eines Numéraires mit deterministischem $B_T$:

$$\text{(LOPsfT)} \quad \Leftrightarrow \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{M}_T = \mathcal{V}_T.$$

**Beweis**: 1) a) „(LOPsfT) $\Leftrightarrow \tilde{\mathcal{V}}_0 \cap \tilde{\mathcal{M}}_T = O$“:

„$\Leftarrow$“: Im Falle $\tilde{\mathcal{V}}_0 \cap \tilde{\mathcal{M}}_T = O$ besitzt jeder Vektor $\tilde{X}_T \in \tilde{\mathcal{V}}_T = \tilde{\mathcal{V}}_0 \oplus \tilde{\mathcal{M}}_T$ (siehe Hilfssatz 5.11, II 5 von Abschnitt 5.3.6) nur eine einzige additive Zerlegung[43]

$$\tilde{X}_T = \tilde{Y}_T + \tilde{Z}_T \text{ mit } \tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{V}}_0,\ \tilde{Z}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T.$$

Insbesondere ist dann für jede sf-Duplikationsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ von $\tilde{X}_T \in \tilde{\mathcal{V}}_T = \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ in der durch (SF$\tilde{\text{V}}$) gegebenen additiven Zerlegung

$$\tilde{X}_T = \tilde{V}_T(h) = \tilde{V}_0(h) + \tilde{K}_T(h) \text{ mit } \tilde{V}_0(h) \in \tilde{\mathcal{V}}_0,\ \tilde{K}_T(h) \in \tilde{\mathcal{K}}_T = \tilde{\mathcal{M}}_T$$

der erste Summand $\tilde{V}_0(h)$ eindeutig durch $\tilde{X}_T$ bestimmt. Somit gilt in $\tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ das LOPsfT.

„$\Rightarrow$“: Nach Beweisteil a) von Abschnitt 5.3.5 ist $\mathbf{1}_\Omega = \tilde{V}_T(k)$ mittels einer sf-Handelsstrategie $k \in \mathcal{H}_N^{sf}$ mit $\tilde{V}_0(k) = 1$ und $\tilde{K}_T(k) = 0$. Daher ist

$$\mathbf{1}_\Omega = \tilde{V}_T(k) = \tilde{V}_0(k) \in \tilde{\mathcal{V}}_T \cap \tilde{\mathcal{V}}_0$$

und $\tilde{\mathcal{V}}_0 = \text{lin}\,\mathbf{1}_\Omega = \mathcal{E}$. Bei gültigem LOPsfT ist wegen $\tilde{V}_0(k) = 1 \neq 0$ außerdem

$$\mathbf{1}_\Omega \notin \{\tilde{V}_T(g) : g \in \mathcal{H}_N^{sf},\ \tilde{V}_0(g) = 0\} = \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker \tilde{V}_0) = \tilde{\mathcal{M}}_T,$$

also $\tilde{\mathcal{V}}_0 = \text{lin}\,\mathbf{1}_\Omega \not\subseteq \tilde{\mathcal{M}}_T$ und somit $\tilde{\mathcal{V}}_0 \cap \tilde{\mathcal{M}}_T = O$.

b) „(LOPsfT) $\Leftrightarrow \tilde{\mathcal{V}}_0 \oplus \tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{V}}_T$“: Da nach Abschnitt 5.3.5 stets die additive Zerlegung $\tilde{\mathcal{V}}_0 + \tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{V}}_T$ besteht, liegt hierbei die direkte Summe $\tilde{\mathcal{V}}_0 \oplus \tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{V}}_T$ genau dann vor, wenn nur der triviale Durchschnitt $\tilde{\mathcal{V}}_0 \cap \tilde{\mathcal{M}}_T = O$ auftritt bzw. nach a) das LOPsfT gilt.

2) a) „(LOPsfT) $\Leftrightarrow \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O$“:

1. Beweis unter Verwendung der Voraussetzung (ZVU):

„$\Leftarrow$“: Nach Beweisteil f) „$\supseteq$“ von Abschnitt 5.3.5 besitzt unter der Voraussetzung (ZVU) jedes sf-duplizierbare Zahlungsprofil $X_T = V_T(h) \in \mathcal{V}_T$ ($h \in \mathcal{H}_N^{sf}$) auch eine additive Zerlegung in $\mathcal{V}_0 + \mathcal{M}_T$:

$$X_T = V_T(h) = W_0(h) + M_T(h) \in \mathcal{V}_0 + \mathcal{M}_T$$

mit

$$W_0(h) = V_0(h)/\kappa_0 \in \mathcal{V}_0 \qquad (\kappa_0 \neq 0),$$
$$M_T(h) = V_T(h) - W_0(h) \in \mathcal{M}_T.$$

Bei Voraussetzung des trivialen Durchschnitts $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O$ besitzt $X_T \in \mathcal{V}_T = \mathcal{V}_0 + \mathcal{M}_T$ (nach Beweisteil f „$\supseteq$“ von Abschnitt 5.3.5 unter der Voraussetzung (ZVU)) nur eine einzige additive Zerlegung $X_T = U_T + W_T$ ($U_T \in \mathcal{V}_0$, $W_T \in \mathcal{M}_T$), sodass insbesondere $W_0(h)$ bzw. der Startkapitaleinsatz $V_0(h)$ für alle sf-Duplikationsstrategien $h$ von $X_T$ konstant ist. Dies bedeutet die Gültigkeit von LOPsfT.

„$\Rightarrow$“: Gemäß der Voraussetzung (DPsfT$\mathbf{1}_\Omega$+) besitzt das spezielle Zahlungsprofil $\mathbf{1}_\Omega$ eine sf-Duplikationsstrategie $k$ mit einem Startkapitaleinsatz $v_0(k) > 0$. Bei gültigem LOPsfT gibt es dann für $\mathbf{1}_\Omega$ keine sf-Duplikationsstrategie $g$ mit dem Startkapitaleinsatz $v_0(g) = 0 \neq v_0(k)$. Damit folgt

---

[43] Eine Begründung für diese Charakterisierung der direkten Summe durch die Einzigkeit der elementweisen additiven Zerlegung und Literaturhinweise findet man in Beweisteil E von Satz 3.3 in Abschnitt 3.4.1.

$$\mathbf{1}_\Omega \notin \{V_T(g) : g \in \mathcal{H}_N^{sf} \text{ mit } V_0(g) = 0\} = \mathcal{M}_T,$$

mit den Voraussetzungen (AWS$^\delta$) und (WS0,$T$-1) dann nach Beweisteil c) von Abschnitt 5.3.5

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{E}_T = \text{lin } \mathbf{1}_\Omega \notin \mathcal{M}_T$$

und $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O$.

2. Beweis mit der Voraussetzung eines Numéraires $S^N = B > 0$ mit deterministischem $B_T$:
Unter Verwendung der nach Abschnitt 5.1.7 bei deterministischem $B_T$ geltenden Mengenidentitäten $\tilde{\mathcal{V}}_T = \mathcal{V}_T$, $\tilde{\mathcal{M}}_T = \mathcal{M}_T$ und $\tilde{\mathcal{V}}_0 = \mathcal{V}_0$ können die Aussagen zum trivialen Durchschnitt und zur direkten Summe der Unterräume $\mathcal{V}_0$ und $\mathcal{M}_T$ für das ursprüngliche Marktmodell vom relativen Marktmodell übertragen werden.

b) „(LOPsfT) $\Leftrightarrow \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{M}_T = \mathcal{V}_T$“:
Da nach Abschnitt 5.3.5, Beweisteil f) unter der Voraussetzung von (ZVU) oder eines Numéraires $S^N = B > 0$ mit deterministischem $B_T$ die additive Zerlegung $\mathcal{V}_0 + \mathcal{M}_T = \mathcal{V}_T$ gilt, liegt die direkte Summe $\mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{M}_T = \mathcal{V}_T$ genau dann vor, wenn nur der triviale Durchschnitt $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O$ auftritt bzw. nach 2, a) das LOPsfT gilt. □

Aus der Charakterisierung des LOPsfT mit dem trivialen Unterraumdurchschnitt $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O$ erhält man zusammen mit den in Abschnitt 5.3.6 hergeleiteten Dimensionsgleichungen (analog zum Vorgehen in den Beweisteilen H und I von Satz 3.3) die weitere Charakterisierung des LOPsfT durch Dimensionsgleichungen. Dabei wird im ursprünglichen Marktmodell die Voraussetzung (ZVU) oder spezieller ein Numéraire $B = S^N > 0$ mit deterministischem $B_T$ für den Nachweis von $\mathcal{V}_0 = \mathcal{E}_T \neq O$ und der additiven Zerlegung $\mathcal{V}_0 + \mathcal{M}_T = \mathcal{V}_T$ benötigt.

**Charakterisierung des LOPsfT durch Dimensionsgleichungen**

1) **Im relativen Marktmodell** (oder allgemeiner in einem Marktmodell mit konstantem Numéraire) gilt ohne die Voraussetzung (ZVU):

$$\begin{aligned}\text{(LOPsfT)} \quad &\Leftrightarrow \dim \tilde{\mathcal{M}}_T = \dim \tilde{\mathcal{V}}_T - 1\\ &\Leftrightarrow \dim \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} = \dim \ker \tilde{V}_T^{sf*} + 1.\end{aligned}$$

2) **Im ursprünglichen Marktmodell** gilt unter der Voraussetzung von (ZVU) oder spezieller eines Numéraires mit deterministischem $B_T$:

$$\begin{aligned}\text{(LOPsfT)} \quad &\Leftrightarrow \dim \mathcal{M}_T = \dim \mathcal{V}_T - 1\\ &\Leftrightarrow \dim \mathcal{M}_T^{\perp} = \dim \ker V_T^{sf*} + 1.\end{aligned}$$

Aus der Inklusion $\ker V_T^{sf*} \subseteq \mathcal{M}_T^{\perp}$ bzw. $\ker \tilde{V}_T^{sf*} \subseteq \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ (nach Hilfssatz 5.11, I, 2 und II, 2 in Abschnitt 5.3.6) und obiger Dimensionsgleichung vi) für $\mathcal{M}_T^{\perp}$ bzw. $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ ergibt sich die folgende Charakterisierung des LOPsfT durch spezielle Unterraumstrukturen von $\mathcal{M}_T^{\perp}$ und $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$, nämlich dass $\ker V_T^{sf*}$ eine Hyperebene von $\mathcal{M}_T^{\perp}$ bzw. $\ker \tilde{V}_T^{sf*}$ eine Hyperebene von $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ ist. Dies bedeutet auch eine nichtleere Mengendifferenz $\mathcal{M}_T^{\perp} \setminus \ker V_T^{sf*}$ bzw. $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \setminus \ker \tilde{V}_T^{sf*}$ und die Darstellung von $\mathcal{M}_T^{\perp}$ bzw. $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$ als direkte Summe. Weiter ergibt sich die Charakterisierung mittels der Existenz eines speziell $\kappa$-normierten $\mathcal{M}_T$-Normalen-

vektors bzw. $\tilde{\mathcal{M}}_T$-Normalenvektors mit Hilfssatz 5.11, I, 7d bzw. II, 7b von Abschnitt 5.3.6.

**Charakterisierung des LOPsfT durch eine direkte Summe und durch einen $\kappa$-normierten $\tilde{\mathcal{M}}_T$-Normalenvektor bzw. $\mathcal{M}_T$-Normalenvektor**

1) **Im relativen Marktmodell** (oder allgemeiner in einem Marktmodell mit konstantem Numéraire) gilt ohne die Voraussetzung (ZVU):

$$\begin{aligned}(\text{LOPsfT}) &\Leftrightarrow \quad \exists\, \tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \setminus \ker \tilde{V}_T^{sf*} \text{ mit } \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} = \ker \tilde{V}_T^{sf*} \oplus \operatorname{lin} \tilde{Y}_T \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, \tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}.\end{aligned}$$

2) **Im ursprünglichen Marktmodell** gilt unter der Voraussetzung von (ZVU) oder spezieller eines Numéraires mit deterministischem $B_T$:

$$\begin{aligned}(\text{LOPsfT}) &\Leftrightarrow \quad \exists\, Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp} \setminus \ker V_T^{sf*} \text{ mit } \mathcal{M}_T^{\perp} = \ker V_T^{sf*} \oplus \operatorname{lin} Y_T \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0}.\end{aligned}$$

Bei der Charakterisierung des LOP im Spezialfall der endfälligen Zahlungsprofilen zeigen sich also analoge geometrische Verhältnisse wie bei den allgemeinen Zahlungsprofilen in Abschnitt 3.4, indem an die Stelle der Unterräume $L(\mathcal{H}_N)$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{V}$, $\ker L^*$, $\mathcal{M}^{\perp}$, $\operatorname{lin} \Psi$ der allgemeinen Zahlungsprofile in $\mathcal{W}$ hier jetzt die Unterräume $\mathcal{V}_T$, $\mathcal{M}_T$, $\mathcal{V}_0$, $\ker V_T^{sf*}$, $\mathcal{M}_T^{\perp}$, $\operatorname{lin} Y_T$ von $\mathbb{R}^{\Omega}$ treten. Bei den Aussagen im ursprünglichen Marktmodell werden hier die zusätzlichen Voraussetzungen (ZVU) oder spezieller die Existenz eines Numéraires $B = S^N > 0$ mit deterministischem $B_T$ verwendet.

### 5.3.8 Vielfalt der Bewertungsvektoren

**Existenz eines Bewertungsvektors für die Preisberechnung im ursprünglichen Marktmodell**

In Abschnitt 5.3.3 wurde bei gültigem LOP von einem Bewertungsprozess $\Psi \in \mathcal{A}$ auch die Existenz eines Bewertungsvektors $\Psi_T \in \mathbb{R}^{\Omega}$ abgeleitet. Weiter wurde dort aus den Preisgleichungen (PG$\Psi_T$) für einen Bewertungsvektor $\Psi_T$ die Inzidenz

$$\Psi_T \in \mathcal{M}_T^{\perp}$$

hergeleitet. Außerdem wurde in Abschnitt 5.3.3 bei gültigem LOPsfT ohne weitere Voraussetzungen durch die Anwendung des Rieszschen Darstellungssatzes auf die lineare Preisfunktion $\pi(X_T)$ die Existenz eines eindeutig bestimmten *sf-duplizierbaren* Bewertungsvektors $\vartheta_T \in \mathcal{V}_T \cap \mathcal{M}_T^{\perp}$ begründet, mit dem die Preisgleichungen (PG$\vartheta_T$) gelten und somit die Preise der sf-duplizierbaren Zahlungsprofile $X_T \in \mathcal{V}_T = V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ als Skalarprodukt $\pi(X_T) = \vartheta_T^{\top} X_T$ berechnet werden können.

**Verschiedene Darstellungen der Menge $\mathcal{A}_T$ der Bewertungsvektoren im ursprünglichen Marktmodell**

Zunächst erhält man die folgende Aussage zur Struktur der Menge $\mathcal{A}_T$ der Bewertungsvektoren (Definition in Abschnitt 5.3.3), nämlich mittels einer additiven Zerlegung (Dekomposition) als affinen Unterraum bzw. als Restklasse[44] (lineare Mannigfaltigkeit) des Unterraums $\ker V_T^{sf*}$ ($\subseteq \mathcal{M}_T^{\perp}$ nach Abschnitt 5.3.6):

**Additive Zerlegung der Menge $\mathcal{A}_T$**

Bei gültigem LOPsfT ist die Menge $\mathcal{A}_T$ aller Bewertungsvektoren im ursprünglichen Marktmodell gegeben durch den affinen Unterraum

$$\mathcal{A}_T = \vartheta_T + \ker V_T^{sf*} \quad (\neq \emptyset)$$

mit einem fest gewählten Bewertungsvektor $\vartheta_T \in \mathcal{M}_T^{\perp}$ (Existenz nach Abschnitt 5.3.3) und der Richtung (Translationsunterraum) $\ker V_T^{sf*}$ ($\subseteq \mathcal{M}_T^{\perp}$).

**Beweis:** Bei gültigem LOPsfT sei nun neben einem Bewertungsvektor $\vartheta_T \in \mathcal{A}_T \subseteq \mathcal{M}_T^{\perp}$ (Existenz nach Abschnitt 5.3.3 auch ohne die Voraussetzung (AWS$^{\delta}$)) noch ein beliebiger weiterer Bewertungsvektor $Y_T \in \mathcal{A}_T$ für die sf-duplizierbaren Zahlungsprofile $X_T \in \mathcal{V}_T$ gegeben. Dies bedeutet, dass auch mit $Y_T$ Preisgleichungen gelten:

$$Y_T^{\top} X_T = \pi(X_T) \quad \forall\, X_T \in \mathcal{V}_T.$$

Für den Differenzvektor $\Delta := Y_T - \vartheta_T$ und jedes beliebige $X_T \in \mathcal{V}_T$ gilt dann die Relation

$$\Delta^{\top} X_T = Y_T^{\top} X_T - \vartheta_T^{\top} X_T = \pi(X_T) - \pi(X_T) = 0,$$

also $\Delta \in \mathcal{V}_T^{\perp} = \ker V_T^{sf*} \subseteq \mathcal{M}_T^{\perp}$ und somit

$$Y_T = \vartheta_T + \Delta \in \vartheta_T + \ker V_T^{sf*} \subseteq \mathcal{M}_T^{\perp}.$$

---

[44] Literatur zur Restklasse, linearen Mannigfaltigkeit bzw. zum affinen Unterraum: Wagner (1981), S. 101, 216, Teubner-Taschenbuch (1996), Bd. 1, S. 675, Lexikon der Mathematik (2000), Bd. 1, S. 30–31.

Der Bewertungsvektor $Y_T$ liegt somit in der Menge

$$\vartheta_T + \ker V_T^{sf*} = \{\vartheta_T + \Delta : \Delta \in \ker V_T^{sf*}\},$$

die als Minkowski-Summe des speziellen Bewertungsvektors $\vartheta_T \in \mathcal{M}_T^{\perp}$ und des linearen Unterraums $\ker V_T^{sf*} \subseteq \mathcal{M}_T^{\perp}$ ein affiner Unterraum von $\mathcal{M}_T^{\perp}$ mit der Richtung (dem Translationsunterraum der Verbindungsvektoren des affinen Unterraums) $\ker V_T^{sf*}$ ist.

Umgekehrt ist auch jedes $Y_T \in \vartheta_T + \ker V_T^{sf*}$, also $Y_T = \vartheta_T + \Delta$ mit beliebig gewähltem $\Delta \in \ker V_T^{sf*} = \mathcal{V}_T^{\perp}$, ein Bewertungsvektor für die $X_T \in \mathcal{V}_T$, da mit ihm die Preisgleichungen gelten:

$$Y_T^{\top} X_T = Y_T^{\top} \vartheta_T + \Delta^{\top} X_T = \pi(X_T) + 0 = \pi(X_T) \quad \forall X_T \in \mathcal{V}_T. \qquad \square$$

Analog zu den Aussagen von Satz 5.8, c) in Abschnitt 5.2.4 und Satz 5.9, b) in Abschnitt 5.2.5 zur Maximalzahl von affin unabhängigen Diskontvektoren in einem sf-arbitragefreien Marktmodell wird jetzt eine Aussage zur Maximalzahl von affin unabhängigen Bewertungsvektoren in einem Marktmodell mit gültigem LOPsfT bewiesen. Insbesondere erfolgt (für $p = 0$) die Charakterisierung der sf-Vollständigkeit eines Marktmodells mit LOPsfT durch die Existenz von genau einem Bewertungsvektor.

**Maximalanzahl affin unabhängiger Bewertungsvektoren im ursprünglichen Marktmodell**

Gilt im Marktmodell das LOPsfT und ist $p := \dim \ker V_T^{sf*}$ die Dimension des Kerns der linearen Abbildung $V_T^{sf*}: \mathcal{H}_N^{sf} \longrightarrow \mathbb{R}^{\Omega}$, so ist $p + 1$ die Maximalanzahl affin unabhängiger Bewertungsvektoren

$$Y_T^i \in \vartheta_T + \ker V_T^{sf*} = \mathcal{A}_T \qquad (i = 0,\ldots,p).$$

Spezialfall $p = 0$: Das Marktmodell mit gültigem LOPsfT ist genau dann sf-vollständig ($\ker V_T^{sf*} = O$ nach Abschnitt 5.2.3), wenn genau ein Bewertungsvektor existiert:

$$\left|\mathcal{A}_T\right| = 1.$$

**Beweis:** Ist $p := \dim \ker V_T^{sf*}$ die Dimension des linearen Unterraums $\ker V_T^{sf*}$ von $\mathbb{R}^{\Omega}$, so gibt es (maximal) $p$ linear unabhängige Vektoren $Z_T^i$ $(i = 1,\ldots,p)$ im Unterraum $\ker V_T^{sf*} \subseteq \mathcal{M}_T^{\perp}$. Wählt man nun bei gültigem LOPsfT einen festen Bewertungsvektor $Y_T \in \vartheta_T + \ker V_T^{sf*}$ ($\vartheta_T$ Bewertungsvektor von Abschnitt 5.3.3) und setzt man noch $Z_T^0 := 0$, so erhält man mit den Vektoren

$$Y_T^i := Y_T + Z_T^i \in \vartheta_T + \ker V_T^{sf*} \qquad (i = 0,\ldots,p)$$

die $p + 1$ affin unabhängigen[45] Bewertungsvektoren $Y_T^i$.

Als Spezialfall für $p = 0$ ergibt sich die Aussage, dass das Marktmodell mit gültigem LOPsfT genau dann sf-vollständig ist ($\ker V_T^{sf*} = O$ nach Abschnitt 5.2.3), wenn genau ein einziger Bewertungsvektor $\vartheta_T$ existiert:

$$(\text{LOPsfT}) \wedge (\text{VSsfT}) \Leftrightarrow \left|\vartheta_T + \ker V_T^{sf*}\right| = 1.$$

[45] Literatur zur Definition der affinen Unabhängigkeit, linearen Unabhängigkeit, einer Basis und der Dimension eines Vektorraums: Lexikon der Mathematik, Bd. 1 (2000), S. 29, 169, 419, Bd. 3 (2001), S.287f.

Diese Aussage ist eine Verallgemeinerung von Satz 5.9, b) in Abschnitt 5.2.5, wobei hier statt der sf-Arbitragefreiheit (AFsf) nur das Law of One Price LOPsfT vorausgesetzt wird. □

Unter der Voraussetzung (ZVU) oder spezieller eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ kann nun noch eine weitere Darstellung der Menge $\mathcal{A}_T$ der Bewertungsvektoren mittels einer inhomogen linearen Gleichung angegeben werden. Bei gültigem LOPsfT ist nämlich nach der LOPsfT-Charakterisierung mittels Unterraum-Strukturen von Abschnitt 5.3.7 zunächst die Menge $\mathcal{M}_T^{\perp} \setminus \ker V_T^{sf*}$ nichtleer, dann nach der Mengenidentität von Hilfssatz 5.11, I, 7 d) die Menge $\mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) \neq 0\}$ nichtleer und schließlich auch der affine Unterraum

$$\mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0} := \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = \kappa_0\} \qquad (\kappa_0 \neq 0)$$

der auf die Komponentensumme $\kappa(X_T) = \kappa_0$ normierten $\mathcal{M}_T$-Normalenvektoren nichtleer (die Konstante $\kappa_0 := v_0(k)$ ist dabei nach der Voraussetzung DPsfT$\mathbf{1}_\Omega$+ in Abschnitt 5.3.5 der Startkapitaleinsatz einer sf-Duplizierung $V_T(k) = \mathbf{1}_\Omega$, $k \in \mathcal{H}_N^{sf}$):

$$\text{(ZVU), (LOPsfT)} \Rightarrow \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0} \neq \emptyset.$$

Es wird nun gezeigt, dass jeder Vektor $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ ein Bewertungsvektor für die $X_T \in \mathcal{V}_T$ ist und dieser affine Unterraum $\mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ mit der Menge $\mathcal{A}_T$ der Bewertungsvektoren übereinstimmt. Unter der Voraussetzung (ZVU) ist wegen $\mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0} \neq \emptyset$ damit auch ein weiterer Nachweis für die Existenz eines Bewertungsvektors gegeben.

**Gleichungsdarstellung der Menge $\mathcal{A}_T$**

Bei gültigem LOPsfT und unter der Voraussetzung (ZVU) oder spezieller der Voraussetzung eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ ist die Menge $\mathcal{A}_T$ der Bewertungsvektoren auch gegeben durch die Menge der auf die Komponentensumme $\kappa(Y_T) = \kappa_0$ $\kappa$-normierten Normalenvektoren von $\mathcal{M}_T$:

$$\mathcal{A}_T = \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0} \quad (\neq \emptyset).$$

**Beweis:** a) „$\mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0} \subseteq \mathcal{A}_T$“: Es sei das (LOPsfT) gültig, die Voraussetzung (ZVU) erfüllt und $\kappa_0 := \pi(\mathbf{1}_\Omega) \neq 0$ (genügt hier anstelle $\kappa_0 > 0$). Weiter sei $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ ($\neq \emptyset$ nach obiger Vorüberlegung). Zu einem beliebigen $X_T = V_T(h) \in \mathcal{V}_T$ ($h \in \mathcal{H}_N^{sf}$) mit $\pi(X_T) = v_0(h)$ wählt man den Vektor

$$W_0 := \mathbf{1}_\Omega \cdot \pi(X_T)/\kappa_0 \qquad (\kappa_0 \neq 0)$$
$$\in \mathcal{E}_T = \operatorname{lin} \mathbf{1}_\Omega = \mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_T \qquad \text{(DPsfT}\mathbf{1}_\Omega\text{+, AWS}^\delta\text{, WS0,}T\text{-1, Abschnitt 5.3.5)}$$

und den Differenzvektor

$$M_T := X_T - W_0 \in \mathcal{V}_T.$$

Es gilt

$$\pi(W_0) = \pi(\mathbf{1}_\Omega)\pi(X_T)/\kappa_0 = \pi(X_T) \qquad (\pi(\mathbf{1}_\Omega) = \kappa_0 \text{ bei LOPsfT}),$$
$$\pi(M_T) = \pi(X_T) - \pi(W_0) = 0$$

und nach Abschnitt 5.3.2

$$M_T \in \mathcal{V}_T \cap \{\pi(X_T) = 0\} = \mathcal{M}_T.$$

Damit erhält man für $X_T$ die (nach Abschnitt 5.3.7, Beweisteil 2, b bei gültigem LOPsfT bzw. bei $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O$ eindeutig bestimmte) additive Zerlegung

$$X_T = W_0 + M_T \in \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{M}_T$$

und das Skalarprodukt

$$Y_T^{\top} X_T = Y_T^{\top} W_0 + Y_T^{\top} M_T$$

$$= Y_T^{\top}\mathbf{1}_\Omega \pi(X_T)/\kappa_0 + 0 \qquad (Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp})$$
$$= \kappa(Y_T)\pi(X_T)/\kappa_0$$
$$= \pi(X_T) \qquad (\kappa(Y_T) = \kappa_0 \text{ wg. } Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}),$$

sodass $Y_T$ ein Bewertungsvektor ist, der die Preisgleichungen (PG$Y_T$) für die $X_T \in \mathcal{V}_T$ liefert: $Y_T \in \mathcal{A}_T$.

b) „$\mathcal{A}_T \subseteq \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ “: Bei gültigem LOPsfT wurde in Abschnitt 5.3.3 für einen beliebigen Bewertungsvektor $Y_T \in \mathcal{A}_T$ mittels der Preisgleichungen speziell für die NE-Zahlungsprofile die Inzidenz $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp}$ begründet: $\mathcal{A}_T \subseteq \mathcal{M}_T^{\perp}$. Darüber hinaus wurde unter der Voraussetzung von (ZVU) (auch mit $\kappa_0 \neq 0$ anstelle $\kappa_0 > 0$) oder eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ in Abschnitt 5.3.3 noch begründet, dass mit dem Preis $\pi(\mathbf{1}_\Omega) = \kappa_0$ des Zahlungsprofils $\mathbf{1}_\Omega$ für jeden Bewertungsvektor $Y_T$ die Inzidenz $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ gilt. Damit ist auch die Inklusion $\mathcal{A}_T \subseteq \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ nachgewiesen. □

Eine weitere Darstellung der Menge $\mathcal{A}_T$ erhält man mittels der Mengenidentität von Hilfssatz 5.11, 11) $\mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0} = V_T^{sf^*-1}(\{c\})$ in Abschnitt 5.3.6 als Urbildmenge.

**Urbilddarstellung der Menge $\mathcal{A}_T$**

Bei gültigem LOPsfT und unter der Voraussetzung (ZVU) oder spezieller der Voraussetzung eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ ist die Menge $\mathcal{A}_T$ der Bewertungsvektoren auch gegeben durch die $V_T^{sf^*}$-Urbildmenge des $V_T^{sf^*}$-Bilds $c := V_T^{sf^*}(Y_T)$ $(\neq 0)$, das zu einem beliebig fixierten $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ gehört:

$$\mathcal{A}_T = V_T^{sf^*-1}(\{c\}) = Y_T + \ker V_T^{sf^*} \ (\neq \emptyset).$$

**Existenz und Einzigkeit eines sf-duplizierbaren Bewertungsvektors im ursprünglichen Marktmodell**

Unter der Voraussetzung von (ZVU) oder spezieller eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ kann bei gültigem LOPsfT auch auf einem anderen Beweisweg aus der Existenz eines Bewertungsvektors $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ die Existenz von genau einem sf-duplizierbaren Bewertungsvektor $\Theta_T$ geschlossen werden:

$$\text{(ZVU), (LOPsfT)} \Rightarrow \exists_1\, \Theta_T \in \mathcal{V}_T \cap \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$$

geschlossen werden. Man erhält damit den bereits in Abschnitt 5.3.3 ohne die Voraussetzung (ZVU) mit Hilfe des Rieszschen Darstellungssatzes nachgewiesenen eindeutig bestimmten sf-duplizierbaren Bewertungsvektor $\vartheta_T$.

**Beweis**: a) Existenz: Nach dem obigen weiteren Nachweis eines Bewertungsvektors existiert unter der Voraussetzung (ZVU) bei gültigem LOPsfT ein Bewertungsvektor $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$. Aus dessen additiven Zerlegung

$$Y_T = \Theta_T + Z_T \in \mathcal{V}_T \oplus \ker V_T^{sf^*} = \mathbb{R}^\Omega,$$

$\Theta_T \in \mathcal{V}_T$, $Z_T \in \ker V_T^{sf^*}$ $(\subseteq \mathcal{M}_T^{\perp})$, folgt

$$\Theta_T = Y_T - Z_T \in \mathcal{M}_T^{\perp},$$

wegen der aus Hilfssatz 5.11, I, 7c) folgenden Inklusion $\ker V_T^{sf^*} = \mathcal{M}_T \cap \mathcal{E}_T \subseteq \mathcal{E}_T^{\perp} = \{\kappa(X_T) = 0\}$ noch $\kappa(Z_T) = 0$ und dann

$$\kappa(\Theta_T) = \kappa(Y_T) - \kappa(Z_T) = \kappa_0 - 0 = \kappa_0,$$

also die Existenz eines $\Theta_T \in \mathcal{V}_T \cap \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$.

b) Unität: Zum Nachweis der Einzigkeit eines derartigen Bewertungsvektors $\Theta_T \in \mathcal{V}_T$ geht man von zwei Bewertungsvektoren $\Theta_T, \Theta_T' \in \mathcal{V}_T \cap \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ aus und zeigt für den Differenzvektor

$$\Delta := \Theta_T' - \Theta_T \in \mathcal{V}_T \cap \mathcal{M}_T^{\perp}$$

zunächst

$$\kappa(\Delta) = \kappa(\Theta_T') - \kappa(\Theta_T) = \kappa_0 - \kappa_0 = 0,$$

dann mit Hilfssatz 5.11, I, 7c) $\Delta \in \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \mathcal{E}_T^{\perp} = \ker V_T^{sf*}$, somit $\Delta \in \ker V_T^{sf*} \cap \mathcal{V}_T = \mathcal{V}_T^{\perp} \cap \mathcal{V}_T = O$ und $\Theta_T' = \Theta_T$. Die Existenz und Einzigkeit dieses sf-duplizierbaren Bewertungsvektors $\Theta_T$ wird in Abschnitt 5.3.3 auch noch mit der Linearität der Preisfunktion $\tilde{\pi}(\tilde{X}_T)$ und dem Rieszschen Darstellungssatz bewiesen (vgl. Beweis für den Bewertungsprozess $\vartheta \in L(\mathcal{H}_N) \cap \mathcal{M}_T \cap \{X_0 = 1\}$ in Abschnitt 3.3.3).

□

**Notwendige Bedingung $\kappa_0 > 0$ für die Existenz eines positiven Bewertungsvektors**

Die oben angegebene Gleichungsdarstellung $\mathcal{A}_T = \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ für die Menge $\mathcal{A}_T$ der Bewertungsvektoren kann bei gültigem LOPsfT unter der Voraussetzung (ZVU) auch nachgewiesen werden, wenn nur die Voraussetzung $\kappa_0 = \pi(\mathbf{1}_\Omega) \neq 0$ (anstelle von $\kappa_0 > 0$) gilt. Soll jedoch unter den positiven $\mathcal{M}_T$-Normalenvektoren $\Phi_T \in \mathcal{M}_T^{\perp+}$, deren Existenz nach Satz 5.6 a in Abschnitt 5.1.12 charakteristisch für die sf-Arbitragefreiheit (AFsf) ist, auch ein *positive*r Bewertungsvektor $Y_T$ existieren, dann gilt

$$Y_T \in \mathcal{A}_T \cap \{X_T > 0\} = \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0} \cap \{X_T > 0\} =: \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0+}$$

und notwendig für $\kappa_0$ die Bedingung

$$\kappa_0 = \pi(\mathbf{1}_\Omega) = Y_T^{\top}\mathbf{1}_\Omega = \kappa(Y_T) = Y_{T,1} + \ldots + Y_{T,K} > 0.$$

Andererseits ist bei gültiger sf-Arbitragefreiheit (AFsf) unter der Voraussetzung (ZVU) jetzt mit $\kappa_0 > 0$ nach Satz 5.6 c von Abschnitt 5.1.12 die Existenz eines positiven Bewertungsvektors $Y_T$ (Diskontvektors; Plausibilisierung der Bezeichnung in Abschnitt 5.3.11, 1) gesichert.

**Relative Bewertungsvektoren im relativen Marktmodell**

Die für das ursprüngliche Marktmodell hergeleiteten Aussagen zu den Bewertungsvektoren gelten analog für das speziellere relative Marktmodell, wenn an die Stelle der $\kappa$-Normierung $\kappa(Y_T) = \kappa_0 = \pi(\mathbf{1}_\Omega) > 0$ der Bewertungsvektoren $Y_T$ jetzt die stets mögliche $\kappa$-Normierung $\kappa(\tilde{Y}_T) = \tilde{\kappa}_0 = \tilde{\pi}(\mathbf{1}_\Omega) = 1$ der relativen Bewertungsvektoren $\tilde{Y}_T$ tritt. Das relative Marktmodell ist schon aufgrund seiner Definition und insbesondere der Ausstattung mit dem konstanten Numéraire $\tilde{B} = 1$ stets von speziellerer Struktur als das ursprüngliche Modell und es wird dabei die Voraussetzung (ZVU) im ursprünglichen Marktmodell oder die zu (ZVU) analoge Voraussetzung (ZVUrel) im relativen Marktmodell nicht extra benötigt. Es gelten somit ohne zusätzliche Voraussetzungen bei gültigem LOPsfT analoge Aussagen zur Existenz eines relativen Bewertungsvektors, Existenz und Einzigkeit eines sf-duplizierbaren relativen Bewertungsvektors, zur Menge $\tilde{\mathcal{A}}_T$ der relativen Bewertungsvektoren und zur Maximalanzahl affin unabhängiger relativer Bewertungsvektoren.

**Darstellungen für die Menge $\tilde{\mathcal{A}}_T$**

Bei gültigem LOPsfT gibt es für die Menge

$$\tilde{\mathcal{A}}_T := \{\tilde{Z}_T \in \mathbb{R}^\Omega : (\mathrm{PG}\,\tilde{Z}_T)\ \tilde{Z}_T^{\top}\tilde{V}_T(h) = \tilde{v}_0(h) \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf}\}$$

der relativen Bewertungsvektoren die Darstellungen

$$\tilde{\mathcal{A}}_T = \tilde{\vartheta}_T + \ker \tilde{V}_T^{sf*} \text{ mit einem } \tilde{\vartheta}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \setminus \ker \tilde{V}_T^{sf*},$$
$$\tilde{\mathcal{A}}_T = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp\perp} := \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{\kappa(\tilde{X}_T) = 1\}.$$

**Nachweis der Existenz eines relativen Bewertungsvektors in $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \setminus \ker \tilde{V}_T^{sf*}$:**
Beispielsweise wird analog zum obigen Beweis der Inklusion $\mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0} \subseteq \mathcal{A}_T$ im ursprünglichen Marktmodell auch im relativen Marktmodell, aber jetzt ohne die explizit erwähnte Voraussetzung (ZVU) und mittels der stets gültigen Mengenidentität $\tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{K}}_T$, gezeigt, dass jeder Vektor $\tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp\perp}$ ein relativer Bewertungsvektor ist.

**Beweis**: Bei gültigem LOPsfT existiert nach Abschnitt 5.3.7 ein Vektor in der nichtleeren Differenzmenge $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \setminus \ker \tilde{V}_T^{sf*}$:

$$\exists\ \tilde{Z}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \setminus \ker \tilde{V}_T^{sf*} \quad (\neq \emptyset).$$

Nach Hilfssatz 5.11, II, 7b) ist dabei

$$\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \setminus \ker \tilde{V}_T^{sf*} = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) \neq 0\}.$$

Daher existiert auch ein auf die Komponentensumme $\kappa(\tilde{X}_T) = 1$ normierter Vektor

$$\tilde{Y}_T := \tilde{Z}_T / \kappa(\tilde{Z}_T) \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp\perp} = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{\kappa(\tilde{X}_T) = 1\}.$$

Mit diesem liefert dann das Skalarprodukt von $\tilde{Y}_T$ und $\tilde{X}_T$ für die sf-duplizierbaren relativen Zahlungsprofile $\tilde{X}_T = \tilde{V}_T(h) \in \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ den relativen Preis $\tilde{\pi}(\tilde{X}_T)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}_T^{\top}\tilde{X}_T &= \tilde{Y}_T^{\top}\tilde{V}_T(h) \\
&= \tilde{Y}_T^{\top}\tilde{V}_0(h) + \tilde{Y}_T^{\top}\tilde{K}_T(h) && ((\text{SF}\tilde{\text{V}}) \text{ für } t = T) \\
&= \tilde{Y}_T^{\top}\tilde{v}_0(h)\mathbf{1}_\Omega + 0 && (\tilde{K}_T(h) \in \tilde{K}_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = \tilde{\mathcal{M}}_T,\ \tilde{Y}_T \perp \tilde{\mathcal{M}}_T) \\
&= \tilde{v}_0(h)\kappa(\tilde{Y}_T) && (\tilde{Y}_T^{\top}\mathbf{1}_\Omega = \kappa(\tilde{Y}_T)) \\
&= \tilde{v}_0(h) = \tilde{\pi}(\tilde{X}_T) && (\kappa(\tilde{Y}_T) = 1).
\end{aligned}$$

Somit ist der Vektor $\tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp\perp}$ ein relativer Bewertungsvektor für die sf-duplizierbaren relativen Zahlungsprofile $\tilde{X}_T \in \tilde{\mathcal{V}}_T$:

$$\tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{A}}_T. \qquad \square$$

Die hier im relativen Marktmodell vorliegende spezielle $\kappa$-Normierung

$$\kappa(\tilde{Y}_T) = \tilde{\kappa}_0 = 1$$

eines relativen Bewertungsvektors $\tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{A}}_T = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp\perp}$ ermöglicht im nachfolgenden Abschnitt 5.3.11, 2) unter der Voraussetzung der sf-Arbitragefreiheit (AFsf) insbesondere für einen positiven relativen Bewertungsvektor $\tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{A}}_T^{+} = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp\perp+}$ (Existenz nach Satz 5.5 in Abschnitt 5.1.11) noch die Interpretation als äquivalentes W-Maß und die Interpretation des Preises $\tilde{\pi}(\tilde{X}_T)$ als Erwartungswert von $\tilde{X}_T$ bezüglich dieses W-Maßes. Eine analoge Interpretation eines positiven Bewertungsvektors $Y_T \in \mathcal{A}_T^{+} = \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0+}$ im ursprünglichen Marktmodell (Existenz nach Satz 5.6 in Abschnitt 5.1.12 unter den Voraussetzungen (ZVU) und (AFsf)) und eine analoge Interpretation der Preisberechnung ist aber nicht möglich, da im Allgemeinen der Wert $\kappa_0 = \pi(\mathbf{1}_\Omega)$ von 1 verschieden ist.

**Existenz eines auf $\kappa(Y_T) = 1$ $\kappa$-normierten Bewertungsvektors im Spezialfall $\mathcal{M}_T = \mathcal{K}_T \subsetneq \mathcal{V}_T$ des ursprünglichen Marktmodells**

Der oben für das relative Marktmodell angegebene Nachweis eines relativen Bewertungsvektors mittels eines auf $\kappa(Y_T) = 1$ $\kappa$-normierten Normalenvektors von $\tilde{\mathcal{M}}_T$ besitzt im Allgemeinen kein Analogon im ursprünglichen Marktmodell. Bei gültigem LOPsfT existiert zwar nach Abschnitt 5.3.7 und Hilfssatz 5.11, I, 7 d unter der zusätzlichen Voraussetzung (ZVU) im ursprünglichen Marktmodell ein Vektor

$$Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp} \setminus \ker V_T^{sf*} = \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) \neq 0\},$$

der mit der Normierung auf eine Komponentensumme $\kappa(Y_T) = \kappa_0 := \pi(\mathbf{1}_\Omega) \neq 0$ einen Bewertungsvektor $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ liefert. Dagegen führt die alternative $\kappa$-Normierung auf eine Komponentensumme $\kappa(Y_T) = 1$ im Allgemeinen zu keinem Bewertungsvektor, da im ursprünglichen Marktmodell die Mengenidentität $\mathcal{K}_T = \mathcal{M}_T$ bzw. $\mathcal{K}_T^{\perp} = \mathcal{M}_T^{\perp}$ nicht gesichert ist. Nur im Spezialfall 2)

$$\mathcal{M}_T = \mathcal{K}_T \subsetneq \mathcal{V}_T$$

bei den in Abschnitt 5.3.6 angegebenen verschiedenen Möglichkeiten für die Inklusionen $\mathcal{M}_T \subseteq \mathcal{K}_T \subseteq \mathcal{V}_T$ liegt dieselbe Situation wie im relativen Marktmodell vor, nämlich dass aus $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp}$ auch $Y_T \in \mathcal{K}_T^{\perp}$ folgt, sodass wie oben im relativen Marktmodell auch jedes $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp 1}$ einen Bewertungsvektor liefert. In diesem Fall folgt dann aber notwendig wie im relativen Marktmodell

$$\kappa_0 := \pi(\mathbf{1}_\Omega) = Y_T^{\top}\mathbf{1}_\Omega = \kappa(Y_T) = 1.$$

**Preisberechnung im ursprünglichen Marktmodell mit einem relativen Bewertungsvektor**

Bei gültigem LOPsfT und bei Vorliegen eines Numéraires $B$ im ursprünglichen Marktmodell kann der Preis $\pi(X_T) = v_0(h)$ eines sf-duplizierbaren Zahlungsprofils $X_T = V_T(h) \in \mathcal{V}_T$ im ursprünglichen Marktmodell wegen der Beziehungen $v_0(h) = B_0 \cdot \tilde{v}_0(h)$ und $X_T/B_T = V_T(h)/B_T = \tilde{V}_T(h) \in \tilde{\mathcal{V}}_T$ auch mit Hilfe eines relativen Bewertungsvektors $\tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\pi(X_T) &= v_0(h) = B_0 \cdot \tilde{v}_0(h) = B_0 \cdot \tilde{\pi}(X_T / B_T)\\ &= B_0 \cdot \tilde{Y}_T^{\top}(X_T / B_T).\end{aligned}$$

Bei deterministischem $B_T$ ist außerdem $X_T = V_T(h) \in \mathcal{V}_T = \tilde{\mathcal{V}}_T$,

$$\pi(X_T) = \frac{B_0}{B_T}\tilde{Y}_T^{\top}X_T = \frac{B_0}{B_T}\tilde{\pi}(X_T),$$

$$\pi(X_T) = Y_T^{\top}X_T \text{ mit } Y_T := \frac{B_0}{B_T}\tilde{Y}_T = \kappa_0\tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp\kappa_0} = \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}.$$

Dabei wird bei deterministischem $B_T$ die Übereinstimmung $\tilde{\mathcal{M}}_T = \mathcal{M}_T$ in Abschnitt 5.1.7 begründet und die Übereinstimmung $\kappa_0 = B_0/B_T$ in Abschnitt 5.3.5. Demnach erhält man bei deterministischem $B_T$ zu einem relativen Bewertungsvektor $\tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$ mit dem Vektor

$$Y_T := \kappa_0\tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp\kappa_0} = \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$$

auch einen Bewertungsvektor des ursprünglichen Modells und umgekehrt zu einem Bewertungsvektor $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ des ursprünglichen Modells mit

$$\tilde{Y}_T := Y_T/\kappa_0 \in \mathcal{M}_T^{\perp 1} = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$$

auch einen relativen Bewertungsvektor.

Ausgehend von einem relativen Bewertungsvektor $\tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$, der bei gültigem LOPsfT und bei Vorliegen eines Numéraires $B$ nach Satz 5.12, II, 20) existiert, hat man damit in diesem Fall eines deterministischen $B_T$ auch einen weiteren Nachweis für die Existenz eines Bewertungsvektors $Y_T$ des ursprünglichen Marktmodells. Dies ist aber gerade die entsprechende Aussage von Satz 5.12, I, 20) in Abschnitt 5.3.12, die mit der Voraussetzung (ZVU) bewiesen wird.

**Bijektive Zuordnung der ursprünglichen Bewertungsvektoren zu den relativen Bewertungsvektoren bei deterministischem $B_T$**

Bei gültigem (LOPsfT) und Vorliegen eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ entsprechen die relativen Bewertungsvektoren $\tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$ mittels des durch

$$g(\tilde{Y}_T) := \kappa_0 \tilde{Y}_T$$

gegebenen Automorphismus (der zentrischen Streckung mit Zentrum 0 und Streckungsfaktor $\kappa_0 = B_0/B_T > 0$) des linearen Unterraums $\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} = \mathcal{M}_T^{\perp}$ bijektiv den Bewertungsvektoren $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ im ursprünglichen Marktmodell:

$$\tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1} \quad \overset{\text{Automorphismus } g}{\leftrightarrow} \quad Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$$

## 5.3.9 Interpretationen der Preisberechnung mittels eines Bewertungsvektors

**1) Interpretation der Bewertung als Abstandsmessung in $\mathbb{R}^\Omega$**

Dividiert man bei gültigem LOPsfT den Preis

$$\pi(X_T) = Y_T^{\top} X_T$$

eines Zahlungsprofils $X_T \in \mathcal{V}_T$ durch die euklidische Norm

$$\| Y_T \| = (Y_T^{\top} Y_T)^{1/2} = \left( \sum_{k=1}^{K} Y_T(\omega_k)^2 \right)^{1/2}$$

eines Bewertungsvektors $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$, so erhält man mit

$$d(X_T) := \frac{\pi(X_T)}{\|Y_T\|} = \frac{Y_T^{\top} X_T}{\|Y_T\|}$$

den **orientierten Abstand** des Punktes $X_T \in \mathcal{V}_T$ von der linearen Hyperebene

$$H_{Y_T,0} := \{ Y_T \}^{\perp} = \{ Z_T \in \mathbb{R}^\Omega : Y_T^{\top} Z_T = 0 \}$$

in $\mathbb{R}^\Omega$, welche $Y_T$ als Normalenvektor besitzt. Der Wert $\pi(X_T)$ von $X_T \in \mathcal{V}_T$ stimmt also bis auf den positiven konstanten Faktor $\| Y_T \|$ überein mit dem orientierten Abstand $d(X_T)$ des Punktes $X_T$ von der Hyperebene $H_{Y_T,0}$ des Raums $\mathbb{R}^\Omega$. Somit kann die Bewertung der Zahlungsprofile $X_T$ in $\mathcal{V}_T$ nach dem Duplikationsprinzip, also mittels des Startkapitaleinsatzes

von Duplikationsstrategien als Maßstab, wie bei deterministischen Zahlungsströmen auch als Abstandsmessung zur Hyperebene $H_{Y_T,0}$ in $\mathbb{R}^{\Omega}$ mit dem Normalenvektor $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ interpretiert werden.[46]

**2) Interpretation der Bewertung als Abstandsmessung in $\mathcal{V}_T$**

Da der eindeutig bestimmte sf-duplizierbare Bewertungsvektor $\vartheta_T \in \mathcal{V}_T \cap \mathcal{M}_T^{\perp}$ auch der Normalenvektor der linearen Hyperebene

$$\mathcal{M}_T = \mathcal{V}_T \cap \{\vartheta_T\}^{\perp} = \mathcal{V}_T \cap \{\vartheta_T^{\mathsf{T}} X_T = 0\}$$

von $\mathcal{V}_T$ ist, ist der Wert

$$d'(X_T) := \frac{\pi(X_T)}{\|\vartheta_T\|} = \frac{\vartheta_T^{\mathsf{T}} X_T}{\|\vartheta_T\|}$$

der orientierte Abstand des Punktes $X_T \in \mathcal{V}_T$ zur Hyperebene $\mathcal{M}_T$ von $\mathcal{V}_T$. Er stimmt bis auf den positiven konstanten Faktor $1/\|\vartheta_T\|$ mit dem Preis $\pi(X_T)$ von $X_T$ überein. Die Bewertung der Zahlungsprofile $X_T$ in $\mathcal{V}_T$ nach dem Duplikationsprinzip kann also auch im Raum $\mathcal{V}_T$ wie bei deterministischen Zahlungsströmen als Abstandsmessung interpretiert werden und zwar als Abstandsmessung zur Hyperebene $\mathcal{M}_T$ von $\mathcal{V}_T$ mit dem Normalenvektor $\vartheta_T \in \mathcal{V}_T \cap \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$.

**3) Interpretation der Bewertung als Duplizierung mit Beurteilungskurve und Supplement vom Kapitalmarkt**

**Duplizierung in $\mathcal{W}$**

Da die sf-Duplizierbarkeit einer Zustandsfunktion $X_T \in \mathbb{R}^{\Omega}$ gemäß der Definition in Abschnitt 5.1 äquivalent ist zur Duplizierbarkeit des zugehörigen Zahlungsprofils $X = (0,\ldots,0,X_T)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{W}(T)$ und da das LOPsfT in $V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ äquivalent ist zum LOP in $L(\mathcal{H}_N)$, ist die Interpretation nach dem Duplizierungskonzept[47] von Abschnitt 4.2 auch hier möglich: Für jedes sf-duplizierbare Zahlungsprofil $X = (0,\ldots,0,X_T)^{\mathsf{T}} = L(h) \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ erhält man bei gültigem LOPsfT mit dem nach dem Duplikationsprinzip bestimmten Preis $\pi(X_T) = \pi(X) = V_0(h)$ als Kurvenparameter $\mu(X)$ die Duplizierung (Nachbildung, Synthetisierung, additive Zerlegung)

$$\begin{aligned} X &= L(h) = \bar{V}(h) &&+ \breve{L}(h) \\ &= V_0(h)\,\mathbf{1}_{0,\Omega} &&+ C(h) \\ &= \pi(X)\mathbf{1}_{0,\Omega} &&+ C(h) \\ &= \bar{V}(\mu(X)) &&+ C(h)(X) \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{M} \qquad (\mu(X) = \pi(X)) \end{aligned}$$

mit der speziellen deterministischen Beurteilungskurve (Präferenzkurve) $\bar{V}(\mu) = \mu \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega}$

---

[46] Zwei Nutzenfunktionen beschreiben genau dann die gleiche Präferenzordnung, wenn es eine streng monoton steigende Transformation gibt, sodass die eine Nutzenfunktion die Komposition der anderen Nutzenfunktion und der Transformation ist (siehe Pleier 2021, S. 209).

[47] Die Bewertung von Zahlungsströmen nach dem Duplizierungskonzept mit Beurteilungskurve und Ergänzungsgeschäft wird behandelt bei Pleier (2021), S. 87–117.

$= \mu\cdot(1,0,\ldots,0)^\top \in \mathcal{Z} = \mathcal{V}$ (Voraussetzung (AWS$^\delta$)) der Sofortentnahme,

$$\bar{V}_0(\mu,\omega) = \mu \qquad \text{für } t = 0,$$
$$\bar{V}_t(\mu,\omega) = 0 \qquad \text{für } t = 1,\ldots,T,\ \omega \in \Omega,\ \mu \in \mathbb{R},$$

und dem indifferenten Supplement (Ergänzungsgeschäft) $C(h)(X) = X - \breve{V}(h)$ vom Kapitalmarkt $\mathcal{M} = \breve{L}(\mathcal{H}_N) = L(\ker V_0)$ des Marktmodells ($\pi(C(h)(X)) = 0$).

**Duplizierung in $\mathbb{R}^\Omega$**

Bei gültigem LOPsfT und unter der Voraussetzung von (ZVU) oder spezieller eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ erhält man für jedes sf-duplizierbare Zahlungsprofil $X_T = V_T(h) \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = \mathcal{V}_T$ mit dem nach dem Duplikationsprinzip bestimmten Preis $\pi(X_T) = v_0(h)$ als Kurvenparameter $\mu(X_T)$ die nach Abschnitt 5.3.7, Beweisteil 2a) bzw. Abschnitt 5.3.5 Beweisteil f), „$\supseteq$“ eindeutig bestimmte Duplizierung (Nachbildung, Synthetisierung, additive Zerlegung)

$$\begin{aligned} X_T = V_T(h) &= V_0(h)/\kappa_0 + M_T(h) && (\kappa_0 \neq 0)\\ &= v_0(h)\mathbf{1}_\Omega/\kappa_0 + M_T(h)\\ &= \pi(V_T(h))\mathbf{1}_\Omega/\kappa_0 + M_T(h)\\ &= \bar{V}_0(\mu(X_T)) + M_T(h)(X_T) && (\mu(X_T) = \pi(X_T) = \pi(V_T(h)))\\ &\in \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{M}_T \end{aligned}$$

mit der speziellen deterministischen Beurteilungskurve

$$\bar{V}_0(\mu) = \mu\cdot\mathbf{1}_\Omega/\kappa_0 = \mu\cdot(1,\ldots,1)^\top/\kappa_0 \in \mathcal{Z}_T = \mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_T$$

(Voraussetzung ZVU) der Sofortentnahme zum Zeitpunkt 0 und dem indifferenten Supplement (Ergänzungs-NE-Zahlungsprofil)

$$M_T(h)(X_T) = X_T - \mathbf{1}_\Omega\pi(X_T)/\kappa_0 \in \mathcal{M}_T \qquad (\pi(M_T(h)(X_T)) = 0).$$

Damit ist der Preis $\pi(X_T)$ auch der eindeutig bestimmte Kurvenparameter $\mu(X_T)$ einer Duplizierung des Zahlungsprofils $X_T$ mittels einer (stetigen, streng monoton steigenden und an beiden Intervallgrenzen unbeschränkten) Beurteilungskurve und eines indifferenten Ergänzungszahlungsprofils.

## 5.3.10 Vielfalt der Diskontvektoren

In Abschnitt 5.3.8 wird im relativen Marktmodell ohne die zusätzliche Voraussetzung von (ZVU) oder eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ bei gültigem LOPsfT für die Menge $\tilde{\mathcal{A}}_T$ der relativen Bewertungsvektoren die Darstellung als affiner Unterraum angegeben:

$$\tilde{\mathcal{A}}_T = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1} = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{\kappa(\tilde{Z}_T) = 1\}.$$

Weiter wird dort im ursprünglichen Marktmodell unter der Voraussetzung von (ZVU) mit $\kappa_0 = \pi(\mathbf{1}_\Omega) > 0$ oder eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ für die Menge $\mathcal{A}_T$ der Bewertungsvektoren ebenfalls die Darstellung als affiner Unterraum angegeben:

$$\mathcal{A}_T = \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0} = \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(Y_T) = \kappa_0\}.$$

Demzufolge erhält man für die Teilmenge

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}_T^+ &:= \tilde{\mathcal{A}}_T \cap \{\tilde{Z}_T > 0\}\\ &= \{\tilde{Z}_T \in \mathbb{R}^\Omega : (\mathrm{PG}\,\tilde{Z}_T)\ \tilde{Z}_T^\top \tilde{V}_T(h) = \tilde{v}_0(h)\ \forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf} \wedge \tilde{Z}_T > 0\} \end{aligned}$$

der positiven relativen Bewertungsvektoren (der relativen Diskontvektoren; Plausibilisierung der Bezeichnung in Abschnitt 5.3.11, 1) und für die Teilmenge

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_T^+ &:= \mathcal{A}_T \cap \{Y_T > 0\}\\ &= \{Y_T \in \mathbb{R}^\Omega : (\mathrm{PG}\,Y_T)\ Y_T^{\top} V_T(h) = v_0(h)\ \forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf} \ \wedge\ Y_T > 0\}\end{aligned}$$

der positiven Bewertungsvektoren (der Diskontvektoren) jeweils die Darstellung als konvexes Polyeder[48]:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{A}}_T^+ &= \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+} &&:= \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{\kappa(\tilde{Z}_T) = 1,\ \tilde{Z}_T > 0\};\\ \mathcal{A}_T^+ &= \mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0 +} &&:= \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(Y_T) = \kappa_0,\ Y_T > 0\} \qquad \text{(unter Vor. ZVU).}\end{aligned}$$

In den Abschnitten 5.1.11 (Satz 5.5, a) und 5.1.12 (Satz 5.6, a) wird gezeigt, dass die sf-Arbitragefreiheit (AFsf) des ursprünglichen Marktmodells oder gleichbedeutend dazu die sf-Arbitragefreiheit (AFsf) des relativen Marktmodells (Satz 5.1 in Abschnitt 5.1.3) genau dann vorliegt, wenn es einen positiven $\kappa$-normierten Normalenvektor $\tilde{Q}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$ im relativen Modell bzw. $Q_T \in \mathcal{M}_T^{\perp 1+}$ im ursprünglichen Modell gibt.

Daher existiert bei vorliegender sf-Arbitragefreiheit (AFsf) im relativen Marktmodell ohne die Voraussetzung (ZVU) ein positiver relativer Bewertungsvektor

$$\tilde{Q}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+} = \tilde{\mathcal{A}}_T^+,$$

sodass $\tilde{\mathcal{A}}_T^+ \neq \emptyset$ gilt. Der relative Preis $\tilde{\pi}(\tilde{X}_T) = \tilde{v}_0(h)$ eines sf-duplizierbaren relativen Zahlungsprofils $\tilde{X}_T = \tilde{V}_T(h) \in \tilde{\mathcal{V}}_T$ im relativen Marktmodell berechnet sich dann zu

$$\tilde{\pi}(\tilde{X}_T) = \tilde{Q}_T^{\top} \tilde{X}_T .$$

Weiter existiert bei vorliegender sf-Arbitragefreiheit (AFsf) im ursprünglichen Marktmodell nach Satz 5.6, c) jetzt unter der Voraussetzung von (ZVU) mit $\kappa_0 = \pi(\mathbf{1}_\Omega) > 0$ oder eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ ein positiver Bewertungsvektor

$$Y_T := \kappa_0 Q_T \in \mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0 +} = \mathcal{A}_T^+ ,$$

sodass $\mathcal{A}_T^+ \neq \emptyset$ gilt. Der Preis $\pi(X_T) = v_0(h)$ eines sf-duplizierbaren Zahlungsprofils $X_T = V_T(h) \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = \mathcal{V}_T$ im ursprünglichen Marktmodell berechnet sich zu

$$\pi(X_T) = Y_T^{\top} X_T .$$

Würde man in der Voraussetzung (ZVU) zunächst nur $\kappa_0 \neq 0$ fordern, so bedingt das Hinzunehmen von positiven Bewertungsvektoren $Y_T$ ($Y_{T,1},\ldots,Y_{T,K} > 0$) dann doch die Vorzeichenbedingung $\kappa_0 > 0$:

$$\kappa_0 = \pi(\mathbf{1}_\Omega) = Y_T^{\top} \mathbf{1}_\Omega = \kappa(Y_T) = Y_{T,1} + \ldots + Y_{T,K} > 0.$$

Im nachfolgenden Abschnitt 5.3.11, 1) wird begründet, warum die positiven Bewertungsvektoren $\tilde{Q}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$ und $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0 +}$ auch als Diskontvektoren bezeichnet werden können.

Analog zur Schlussweise in Abschnitt 5.3.3, wo bei gültigem LOP die Existenz eines Bewertungsprozesses $\Psi \in \mathcal{M}_T^{\perp 1} \subseteq \mathcal{A}$ und dann mit dessen $T$-ter Komponente $\Psi_T$ die Existenz eines Bewertungsvektors begründet wird, kann auch die Existenz eines positiven Bewertungsvektors $\Phi_T$ bewiesen werden: Bei Vorliegen der allgemeinen Arbitragefreiheit (AF) existiert

---

[48] Ein konvexes Polyeder ist definiert als Durchschnitt von endlich vielen affinen Halbräumen. Ausführlichere Betrachtungen und Literaturangaben zum konvexen Polyeder und den Polyederdarstellungssatz von Weyl-Minkowski findet man bei Pleier (2021), S. 393f.

nach Abschnitt 3.6.1 ein Diskontierungsprozess (positiver Bewertungsprozess) $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1+} \subseteq \mathcal{A}^{+}$ und mit dessen $T$-ter Komponente $\Phi_T$ ein Diskontvektor (positiver Bewertungsvektor).

Wie in der Abbildung 5.8 in Abschnitt 5.3.3 in einem Schema der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Versionen LOP und LOPsfT des Law of One Price und der Existenz eines Bewertungsprozesses $\Psi$ oder Bewertungsvektors $\Psi_T$ dargestellt ist, so wird jetzt in der nachfolgenden Abbildung 5.11 der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Versionen AF und AFsf der Arbitragefreiheit und der Existenz eines Diskontierungsprozesses (positiven Bewertungsprozesses) $\Phi$, eines Diskontvektors (positiven Bewertungsvektors) $\Phi_T$ oder eines positiven $\mathcal{M}_T$-Normalenvektors $Q_T$ beschrieben.

Die Definition der Menge $\mathcal{A}^{+} := \mathcal{A} \cap \{X > 0\}$ der positiven Bewertungsprozesse als Teilmenge von $\mathcal{A}$ und ihre Übereinstimmung mit der Menge $\mathcal{M}^{\perp 1+} := \mathcal{M}^{\perp} \cap \{X_0 = 1, X > 0\}$ der Diskontierungsprozesse wird in Abschnitt 3.6.1 unter der Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) angegeben. Die Definition der Menge $\mathcal{A}_T^{+} := \mathcal{A}_T \cap \{X_T > 0\}$ der positiven Bewertungsvektoren als Teilmenge von $\mathcal{A}_T$ und deren Gleichungsdarstellung $\mathcal{A}_T^{+} = \mathcal{M}_T{}^{\perp \kappa_0 +}$ unter der Voraussetzung (ZVU) wird oben angegeben. Die Äquivalenz der sf-Arbitragefreiheit (AFsf) zur Existenz eines positiven Normalenvektors $Q_T$ von $\mathcal{M}_T$ folgt aus dem Beweis von Satz 5.6, a) in Abschnitt 5.1.12. Die Folgerung der sf-Arbitragefreiheit (AFsf) aus der Existenz eines Diskontvektors $\Phi_T \in \mathcal{A}_T^{+} \subseteq \mathcal{M}_T{}^{\perp +}$ erhält man, da dieser Diskontvektor (positiver Bewertungsvektor) ebenfalls ein positiver $\mathcal{M}$-Normalenvektor ist. Die umgekehrte Schlussweise von der sf-Arbitragefreiheit (AFsf) auf die Existenz eines Diskontvektors $Y_T \in \mathcal{M}_T{}^{\perp \kappa_0 +} = \mathcal{A}_T^{+}$ ergibt sich unter der Voraussetzung (ZVU) aus der in Abschnitt 5.3.8 begründeten Gleichungsdarstellung $\mathcal{A}_T = \mathcal{M}_T{}^{\perp \kappa_0}$.
Ein entsprechendes Schema für das Einperiodenmodell findet man in Abschnitt 6.2.3.

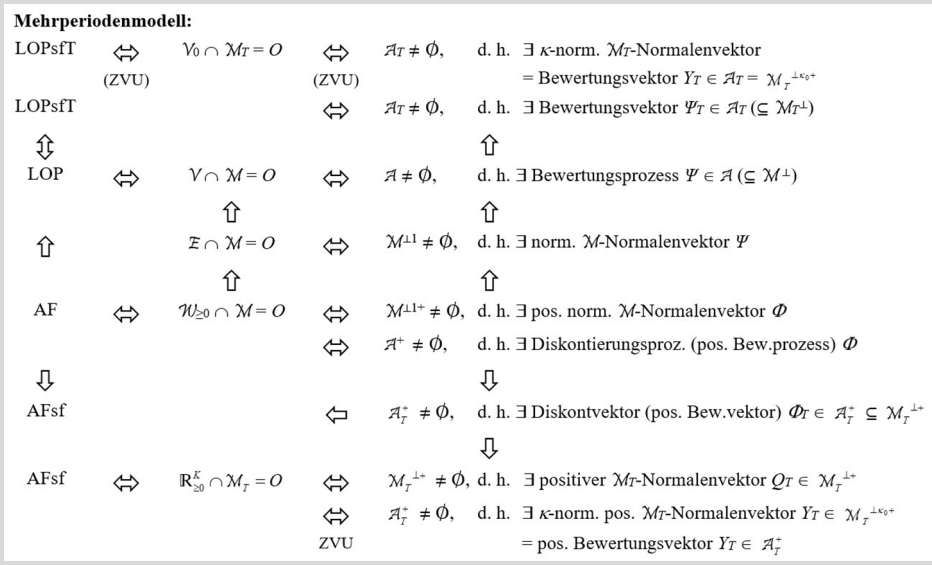



**Abb. 5.11** Zusammenhang zwischen dem LOP, den Versionen AF und AFsf der Arbitragefreiheit und der Existenz eines Bewertungsprozesses $\Psi$, normierten $\mathcal{M}$-Normalenvektors $\Psi$, Diskontierungsprozesses $\Phi$, Diskontvektors $\Phi_T$ oder positiven $\mathcal{M}_T$-Normalenvektors $Q_T$

Nach den Sätzen 5.8 und 5.9 von Abschnitt 5.2 erhält man noch die folgenden Aussagen über die Maximalanzahl affin unabhängiger Diskontvektoren. Insbesondere erfolgt dabei (für $p = 0$) auch die Charakterisierung der sf-Vollständigkeit eines sf-arbitragefreien Marktmodells durch die Existenz von genau einem Diskontvektor.

**Maximalanzahl affin unabhängiger Diskontvektoren**: Im Marktmodell liege die sf-Arbitragefreiheit (AFsf) vor und es sei $p := \dim \ker V_T^{sf*} = \dim \ker \tilde{V}_T^{sf*}$ die Dimension des Kerns der linearen Abbildung $V_T^{sf*}$ bzw. $\tilde{V}_T^{sf*}$.

**Im relativen Marktmodell** ist $p + 1$ die Maximalanzahl affin unabhängiger relativer Diskontvektoren (positiver Bewertungsvektoren)

$$\tilde{Q}_T^{\,i} \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+} \qquad (i = 0,\ldots,p).$$

**Im ursprünglichen Marktmodell** ist bei Vorliegen der Voraussetzung (ZVU) oder spezieller der Existenz eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ $p + 1$ die Maximalanzahl affin unabhängiger Diskontvektoren

$$Y_T^{\,i} \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0+} \qquad (i = 0,\ldots,p).$$

### 5.3.11 Interpretationen der Preisberechnung mittels eines Diskontvektors

**1) Interpretation der Bewertung als Diskontierung bzw. Barwertberechnung**

Unter der Voraussetzung der sf-Arbitragefreiheit (AFsf) und der Voraussetzung von (ZVU) oder spezieller eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ berechnet sich der Preis $\pi(X_T)$ eines sf-duplizierbaren Zahlungsprofils $X_T \in \mathcal{V}_T$ des ursprünglichen Marktmodells als der Barwert der stochastischen Zahlungen $X_{T,k} = X_T(\omega_k)$ $(k = 1,\ldots,K)$, wobei der positive Bewertungsvektor $Y_T = \kappa_0 Q_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0+}$ $(\kappa_0 > 0)$ die Rolle des stochastischen Diskontvektors spielt bzw. dessen Komponenenten $Y_{T,k} = Y_T(\omega_k)$ $(> 0)$ die Rolle der stochastischen Diskontierungsfaktoren übernehmen:

$$\pi(X_T) = Y_T^{\top} X_T = \sum_{k=1}^{K} Y_{T,k} X_{T,k} \ .$$

**Ökonomische Interpretation der Bewertung als Glattstellung**: Diese zunächst rein rechnerische Ermittlung des Preises $\pi(X)$ durch eine Barwertberechnung (Diskontierung, Abzinsung) aus den Zahlungen $X_{T,k} = X_T(\omega_k)$ von $X_T \in \mathcal{V}_T = V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ bzw. von $X = (0,\ldots,0,X_T)^{\top} \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ kann analog zu Abschnitt 4.3 unter den zusätzlichen Voraussetzungen (AF) und (VSsf) ($\mathbf{1}_{T,\omega_k} \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ für $k = 1,\ldots,K$) auch noch als spezielle Replizierung (Glattstellung, additive Ergänzung) mit einer Linearkombination $Z$ von Ergänzungsgeschäften im Raum $L(\mathcal{H}_N)$ des Marktmodells ökonomisch interpretiert werden. Die Transposition der Zahlungen $X_{T,k}$ vom Zeitpunkt $t = T$ und von den Zuständen $\omega_k \in \Omega$ aus auf den Zeitpunkt $s = 0$ kann dabei tatsächlich durch die Kombination von $X \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ mit einem indifferenten Kapitalmarktgeschäft $Z \in \mathcal{M}$ durchgeführt werden: $X + Z = \pi(X) \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega}$ :

Aufgrund der vorausgesetzten sf-Vollständigkeit (VSsf) $\mathcal{W}(T) = L(\mathcal{H}_N^{sf})$ sind nämlich insbesondere die in Abschnitt 3.8.1 betrachteten zu den Zuständen $\omega_k \in \Omega$ gehörigen stochastischen AD-Papiere

$$\xi^{T,k} = \mathbf{1}_{T,\omega_k} = (0,\ldots,0,\mathbf{1}_{\omega_k})^{\top} \in \mathcal{W}(T) \qquad (t = T,\ \mathbf{1}_{\omega_k} = \mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^K)$$

sf-duplizierbar. Wegen der Arbitragefreiheit (AF) existiert ein Diskontierungsprozess $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1+}$, mit dem sich dann der Preis von $\xi^{T,k}$ berechnet:

$$d_{T,k} := \pi(\xi^{T,k}) = \Phi^{\top} \mathbf{1}_{T,\omega_k} = \Phi_T^{\top} \mathbf{1}_{\omega_k} = \Phi_T^{\top} \mathbf{e}_k = \Phi_{T,k}.$$

Da hier auch die zu (VSsf) äquivalente sf-Vollständigkeit (VSsfT) $\mathbb{R}^K = V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ vorliegt, kann dieser Preis nach Abschnitt 5.3.2 auch als Preis des AD-Zahlungsprofils $\mathbf{1}_{\omega_k} \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ mit dem Bewertungsvektor $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0+}$ bestimmt werden:

$$d_{T,k} = \pi(\xi^{T,k}) = \pi(\mathbf{1}_{\omega_k}) = Y_T^{\top} \mathbf{1}_{\omega_k} = Y_T^{\top} \mathbf{e}_k = Y_{T,k}.$$

Wie schon in Abschnitt 3.6.1 dargestellt wurde, können die Diskontierungsfaktoren

$$Y_{T,k} = Y_T(\omega_k) = \Phi_{T,k} = \Phi_T(\omega_k)$$

auch als Zustandspreise und der Diskontvektor

$$Y_T = \Phi_T = (\Phi_T(\omega_1),\ldots,\Phi_T(\omega_K))^\top$$ [49]

auch als Zustandspreisvektor bezeichnet werden.

Nach Abschnitt 3.7.3 sind die mit dem Erwerb der AD-Papiere $\xi^{T,k}$ verbundenen Zahlungsprofile

$$\begin{aligned}\widehat{\xi}^{T,k} &= -\,\pi(\xi^{T,k})\cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} + \xi^{T,k} = -\,d_{T,k}\cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} + \mathbf{1}_{T,\omega_k} \\ &= (-d_{T,k}\mathbf{1}_{\Omega},0,\ldots,0,\mathbf{1}_{\omega_k})^\top\end{aligned}$$

Kapitalmarktgeschäfte: $\widehat{\xi}^{T,k} \in \mathcal{M}$. Demzufolge ist auch die nachfolgend damit gebildete Linearkombination $Z$ ein Kapitalmarktgeschäft. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}Z &:= -\sum_{k=1}^{k_t} X_{T,k}\widehat{\xi}^{T,k} \\ &= \sum_{k=1}^{K} d_{T,k}X_{T,k}\cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} - \sum_{k=1}^{K} X_{T,k}\cdot \mathbf{1}_{T,\omega_k} \\ &= \sum_{k=1}^{K} Y_{T,k}X_{T,k}\cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} - X \\ &= \pi(X)\cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} - X \in \mathcal{M} \qquad (\pi(X_T) = \pi(X)),\end{aligned}$$

sodass mit diesem Kapitalmarktgeschäft $Z \in \mathcal{M}$ der Zahlungsstrom $X = (0,\ldots,0,X_T)^\top \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ im Raum $L(\mathcal{H}_N)$ glattgestellt werden kann auf den Zahlungsstrom, der im Zeitpunkt 0 den Preis $\pi(X) = \pi(X_T)$ liefert:

$$X + Z = \pi(X)\cdot \mathbf{1}_{0,\Omega}\,.$$

Analog berechnet sich bei vorliegender Arbitragefreiheit (AFsf) und nur unter der zusätzlichen Voraussetzung eines Numéraires (für die Existenz des relativen Marktmodells) der relative Preis $\tilde{\pi}(\tilde{X}_T)$ eines sf-duplizierbaren relativen Zahlungsprofils $\tilde{X}_T \in \tilde{\mathcal{V}}_T$ als **Barwert** der stochastischen Zahlungen $\tilde{X}_{T,k} = \tilde{X}_T(\omega_k)$ $(k = 1,\ldots,K)$ mit dem stochastischen Diskontvektor $\tilde{Q}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$ bzw. den stochastischen Diskontierungsfaktoren $\tilde{Q}_{T,k} = \tilde{Q}_T(\omega_k)$ $(> 0)$:

$$\tilde{\pi}(\tilde{X}_T) = \tilde{Q}_T^\top \tilde{X}_T = \sum_{k=1}^{K} \tilde{Q}_{T,k}\tilde{X}_{T,k}\,.$$

Die positiven Bewertungsvektoren $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0+}$ und $\tilde{Q}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$ können demzufolge als **Diskontvektoren** und wegen ihrer Verwendung für die sf-duplizierbaren Zahlungsprofile auch als sf-Diskontvektoren bezeichnet werden.

**2) Interpretation des Preises als Erwartungswert bezüglich eines formalen W-Maßes im relativen Marktmodell**

Unter der Voraussetzung eines Numéraires $B$ für die Existenz des relativen Marktmodells und Voraussetzung der sf-Arbitragefreiheit (AFsf) ist mit einem (zu $P$) äquivalenten W-Maß

[49] Die Übereinstimmung der Diskontvektoren $Y_T$ und $\Phi_T$ ergibt sich auch nach Satz 5.9, a) in Abschnitt 5.2.5, da hier die Voraussetzungen (AFsf), (VSsf) und (ZVU) erfüllt sind und es demnach genau einen Diskontvektor gibt.

$\tilde{Q}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$ im dividendenversehenen relativen Marktmodell bzw. mit einem (zu $P$) äquivalenten Martingalmaß $\tilde{Q}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$ im dividendenlosen relativen Marktmodell (Existenz nach Satz 5.5 a, b der relative Preis $\tilde{\pi}(\tilde{X}_T)$ eines relativen Zahlungsprofils $\tilde{X}_T \in \tilde{\mathcal{V}}_T$ nach Abschnitt 5.3.8 (bei der Darstellung $\tilde{\mathcal{A}}_T = \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$) gleich dem Erwartungswert der stochastischen Zahlung $\tilde{X}_T$ bezüglich dieses formalen W-Maßes $\tilde{Q}_T$.

Weiter ist im ursprünglichen Marktmodell nach Abschnitt 5.3.8 (bei der Preisberechnung im ursprünglichen Marktmodell mit einem relativen Bewertungsvektor) der Preis $\pi(X_T)$ eines Zahlungsprofils $X_T \in \mathcal{V}_T$ des ursprünglichen Marktmodells gleich dem mit $B_0$ „aufgezinsten" Erwartungswert der mit $B_T$ „abgezinsten" stochastischen Zahlung $X_T$ bezüglich dieses formalen W-Maßes $\tilde{Q}_T$.

Unter der Voraussetzung eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ ist der Preis $\pi(X_T)$ eines Zahlungsprofils $X_T \in \mathcal{V}_T$ gleich dem mit $B_0/B_T$ „aufgezinsten" Erwartungswert von $X_T$ bezüglich dieses formalen W-Maßes $\tilde{Q}_T$.

Unter der Voraussetzung eines Numéraires $B$ und der sf-Arbitragefreiheit (AFsf) erhält man mit dem relativen W-Maß $\tilde{Q}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$ den Preis als Erwartungswert:

$$\tilde{\pi}(\tilde{X}_T) = \sum_{k=1}^{K} \tilde{Q}_T(\omega_k)\tilde{X}_T(\omega_k) = E_{\tilde{Q}_T}\left(\tilde{X}_T\right),$$

$$\pi(X_T) = B_0 \cdot \sum_{k=1}^{K} \tilde{Q}_T(\omega_k)\frac{X_T(\omega_k)}{B_T(\omega_k)} = B_0 \cdot E_{\tilde{Q}_T}\left(\frac{X_T}{B_T}\right).$$

Bei deterministischem $B_T$ ist

$$\pi(X_T) = \frac{B_0}{B_T}\sum_{k=1}^{K} \tilde{Q}_T(\omega_k)X_T(\omega_k) = \frac{B_0}{B_T}E_{\tilde{Q}_T}\left(X_T\right).$$

Eine analoge Interpretation eines positiven Bewertungsvektors $Q_T \in \mathcal{A}_T^+ = \mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0 +}$ als äquivalentes W-Maß und der Preisberechnung von $X_T \in \mathcal{V}_T$ im ursprünglichen Marktmodell als $Q_T$-Erwartungswert von $X_T$ (Existenz von $Q_T$ nach Abschnitt 5.1.12, Satz 5.6 unter den Voraussetzungen (ZVU) und (AFsf)) ist nicht möglich, da im Allgemeinen der Wert $\kappa_0 = \pi(\mathbf{1}_\Omega)$ von 1 verschieden ist.

### 5.3.12 Weitere Charakterisierungen des LOPsfT

Unter Verwendung des Hilfssatzes 5.11 von Abschnitt 5.3.6 können nun noch weitere Charakterisierungen des LOPsfT hergeleitet werden. Die nachfolgend im Satz aufgelisteten Charakterisierungen erfolgen unter anderem mittels spezieller Lagebeziehungen von Unterräumen, spezieller Unterraumstrukturen, Dimensionsgleichungen und der Existenz eines Bewertungsvektors mit der Gültigkeit von Preisgleichungen. Eine geometrische Veranschaulichung der dabei angegebenen Strukturen und Lagebeziehungen von Vektorunterräumen bei ungültigem und bei gültigem LOPsfT erfolgt in den Abbildungen 5.12 und 5.13 mit den nachfolgenden Erläuterungen.

**Satz 5.12 Charakterisierungen des Law of One Price (LOPsfT) für endfällige Zahlungsprofile im Mehrperiodenmodell mit den Räumen $\mathcal{H}_N^{sf}$ und $\mathbb{R}^\Omega$**

Für die im Teil I) aufgeführten Bedingungen 7) – 27) im ursprünglichen Modell sei (ZVU) oder spezieller die Existenz eines Numéraires $B = S^N > 0$ mit deterministischer $T$-ter Komponente $B_T$ vorausgesetzt. Der Wert $\kappa_0 := v_0(k) > 0$ sei der Startkapitaleinsatz einer sf-Duplikationsstrategie $k$ von $\mathbf{1}_\Omega = (1,\ldots,1)^\top \in \mathbb{R}^\Omega$ im ursprünglichen Marktmodell.
Für die Aussagen im Teil II) für das spezielle relative Marktmodell wird nur die Existenz eines Numéraires $B = S^N > 0$ und nicht die Voraussetzung (ZVU) oder ein deterministisches $B_T$ benötigt.
Das LOPsfT gilt im Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

I) **Bedingungen im ursprünglichen Marktmodell**:

1) (LOPsfT) $\forall\, X_T \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf}):\ V_0(h)$ konstant für alle $h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap V_T^{-1}(\{X_T\})$
2) (LOP1sfT) $\forall\, X_T \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf}):\ R_0(h)$ konstant für alle $h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap V_T^{-1}(\{X_T\})$
3) $\exists\, X_T \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf}):\ V_0(h)$ konstant für alle $h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap V_T^{-1}(\{X_T\})$
4) $V_0(f) = 0$ für alle $f \in \mathcal{H}_N^{sf}$ mit $V_T(f) = 0$ (Bed. 3 mit $X_T = 0 \in \mathcal{V}_T$)
5) $\ker^{sf} V_T \subseteq \ker^{sf} V_0$ (Inklus. d. Kerne, z. B. bei inj. $V_T$ bzw. $\ker^{sf} V_T = O$),
$\ker L \subseteq \ker V_0$ (Inklus. d. Kerne wie in Satz 3.3, 5)
6) $V_T^{sf*}(\mathbb{R}^\Omega) \supseteq V_0^{sf*}(\mathbb{R}^\Omega)$ (Inklus. d. Bildräume)
7) $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O$ (trivialer Durchschnitt von $\mathcal{V}_0$ und $\mathcal{M}_T$)
8) $\mathcal{V}_T = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{M}_T$ ($\mathcal{V}_T$ als direkte Summe)
9) $\forall\, X_T \in \mathcal{V}_T\ \exists_1$ additive Zerlegung $X_T = Y_T + Z_T$ mit $Y_T \in \mathcal{V}_0$, $Z_T \in \mathcal{M}_T$ (Ex.&Einz. Zerl.)
10) $\exists\, X_T \in \mathcal{V}_T$: $\exists_1$ additive Zerlegung $X_T = Y_T + Z_T$ mit $Y_T \in \mathcal{V}_0$, $Z_T \in \mathcal{M}_T$
11) $\mathcal{V}_0 = \mathcal{E}_T \not\subseteq \mathcal{M}_T$ bzw. $\mathbf{1}_\Omega \notin \mathcal{M}_T$ (Nichtinklusion)
12) $\mathcal{M}_T^\perp \not\subseteq \mathcal{E}_T^\perp = \{\kappa(X_T) = 0\}$ (Nichtinklusion)
13) $\mathcal{M}_T^\perp \not\subseteq \mathcal{E}_T^\perp \cap \mathcal{M}_T^\perp = \ker V_T^{sf*}$ (Nichtinklusion)
14) $\dim \mathcal{V}_T = \dim \mathcal{M}_T + 1$ (Dimensionsgleichung)
15) $\mathcal{M}_T$ ist Hyperebene von $\mathcal{V}_T$ ($\mathcal{M}_T$ echte Teilmenge von $\mathcal{V}_T$)
16) $\dim \ker V_T^{sf*} = \dim \mathcal{M}_T^\perp - 1$ (Dimensionsgleichung)
17) $\ker V_T^{sf*}$ ist Hyperebene von $\mathcal{M}_T^\perp$ ($\ker V_T^{sf*}$ echte Teilmenge von $\mathcal{M}_T^\perp$)
18) $\exists\, Y_T \in \mathcal{M}_T^\perp \setminus \ker V_T^{sf*}$ (nichtleere Differenz)
19) $\mathcal{M}_T^\perp = \ker V_T^{sf*} \oplus \operatorname{lin}\{Z_T\}$ mit $Z_T \in \mathcal{M}_T^\perp \setminus \ker V_T^{sf*} = \mathcal{M}_T^\perp \cap \{\kappa(X_T) \neq 0\}$ ($\mathcal{M}_T^\perp$ dir. S.)
20) $\exists\, Y_T \in \mathcal{M}_T{}^{\perp\kappa_0} := \mathcal{M}_T^\perp \cap \{\kappa(X_T) = \kappa_0\}$ ($\kappa$-norm. $\mathcal{M}_T$-Normalenvektor)
21) $\exists_1\, \Theta_T \in \mathcal{M}_T{}^{\perp\kappa_0} \cap \mathcal{V}_T$ (sf-dupl. $\kappa$-norm. $\mathcal{M}_T$-Normalenv.)
22) $V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T{}^\perp) \neq O$ (Maximal. bzw. Eindim. von $V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T{}^\perp)$ )
23) $V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T)$ ist Hyperebene von $V_T^{sf*}(\mathbb{R}^\Omega)$ (echte Teilmenge)
24) $V_T^{sf*}(\mathbb{R}^\Omega) = V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T) \oplus \mathcal{D}$ mit $\dim \mathcal{D} = 1$ ($V_T^{sf*}(\mathbb{R}^\Omega)$ als direkte Summe)
25) $V_T^{sf*}(\mathbb{R}^\Omega) \setminus V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T) \neq \emptyset$ (nichtleere Differenz)

26) (NEPG$Y_T$) $\exists\, Y_T \in \mathbb{R}^\Omega \cap \{\kappa(X_T) = \kappa_0\}$ mit $Y_T^\top V_T(h) = 0$ $\forall\, h \in \ker^{sf} V_0$

27) (PG$Y_T$) $\exists\, Y_T \in \mathbb{R}^\Omega\, (\cap\, \{\kappa(X_T) = \kappa_0\})$ mit $Y_T^\top V_T(h) = v_0(h)$ $\forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf}$

(Bewertungsvektor m. Preisgleichungen)

II) **Bedingungen im relativen Marktmodell**:
Die oben unter I) aufgeführten Charakterisierungen 1) – 27) für das LOPsfT gelten analog im relativen Marktmodell, sogar ohne die Voraussetzung von (ZVU) oder eines deterministischen $B_T$. Der in den Bedingungen 20) und 21) und in den Preisgleichungen 26) und 27) auftretende relative Bewertungsvektor $\tilde{Y}_T$ bzw. $\tilde{\Theta}_T$ besitzt jetzt jedoch die Komponentensumme $\kappa(\tilde{Y}_T) = \tilde{\kappa}_0 = 1$:

20) $\exists\, \tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1} := \tilde{\mathcal{M}}_T \cap \{\kappa(X_T) = 1\}$ (relat. $\kappa$-norm. $\tilde{\mathcal{M}}_T$-Normalenvektor)

21) $\exists_1\, \tilde{\Theta}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1} \cap \tilde{\mathcal{V}}_T$ (sf-dupl. rel. $\kappa$-norm. $\tilde{\mathcal{M}}_T$-Normalenv.)

26) (NEPG$\tilde{Y}_T$) $\exists\, \tilde{Y}_T \in \mathbb{R}^\Omega \cap \{\kappa(X_T) = 1\}$ mit $\tilde{Y}_T^\top \tilde{V}_T(h) = 0$ $\forall\, h \in \ker^{sf} V_0$

27) (PG$\tilde{Y}_T$) $\exists\, \tilde{Y}_T \in \mathbb{R}^\Omega\, (\cap\, \{\kappa(X_T) = 1\})$ mit $\tilde{Y}_T^\top \tilde{V}_T(h) = \tilde{v}_0(h)$ $\forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf}$

(rel. Bewertungsvektor m. Preisgleichungen)

Zusätzlich erhält man noch die folgende charakteristische Bedingung:

28) $\exists\, \tilde{Y}_T \in \mathbb{R}^\Omega \cap \{\kappa(X_T) = 1\}$ mit $\tilde{K}_T^{sf*}(\tilde{Y}_T) = 0$

**Erläuterungen zum Satz 5.12 und zu den Abbildungen**

Der Beweis des Satzes 5.12 erfolgt im Anschluss an diese Erläuterungen. Zur Charakterisierung des LOPsfT werden in diesem Satz nicht nur Preisgleichungen (in den Punkten 26 und 27) für die Zahlungsprofile $X_T = V_T(h) \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ und $Z_T = V_T(g) \in V_T(\ker^{sf} V_0) = \mathcal{M}_T$ angegeben, sondern auch Lagebeziehungen und Dimensionsgleichungen für bestimmte Unterräume von $\mathbb{R}^\Omega$ und $\mathcal{H}_N^{sf}$. Die gegenseitige Lage der wichtigen Unterräume im Raum $\mathbb{R}^\Omega$ der reellwertigen Zustandsfunktionen, nämlich der Unterräume $\mathcal{V}_T := V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$, $\ker V_T^{sf*} = \mathcal{V}_T^\perp$, $\mathcal{V}_0 := V_0(\mathcal{H}_N^{sf}) = \mathcal{E}_T = \operatorname{lin} \mathbf{1}_\Omega$, $\mathcal{M}_T := V_T(\ker^{sf} V_0)$, $\mathcal{E}_T^\perp$ und $\mathcal{M}_T^\perp$, und die gegenseitige Lage der wichtigen Unterräume im Raum $\mathcal{H}_N^{sf}$ der selbstfinanzierenden Handelsstrategien, nämlich $V_T^{sf*}(\mathbb{R}^\Omega)$, $\ker^{sf} V_T$, $\ker^{sf} V_0$, $V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T)$ und $\mathcal{C} := V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T^\perp)$, wird bei ungültigem LOPsfT in Abbildung 5.12 und bei gültigem LOPsfT in Abbildung 5.13 dargestellt. Der Vorteil derjenigen Charakterisierungen des LOPsfT in Satz 5.12, welche die Struktur und Lagebeziehungen von Vektorunterräumen beschreiben, besteht darin, dass sie geometrisch veranschaulicht werden können. So lässt sich der Vektorraum $\mathbb{R}^\Omega$ darstellen als direkte Summe der orthogonalen Komplemente $\mathcal{V}_T$ und $\mathcal{V}_T^\perp = \ker V_T^{sf*}$ und auch als direkte Summe von $\mathcal{M}_T$ und $\mathcal{M}_T^\perp$. Dabei liegt stets $\mathcal{M}_T$ in $\mathcal{V}_T$ und $\ker V_T^{sf*}$ in $\mathcal{M}_T^\perp$. Der Vektorraum $\mathcal{H}_N^{sf}$ wird dargestellt als direkte Summe der orthogonalen Komplemente $V_T^{sf*}(\mathbb{R}^\Omega)$ und $\ker^{sf} V_T = V_T^{sf*}(\mathbb{R}^\Omega)^\perp$ und der Bildraum $V_T^{sf*}(\mathbb{R}^\Omega)$ von $V_T^{sf*}$ als direkte Summe von $V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T)$ und $\mathcal{C} := V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T^\perp)$.

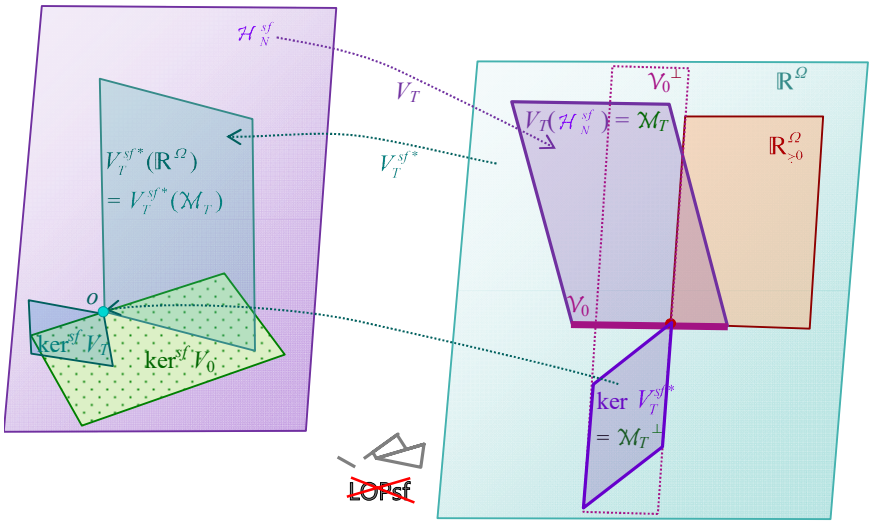



**Abb. 5.12** Die verschiedenen Unterräume der Vektorräume $\mathcal{H}_N^{sf}$ und $\mathbb{R}^\Omega$, der schwach positive Orthant $\mathbb{R}^\Omega_{\gneq 0}$ von $\mathbb{R}^\Omega$ und die linearen Abbildungen $V_T$ und $V_T^{sf*}$ bei ungültigem LOPsfT

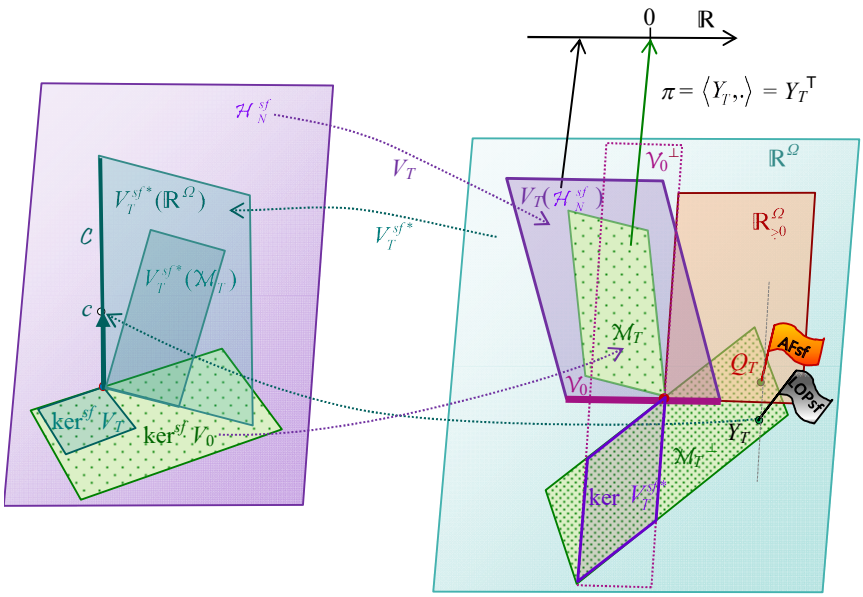



**Abb. 5.13** Die verschiedenen Unterräume der Vektorräume $\mathcal{H}_N^{sf}$ und $\mathbb{R}^\Omega$, der schwach positive Orthant $\mathbb{R}^\Omega_{\gneq 0}$ von $\mathbb{R}^\Omega$, die linearen Abbildungen $V_T$, $V_T^{sf*}$ und $\pi$, ein $\kappa$-normierter Normalenvektor $Y_T$ zu $\mathcal{M}_T$ bei gültigem LOPsfT und ein positiver $\kappa$-normierter Normalenvektor $Q_T$ bei sf-Arbitragefreiheit (AFsf)

Beim Vergleich der Situation der Unterräume in $\mathbb{R}^{\Omega}$ bzw. in $\mathcal{H}_N^{sf}$ bei ungültigem LOP mit der Situation bei gültigem LOP ist zu beachten, dass die Dimension der Bildräume $\mathcal{V}_T = V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ und $V_T^{sf*}(\mathbb{R}^{\Omega})$ der Abbildung $V_T$ bzw. der dazu adjungierten Abbildung $V_T^{sf*}$ gleich ist (dim $V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ = dim $V_T^{sf*}(\mathbb{R}^{\Omega})$ nach den allgemeinen Feststellungen zur adjungierten Abbildung in Abschnitt 2.10.1). Die Abbildung 5.12 veranschaulicht, dass in $\mathbb{R}^{\Omega}$ unter der Voraussetzung (ZVU) bei **Nichtgültigkeit des LOPsfT** die Aussagen $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T \neq O$ bzw. $\mathcal{V}_0 = \mathcal{E}_T = \text{lin } \mathbf{1}_{\Omega} \subseteq \mathcal{M}_T$ und

$$\mathcal{M}_T = V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$$

gelten, also $\mathcal{M}_T$ den ganzen Bildraum $V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ ausfüllt, und dass

$$\ker V_T^{sf*} = \mathcal{M}_T^{\perp}$$

gilt, also der Kern $\ker V_T^{sf*}$ der Abbildung $V_T^{sf*}$ den gesamten Unterraum $\mathcal{M}_T^{\perp}$ ausfüllt. Jedes duplizierbare Zahlungsprofil $X_T = V_T(h) \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ kann dann auch mit einem $h \in \ker^{sf} V_0$, also mit einem Startkapitaleinsatz $V_0(h) = 0$, dupliziert werden. Insbesondere existiert dann in $\mathcal{V}_0 = \mathcal{E}_T \subseteq \mathcal{V}_T = \mathcal{M}_T$ das spezielle Zahlungsprofil $\mathbf{1}_{\Omega} = (1,\ldots,1)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{M}_T \cap \mathbb{R}^{\Omega}_{\gneq 0}$ einer sf-Arbitragegelegenheit $g \in \ker^{sf} V_0$ (Definition in Abschnitt 5.1.2). Damit ist schon begründet, dass unter der Voraussetzung (ZVU) das LOPsfT eine notwendige Folgerung aus der sf-Arbitragefreiheit (AFsf) ist.

Eine weitere Begründung dieser notwendigen Bedingung LOPsfT erhält man unter dieser Voraussetzung (ZVU) mit Satz 5.6, c) von Abschnitt 5.1.12, nach dem bei vorliegender sf-Arbitragefreiheit (AFsf) ein Diskontvektor (positiver Bewertungsvektor) existiert und dann nach Abschnitt 5.3.3 das LOPsfT gilt.

Falls im ursprünglichen Marktmodell ein Numéraire $B$ existiert (Voraussetzung (NM)) und damit das relative Marktmodell definiert ist, folgt ohne die Voraussetzung (ZVU) nach Satz 5.5, a) von Abschnitt 5.1.11 aus der sf-Arbitragefreiheit (AFsf) die Existenz eines relativen Diskontvektors, daraus nach Abschnitt 5.3.3 das LOPsfT im relativen Marktmodell und nach Abschnitt 5.3.4 dann auch das LOPsfT im ursprünglichen Marktmodell.

(ZVU) $\wedge$ (AFsf) $\Rightarrow$ (LOPsfT);
(NM) $\wedge$ (AFsf) $\Rightarrow$ (LOPsfT).

Weiter zeigt die Abbildung 5.12, dass in $\mathcal{H}_N^{sf}$ bei ungültigem LOPsfT der Unterraum $\mathcal{C} := V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T^{\perp})$ mit dem Nullraum $O$ zusammenfällt und der Unterraum $V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T)$ den gesamten $V_T^{sf*}$-Bildraum $V_T^{sf*}(\mathbb{R}^{\Omega})$ ausfüllt. Der Kern $\ker^{sf} V_T$ der Abbildung $V_T$ liegt nicht im Kern $\ker^{sf} V_0$ der Abbildung $V_0$.

Die Abbildung 5.13 dagegen illustriert, dass mit der **Einstellung des LOPsfT** im $V_T$-Bildraum $\mathcal{V}_T = V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ der Unterraum $\mathcal{M}_T$ genau um eine Dimension kleiner ausfällt als der Unterraum $\mathcal{V}_T$ und dann $\mathcal{V}_T$ die direkte Summe seiner beiden Unterräume $\mathcal{V}_0$ und $\mathcal{M}_T$ ist:

$$\mathcal{V}_T = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{M}_T.$$

Im Beweisteil E) des Satzes 5.12 wird dargestellt, dass der triviale Durchschnitt $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O$ der Unterräume $\mathcal{V}_0$ und $\mathcal{M}_T$ bedeutet, dass jedes sf-duplizierbare Zahlungsprofil $X_T \in \mathcal{V}_T$ nur eine einzige additive Zerlegung

$$X_T = W_0 + M_T \text{ mit } W_0 \in \mathcal{V}_0 \text{ und } M_T \in \mathcal{M}_T$$

besitzt. Diese Zerlegung für $X_T = V_T(h) \in \mathcal{V}_T$ wird in Abschnitt 5.3.7 im Beweisteil 2a) und in Abschnitt 5.3.8 im Beweisteil a) für die Gleichungsdarstellung $\mathcal{A}_T = \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ mit $W_0 = V_0(h)/\kappa_0$ und $M_T = X_T - W_0$ angegeben ($\kappa_0 := \pi(\mathbf{1}_\Omega)$. In Abschnitt 5.3.7 wird in Beweisteil 2a) damit bewiesen, dass die Einzigkeit dieser additiven Zerlegung der sf-duplizierbaren Zahlungsprofile auch die Konstanz des Startkapitaleinsatzes aller sf-Duplikationsstrategien bedeutet, also die Gültigkeit des LOPsfT mit der daraus resultierenden Möglichkeit der Preisdefinition nach dem Duplikationsprinzip.

Bei gültigem LOPsfT wird also der $V_T$-Bildraum $\mathcal{V}_T$ direkt zerlegt in den eindimensionalen Unterraum $\mathcal{V}_0$ der Startkapitaleinsätze der sf-Handelsstrategien und den Unterraum $\mathcal{M}_T$ der indifferenten NE-Zahlungsprofile. Mit der Einengung von $\mathcal{M}_T$ auf eine Hyperebene des Raums $\mathcal{V}_T$ vergrößert sich im Gegenzug in $\mathbb{R}^\Omega$ das orthogonale Komplement $\mathcal{M}_T^\perp$ ausgehend von $\ker V_T^{sf*} = \mathcal{M}_T^\perp \cap \{\kappa(X_T) = 0\} =: \mathcal{M}_T^{\perp 0}$ genau um eine Dimension und enthält dann einen Vektor

$$Y_T \in \mathcal{M}_T^\perp \setminus \ker V_T^{sf*} = \mathcal{M}_T^\perp \cap \{\kappa(X_T) \neq 0\},$$

sodass $\mathcal{M}_T^\perp$ die direkte Summe des Unterraums $\ker V_T^{sf*}$ und eines eindimensionalen Unterraums $\text{lin}\{Y_T\}$ ist:

$$\mathcal{M}_T^\perp = \ker V_T^{sf*} \oplus \text{lin}\{Y_T\} \text{ mit } Y_T \in \mathcal{M}_T^\perp \cap \{\kappa(X_T) \neq 0\}.$$

Der Unterraum $\ker V_T^{sf*}$ ist dann eine Hyperebene von $\mathcal{M}_T^\perp$. Mit der Normierung des $\mathcal{M}_T$-Normalenvektors $Y_T$ auf die Komponentensumme $\kappa(Y_T) = \kappa_0 := \pi(\mathbf{1}_\Omega) \neq 0$ ist $Y_T$ ein **Bewertungsvektor** für die sf-duplizierbaren Zahlungsprofile $X_T = V_T(h) \in \mathcal{V}_T$: In Abschnitt 5.3.8 erhält man nämlich bei Beweis von $\mathcal{A}_T = \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ durch die Multiplikation der additiven Zerlegung

$$X_T = W_0 + M_T \qquad (W_0 = v_0(h)\mathbf{1}_\Omega/\kappa_0 \in \mathcal{V}_0,\ M_T = X_T - W_0 \in \mathcal{M}_T)$$

mit dem Vektor $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ den Preis von $X_T$:

$$\begin{aligned} Y_T^\top X_T &= Y_T^\top W_0 + Y_T^\top M_T \\ &= v_0(h)\kappa(Y_T)/\kappa_0 \\ &= \pi(X_T). \end{aligned}$$

Die Linearform (das lineare Funktional)

$$Y_T^\top : X_T \in \mathbb{R}^\Omega \mapsto Y_T^\top X_T \in \mathbb{R}$$

ist zwar als lineare Nutzenfunktion auf ganz $\mathbb{R}^\Omega$ definiert, liefert aber nur auf $\mathcal{V}_T$ den eindeutig bestimmten Preis gemäß der **Preisgleichung**

(PG$Y_T$) $\qquad Y_T^\top V_T(h) = v_0(h) \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf}$.

Die Linearität der Preisfunktion $\pi : X_T = V_T(h) \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf}) \mapsto v_0(h) \in \mathbb{R}$ kann auch aus der Linearität von $V_T$ und $V_0$ geschlossen werden (man vergleiche dazu den Beweis für die die Linearität der Preisfunktion $\pi$ auf $L(\mathcal{H}_N)$ in Abschnitt 3.3.3).

Der Wert $\pi(X_T) = Y_T^\top X_T$ der Preisfunktion $\pi$ ist für die $X_T = V_T(h) \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ auch unabhängig von der Wahl des Bewertungsvektors $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$: In Abschnitt 5.3.8 wird nämlich gezeigt, dass mit einem beliebigen Bewertungsvektor $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ das Skalarprodukt $Y_T^\top X_T$

gleich dem für alle sf-Duplikationsstrategien konstanten Startkapital $v_0(h)$, also gleich dem Preis $\pi(X_T)$ von $X_T$ ist. Bei gültigem LOPsfT erhält man also durch $\pi(X_T) = Y_T^{\top} X_T$ mit beliebigem $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ ein auf $\mathcal{V}_T = V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ eindeutig bestimmtes **Bewertungsfunktional**

$$\pi : \mathcal{V}_T \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Wie schon in Abschnitt 3.3.2 bei der Definition des Preises $\pi(X)$ mittels des LOP erwähnt wurde, so ist auch hier wieder ersichtlich, dass in die Preisbestimmung die tatsächlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten der Ereignisse $A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$, die bei der mathematischen Modellierung des Preisprozesses $S$ auftreten, nicht eingehen. Es wird hier nur der innerhalb des Marktmodells ermittelte Bewertungsvektor $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ verwendet.

Im relativen Marktmodell berechnet sich in Abschnitt 5.3.8 mit einem auf die Komponentensumme $\kappa(\tilde{Y}_T) = 1$ $\kappa$-normierten Normalenvektor $\tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1} = \tilde{\mathcal{K}}_T^{\perp 1}$ der Wert der auf $\mathcal{H}_N^{sf}$ definierten deterministischen linearen Nutzenfunktion

$$\tilde{V}_0(h) = \tilde{v}_0(h) \cdot \mathbf{1}_\Omega = \tilde{S}_0^{\delta\top} h_0 \cdot \mathbf{1}_\Omega$$

für alle sf-Duplikationsstrategien $h$ von $\tilde{X}_T = \tilde{V}_T(h) \in \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ als das Skalarprodukt von $\tilde{Y}_T$ und $\tilde{X}_T$. Dieser Wert ist also nur abhängig vom Zahlungsprofil $\tilde{X}_T$ und unabhängig von den sf-Duplikationsstrategien $h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap \tilde{V}_T^{-1}(\{\tilde{X}_T\})$:

$$\tilde{Y}_T^{\top} \tilde{X}_T = \tilde{v}_0(h).$$

Durch die Multiplikation mit dem Vektor $\tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$ wird also aus der eindeutigen additiven Zerlegung

$$\tilde{X}_T = \tilde{V}_T(h) = \tilde{V}_0(h) + \tilde{K}_T(h) \in \tilde{\mathcal{V}}_0 \oplus \tilde{\mathcal{M}}_T$$

eines sf-duplizierbaren relativen Zahlungsprofils $\tilde{X}_T = \tilde{V}_T(h) \in \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ das relative Startkapital $\tilde{v}_0(h)$ der sf-Duplikationsstrategie $h$ herausgelöst. Der relative Preis $\tilde{\pi}(\tilde{X}_T)$ von $\tilde{X}_T \in \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ als Bewertungsmaßstab für $\tilde{X}_T$ kann also eindeutig durch den deterministischen Startkapitaleinsatz $\tilde{V}_0(h)$ seiner sf-Duplikationsstrategien definiert werden und als Skalarprodukt $\tilde{\pi}(\tilde{X}_T) = \tilde{Y}_T^{\top} \tilde{X}_T$ unabhängig von einer sf-Duplikationsstrategie berechnet werden. Ein derartiger Vektor $\tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$ wird als Bewertungsvektor für die sf-duplizierbaren relativen Zahlungsprofile $\tilde{X}_T \in \tilde{V}_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ bezeichnet.

Die bei gültigem LOPsfT in $\mathcal{H}_N^{sf}$ außerdem gültige Inklusion

$$\ker^{sf} V_T \subseteq \ker^{sf} V_0$$

(Satz 5.12, 5) bedeutet, dass das spezielle Null-Zahlungsprofil $X_T = V_T(0) = 0 \in \mathbb{R}^\Omega$ nur durch ein Zahlungsprofil $V_T(g)$ mit $g \in \ker^{sf} V_T \subseteq \ker^{sf} V_0$ nachgebildet werden kann, also nur mittels einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie $g \in \mathcal{H}_N^{sf}$ ohne Startkapitaleinsatz ($V_0(g) = 0$) dupliziert werden kann. Für alle sf-Duplikationsstrategien $g$ von $X_T = 0$ ist also der Startkapitaleinsatz konstant: $V_0(g) = V_0(0) = 0$. Diese Inklusion beschreibt also das LOPsfT speziell für das Zahlungsprofil $X_T = 0$.
Weiter bedeutet diese Relation, dass ein beliebiges Zahlungsprofil $X_T = V_T(h) \in \mathcal{V}_T$ nur durch ein Zahlungsprofil $V_T(k) \in \mathcal{V}_T$ nachgebildet werden kann, dessen Startkapitaleinsatz $V_0(k)$ mit

dem Startkapitaleinsatz $V_0(h)$ der sf-Duplikationsstrategie $h$ von $X$ übereinstimmt, dass also das LOPsfT gilt: Mit $f := k - h$ folgt nämlich aus $0 = V_T(k) - V_T(h) = V_T(f)$ wegen $\ker^{sf} V_T \subseteq \ker^{sf} V_0$ auch $0 = V_0(f) = V_0(k) - V_0(h)$ bzw. $V_0(k) = V_0(h)$.
Ein Sonderfall für die Gültigkeit des LOPsfT ist der Fall, dass die lineare Abbildung $V_T$ injektiv ist: Aus $\ker^{sf} V_T = O$ folgt nämlich $\ker^{sf} V_T = O \subseteq \ker^{sf} V_0$ und damit das LOPsfT. In diesem Sonderfall besitzt jedes sf-duplizierbare Zahlungsprofil $X_T \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ nur eine einzige Duplikationsstrategie $h$.

Mit der Einstellung des LOPsfT vergrößert sich im Vektorraum $\mathcal{H}_N^{sf}$ das $V_T^{sf*}$-Bild $V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T{}^{\perp})$ des Unterraums $\mathcal{M}_T{}^{\perp}$ durch die Hinzunahme des Vektors

$$V_T^{sf*}(Y_T) = c$$

vom Nullraum $O$ aus auf den eindimensionalen Unterraum $\mathcal{C} := \text{lin}\{c\}$ ($c := V_T^{sf*}(Y_T) \neq 0$, $Y_T \in \mathcal{M}_T{}^{\perp\kappa_0}$). Im Gegenzug verkleinert sich wegen des Verdrängungseffekts von $\mathcal{C}$ auf $V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T)$ ($\mathcal{C} \cap V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T) = O$) das Bild $V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T)$ des Unterraums $\mathcal{M}_T$ ausgehend vom vollen Bildraum $V_T^{sf*}(\mathbb{R}^{\Omega})$ genau um eine Dimension auf eine Hyperebene von $V_T^{sf*}(\mathbb{R}^{\Omega})$. Der gesamte $V_T^{sf*}$-Bildraum $V_T^{sf*}(\mathbb{R}^{\Omega})$ ist dann die direkte Summe des Unterraums $V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T)$ und des eindimensionalen Unterraums $\mathcal{C}$:

$$V_T^{sf*}(\mathbb{R}^{\Omega}) = V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T) \oplus \mathcal{C}.$$

Da der Wert $v_0(h)$ des Startkapitals einer sf-Duplikationsstrategie von $X_T = V_T(h) \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ auch als Skalarprodukt der sf-Duplikationsstrategie $h$ und der festen sf-Handelsstrategie $c := V_T^{sf*}(Y_T)$ ($\neq 0$, $Y_T \in \mathcal{M}_T{}^{\perp\kappa_0}$) berechnet werden kann,

$$v_0(h) = Y_T{}^{\mathsf{T}} V_T(h) = V_T^{sf*}(Y_T)^{\mathsf{T}} h = c^{\mathsf{T}} h,$$

kann die in $\mathcal{H}_N^{sf}$ gelegene sf-Handelsstrategie $c$ auch als **Bewertungsprozess** zur Nutzenfunktion $v_0(h)$ für die sf-Handelsstrategien angesehen werden. In Beweisteil E) von Hilfssatz 5.11 in Abschnitt 5.3.6 wird gezeigt, dass der Funktionswert $c = V_T^{sf*}(Y_T)$ unabhängig von der Wahl des $Y_T \in \mathcal{M}_T{}^{\perp\kappa_0}$ ist. Der stochastische Bewertungsprozess $c \in \mathcal{H}_N^{sf}$ tritt hier bei gültigem LOPsfT somit an die Stelle des deterministischen Bewertungsprozesses $b \in \mathcal{H}_N$ für die Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N$ in Abschnitt 3.3.1.

**Beweis des Satzes 5.12**:
Der Beweis der Charakterisierungen 1) – 27) für das LOPsfT erfolgt im ursprünglichen Marktmodell. Sie gelten analog auch im relativen Marktmodell, dabei ohne zusätzliche Voraussetzung von (ZVU) oder eines deterministischen $B_T$. Für die in der $\kappa$-Normierung des Bewertungsvektors abweichenden Charakterisierungen 20, 26 – 28 im relativen Marktmodell wird noch in Teil K) ein Beweis unter Verwendung der Mengenidentität $\tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{\mathcal{K}}_T$ angegeben.

A) „1) LOPsfT $\Leftrightarrow$ 2) LOP1sfT“:
Die Äquivalenz dieser beiden Aussagen 1) und 2) wird bereits in Abschnitt 5.3.2 begründet.

B) „1) LOPsfT $\Leftrightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 4) $\Leftrightarrow$ 5) $\ker^{sf} V_T \subseteq \ker^{sf} V_0$“:
Zu beliebigem fest vorgegebenen $X_T \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ ist die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Gleichung

$$V_T(h) = X_T \text{ mit } h \in \mathcal{H}_N^{sf}$$

gegeben durch die Menge aller

$$h = h' + f \in \mathcal{H}_N^{sf}$$

mit einer speziellen Lösung $h' \in \mathcal{H}_N^{sf}$ der inhomogenen Gleichung $V_T(h) = X_T$ und der allgemeinen Lösung $f \in \mathcal{H}_N^{sf}$ der homogenen Gleichung

$$V_T(f) = 0.$$

„⇒": Bei Gültigkeit des LOPsfT (Bedingung 1) auf dem Vektorraum $V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ $(\neq \emptyset)$ ist zumindest für ein $X_T \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ für alle sf-Duplikationsstrategien $h = h' + f$ von $X_T$ (mit festem $h'$ $\in \mathcal{H}_N^{sf} \cap V_T^{-1}(\{X_T\})$ und beliebigem $f \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap V_T^{-1}(\{0\})$) der zum Zeitpunkt $t = 0$ in das Portfolio eingebrachte Startkapitaleinsatz $V_0(h)$ konstant (Bed. 3):

$$V_0(h') + V_0(f) = V_0(h) = V_0(h') \quad \forall\, h, h' \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap V_T^{-1}(\{X\}).$$

Dies ist wiederum äquivalent dazu, dass für jede Lösung $f \in \mathcal{H}_N^{sf}$ der homogenen linearen Gleichung

$$V_T(f) = 0,$$

also für jedes $f \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap V_T^{-1}(\{0\}) =: \ker^{sf} V_T$, auch

$$V_0(f) = 0$$

ist (Bed. 4), also $f \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap V_0^{-1}(\{0\}) =: \ker^{sf} V_0$ gilt. Die Bed. 4 $[V_0(f) = V_0(0) = 0 \;\forall\, f \in \mathcal{H}_N^{sf}$ mit $V_T(f) = V_T(0) = 0]$ entspricht der Bed. 3 für das spezielle $X = 0 = V_T(0) \in L(\mathcal{H}_N)$. In der Mengenschreibweise bedeutet dies für die Kerne der Abbildungen $V_T$ und $V_0$ die Inklusion (Bed. 5)

$$\ker^{sf} V_T \subseteq \ker^{sf} V_0.$$

„⇐": Umgekehrt ist beim Vorliegen dieser Bed. 5) $\ker^{sf} V_T \subseteq \ker^{sf} V_0$ dann auch bei jedem beliebigen $X_T = V_T(h) \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ für alle sf-Duplikationsstrategien

$$h \in h' + \ker^{sf} V_T \subseteq h' + \ker^{sf} V_0, \; h' \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap V_T^{-1}(\{X_T\}),$$

der Startkapitaleinsatz $V_0(h) = V_0(h')$ konstant, also das LOPsfT (Bed. 1) gültig.

Anmerkung zur Bed. 5): Wegen

$$\ker L = \ker L_0 \cap \ldots \cap \ker L_{T-1} \cap \ker L_T = \mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_T =: \ker^{sf} V_T$$

und damit $\ker L \subseteq \mathcal{H}_N^{sf}$ ist die Bed. 5)

$$\ker L = \ker^{sf} V_T \subseteq \ker^{sf} V_0 := \mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0,$$

welche das LOPsfT charakterisiert, gleichbedeutend zu der Bedingung in Satz 3.4, 5)

$$\ker L \subseteq \ker V_0,$$

welche das LOP charakterisiert. Damit wird wieder offensichtlich, wie schon in Abschnitt 5.3.2 begründet wurde, dass das LOPsfT äquivalent zum LOP ist.

C) „5) $\ker^{sf} V_T \subseteq \ker^{sf} V_0 \Leftrightarrow$ 6) $V_T^{sf*}(\mathbb{R}^\Omega) \supseteq V_0^{sf*}(\mathbb{R}^\Omega)$ ":

Aus der Definition des orthogonalen Komplements eines Unterraums ergibt sich, dass aus der Inklusion 5) die Inklusion 6) folgt: $V_T^{sf*}(\mathbb{R}^\Omega) = (\ker^{sf} V_T)^\perp \supseteq (\ker^{sf} V_0)^\perp = V_0^{sf*}(\mathbb{R}^\Omega)$. Die umgekehrte Schlussweise erhält man, da für einen endlichdimensionalen Unterraum $U$ die Übereinstimmung $(U^\perp)^\perp = U$ gilt.[50]

D) „1) LOPsfT $\Leftrightarrow$ 7) $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O \Leftrightarrow$ 8) $\mathcal{V}_T = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{M}_T \Leftrightarrow$ 14) $\dim \mathcal{V}_T = 1 + \dim \mathcal{M}_T \Leftrightarrow$
15) $\mathcal{M}_T$ Hypereb. von $\mathcal{V}_T \Leftrightarrow$ 16) $\dim \mathcal{M}_T^\perp = \dim \ker V_T^{sf*} + 1 \Leftrightarrow$ 17) $\ker V_T^{sf*}$ Hypereb. v. $\mathcal{M}_T^\perp$

[50] Diese involutorische (selbstinverse) Eigenschaft des orthogonalen Komplements eines endlich erzeugbaren Unterraums findet man z. B. bei Kowalsky (1967), S. 134, Wagner (1981), S. 180–182 (siehe auch Fußnote zu Beweisteil C von Satz 3.3 in Abschnitt 3.4.1).

$\Leftrightarrow$ 18) $\mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) \neq 0\} = \mathcal{M}_T^{\perp} \setminus \ker V_T^{sf*} \neq \emptyset \Leftrightarrow$ 19) $\mathcal{M}_T^{\perp} = \ker V_T^{sf*} \oplus \text{lin}\{Z_T\}$ mit $Z_T \in \mathcal{M}_T^{\perp} \setminus \ker V_T^{sf*} \Leftrightarrow$ 20) $\mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0} \neq \emptyset$":

Die Äquivalenz der Aussagen wird in Abschnitt 5.3.7 für das ursprüngliche Marktmodell unter der Voraussetzung (ZVU) oder eines deterministischen $B_T$ begründet. Verwendet werden dabei die Definition der direkten Summe, wobei hier speziell einer der Unterräume eindimensional ist, die Definition der Dimension eines linearen Unterraums als die eindeutig bestimmte Länge einer Basis des Unterraums bzw. als die Maximalzahl unabhängiger Elemente, die Definition einer Hyperebene und die in Abschnitt 5.3.7 hergeleiteten Dimensionsgleichungen.

E) „8) $\mathcal{V}_T = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{M}_T \Leftrightarrow 9) \Leftrightarrow 10)$":

Die hier für die speziellen Unterräume $\mathcal{V}_0 = \mathcal{Z}_T$ und $\mathcal{M}_T$ formulierte Aussage gilt allgemein für die direkte Summe zweier beliebiger Unterräume eines Vektorraums.[51] Ein Beweis wird auch in Beweisteil E) von Satz 3.3 in Abschnitt 3.4.1 angegeben. Die hierbei für ein Zahlungsprofil $X_T = V_T(h) \in \mathcal{V}_T$ auftretende einzige speziellere additive Zerlegung $X_T = V_T(h) = W_0(h) + M_T(h)$ wird in Abschnitt 5.3.7, Beweisteil 2a) gegeben mit $W_0(h) = V_0(h)/\kappa_0 \in \mathcal{V}_0$ und $M_T(h) = V_T(h) - W_0(h) \in \mathcal{M}_T$.

F) „7) $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O \Leftrightarrow 11)$ $\mathcal{V}_0 = \mathcal{Z}_T \not\subseteq \mathcal{M}_T \Leftrightarrow 12)$ $\mathcal{M}_T^{\perp} \not\subseteq \mathcal{Z}_T^{\perp} = \{\kappa(X_T) = 0\}$":

Die Äquivalenz der Aussagen 7) und 11) folgt aus der Eindimensionalität von $\mathcal{V}_0 = \mathcal{Z}_T$, die Äquivalenz von 11) und 12) mit der Definition des orthogonalen Komplements $U^{\perp}$ eines Unterraums $U$ und der involutorischen Eigenschaft $U^{\perp\perp} = U$ des orthogonalen Komplements für endlichdimensionale Unterräume $U$.

G) „12) $\mathcal{M}_T^{\perp} \not\subseteq \mathcal{Z}_T^{\perp} = \{\kappa(X_T) = \mathbf{1}_{\Omega}^{\top} X_T = 0\} \Leftrightarrow 13)$ $\mathcal{M}_T^{\perp} \not\subseteq \mathcal{Z}_T^{\perp} \cap \mathcal{M}_T^{\perp} = \ker V_T^{sf*} \Leftrightarrow 20)$ $\mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0} \neq \emptyset$":

Allgemein ist $A \subseteq B$ äquivalent zu $A \subseteq B \cap A$ für beliebige Mengen $A$ und $B$. Damit ist insbesondere $\mathcal{M}_T^{\perp} \subseteq \mathcal{Z}_T^{\perp}$ äquivalent zu $\mathcal{M}_T^{\perp} \subseteq \mathcal{Z}_T^{\perp} \cap \mathcal{M}_T^{\perp}$ und dann $\mathcal{M}_T^{\perp} \not\subseteq \mathcal{Z}_T^{\perp}$ äquivalent zu $\mathcal{M}_T^{\perp} \not\subseteq \mathcal{Z}_T^{\perp} \cap \mathcal{M}_T^{\perp}$. Da nach Hilfssatz 5.11, I, 7 c von Abschnitt 5.3.6 noch die Übereinstimmung

$$\ker V_T^{sf*} = \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \mathcal{Z}_T^{\perp} = \mathcal{M}_T^{\perp 0}$$

gilt, folgt die Äquivalenz von 12) und 13). Die Bedingung $13\,\mathcal{M}_T^{\perp} \not\subseteq \mathcal{M}_T^{\perp 0}$ ist äquivalent zu $\mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) \neq 0\} \neq \emptyset$ und zu $\mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0} \neq \emptyset$ (Bed. 20).

H) „18) $\mathcal{M}_T^{\perp} \setminus \ker V_T^{sf*} \neq \emptyset \Leftrightarrow 19)$ $\mathcal{M}_T^{\perp} = \ker V_T^{sf*} \oplus \text{lin}\{Z_T\}$ mit $Z_T \in \mathcal{M}_T^{\perp} \setminus \ker V_T^{sf*}$ $= \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) \neq 0\} \Leftrightarrow 20) \exists\, Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0} \Leftrightarrow 21) \exists_1\, \Theta_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0} \cap \mathcal{V}_T$":

Die Übereinstimmung der Mengen $\mathcal{M}_T^{\perp} \setminus \ker V_T^{sf*}$ und $\mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) \neq 0\}$ gilt nach Hilfssatz 5.11, I, 7d). Die Äquivalenz von 18), 19) und 20) wird in Abschnitt 5.3.8 mittels der Normierung eines $\mathcal{M}_T$-Normalenvektors $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) \neq 0\}$ auf die Komponentensumme $\kappa(Y_T) = \kappa_0$ gezeigt. Dabei ist $\kappa_0 := v_0(h) > 0$ der Startkapitaleinsatz einer sf-Duplizierung $V_T(h) = \mathbf{1}_{\Omega}$ gemäß der Voraussetzung (ZVU). Durch diese Normierung wird der Normalenvektor zum Bewertungsvektor. Die Äquivalenz von 20) zu 21) wird ebenfalls in Abschnitt 5.3.8 unter Verwendung von Hilfssatz 5.11, I, 7c) bewiesen.

I) „7) $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O \Leftrightarrow 22)$ $\mathcal{C} = V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T^{\perp}) \neq 0 \Leftrightarrow 23) \Leftrightarrow 24) \Leftrightarrow 25)$":

Die Äquivalenz der Aussagen 7) und 22) folgt nach Hilfssatz 5.11, I, 6) mit der Fallunterscheidung nach Hilfssatz 5.11, 8a) und 12a), wonach

$$V_T^{sf*}(\mathbb{R}^{\Omega}) = V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T) \oplus V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T^{\perp})$$

gilt und der Unterraum $\mathcal{C} = V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T^{\perp})$ genau dann von $O$ verschieden und eindimensional ist, wenn

---

[51] Diese Charakterisierung der direkten Summe von linearen Unterräumen durch die eindeutige additive Zerlegung der Elemente der Unterraumsumme findet man bei Wagner (1981), S. 27, Kowalsky (1967), S. 217, Kowalsky u. Michler (2003), S. 37, Bröcker (2004), S. 35.

das LOPsfT gilt. Die Äquivalenz von 22) zu 23), 24) und 25) ergibt aus der angegebenen additiven Zerlegung von $V_T^{sf*}(\mathbb{R}^\Omega)$ und der Definition einer Hyperebene.

J) „20) $\exists\, Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$

$\Leftrightarrow$ 26) (NEPG$Y_T$) $\exists\, Y_T \in \mathbb{R}^\Omega \cap \{\kappa(X_T) = \kappa_0\}$ mit $Y_T^{\top} V_T(h) = 0\ \forall\, h \in \ker^{sf} V_0$

$\Leftrightarrow$ 27) (PG$Y_T$) $\exists\, Y_T \in \mathbb{R}^\Omega$ mit $Y_T^{\top} V_T(h) = v_0(h)\ \forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ “:

a) „20) $\Leftrightarrow$ 26)“: Nach der Definition des Unterraums $\mathcal{M}_T := V_T(\ker^{sf} V_0)$ gilt die Inzidenz

i) $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp}$

genau dann, wenn für $Y_T$ die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

ii) $Y_T^{\top} V_T(h) = 0\ \forall\, h \in \ker^{sf} V_0$ $\qquad (\mathcal{M}_T = V_T(\ker^{sf} V_0))$.

Nimmt man zu jeder dieser beiden Bedingungen i) und ii) jeweils noch die $\kappa$-Normierung $\kappa(Y_T) = \kappa_0$ von $Y_T$ dazu, so erhält man schon die Äquivalenz der Bedingungen 20 und 26.

b) „20) $\Leftrightarrow$ 27)“:

„$\Rightarrow$“: Diese Beweisrichtung mit dem Nachweis der Preisgleichung für ein beliebiges Zahlungsprofil $X_T = V_T(h) \in \mathcal{V}_T$ wird bereits in Abschnitt 5.3.8 unter der Voraussetzung (ZVU) oder eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ mit einem normierten $\mathcal{M}_T$-Normalenvektor $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ und der additiven Zerlegung von $X_T = W_0 + M_T \in \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{M}_T$ gezeigt. Anzumerken ist hier, dass die Gültigkeit der Preisgleichung (PG$Y_T$) in Abschnitt 5.3.3 mit $Y_T = \vartheta_T \in \mathcal{V}_T$ auch allgemeiner ohne zusätzliche Voraussetzung aus dem LOPsfT hergeleitet werden kann.

„$\Leftarrow$“: Es existiere ein $Y_T \in \mathbb{R}^\Omega$, mit dem für alle sf-Handelsstrategien die Preisgleichung (PG$Y_T$) gültig ist. Für ein beliebiges sf-duplizierbaren Zahlungsprofil $X_T = V_T(h) \in \mathcal{V}_T$ $(h \in \mathcal{H}_N^{sf})$ folgt unmittelbar aus der Preisgleichung

$$v_0(h) = Y_T^{\top} V_T(h) = Y_T^{\top} X_T$$

die Konstanz des Startkapitaleinsatzes $v_0(h)$ für alle Duplikationsstrategien $h$ von $X_T$, also das LOPsfT und die Preisberechnung $\pi(X_T) = Y_T^{\top} X_T$ für alle $X_T \in \mathcal{V}_T$. Nach Abschnitt 5.3.5 ist mit der Voraussetzung (DPsfT$\mathbf{1}_\Omega$+) der Preis von $\mathbf{1}_\Omega \in \mathcal{V}_T$ mit $\kappa_0$ gegeben. Damit folgt für die Komponentensumme von $Y_T$

$$\kappa(Y_T) = Y_T^{\top} \mathbf{1}_\Omega = \pi(\mathbf{1}_\Omega) = \kappa_0.$$

Aus der Gültigkeit der Preisgleichungen für beliebige $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ folgen insbesondere für die $h \in \ker^{sf} V_0$ die Preisgleichungen

$$Y_T^{\top} V_T(h) = 0$$

und daher die Inzidenz $Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp}$. Insgesamt folgt dann die Inzidenz

$$Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0},$$

also die Bedingung 20.

K) Aussagen im relativen Marktmodell:

„20) $\exists\, \tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$

$\Leftrightarrow$ 26) (NEPG $\tilde{Y}_T$) $\exists\, \tilde{Y}_T \in \mathbb{R}^\Omega \cap \{\kappa(X_T) = 1\}$ mit $\tilde{Y}_T^{\top} \tilde{V}_T(h) = 0\ \forall\, h \in \ker^{sf} V_0$

$\Leftrightarrow$ 27) (PG$\tilde{Y}_T$) $\exists\, \tilde{Y}_T \in \mathbb{R}^\Omega$ mit $\tilde{Y}_T^{\top} \tilde{V}_T(h) = \tilde{v}_0(h)\ \forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf}$

$\Leftrightarrow$ 28) $\exists\, \tilde{Y}_T \in \mathbb{R}^\Omega \cap \{\kappa(X_T) = 1\}$ mit $\tilde{K}_T^{sf*}(\tilde{Y}_T) = 0$“:

a) Äquivalenz der Bedingungen 20, 26 und 28: Da nach Hilfssatz 5.11, II, 2) im relativen Marktmodell die Mengenidentitäten

$$\tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} = \tilde{\mathcal{K}}_T^{\perp} = \ker \tilde{K}_T^{sf*}$$

gelten, ist die Bedingung

$$\tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp}$$

gleichbedeutend zu jeder der beiden folgenden Bedingungen

$$\tilde{Y}_T^{\top}\tilde{V}_T(h) = 0 \quad \forall\, h \in \ker^{sf} V_0 \qquad (\tilde{\mathcal{M}}_T = \tilde{V}_T(\ker^{sf} V_0)),$$

$$\tilde{Y}_T \in \ker \tilde{K}_T^{sf*} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{K}_T^{sf*}(\tilde{Y}_T) = 0.$$

Nimmt man zu jeder dieser drei Bedingungen jeweils noch die $\kappa$-Normierung $\kappa(X_T) = 1$ von $\tilde{Y}_T$ dazu, so erhält man schon die Äquivalenz der drei Bedingungen 20, 26 und 28.

b) Äquivalenz der Bedingungen 20 und 27: Für alle $\tilde{Y}_T \in \mathbb{R}^{\Omega}$ und alle $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ gilt nach (SFṼ) von Abschnitt 5.1.5 die Gleichung

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_T^{\top}\tilde{V}_T(h) &= \tilde{Y}_T^{\top}\tilde{V}_0(h) &&+ \tilde{Y}_T^{\top}\tilde{K}_T(h)\\ &= \kappa(\tilde{Y}_T)\tilde{v}_0(h) &&+ \tilde{Y}_T^{\top}\tilde{K}_T(h) \qquad (\tilde{V}_0(h) = \mathbf{1}_{\Omega}\tilde{v}_0(h),\ \tilde{Y}_T^{\top}\mathbf{1}_{\Omega} = \kappa(\tilde{Y}_T))\\ &= \kappa(\tilde{Y}_T)\tilde{v}_0(h) &&+ \tilde{K}_T^{sf*}(\tilde{Y}_T)^{\top}h \qquad (\text{Def. v. } \tilde{K}_T^{sf*} \text{ in Abschnitt 5.3.6}).\end{aligned}$$

Speziell für die $\kappa$-normierten $\tilde{Y}_T \in \{\kappa(X_T) = 1\}$ und die $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ gilt darüberhinaus

$$\tilde{Y}_T^{\top}\tilde{V}_T(h) = \tilde{v}_0(h) + \tilde{K}_T^{sf*}(\tilde{Y}_T)^{\top}h\,.$$

Somit folgt für die $\tilde{Y}_T \in \{\kappa(X_T) = 1\}$ aus der Bedingung $\tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} = \tilde{\mathcal{K}}_T^{\perp} = \ker \tilde{K}_T^{sf*}$ bzw. $\tilde{K}_T^{sf*}(\tilde{Y}_T) = 0$ die Gültigkeit der Preisgleichungen

$$(\mathrm{PG}\,\tilde{Y}_T) \qquad \tilde{Y}_T^{\top}\tilde{V}_T(h) = \tilde{v}_0(h)\ \forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf}\,.$$

Daher ergibt sich für die $\tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = 1\}$ die Gültigkeit von $(\mathrm{PG}\,\tilde{Y}_T)$ und es ist die Schlussfolgerung „20) ⇒ 27)“ gezeigt.

Es wird jetzt noch die umgekehrte Schlussweise „27) ⇒ 20)“ ohne die Voraussetzung $\kappa(\tilde{Y}_T) = 1$ begründet: Falls nun für ein beliebiges festes $\tilde{Y}_T \in \mathbb{R}^{\Omega}$ (ohne die Voraussetzung $\kappa(\tilde{Y}_T) = 1$) die Preisgleichungen $(\mathrm{PG}\,\tilde{Y}_T)$ gelten, sind insbesondere auch die Bedingungen

$$\tilde{Y}_T^{\top}\tilde{V}_T(h) = 0 \quad \forall\, h \in \ker^{sf} V_0,$$

$$\tilde{Y}_T^{\top}\tilde{Z}_T = 0 \qquad \forall\ \tilde{Z}_T = \tilde{V}_T(h) \in \tilde{V}_T(\ker^{sf} V_0) = \tilde{\mathcal{M}}_T\,,$$

somit die Inzidenz $\tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp} = \tilde{\mathcal{K}}_T^{\perp} = \ker \tilde{K}_T^{sf*}$ und auch die Bedingung $\tilde{K}_T^{sf*}(\tilde{Y}_T) = 0$ erfüllt.

Außerdem kann noch die $\kappa$-Normierung von $\tilde{Y}_T$ gefolgert werden: In Abschnitt 5.3.5, Beweisteil a) wurde für das deterministische Zahlungsprofil $\mathbf{1}_{\Omega} \in \mathcal{E}_T = \tilde{\mathcal{V}}_0 \subseteq \tilde{\mathcal{V}}_T$ mittels Satz 5.2 a) eine relative sf-Duplikationsstrategie $k \in \mathcal{H}_N^{sf}$ mit dem relativen Startkapitaleinsatz $\tilde{v}_0(k) = 1$ angegeben. Zusammen mit der Preisgleichung $(\mathrm{PG}\,\tilde{Y}_T)$ für $\mathbf{1}_{\Omega} = \tilde{V}_T(k)$ $(k \in \mathcal{H}_N^{sf})$ erhält man damit

$$1 = \tilde{v}_0(k) = \tilde{Y}_T^{\top}\tilde{V}_T(k) = \tilde{Y}_T^{\top}\mathbf{1}_{\Omega} = \kappa(\tilde{Y}_T)\,,$$

also die Normierung $\kappa(\tilde{Y}_T) = 1$. Diese $\kappa$-Normierung von $\tilde{Y}_T$ muss also in der Bedingung 27 $(\mathrm{PG}\,\tilde{Y}_T)$ nicht extra mit vorausgesetzt werden. Damit folgt aus der Gültigkeit der Preisgleichungen $(\mathrm{PG}\,\tilde{Y}_T)$ mit einem $\tilde{Y}_T \in \mathbb{R}^{\Omega}$ ohne Voraussetzung der $\kappa$-Normierung auch die Bedingung 20) $\exists\ \tilde{Y}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$. □

In der nachfolgenden Tabelle 5.1 wird für einen Überblick eine Zusammenstellung der Charakterisierungen verschiedener Begriffe, nämlich der sf-Duplizierbarkeit, der sf-Vollständigkeit, des Law of One Price (LOPsfT) und der sf-Arbitragefreiheit (AFsf), für endfällige Zahlungsprofile im Mehrperiodenmodell gegeben. Bei der Charakterisierung des LOPsfT und der sf-Arbitragefreiheit (AFsf) werden Lagebeziehungen und Dimensionsgleichungen für bestimmte Unterräume in $\mathbb{R}^{\Omega}$ und $\mathcal{H}_N^{sf}$, die Existenz eines Bewertungsvektors mit Preisgleichungen für die sf-duplizierbaren Zahlungsprofile angegeben. Einige Charakterisierungen

der sf-Arbitragefreiheit (AFsf) können aus den Charakterisierungen des LOPsfT mittels eines $\kappa$-normierten $\mathcal{M}_T$-Normalenvektors gewonnen werden, indem man verwendet, dass die sf-Arbitragefreiheit durch die Existenz eines *positiven* $\kappa$-normierten $\mathcal{M}_T$-Normalenvektors charakterisiert wird. Charakterisierungen der sf-Arbitragefreiheit werden damit sowohl mit einem positiven $\kappa$-normierten $\mathcal{M}_T$-Normalenvektor bzw. einem Diskontvektor des ursprünglichen oder relativen Marktmodells als auch mit einem äquivalenten Martingalmaß des dividendenlosen relativen Marktmodells angegeben.

**Tab. 5.1** Charakterisierungen der sf-Duplizierbarkeit (DPsfT), der sf-Vollständigkeit (VSsfT), des Law of One Price (LOPsfT) und der sf-Arbitragefreiheit (AFsf) für endfällige Zahlungsprofile $X = (0,\ldots,0,X_T)^\top \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ bzw. $X_T \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ im Mehrperiodenmodell unter der Voraussetzung von (ZVU) oder spezieller eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$

| | |
|---|---|
| sf-Duplizierbarkeit (DPsfT) | Zahlungsprofil $X_T \in \mathbb{R}^\Omega$ ist sf-duplizierbar<br>$\Leftrightarrow \exists\, h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ mit $X_T = V_T(h)$<br>$\Leftrightarrow X = (0,\ldots,0,X_T)^\top \in \mathcal{U}(T)$ ist duplizierbar<br>$\Leftrightarrow X = (0,\ldots,0,X_T)^\top \in L(\mathcal{H}_N)$ bzw. $\in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ ($X$ ist $L$-Bild)<br>$\Leftrightarrow X_T = V_T(h) \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ ($X_T$ ist $V_T^{sf}$-Bild) |
| sf-Vollständigkeit (VSsfT) | Marktmodell $((S,\delta),\mathcal{F})$ ist sf-vollständig<br>$\Leftrightarrow V_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = \mathbb{R}^\Omega$ ($V_T = V_T^{sf} : \mathcal{H}_N^{sf} \longrightarrow \mathbb{R}^\Omega$ surjektiv)<br>$\Leftrightarrow \ker V_T^{sf*} = O$ ($V_T^{sf*}$ injektiv) |
| Law of One Price (LOPsfT) | $\forall\, X_T \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ ist $V_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0$ konstant $\forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap V_T^{-1}(\{X_T\})$<br>$\Leftrightarrow \forall\, X_T \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ ist $R_0(h) = S_0{}^\top h_1$ konstant $\forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap V_T^{-1}(\{X_T\})$<br>$\Leftrightarrow \exists\, X_T \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ : $V_0(h)$ konstant $\forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap V_T^{-1}(\{X_T\})$<br>$\Leftrightarrow V_0(f) = 0$ für alle $f \in \mathcal{H}_N^{sf}$ mit $V_T(f) = 0$<br>$\Leftrightarrow \ker L = \ker^{sf} V_T \subseteq \ker^{sf} V_0$ (Inklus. d. Kerne, z. B. bei inj. $V_T^{sf}$)<br>$\Leftrightarrow V_T^{sf*}(\mathbb{R}^\Omega) \supseteq V_0^{sf*}(\mathbb{R}^\Omega)$ (Inklusion der Bildräume)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_T = O$ bzw. $\mathcal{V}_0 = \mathcal{E}_T \not\subseteq \mathcal{M}_T$ (trivialer Durchschnitt)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{V}_T = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{M}_T$ ($\mathcal{V}_T$ als direkte Summe)<br>$\Leftrightarrow \forall\, X_T \in \mathcal{V}_T : \exists_1$ addit. Zerlegung $X_T = Y_T + Z_T$ mit $Y_T \in \mathcal{E}_T$, $Z_T \in \mathcal{M}_T$<br>$\Leftrightarrow \exists\, X_T \in \mathcal{V}_T : \exists_1$ addit. Zerlegung $X_T = Y_T + Z_T$ mit $Y_T \in \mathcal{E}_T$, $Z_T \in \mathcal{M}_T$<br>$\Leftrightarrow \mathcal{V}_0 = \operatorname{lin} \mathbf{1}_\Omega = \mathcal{E}_T \not\subseteq \mathcal{M}_T$ (Nichtinklusion)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}_T^\perp \not\subseteq \mathcal{E}_T^\perp = \{\kappa(X_T) = 0\}$ (Nichtinklusion)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}_T{}^\perp \not\subseteq \mathcal{E}_T^\perp \cap \mathcal{M}_T{}^\perp = \ker V_T^{sf*}$ (Nichtinklusion)<br>$\Leftrightarrow \dim \mathcal{V}_T = \dim \mathcal{M}_T + 1$ (Dimensionsgleichung)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}_T$ ist Hyperebene von $\mathcal{V}_T$ (echte Teilmenge)<br>$\Leftrightarrow \dim \ker V_T^{sf*} = \dim \mathcal{M}_T^\perp - 1$ (Dimensionsgleichung)<br>$\Leftrightarrow \ker V_T^{sf*}$ ist Hyperebene von $\mathcal{M}_T^\perp$ (echte Teilmenge)<br>$\Leftrightarrow \exists\, Y_T \in \mathcal{M}_T^\perp \setminus \ker V_T^{sf*}$ bzw. $\ker V_T^{sf*} \subsetneq \mathcal{M}_T^\perp$ (nichtleere Differenz)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}_T^\perp = \ker V_T^{sf*} \oplus \operatorname{lin}\{Y_T\}$ mit $Y_T \in \mathcal{M}_T^\perp \setminus \ker V_T^{sf*} = \mathcal{M}_T^\perp \cap \{\kappa(X_T) \neq 0\}$ ($\mathcal{M}_T^\perp$ als direkte Summe) |

| | |
|---|---|
| | $\Leftrightarrow \exists\, Y_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0} := \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = \kappa_0\}$ ($\kappa$-norm. $\mathcal{M}_T$-Normalenv.)<br>$\Leftrightarrow \exists_1\, \vartheta_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0} \cap \mathcal{V}_T$ (sf-dupliz. $\kappa$-norm. $\mathcal{M}_T$-Normalenv.)<br>$\Leftrightarrow V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T^{\perp}) \neq O$ (Maxim. u. Eindim. von $V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T^{\perp})$)<br>$\Leftrightarrow V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T)$ ist Hyperebene von $V_T^{sf*}(\mathbb{R}^{\Omega})$ (echte Teilmenge)<br>$\Leftrightarrow V_T^{sf*}(\mathbb{R}^{\Omega}) = V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T) \oplus \mathcal{D}$ mit dim $\mathcal{D} = 1$ ($V_T^{sf*}(\mathbb{R}^{\Omega})$ als dir. Summe)<br>$\Leftrightarrow V_T^{sf*}(\mathbb{R}^{\Omega}) \setminus V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T) \neq \emptyset$ (nichtleere Differenz)<br>$\Leftrightarrow$ (NEPG$Y_T$) $\exists\, Y_T \in \mathbb{R}^{\Omega} \cap \{\kappa(X_T) = \kappa_0\}$ mit $Y_T^{\top} V_T(h) = 0\ \forall\, h \in \ker^{sf} V_0$<br>$\Leftrightarrow$ (PG$Y_T$) $\exists\, Y_T \in \mathbb{R}^{\Omega} (\cap \{\kappa(X_T) = \kappa_0\})$ mit $Y_T^{\top} V_T(h) = v_0(h)\ \forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ (Bewertungsvektor m. Preisgleich.) |
| LOPsfT ungültig | $\exists\, X_T \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$: $V_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0$ nicht konstant $\forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap V_T^{-1}(\{X_T\})$<br>$\Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{H}_N^{sf}$ mit $V_T(f) = 0 \wedge V_0(f) \neq 0$<br>$\Leftrightarrow \ker^{sf} V_T \not\subseteq \ker^{sf} V_0$ (Nichtinklusion der Kerne)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{M}_T$ (Inklusion)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}_T = \mathcal{V}_T$ (Maximalität von $\mathcal{M}_T$)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}_T^{\perp} \subseteq \mathcal{E}_T^{\perp} = \{\kappa(X_T) = 0\}$ (Inklusion)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}_T^{\perp} = \mathcal{E}_T^{\perp} \cap \mathcal{M}_T^{\perp} = \ker V_T^{sf*}$ (Übereinstimmung)<br>$\Leftrightarrow V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T^{\perp}) = O$ (Trivialität von $V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T^{\perp})$)<br>$\Leftrightarrow V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T) = V_T^{sf*}(\mathbb{R}^{\Omega})$ (Maximalität von $V_T^{sf*}(\mathcal{M}_T)$) |
| (VSsfT) $\wedge$ LOPsfT | $\mathcal{V}_T = \mathbb{R}^{\Omega} \wedge \mathcal{M}_T$ ist Hyperebene von $\mathcal{V}_T$ (max. $\mathcal{V}_T$ u. nichtmax. $\mathcal{M}_T$)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{V}_T = \mathcal{M}_T \oplus \mathcal{M}_T^{\perp}$ mit dim $\mathcal{M}_T^{\perp} = 1$<br>$\Leftrightarrow \mathcal{V}_T = \mathcal{M}_T \oplus \mathcal{M}_T^{\perp} \wedge \mathcal{M}_T^{\perp} = \text{lin}\, Y_T$ mit $\kappa(Y_T) = \kappa_0$<br>$\Leftrightarrow |\mathcal{A}_T| = |\mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}| = 1$ |
| (VSsfT) $\wedge$ LOPsfT ungültig | $\mathcal{M}_T = \mathcal{V}_T = \mathbb{R}^{\Omega}$ (Maximalität von $\mathcal{V}_T$ u. $\mathcal{M}_T$)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}_T^{\perp} = \ker V_T^{sf*} \wedge \ker V_T^{sf*} = O$ (Minimalität von $\mathcal{M}_T^{\perp}$ u. $\ker V_T^{sf*}$)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}_T^{\perp} = O$ (Trivialität von $\mathcal{M}_T^{\perp}$) |
| sf-Arbitragefreiheit (AFsf) | $\nexists\, h \in \mathcal{H}_N$ mit $V_0(h) = 0$, $L_t(h) = 0$ für $t = 0,\ldots,T\text{-}1$ und $V_T(h) \gneq 0$<br>$\Leftrightarrow \nexists\, h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ mit $V_0(h) = 0$ und $K_T(h) \gneq 0$<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}_T \cap \{X_T \gneq 0\} = \emptyset$ (leerer Durchschnitt)<br>$\Leftrightarrow \exists\, \Phi_T \in \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{X_T > 0\}$ (pos. $\mathcal{M}_T$-Normalenvektor)<br>$\Leftrightarrow \exists\, Q_T \in \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0+} := \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = \kappa_0, X_T > 0\}$ (pos. $\kappa$-norm. $\mathcal{M}_T$-Norm.v.)<br>$\Leftrightarrow \exists\, \tilde{Q}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$ (rel. pos. $\kappa$-norm. $\tilde{\mathcal{M}}_T$-Norm.v. od. äquiv. Martingalmaß)<br>$\Leftrightarrow \exists\, Q_T \in \mathbb{R}^{\Omega} \cap \{X_T > 0, \kappa(X_T) = \kappa_0\}$ mit $Q_T^{\top} V_T(h) = 0\ \forall\, h \in \ker^{sf} V_0$<br>$\Leftrightarrow \exists\, Q_T \in \mathbb{R}^{\Omega} \cap \{X_T > 0, \kappa(X_T) = \kappa_0\}$ mit $Q_T^{\top} V_T(h) = v_0(h)\ \forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ (Diskontvektor m. Preisgleich.) |

| | |
|---|---|
| (VSsfT) ∧ (AFsf) | $V_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = \mathbb{R}^{\Omega} \wedge \exists\, \Phi_T \in \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{X_T > 0\}$<br>$\Leftrightarrow V_T(\mathcal{H}_N^{sf}) = \mathbb{R}^{\Omega} = \mathcal{M}_T \oplus \mathcal{M}_T^{\perp}$ mit $\mathcal{M}_T^{\perp} = \text{lin}\, \Phi_T$, $\Phi_T > 0$<br>$\Leftrightarrow \lvert \mathcal{A}_T^{+} \rvert = \lvert \mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0 +} \rvert = 1$ |

## 5.3.13 Berechnung eines Bewertungsvektors

**Bewertungsvektoren und sf-Bewertungsprozesse**
In Abschnitt 5.3.2 wurde bereits festgestellt, dass das spezieller definierte Law of One Price LOPsfT für die sf-duplizierbaren Zahlungsprofile äquivalent zum allgemeiner definierten LOP für die duplizierbaren Zahlungsprofile ist. Weiter erhält man nach Abschnitt 5.3.3 aus einem Bewertungsprozess $\Psi \in \mathcal{A}$ mit der $T$-ten Komponente $\Psi_T$ auch einen Bewertungsvektor $\Psi_T \in \mathcal{M}_T^{\perp}$, durch dessen Preisgleichungen

(PG$\Psi_T$) $\qquad \Psi_T^{\mathsf{T}} V_T(h) = v_0(h)\ \forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf}$

das LOPsfT charakterisiert wird und die Preise der Zahlungsprofile $X_T = V_T(h) \in \mathcal{V}_T$ berechnet werden können.

In Abschnitt 5.3.8 wurde gezeigt, dass bei gültigem LOPsfT die Menge

$$\mathcal{A}_T = \{Y_T \in \mathbb{R}^{\Omega} : (\text{PG}Y_T)\ Y_T^{\mathsf{T}} V_T(h) = v_0(h)\ \ \forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf}\ \}$$

der Bewertungsvektoren für die Zahlungsprofile $X_T \in \mathcal{V}_T$ (Definition von $\mathcal{A}_T$ in Abschnitt 5.3.3) durch den affinen Unterraum

$$\vartheta_T + \ker V_T^{sf*}\ (\subseteq \mathcal{M}_T^{\perp}),$$

gegeben ist, wobei der spezielle Bewertungsvektor $\vartheta_T$ beispielsweise der eindeutig bestimmte Bewertungsvektor in $\mathcal{V}_T$ ist und der lineare Unterraum $\ker V_T^{sf*}$ die Richtung (der Translationsunterraum) des affinen Unterraums $\mathcal{A}_T$ ist.

Unter der zusätzlichen Voraussetzung von (ZVU) oder eines Numéraires mit deterministischem $B_T$ ist nach Abschnitt 5.3.8 die Menge $\mathcal{A}_T$ der Bewertungsvektoren gleich dem affinen Unterraum

$$\mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0} := \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = \kappa_0\}\ (\subseteq \mathbb{R}^{\Omega})$$

der $\kappa_0$-normierten $\mathcal{M}_T$-Normalenvektoren mit der Richtung $\mathcal{M}_T^{\perp 0} = \ker V_T^{sf*}$. Ein Bewertungsprozess $\Psi \in \mathcal{A} = \mathcal{M}^{\perp 1}$ (Voraussetzung (AWS$^{\delta}$)), d. h. ein Normalenvektor $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp}$ von $\mathcal{M}$ mit der Normierung $X_0 = 1$ in der 0-ten Komponente $\Psi_0$, dessen $T$-te Komponente $\Psi_T$ stets ein Bewertungsvektor ist, weist dann also auch noch die $\kappa$-Normierung $\kappa(X_T) = \kappa_0$ (= $\pi(\mathbf{1}_{\Omega}) = \pi(\mathbf{1}_{T,\Omega})$) in der Komponente $\Psi_T$ auf.

Nach Abschnitt 5.1.1 entsprechen die endfälligen Kapitalmarktgeschäfte

$$Z = (0,\ldots,0,Z_T)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{M}(T) = L(\ker^{sf} V_0) = \mathcal{M} \cap \mathcal{W}(T),$$

$\mathcal{W}(T) := \{X_0 = \ldots = X_{T-1} = 0\}$, bijektiv den NE-Zahlungsprofilen

$$Z_T \in \mathcal{M}_T = V_T\,(\ker^{sf} V_0).$$

Demzufolge gilt für ein beliebiges $Y \in \mathcal{W}$ die Inzidenz

$$Y = (Y_0,\ldots,Y_{T-1},Y_T)^\top \in \mathcal{M}(T)^\perp ,$$

d. h. $Y_T^\top Z_T = Y^\top Z = 0 \;\forall\; Z = (0,\ldots,0,Z_T)^\top \in \mathcal{M}(T)$, genau dann, wenn die Inzidenz

$$Y_T \in \mathcal{M}_T^\perp$$

bei beliebigen übrigen Komponenten $Y_t \in \mathcal{W}_{t,1}$ vorliegt ($t = 0,\ldots,T\text{-}1$; Definition der $X_t \in \mathcal{W}_{t,N}$ als $\mathcal{F}_t$-messbare $\mathbb{R}^N$-wertige Zustandsfunktionen in Abschnitt 2.6.3). Insbesondere gilt dann auch die Aussage für die entsprechend eingeschränkten Teilmengen: Die Inzidenz

$$Y = (Y_0,\ldots,Y_{T-1},Y_T)^\top \in \mathcal{M}(T)^{\perp \mathcal{A}_T} := \mathcal{M}(T)^\perp \cap \{X_T \in \mathcal{A}_T\} \;(\subseteq \mathcal{W})$$

ist äquivalent zur Inzidenz

$$Y_T \in \mathcal{A}_T \;(\subseteq \mathcal{M}_T^\perp)$$

bei beliebigen übrigen Komponenten $Y_t \in \mathcal{W}_{t,1}$ ($t = 0,\ldots,T\text{-}1$). Zu jedem Bewertungsvektor $Y_T \in \mathcal{A}_T$ gehört also die Menge der (unendlich vielen) Prozesse

$$Y = (Y_0,\ldots,Y_{T-1},Y_T)^\top \in \mathcal{M}(T)^{\perp \mathcal{A}_T} ,$$

die zur Bewertung bzw. Preisberechnung speziell der endfälligen sf-duplizierbaren Zahlungsprofile $X = (0,\ldots,0,X_T)^\top \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ (mit $X_T \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ ) verwendet werden können. Für diese Zahlungsprofile $X$ ist nämlich das Skalarprodukt

$$Y^\top X = Y_T^\top X_T = \pi(X_T) = \pi(X)$$

der Preis von $X$ bzw. von $X_T$. Ein Prozess $Y \in \mathcal{M}(T)^{\perp \mathcal{A}_T}$ wird nun zur Unterscheidung von einem Bewertungsprozess $\Psi \in \mathcal{A} = \mathcal{M}^{\perp 1}$, der für die Bewertung und Preisberechnung aller duplizierbaren Zahlungsprofile $X \in L(\mathcal{H}_N)$ verwendet wird, hier als **sf-Bewertungsprozess** nur für die endfälligen sf-duplizierbaren Zahlungsprofile $X = (0,\ldots,0,X_T)^\top \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ bezeichnet. In der Abbildung 5.14 werden bei vorliegendem LOPsfT im Raum $\mathcal{W}$ die Lage eines Bewertungsprozesses $\Psi \in \mathcal{A} = \mathcal{M}^{\perp 1}$ und die Lage eines sf-Bewertungsprozesses $Y \in \mathcal{M}(T)^{\perp \mathcal{A}_T^+}$ veranschaulicht.

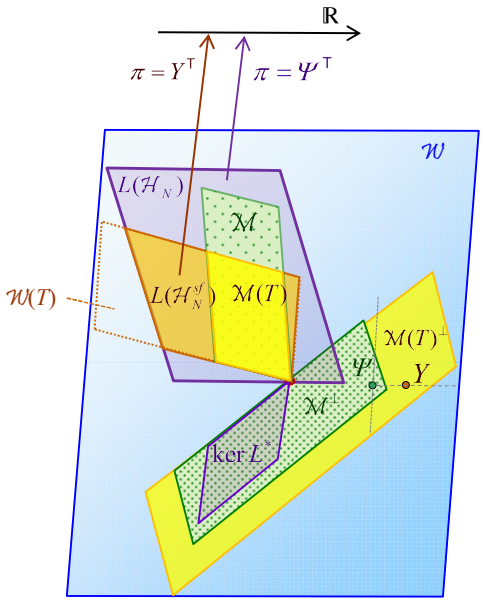



**Abb. 5.14** Die Unterräume $\mathcal{M}(T) \subseteq \mathcal{M} \subseteq L(\mathcal{H}_N)$, die zugehörigen orthogonalen Komplemente $\ker L^* \subseteq \mathcal{M}^\perp \subseteq \mathcal{M}(T)^\perp$, ein Bewertungsprozess $\Psi \in \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\}$ und ein sf-Bewertungsprozess $Y \in \mathcal{M}(T)^\perp \cap \{\kappa(X_T) = \kappa_0\}$ bei gültigem LOPsfT

Falls im Marktmodell nicht nur das LOP, sondern auch die Arbitragefreiheit (AF) gilt, erhält man als Spezialfall aus einem Diskontierungsprozess (positiven Bewertungsprozess)

$$\Phi \in \mathcal{A}^+ = \mathcal{M}^{\perp 1+} = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1, X > 0\} \qquad \text{(Vor. (AWS}^\delta\text{))}$$

mit der $T$-ten Komponente

$$\Phi_T \in \mathcal{A}_T^+ := \mathcal{A}_T \cap \{X_T > 0\} \ (\subseteq \mathcal{M}_T^{\perp +})$$

einen positiven Bewertungsvektor (Diskontvektor), dessen Preisgleichungen

(PG$\Phi_T$) $\qquad \Phi_T^\top V_T(h) = v_0(h) \ \forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf}$

die Preisberechnung für die Zahlungsprofile $X_T = V_T(h) \in \mathcal{V}_T$ gestatten.

Umgekehrt erhält man zu den Diskontvektoren $Y_T \in \mathcal{A}_T^+$ mit den Prozessen

$$Y = (Y_0, \ldots, Y_{T-1}, Y_T)^\top \in \mathcal{M}(T)^{\perp \mathcal{A}_T^+} := \mathcal{M}(T)^\perp \cap \{X_T \in \mathcal{A}_T^+\}$$

bei beliebigen übrigen Komponenten $Y_t \in \mathcal{W}_{t,1}$ ($t = 0,\ldots,T\text{-}1$) die sf-Bewertungsprozesse mit positiver Komponente $Y_T$, die zur Bewertung der endfälligen sf-duplizierbaren Zahlungsprofile $X \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ verwendet werden können.

Unter der zusätzlichen Voraussetzung von (ZVU) oder eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ stimmt nach Abschnitt 5.3.10 die Menge $\mathcal{A}_T^+$ der Diskontvektoren (positiven Bewertungsvektoren) überein mit dem teilweise offenen konvexen Polyeder

$$\mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0 +} = \mathcal{M}_T^\perp \cap \{\kappa(X_T) = \kappa_0, X_T > 0\}.$$

Im ursprünglichen Marktmodell wird unter der Voraussetzung (ZVU) durch die Existenz eines Diskontvektors $Q_T \in \mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0 +}$ nach Satz 5.6 von Abschnitt 5.1.12 in einem echten Mehr-

periodenmodell ($T \geq 2$) nur die speziellere sf-Arbitragefreiheit (AFsf) charakterisiert, nicht aber die allgemeine Arbitragefreiheit (AF) und die Existenz eines Diskontierungsprozesses $\Phi$. Der Sonderfall des Einperiodenmodells wird in Abschnitt 6.2.3 behandelt.
Weiter wird im relativen Marktmodell nach Satz 5.5 von Abschnitt 5.1.11 ohne zusätzliche Voraussetzung durch die Existenz eines relativen Diskontvektors $\tilde{Q}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$ und speziell im dividendenlosen Marktmodell durch die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes $\tilde{Q}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1}$ auch nur die speziellere sf-Arbitragefreiheit (AFsf) charakterisiert.

**Speziell für die Laufzeit** $T = 1$ wird in Abschnitt 6.2.2 bei der Behandlung des Einperiodenmodells gezeigt, dass man hier auch umgekehrt aus einem Bewertungsvektor

$$\begin{aligned}\Psi_1 \in \mathcal{A}_1 &= \vartheta_1 + \ker V_1^{sf*} \\ &= \vartheta_1 + \ker D = D^{-1}(\{S_0\}) \ (\subseteq \mathbb{R}^K)\end{aligned}$$

auf einfache Weise einen normierten Bewertungsprozess $\Psi = (1, \Psi_1)^\mathsf{T} \in \mathcal{M}^{\perp 1} \subseteq \mathcal{A}$ erhält: Man ergänzt dazu $\Psi_1$ durch $\Psi_0 = 1$ zum normierten Bewertungsprozess $\Psi = (\Psi_0, \Psi_1)^\mathsf{T} \in \mathcal{M}^{\perp 1} \subseteq \mathcal{A}$.
Sowohl die Existenz eines Bewertungsprozesses als auch die Existenz eines Bewertungsvektors charakterisiert im Einperiodenmodell also das LOP bzw. das LOPsfT.
Ebenso kann im Einperiodenmodell ein Diskontvektor (positiver Bewertungsvektor)

$$\Phi_1 \in \mathcal{A}_1^+ = \mathcal{A}_1 \cap \{X_1 > 0\}$$

zu einem normierten Diskontierungsprozess $\Phi = (1, \Phi_1)^\mathsf{T} \in \mathcal{M}^{\perp 1+} \subseteq \mathcal{A}^+$ ergänzt werden. Beide charakterisieren im Einperiodenmodell die allgemeine Arbitragefreiheit (AF).
In Abschnitt 6.2.4 (Satz 6.5) wird für das Einperiodenmodell mit (GI) eine hinreichende Bedingung angegeben, unter der aus der spezielleren sf-Arbitragefreiheit (AFsf) auch die allgemeine Arbitragefreiheit (AF) folgt. Spezialfälle von (GI) sind die $D^\mathsf{T}$-Duplizierbarkeit des konstanten Zahlungsprofils $\mathbf{1}_\Omega = (1\ldots,1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^K$ mit positivem Startkapitaleinsatz, die Existenz eines Finanzinstruments $S^j$ des Einperiodenmodells mit positivem Anfangswert und schwach positivem Endwert oder die Existenz eines Numéraires $S^N = B = (B_0, B_1) > 0$.

**In einem echten Mehrperiodenmodell** mit einer Laufzeit $T \geq 2$ ist diese Aussage zur Äquivalenz von (AFsf) und (AF) nicht mehr richtig. Hier wird auch unter der zusätzlichen Voraussetzung von (ZVU) oder eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ nach Satz 5.6, c durch die Existenz eines *positiven* $\kappa$-normierten $\mathcal{M}_T$-Normalenvektors (eines Diskontvektors)

$$Q_T \in \mathcal{M}_T^{\perp \kappa_0 +} = \mathcal{A}_T^+$$

nur die sf-Arbitragefreiheit (AFsf) und nicht die allgemeine Arbitragefreiheit (AF) charakterisiert. Anzumerken ist hier noch, dass nach Satz 5.3 in Abschnitt 5.1.9 die sf-Arbitragefreiheit des Mehrperiodenmodells mit Numéraire äquivalent ist zur sf-Arbitragefreiheit aller enthaltenen Einperiodenmodelle und dass nach Satz 3.10 in Abschnitt 3.6.3 die allgemeine Arbitragefreiheit (AF) des Mehrperiodenmodells äquivalent ist zur Arbitragefreiheit (AF) aller enthaltenen Einperiodenmodelle. In einem Mehrperiodenmodell mit Numéraire, das sf-arbitragefrei und nicht arbitragefrei ist, existiert demnach ein Einperiodenmodell, das sf-arbitragefrei und nicht arbitragefrei ist (siehe Folgerung in Abschnitt 5.1.9).

**Berechnung eines Bewertungsvektors, Diskontvektors und äquivalenten Martingalmaßes**
Nach den obigen Überlegungen lässt sich bei gültigem LOPsfT bzw. LOP ein Bewertungsvektor $Y_T \in \mathcal{A}_T$ für die sf-duplizierbaren Zahlungsprofile $X_T \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ bestimmen, indem

man einen normierten Bewertungsprozess $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1} \subseteq \mathcal{A}$ für die duplizierbaren Zahlungsprofile $X \in L(\mathcal{H}_N)$ berechnet und dessen $T$-te Komponente $\Psi_T$ als Bewertungsvektor nimmt. Das rekursive Berechnungsschema zur Bestimmung eines Bewertungsprozesses $\Psi$ ist in Abschnitt 3.4.3 angegeben: Ausgehend von der Anfangsbedingung $\Psi_0(A_0) = 1$ löst man dazu sukzessive für die Zeitpunkte $t = 1,\ldots,T$ und die Knoten $A_{t\text{-}1,k} \in \mathcal{P}_{t\text{-}1}$, $k = 1,\ldots,k_{t\text{-}1}$, des Informationsbaums jeweils das zugehörige lineare Gleichungssystem (GS$\Psi A_{t\text{-}1,k}$)

$$\sum_{A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}} S_t^{\delta,j}(A_{t,m}) \Psi_t(A_{t,m}) = \Psi_{t-1}(A_{t-1,k})\, S_{t-1}^{j}(A_{t-1,k}) \qquad (j = 1,\ldots,N).$$

Ebenso berechnet man bei gültiger Arbitragefreiheit (AF) einen Diskontvektor (positiven Bewertungsvektor) $\Phi_T \in \mathcal{A}_T^{+}$ als $T$-te Komponente eines normierten Diskontierungsprozesses $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1+} \subseteq \mathcal{A}^{+}$. Im dividendenlosen relativen Marktmodell führt diese Berechnung auf einen relativen Diskontvektor $\tilde{\Phi}_T \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{\perp 1+}$ bzw. ein äquivalentes Martingalmaß.

# 6 Einperiodenmodell

Es werden zunächst einige der im Mehrperiodenmodell entwickelten Ergebnisse für den Spezialfall des Einperiodenmodells formuliert, dann aber auch noch weitere Aussagen in der speziellen Schreibweise des Einperiodenmodells mit niedrigerdimensionalen Räumen hergeleitet.

**Die Darstellungsmatrizen von $L$ und $L^*$ im Spezialfall des Einperiodenmodells**
Im Einperiodenmodell ergibt sich nach Abschnitt 2.8.2 für die lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}^{1+K}$$

zum Auszahlungswert $L(h)$ die Darstellung

$$L_0(h) = V_0(h) - R_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 - S_0^{\mathsf{T}} h_1 ,$$

$$L_1(h) = V_1(h) = S_1^{\delta} h_1 \qquad \text{(Prod. der Zustandsfunkt. } S_1^{\delta} \text{ u. } h_1\text{)}$$

$$= \begin{pmatrix} S_1^{\delta}(\omega_1)^{\mathsf{T}} h_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ S_1^{\delta}(\omega_K)^{\mathsf{T}} h_1 \end{pmatrix} = D^{\mathsf{T}} h_1 \qquad \text{(Prod. v. Matr. } D^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} S_1^{\delta}(\omega_1)^{\mathsf{T}} \\ \cdot \\ \cdot \\ S_1^{\delta}(\omega_K)^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} \text{ u. Vekt. } h_1 = \begin{pmatrix} h_1^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ h_1^N \end{pmatrix}\text{),}$$

also die Matrixschreibweise

$$L(h) = \begin{pmatrix} L_0(h) \\ L_1(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0^{\delta\mathsf{T}} & -S_0^{\mathsf{T}} \\ 0 & D^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} = L \cdot h$$

mit der $(1+K)\times 2N$-Darstellungsmatrix (Abbildungsmatrix)

$$L = \begin{pmatrix} S_0^{\delta\mathsf{T}} & -S_0^{\mathsf{T}} \\ 0 & D^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(1+K)\times 2N}$$

bezüglich der Standardbasen des $\mathbb{R}^{1+K}$ und $\mathbb{R}^{2N}$. [1]

Die zur linearen Abbildung $L : \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}^{1+K}$ (wegen $\dim \mathbb{R}^{2N} = 2N < \infty$) eindeutig bestimmte **adjungierte Abbildung**[2]

$$L^* : \mathbb{R}^{1+K} \longrightarrow \mathbb{R}^{2N}$$

mit der definierenden Eigenschaft

$$(L^{\mathsf{T}} X)^{\mathsf{T}} h = X^{\mathsf{T}} L h = L^*(X)^{\mathsf{T}} h \;\forall\, X \in \mathbb{R}^{1+K},\ h \in \mathbb{R}^{2N}$$

besitzt die Darstellungsmatrix[3]

---

[1] Diese Matrizendarstellung kann man auch direkt den Gleichungssystemen (DP$A_{0,1}$) und (DP$A_{\text{-}1,1}$) entnehmen, die man in Abschnitt 3.2 bei der Berechnung einer Duplikationsstrategie im Spezialfall $T = 1$ ($h_2 = 0$) erhält.

[2] Literatur zur Einzigkeit und Existenz der adjungierten Abbildung bei endlichdimensionalem Originalraum der Abbildung $L$ wird in einer Fußnote von Abschnitt 2.10 angegeben.

[3] Aus der Eigenschaft $[L^*(X) - L^{\mathsf{T}}X]^{\mathsf{T}} h = 0 \;\forall\, h \in \mathbb{R}^{2N}$ folgt wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts die Übereinstimmung $L^*(X) = L^{\mathsf{T}}X$.

$$L^* = L^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} S_0^{\delta} & 0 \\ -S_0 & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N\times(1+K)}.$$

Neben den Matrizen $L$ und $L^T$ werden noch die Teilmatrizen

$$V' = \begin{pmatrix} S_0^{\delta\mathsf{T}} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad L' = \begin{pmatrix} -S_0^{\mathsf{T}} \\ D^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(1+K)\times N}$$

und

$$V'^{\mathsf{T}} = (S_0^{\delta},0), \qquad L'^{\mathsf{T}} = (-S_0,D) \in \mathbb{R}^{N\times(1+K)}$$

verwendet.[4] Für die **additive Zerlegung**[5] der linearen Abbildungen $L$ und $L^* = L^{\mathsf{T}}$ in deterministischen und stochastischen Anteil erhält man im Einperiodenmodell die Matrixdarstellungen

$$L = (V',L') = (V',0) + (0,L') = \breve{V} + \breve{L},$$
$$L^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} V'^{\mathsf{T}} \\ L'^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V'^{\mathsf{T}} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ L'^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} = \breve{V}^{\mathsf{T}} + \breve{L}^{\mathsf{T}}$$

mit

$$\breve{V} = \begin{pmatrix} S_0^{\delta\mathsf{T}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \breve{L} = \begin{pmatrix} 0 & -S_0^{\mathsf{T}} \\ 0 & D^{\mathsf{T}} \end{pmatrix},$$
$$\breve{V}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} S_0^{\delta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \breve{L}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -S_0 & D \end{pmatrix}.$$

**Die Darstellungsmatrizen in den niedrigerdimensionalen Räumen**

Das Einperiodenmodell ist nicht nur ein Spezialfall des Mehrperiodenmodells, sondern nimmt auch mit seiner in der Literatur gebräuchlichen speziellen Formulierung eine Sonderstellung ein. An die Stelle der Abbildungen $L$ und $L^{\mathsf{T}}$ in den Räumen $\mathbb{R}^{2N}$ und $\mathbb{R}^{1+K}$ können wie in der Literatur üblich die Abbildungen

$$D^{\mathsf{T}},\ S_0^{\mathsf{T}} \text{ und } D$$

in den niedrigerdimensionalen Räumen $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ treten. Diese niedrigerdimensionale Darstellung wird ermöglicht durch die drei folgenden Eigenschaften:

1) Die Handelsstrategien $h = (h_0,h_1)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{H}_N = \mathbb{R}^{2N}$ sind deterministisch, also die Zustandsfunktionen $h_0$ und $h_1$ auf $\Omega$ konstant und somit als $N$-Tupel $h_0,\ h_1 \in \mathbb{R}^N$ zu beschreiben.
2) Im Zahlungsprofil $X = (X_0,X_1)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{W} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^K = \mathbb{R}^{1+K}$ ist die Zustandsfunktion $X_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deterministisch, also konstant auf $\Omega$, sodass das zugehörige $K$-Tupel

---

4 Bei Kremer (2006), S. 29, 56, (2011), S. 35, 53, werden die Matrizen $L'$ und $L'^{\mathsf{T}}$ mit $L = D_b^{\mathsf{T}} = (-b^{\mathsf{T}},D^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$ und $L^{\mathsf{T}} = D_b = (-b,D)$ bezeichnet. Bei Sandmann (2010), S. 20–49, werden für die $K\times N$-Matrix $D^{\mathsf{T}}$ und den Zeilenvektor $S_0^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^N$ die Bezeichnungen $D$ und $q^{\mathsf{T}}$ verwendet. Bei Kremer und Sandmann werden nur endfällige Zahlungsprofile $X = (X_0,X_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit $X_0 = 0$ bzw. die zum Endzeitpunkt $T = 1$ gehörigen Zahlungsprofile $X_1 \in \mathbb{R}^{\Omega}$ behandelt, sodass der Preis von $X$ bzw. $X_1$ gleich $V_0 = R_0 = S_0^{\mathsf{T}}h_1$ ist.

5 Die additive Zerlegung von $L$ und $L^*$ in deterministischen und stochastischen Anteil im Mehrperiodenmodell wird behandelt in den Abschnitten 2.8.3 und 2.10.3.

$(X_{0,1},\ldots,X_{0,K})^\top \in \mathbb{R}^K$ identische Komponenten $X_{0,1} = \ldots = X_{0,K} = X_0$ besitzt und als Skalar $X_0 \in \mathbb{R}$ beschreibbar ist. Die Zustandsfunktion $X_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stochastisch und durch das $K$-Tupel $(X_{1,1},\ldots,X_{1,K})^\top \in \mathbb{R}^K$ darstellbar.

3) Da aufgrund der ersten Duplikationsgleichung $S_0^{\delta\top} h_0 = S_0^{\top} h_1 + X_0$ der Wert der Nutzenfunktion $V_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0$ für die Duplikationsstrategien $h$ von $X \in L(\mathbb{R}^{2N})$ sich auch mittels $R_0(h) = S_0^{\top} h_1$ berechnen lässt, kann man in der additiven Zerlegung $L = \breve{V} + \breve{L}$ von $L$ den deterministischen Bewertungsterm $\breve{V} = (V\text{‘},0)$ mit $V\text{‘} = (S_0^{\delta\top},0)^\top$ außer Acht lassen und statt $L$ zunächst nur die deterministische Abbildung $S_0^\top$ (zur Berechnung von $R_0(h)$ und $V_0(h) = R_0(h) + X_0$) und die stochastische Abbildung $\breve{L} = (0,L\text{‘})$ mit $L\text{‘} = (-S_0^\top, D^\top)^\top$ und schließlich nur noch die Abbildungen $S_0^\top$ und $D^\top$ betrachten.

Will man wie in Abschnitt 5.1.5 die Abbildungen $V_0, R_0 : \mathcal{H}_N \longrightarrow \mathbb{R}$ nicht mit dem Zielraum $\mathbb{R}$, sondern (zur möglichen Verrechnung mit den anderen stochastischen Abbildungen $V_t(h)$, $R_t(h)$, $L_t(h)$, $K_t(h)$ und $A_t(h)$, hier $t = 1$) mit dem Zielraum $\mathbb{R}^\Omega$ betrachten, also die Bilder $V_0(h)$ und $R_0(h)$ nicht als reelle Zahlen, sondern als Zustandsfunktionen $V_0(h)$, $R_0(h) \in \mathbb{R}^\Omega$ behandeln, so erhält man die Darstellungen

$$V_0(h) = \mathbf{1}_\Omega v_0(h) = \mathbf{1}_\Omega S_0^{\delta\top} h_0 = V_0 h_0,$$
$$R_0(h) = \mathbf{1}_\Omega r_0(h) = \mathbf{1}_\Omega S_0^{\top} h_1 = R_0 h_1$$

mit dem $K$-Tupel $\mathbf{1}_\Omega = (1,\ldots,1)^\top \in \mathbb{R}^K$ und den Matrizen

$$V_0 := \mathbf{1}_\Omega S_0^{\delta\top} = \begin{pmatrix} S_0^{\delta\top} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ S_0^{\delta\top} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0^{\delta,1} & \cdot & \cdot & S_0^{\delta,N} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ S_0^{\delta,1} & \cdot & \cdot & S_0^{\delta,N} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{K\times N},$$

$$R_0 := \mathbf{1}_\Omega S_0^{\top} = \begin{pmatrix} S_0^{\top} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ S_0^{\top} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0^{1} & \cdot & \cdot & S_0^{N} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ S_0^{1} & \cdot & \cdot & S_0^{N} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{K\times N},$$

$$R_0^\top = S_0 \mathbf{1}_\Omega^{\top} = (S_0,\ldots,S_0) = \begin{pmatrix} S_0^{1} & \cdot & \cdot & \cdot & S_0^{1} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ S_0^{N} & \cdot & \cdot & \cdot & S_0^{N} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times K}.$$

Mit den Bildräumen und Kernen der linearen Abbildungen

$$D^\top : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^K \quad \text{und} \quad D : \mathbb{R}^K \longrightarrow \mathbb{R}^N,$$
$$R_0 = \mathbf{1}_\Omega S_0^{\top} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^K \quad \text{und} \quad R_0^\top = S_0 \mathbf{1}_\Omega^{\top} : \mathbb{R}^K \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

lassen sich die Vektorräume $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ als direkte Summen von orthogonalen Komplementen darstellen:[6]

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^K = \ker D \oplus D^\top(\mathbb{R}^N) && \text{mit} \quad (\ker D)^\perp = D^\top(\mathbb{R}^N),\\
&\mathbb{R}^N = \ker D^\top \oplus D(\mathbb{R}^K) && \text{mit} \quad (\ker D^\top)^\perp = D(\mathbb{R}^K),\\
&\mathbb{R}^K = \ker R_0{}^\top \oplus R_0(\mathbb{R}^N) && \text{mit} \quad (\ker R_0{}^\top)^\perp = R_0(\mathbb{R}^N),\\
&\mathbb{R}^N = \ker R_0 \oplus R_0{}^\top(\mathbb{R}^K) && \text{mit} \quad (\ker R_0)^\perp = R_0{}^\top(\mathbb{R}^K).
\end{aligned}$$

Die erste dieser orthogonalen Summen (orthogonalen additiven Zerlegungen) wird in Abschnitt 6.2.1 beim Beweis der Charakterisierung der Vollständigkeit in den niedrigerdimensionalen Räumen $\mathbb{R}^N$ (Raum der Portfoliovektoren $h_1$) und $\mathbb{R}^K$ (Raum der zum Zeitpunkt $t = 1$ gehörigen Zahlungsprofile $X_1$) verwendet.

## 6.1 Einperiodenmodell als Spezialfall des Mehrperiodenmodells mit den Räumen $\mathbb{R}^{2N}$ und $\mathbb{R}^{1+K}$

Ausgehend von den in Kapitel 3 für das Mehrperiodenmodell angegebenen Charakterisierungen der **Vollständigkeit** (englisch: complete market model)

(VS) $\quad L(\mathcal{H}_N) = \mathcal{W}$

des Marktmodells $((S,\delta),\mathcal{F})$, der Gültigkeit des **Law of One Price** (Gesetz des eindeutig bestimmten Preises, Abk.: LOP)

(LOP) $\quad$ Für jedes $X \in L(\mathcal{H}_N)$ gilt: $V_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0$ konstant $\forall\, h \in L^{-1}(\{X\})$

und der **Arbitragefreiheit** (englisch: No-Arbitrage Principle, Arbitrage-Free Condition, Abk.: AF, NA)

(AF) $\quad \nexists\, h \in \mathcal{H}_N$ mit $V_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0 = 0 \;\wedge\; L(h) \gneq 0$ [7]

können diese insbesondere als Charakterisierungen für den Spezialfall des Einperiodenmodells ($T = 1$) formuliert werden: Dazu ersetzt man einfach die Begriffe $\mathcal{H}_N$ bzw. $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{W}$ bzw. $\mathbb{R}^{n_1}$, $b = (S_0^\delta)_{0,\Omega} = S_0^\delta \cdot 1_{0,\Omega} \in \mathcal{H}_N$, $\mathbf{1}_{0,\Omega} \in \mathcal{W}$, $\mathcal{E} = \operatorname{lin} \mathbf{1}_{0,\Omega}$ und $L^*$ durch $\mathbb{R}^{2N}$, $\mathbb{R}^{1+K}$, $b = (S_0^\delta, 0)^\top \in \mathbb{R}^{2N}$, $\mathbf{1}_{0,\Omega} = (1,0)^\top \in \mathbb{R}^{1+K}$, $\mathcal{E} = \operatorname{lin} \mathbf{1}_{0,\Omega}$ und $L^\top$. Diese Charakterisierungen werden vorneweg in Tabelle 6.1 aufgelistet. Dabei werden noch die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^{2N}$ bzw. $\mathbb{R}^{1+K}$ und Orthanten von $\mathbb{R}^{1+K}$ verwendet:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B} := \operatorname{lin}\{b\}, && \mathcal{B}^\perp = \ker b^\top = \ker V_0,\\
&\mathcal{M} := L(\ker V_0) = L'(\mathbb{R}^N) \subseteq L(\mathbb{R}^{2N}), && \mathcal{M}^\perp = (L^\top)^{-1}(\mathcal{B}) = \ker L'^\top,\\
&\mathcal{V} := \breve{V}(\mathbb{R}^{2N}) = \{ v_0(h) \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} = S_0^{\delta\top} h_0 \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} : h \in \mathbb{R}^{2N} \},\\
&\mathcal{E} := \operatorname{lin} \mathbf{1}_{0,\Omega} = \operatorname{lin}\{L(b)\} = L(\mathcal{B}) \subseteq L(\mathbb{R}^{2N}), && \mathcal{E}^\perp = \{X \in \mathbb{R}^{1+K} : X_0 = 0\},
\end{aligned}$$

---

[6] Die entsprechende Darstellung für die lineare Abbildung $L$ und ihre adjungierte Abbildung $L^*$ mit Literaturhinweisen wird in Abschnitt 2.10.1 angegeben. Dabei steht die Abkürzung ker $L$ für den Kern (Urbildmenge des Nullvektors; englisch: kernel) $L^{-1}(\{0\})$ einer linearen Abbildung und die Abkürzung Im $L$ für den Bildraum bzw. das Bild (englisch: image) $L(\mathcal{H}_N)$ von $\mathcal{H}_N$ bei der Abbildung $L$.

[7] Ein Zahlungsprofil $X \in \mathcal{W}$ wird als schwach positiv bezeichnet, wenn $X \gneq 0$, d. h. $X \geq 0$ und $X \neq 0$, gilt.

$$\mathbb{R}^{1+K}_{\geq 0} = \{X \in \mathbb{R}^{1+K} : X \geq 0 \wedge X \neq 0\}, \qquad \mathbb{R}^{1+K}_{>0} = \{X \in \mathbb{R}^{1+K} : X > 0\}.$$

Die gegenseitige Lage der wichtigen Unterräume in $\mathbb{R}^{2N}$ und $\mathbb{R}^{1+K}$ wird dabei in den Abbildungen 6.1 und 6.2 dargestellt, die im Mehrperiodenmodell den Abbildungen 3.7, 3.6 und 3.12 entsprechen. Anschließend werden in Tabelle 6.2 von Abschnitt 6.2.4 aber auch noch Aussagen für das Einperiodenmodell mittels der in der Literatur üblichen speziellen Darstellungsweise mit den linearen Abbildungen $D^\mathsf{T}$, $S_0^\mathsf{T}$ und $D$ der niedrigerdimensionalen Räume $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ angegeben. Diese werden entweder aus den Aussagen des Mehrperiodenmodells abgeleitet oder extra im Einperiodenmodell bewiesen. Die resultierenden Ergebnisse können auch noch mit den Aussagen von Satz 5.12 bzw. Tabelle 5.1 in Abschnitt 5.3.12 für die endfälligen Zahlungsprofile verglichen werden, wenn diese auf das Einperiodenmodell spezialisiert werden. Man erhält damit sowohl bekannte Aussagen, wie sie beispielsweise in der Behandlung des Einperiodenmodells bei Kremer (2011) zu finden sind[8], als auch weitere neue Aussagen.

**Tab. 6.1** Die im Mehrperiodenmodell ($T \in \mathbb{N}$) entwickelten Charakterisierungen der Duplizierbarkeit, der Vollständigkeit, des Law of One Price und der Arbitragefreiheit in der Formulierung für das Einperiodenmodell ($T = 1$) mit den Abbildungen $L$ und $L^\mathsf{T}$ der Räume $\mathbb{R}^{2N}$ und $\mathbb{R}^{1+K}$

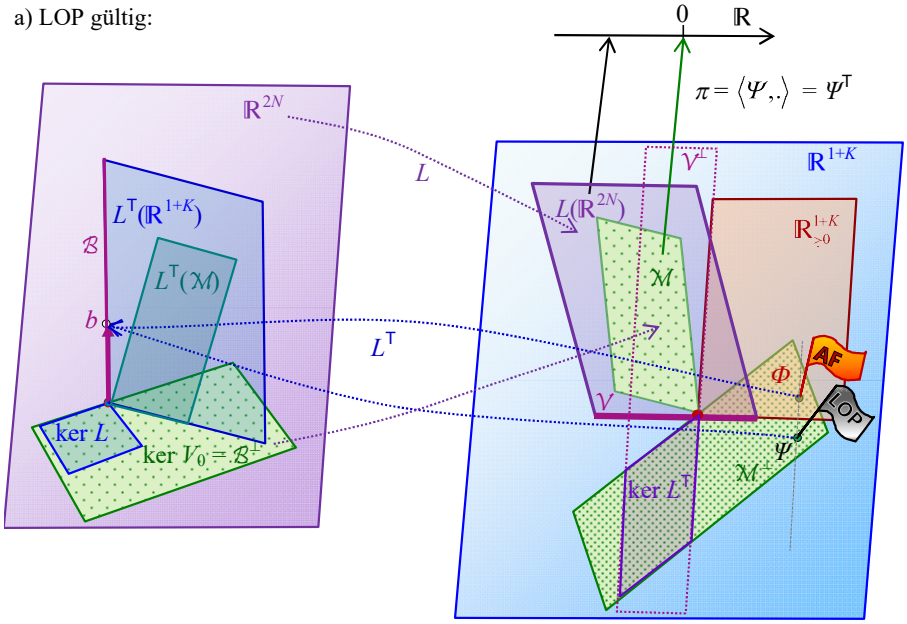
| | |
|---|---|
| Duplizierbarkeit (DP) | $X \in \mathbb{R}^{1+K}$ ist duplizierbar<br>$\Leftrightarrow \exists\, h \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $X = Lh$<br>$\Leftrightarrow X \in L(\mathbb{R}^{2N})$<br>$\Leftrightarrow X \perp \ker L^\mathsf{T}$ |
| Vollständigkeit (VS) | Das Marktmodell ist vollständig<br>$\Leftrightarrow L(\mathbb{R}^{2N}) = \mathbb{R}^{1+K}$ ($L$ surjektiv)<br>$\Leftrightarrow \ker L^\mathsf{T} = O$ ($L^\mathsf{T}$ injektiv) |
| Law of One Price (LOP) | $\forall\, X \in L(\mathbb{R}^{2N})$ ist $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0$ konstant für alle $h \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $Lh = X$<br>$\Leftrightarrow \forall\, X \in L(\mathbb{R}^{2N})$: $R_0(h) = S_0^\mathsf{T} h_1$ konstant für alle $h \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $Lh = X$<br>$\Leftrightarrow \exists\, X \in L(\mathbb{R}^{2N})$: $V_0(h)$ konstant für alle $h \in L^{-1}(\{X\})$<br>$\Leftrightarrow V_0(f) = b^\mathsf{T} f = 0$ für alle $f \in L^{-1}(\{0\}) = \ker L$<br>$\Leftrightarrow \ker L \subseteq \ker V_0 = \mathcal{B}^\perp$ (Inklusion der Kerne; z. B. bei injektivem $L$)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{B} \subseteq (\ker L)^\perp = L^\mathsf{T}(\mathbb{R}^{1+K})$ (Inklusion von $\mathcal{B}$ im $L^\mathsf{T}$-Bildraum)<br>$\Leftrightarrow \exists\, \Psi \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit $L^\mathsf{T}\Psi = b$ ($L^\mathsf{T}$-Urbild von $b$)<br>$\Leftrightarrow \exists\, \Psi \in \mathcal{M}^\perp$ mit $\Psi_0 = 1$ (norm. $\mathcal{M}$-Normalenvektor)<br>$\Leftrightarrow \exists\, \Psi \in \mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^\mathsf{T}$ (nichtleere Differenz)<br>$\Leftrightarrow \exists\, \Psi \in (\mathcal{M}^\perp \setminus \ker L^\mathsf{T} \subseteq) \mathbb{R}^{1+K}$: $\mathcal{M}^\perp = \ker L^\mathsf{T} \oplus \operatorname{lin}\{\Psi\}$ (Strukt. von $\mathcal{M}^\perp$)<br>$\Leftrightarrow \ker L^\mathsf{T}$ ist eine Hyperebene von $\mathcal{M}^\perp$ (echte Teilmenge)<br>$\Leftrightarrow L^\mathsf{T}(\mathcal{M}^\perp) = \mathcal{B}$ (Maximal. u. Eindimens. von $L^\mathsf{T}(\mathcal{M}^\perp)$)<br>$\Leftrightarrow L^\mathsf{T}(\mathbb{R}^{1+K}) = \mathcal{B} \oplus L^\mathsf{T}(\mathcal{M})$ ($L^\mathsf{T}(\mathbb{R}^{1+K})$ als direkte Summe)<br>$\Leftrightarrow L^\mathsf{T}(\mathcal{M})$ ist Hyperebene von $L^\mathsf{T}(\mathbb{R}^{1+K})$ (echte Teilmenge) |

[8] Kremer (2011), S. 3–71, verwendet für $S_0$ auch die Bezeichnung $b$. In der hier vorliegenden Darstellung wird $b$ aber für die Handelsstrategie $b = (b_0,0)^\mathsf{T}$ mit $b_0 = S_0^\delta = S_0 + \delta_0$ verwendet.

| | |
|---|---|
| | $\Leftrightarrow \forall\, X \in L(\mathbb{R}^{2N})\ \ \exists_1$ additive Zerlegung $X = Y + Z$ mit $Y \in \mathcal{V}, Z \in \mathcal{M}$<br>$\Leftrightarrow \exists\, X \in L(\mathbb{R}^{2N})$: $\exists_1$ additive Zerlegung $X = Y + Z$ mit $Y \in \mathcal{V}, Z \in \mathcal{M}$<br>$\Leftrightarrow \mathcal{V} \cap \mathcal{M} = O$ (trivialer Durchschnitt)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{E} = \mathcal{V} \not\subseteq \mathcal{M}$ (Nichtinklusion)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}^{\perp} \not\subseteq \mathcal{E}^{\perp} = \{X_0 = 0\}$ (Nichtinklusion)<br>$\Leftrightarrow L(\mathbb{R}^{2N}) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{M}$ ($L(\mathbb{R}^{2N})$ als direkte Summe)<br>$\Leftrightarrow \dim L(\mathbb{R}^{2N}) = \dim \mathcal{M} + 1$ (Dimensionsgleichung)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}$ ist eine Hyperebene von $L(\mathbb{R}^{2N})$ (echte Teilmenge)<br>$\Leftrightarrow \dim \mathcal{M}^{\perp} = \dim \ker L^{\top} + 1$ (Dimensionsgleichung)<br>$\Leftrightarrow$ (PGΨ) $\exists\, \Psi \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit $\Psi^{\top} L h = b^{\top} h \ \ \forall\, h \in \mathbb{R}^{2N}$ $[\Psi_0 = 1]$<br>(Bewertungsproz. m. Preisgleich.) |
| LOP nicht gültig | $\exists\, X \in L(\mathbb{R}^{2N})$: $V_0(h)$ nicht konstant für alle $h \in L^{-1}(X)$<br>$\Leftrightarrow \exists f \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $L(f) = 0 \wedge V_0(f) \neq 0$<br>$\Leftrightarrow \ker L \not\subseteq \ker V_0 = \mathcal{B}^{\perp}$ (Nichtinklusion der Kerne)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{B} \not\subseteq L^{\top}(\mathbb{R}^{1+K})$ (Nichtinklusion von $\mathcal{B}$ im $L^{\top}$-Bildraum)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{V} \cap \mathcal{M} \neq O$ (nichttrivialer Durchschnitt)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{E} = \mathcal{V} \subseteq \mathcal{M}$ (Inklusion)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}^{\perp} \subseteq \mathcal{E}^{\perp}$ (Inklusion)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M} = L(\mathbb{R}^{2N})$ (Maximalität von $\mathcal{M}$)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}^{\perp} = \mathcal{M}^{\perp} \cap \mathcal{E}^{\perp} = \ker L^{\top}$ (Übereinstimmung)<br>$\Leftrightarrow L^{\top}(\mathcal{M}^{\perp}) = O$ (Trivialität von $L^{\top}(\mathcal{M}^{\perp})$)<br>$\Leftrightarrow L^{\top}(\mathcal{M}) = L^{\top}(\mathbb{R}^{1+K})$ (Maxim. von $L^{\top}(\mathcal{M})$) |
| (VS) ∧ LOP | $L(\mathbb{R}^{2N}) = \mathbb{R}^{1+K} \wedge \mathcal{M}$ ist Hyperebene von $L(\mathbb{R}^{2N})$ (max. $L(\mathbb{R}^{2N})$ u. nichtmax. $\mathcal{M}$)<br>$\Leftrightarrow L(\mathbb{R}^{2N}) = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$ mit $\dim \mathcal{M}^{\perp} = 1$<br>$\Leftrightarrow \exists_1\, \Psi \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit $L^{\top}\Psi = b$ |
| (VS) ∧ $2N = 1+K$ | $L$ surjektiv ∧ $2N = 1+K$<br>$\Leftrightarrow L$ ist ein Isomorphismus<br>$\Leftrightarrow L^{\top}$ ist ein Isomorphismus |
| (VS) ∧<br>LOP ungültig | $\mathcal{M} = L(\mathbb{R}^{2N}) = \mathbb{R}^{1+K}$ (Maximalität von $\mathcal{M}$ u. $L(\mathbb{R}^{2N})$)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}^{\perp} = \ker L^{\top} \ \wedge\ \ker L^{\top} = O$<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}^{\perp} = \ker L^{\top} = O$<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}^{\perp} = O$ (Trivialität von $\mathcal{M}^{\perp}$) |
| Arbitragefreiheit<br>(AF) | $\nexists\, h \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $V_0(h) = 0 \wedge Lh \gneq 0$ (keine Arbitragegelegenheit)<br>$\Leftrightarrow \nexists\, h \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $\tilde{L}h \gneq 0$<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M} \cap \mathbb{R}^{1+K}_{\gneq 0} = \emptyset$ (leerer Durchschnitt)<br>$\Leftrightarrow \exists\, \Phi \in \mathcal{M}^{\perp}$ mit $\Phi > 0$ $(\Phi_0 = 1)$ (pos. $\mathcal{M}$-Normalenvektor)<br>$\Leftrightarrow \exists\, \Phi \in \mathcal{M}^{\perp} \cap \{X_0 \neq 0\} = \mathcal{M}^{\perp} \setminus \ker L^{\top}$ mit $\Phi > 0$ $(\Phi_0 = 1)$ (nichtleere Diff.)<br>$\Leftrightarrow \exists\, \Phi \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit $L^{\top}\Phi = b$, $\Phi > 0$ $(\Phi_0 = 1)$ (pos. $L^{\top}$-Urbild von $b$) |

| | |
|---|---|
| | $\Leftrightarrow$ (PGΦ) $\exists\, \Phi \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit $\Phi > 0,\ \Phi^{\top} L h = b^{\top} h \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^{2N}$ $[\Phi_0 = 1]$<br>(Diskontierungsproz. m. Preisgleich.) |
| (VS) $\wedge$ (AF) | $L(\mathbb{R}^{2N}) = \mathbb{R}^{1+K} \ \wedge\ \exists\, \Phi \in \mathcal{M}^{\perp} \cap \mathbb{R}^{1+K}_{>0}$<br>$\Leftrightarrow L(\mathbb{R}^{2N}) = \mathbb{R}^{1+K} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$ mit $\mathcal{M}^{\perp} = \operatorname{lin} \Phi,\ \Phi > 0$<br>$\Leftrightarrow \exists_1\, \Phi \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit $L^{\top}\Phi = b \wedge \Phi > 0$ |
| sf-Arbitragefreiheit (AFsf) | $\nexists\, h \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $V_0(h) = L_0(h) = 0 \wedge V_1(h) = S_1^{\delta} h_1 \ \geq\ 0$ (keine sf-Arb.geleg.) |

a) LOP gültig:




b) LOP ungültig:

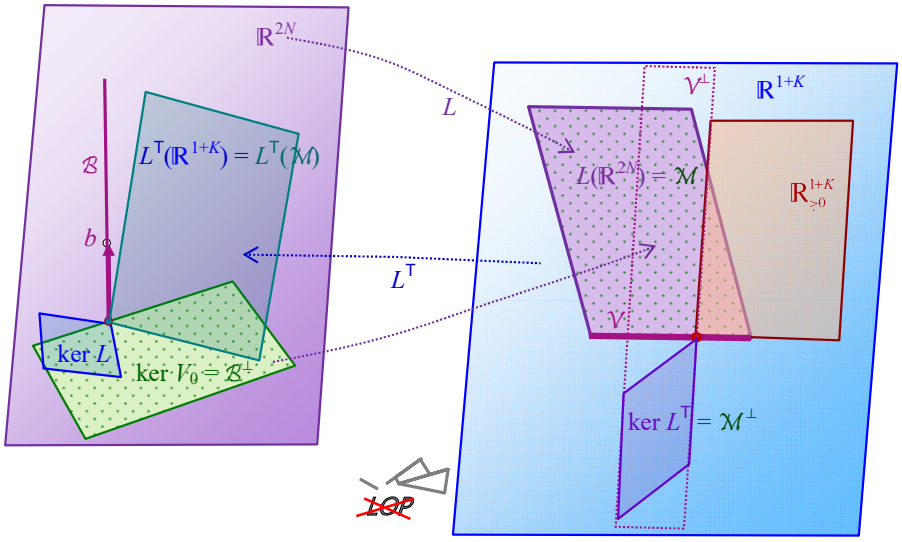
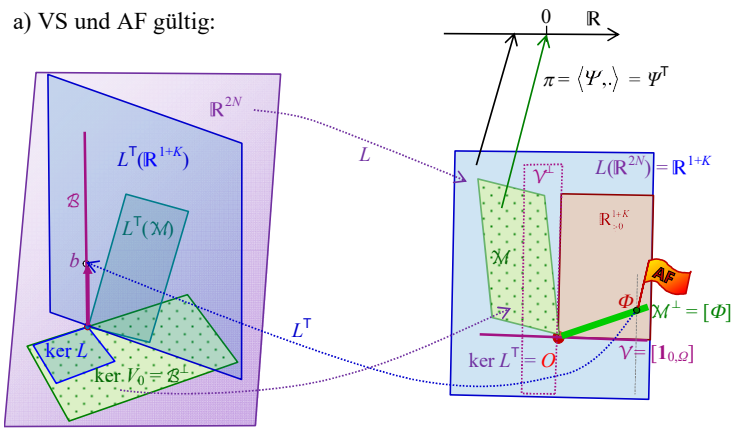
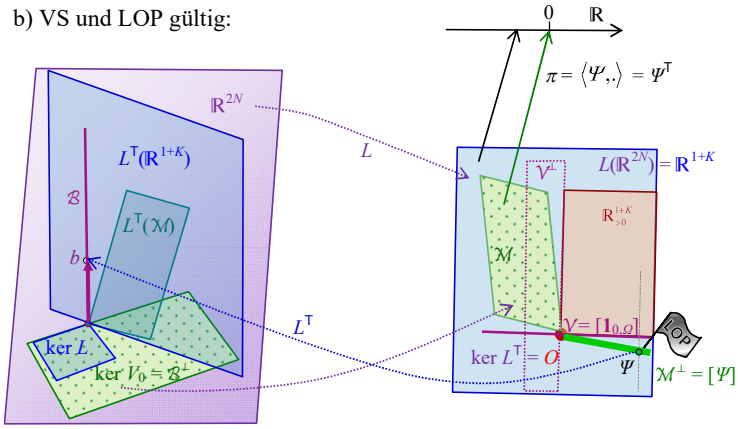



**Abb. 6.1** Die verschiedenen Unterräume von $\mathbb{R}^{2N}$ und $\mathbb{R}^{1+K}$, der schwach positive Orthant $\mathbb{R}^{1+K}_{\gneq 0}$ von $\mathbb{R}^{1+K}$ und die linearen Abbildungen $L$ und $L^{\mathsf{T}}$ a) bei gültigem LOP mit Bewertungsprozess $\Psi$ bzw. Diskontierungsprozess $\Phi$; b) bei ungültigem LOP.

a) VS und AF gültig:




b) VS und LOP gültig:




c) VS gültig und LOP ungültig:

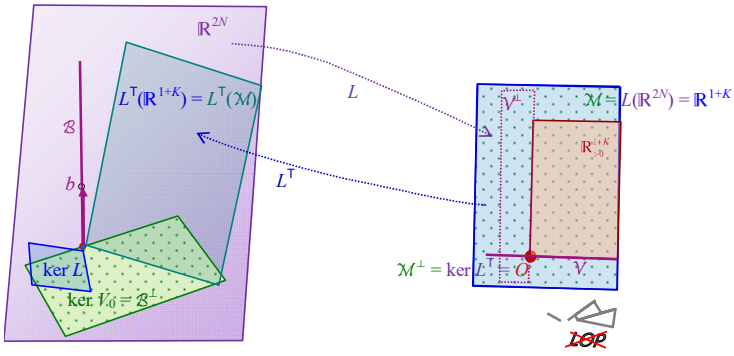



**Abb. 6.2** Die verschiedenen Unterräume von $\mathbb{R}^{2N}$ und $\mathbb{R}^{1+K}$, der schwach positive Orthant $\mathbb{R}^{1+K}_{\gneq 0}$ von $\mathbb{R}^{1+K}$ und die linearen Abbildungen $L$ und $L^\top$ in den drei Fällen a) VS und AF, b) VS und LOP und c) VS mit ungültigem LOP.

## 6.2 Einperiodenmodell in der speziellen Darstellung mit den niedrigerdimensionalen Räumen $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$

### 6.2.1 Charakterisierungen der Duplizierbarkeit und der Vollständigkeit

**Duplizierbarkeit eines Zahlungsprofils**
In der Darstellung des Einperiodenmodells mit der Abbildung $L : \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}^{1+K}$ heißt ein Zahlungsprofil

$$X = (X_0,X_1)^\top = (X_0,X_1(\omega_1),\ldots, X_1(\omega_K))^\top \in \mathbb{R}^{1+K},$$

**duplizierbar** (erreichbar, absicherbar; englisch: attainable, hedgeable, marketable), wenn das Zahlungsprofil $X \in \mathbb{R}^{1+K}$ das bei der Abbildung $L : \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}^{1+K}$ sich ergebende Bild $Lh$ einer Handelsstrategie $h \in \mathbb{R}^{2N}$ ist. Die Übereinstimmung der stochastischen Prozesse $X$ und $Lh$ soll dabei für beide Zeitpunkte $t = 0, 1$ und im Zeitpunkt $t = 1$ für alle Zustände $\omega_k \in \Omega$ $(k = 1,\ldots,K)$ gelten, somit $P$-sicher erfüllt sein ($P$ ist das W-Maß auf $\mathcal{P}(\Omega)$). $X$ ist also genau dann duplizierbar, wenn das gestaffelte inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\text{(DP)} \qquad \begin{pmatrix} S_0^{\delta\top} & -S_0^{\top} \\ 0 & D^{\top} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} = L\cdot h = X = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}$$

nach $h_0$ und $h_1$ auflösbar ist. Für die Duplizierung benötigt man also einen Portfoliovektor $h_1 \in \mathbb{R}^N$ mit

$$\text{(DP}A_{0,1}\text{)} \qquad D^{\top}h_1 = X_1$$

(Bezeichnung des Gleichungsblocks DP$A_{t\text{-}1,k}$ siehe Abschnitt 3.2) und dazu noch einen Portfoliovektor $h_0 \in \mathbb{R}^N$ mit

$$\text{(DP}A_{\text{-}1,1}\text{)} \qquad S_0^{\delta\top}h_0 = S_0^{\top}h_1 + X_0.$$

Die Bestimmung einer Duplikationsstrategie $h = (h_0,h_1)^\top$ von $X \in L(\mathbb{R}^{2N})$ erfolgt also linearalgebraisch durch das Lösen eines linearen Gleichungssystems und nicht wahrscheinlichkeitstheoretisch.[9] Die tatsächlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten $P(\omega)$ der Zustände $\omega \in \Omega$ werden nicht benötigt. Da bei gültigem LOP jedes duplizierbare Zahlungsprofil $X \in L(\mathbb{R}^{2N})$ durch den für seine Duplikationsstrategien $h \in L^{-1}(\{X\})$ konstanten und deterministischen Wert $\pi(X) := V_0(h) = S_0^{\delta\top}h_0$ des Startkapitals bewertet wird, ist diese Bewertung von $X$ ebenfalls linearalgebraisch und nicht wahrscheinlichkeitstheoretisch. Es handelt sich außerdem um einen relativen Bewertungsansatz, da hierzu eine spezielle Auswahl von Wertpapieren $S^j$ $(j = 1,\ldots,N)$ zugrunde gelegt ist und die Bewertung auf die mittels Handelsstrategien $h$ duplizierbaren Zahlungsprofile $X$ eingeschränkt ist.

Unter der im Allgemeinen für Marktmodelle vorliegenden, also mehr mathematisch-technischen Voraussetzung

$$\text{(AWS}^\delta\text{)} \qquad S_0^{\delta} \neq 0 = (0,\ldots,0)^{\top} \in \mathbb{R}^N$$

ist die im Gleichungssystem (DP) auftretende Gleichung (DP$A_{\text{-}1,1}$) $S_0^{\delta\top}h_0 = S_0^{\top}h_1 + X_0$ *für*

[9] Zur Bezeichnung „wahrscheinlichkeitstheoretisch (w-theoretisch)“ werden in einer Fußnote von Abschnitt 3.3.2 eine Erklärung, ein Literaturhinweis und Beispiele angegeben.

*beliebige* $X_0 \in \mathbb{R}$, $h_1 \in \mathbb{R}^N$ stets nach $h_0$ auflösbar. Wie schon in Abschnitt 3.2.2 dargestellt wurde, hat dies zur Folge, dass im Einperiodenmodell die verschiedenen Versionen (DP), (DP$D^\mathsf{T}$), (DPsf), (DPsfT) der Duplizierbarkeit zueinander äquivalent sind. So ist die $L$-Duplizierbarkeit ($L$-Bild-Darstellung) eines Zahlungsprofils $X = (X_0,X_1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{1+K}$,

(DP) $\quad X = (X_0,X_1)^\mathsf{T} = L{\cdot}h$ mit einem $h = (h_0,h_1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{2N}$,

bei beliebiger Wahl von $X_0 \in \mathbb{R}$ gleichbedeutend zur Lösbarkeit von $D^\mathsf{T}h_1 = X_1$, also zur $S_1^\delta$- bzw. $D^\mathsf{T}$-Duplizierbarkeit ($D^\mathsf{T}$-Bild-Darstellung) des speziellen nur im Endzeitpunkt $t = 1$ definierten Zahlungsprofils $X_1 \in \mathbb{R}^K$:

(DP$D^\mathsf{T}$) $\quad X_1 = S_1^\delta h_1 = D^\mathsf{T}h_1$ mit einem $h_1 \in \mathbb{R}^N$.

Für $X = (X_0,X_1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{1+K}$ bzw. $X_1 \in \mathbb{R}^K$ sind also die beiden Versionen der Duplizierbarkeit zueinander äquivalent:

Unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) gilt:
(DP) $X = (X_0,X_1)^\mathsf{T} \in L(\mathbb{R}^{2N})$ mit beliebigem $X_0 \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow$ (DP$D^\mathsf{T}$) $X_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$.

Dabei sind folgende zwei Aussagen festzuhalten:

1) Eine $L$-Duplikationsstrategie $h = (h_0,h_1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{2N}$ von $X = (X_0,X_1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{1+K}$ liefert mit der Komponente $h_1$ eine $D^\mathsf{T}$-Duplikationsstrategie von $X_1$.
2) Eine $D^\mathsf{T}$-Duplikationsstrategie $h_1 \in \mathbb{R}^N$ von $X_1 \in \mathbb{R}^K$ kann unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$ bei beliebig vorgegebenem $X_0 \in \mathbb{R}$ mit einer geeignet gewählten Komponente $h_0 \in \mathbb{R}^N$ (nämlich als Lösung von $S_0^{\delta\mathsf{T}}h_0 = S_0^\mathsf{T}h_1 + X_0$) zu einer $L$-Duplikationsstrategie $h = (h_0,h_1)^\mathsf{T}$ von $X = (X_0,X_1)^\mathsf{T}$ ergänzt werden.

Die Voraussetzung (AWS$^\delta$) wird dabei für den Schluss „(DP$D^\mathsf{T}$) $\Rightarrow$ (DP)“ benötigt. Die beiden Aussagen 1) und 2) werden in Abschnitt 6.2.2 auch beim Beweis der Äquivalenz der Formulierungen (LOP1) und (LOP$D^\mathsf{T}$) für das LOP verwendet.

Im Einperiodenmodell tritt bei der Duplizierbarkeit (DP) die unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) stets erfüllbare Bedingung $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}}h_0 = Z_0$ der „$V_0$-Duplizierbarkeit“ von $Z_0 = X_0 + S_0^\mathsf{T}h_1$ somit in den Hintergrund und es wird statt (DP) die dazu äquivalente $D^\mathsf{T}$-Duplizierbarkeit (DP$D^\mathsf{T}$) verwendet. Beispielsweise steht bei der in Abschnitt 3.2.3 erfolgenden Charakterisierung der Duplizierbarkeit in einem Mehrperiodenmodell durch die Duplizierbarkeit in den enthaltenen Einperiodenmodellen dort nur die Duplizierung einer zu festem Zeitpunkt $t$ und bestimmten Ereignissen $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$ betrachteten Zustandsfunktion $Z_t$ im Blickpunkt: (DP$A_{t\text{-}1,k}$) $S_t^\delta(A_{t,m})^\mathsf{T}h_t(A_{t-1,k}) = Z_t(A_{t,m})$. Ebenso verhält es sich bei den Beweisen für die Sätze 3.1 und 5.7, die jeweils einen Zusammenhang zwischen den Vollständigkeitsbegriffen (VS) bzw. (VSsfT) im Mehrperiodenmodell und der $D^\mathsf{T}$-Vollständigkeit (VS$D^\mathsf{T}$) in allen enthaltenen Einperiodenmodellen beschreiben.

Weiter ist dann speziell auch die sf-Duplizierbarkeit (DPsf) eines endfälligen Zahlungsprofils $X = (0,X_1)^\mathsf{T} \in \mathcal{W}(1) = \mathbb{R}^{1+K} \cap \{X_0 = 0\}$ mittels der Abbildung $L$ und einer sog. selbstfinanzierenden Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf} = \mathbb{R}^{2N} \cap \{L_0(h) = 0\}$ (zur Definition der Unterräume $\mathcal{H}_N^{sf}$, $\mathcal{W}(T) = \mathcal{W} \cap \{X_0 = \ldots = X_{T\text{-}1} = 0\}$, $\mathcal{M}(T) = \mathcal{W}(T) \cap \mathcal{M}$ und $\mathcal{M}_T = L_T(\ker^{sf} V_0)$ und der sf-Duplizierbarkeit für beliebiges $T \in \mathbb{N}$ siehe Abschnitte 5.1 und 5.2), also

(DPsf) $X = (0,X_1)^\mathsf{T} = (L_0(h),L_1(h))^\mathsf{T} = L{\cdot}h \in L(\mathcal{H}_N^{sf}) \subseteq \mathcal{W}(1) = \mathbb{R}^{1+K} \cap \{X_0 = 0\}$,

jetzt mit der speziellen Wahl von $X_0 = 0$ gleichbedeutend zur oben angegebenen $S_1^\delta$- bzw. $D^\mathsf{T}$-Duplizierbarkeit

(DP$D^\mathsf{T}$) $X_1 = D^\mathsf{T}h_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ $(\subseteq \mathbb{R}^K)$

des zugehörigen Zahlungsprofils $X_1 \in \mathbb{R}^K$.

Außerdem ist nach Abschnitt 5.1.1 die sf-Duplizierbarkeit (DPsf) eines endfälligen Zahlungsprofils $X = (0,X_1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{1+K}$ mittels der Abbildung $L$ und einer sf-Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ $(\subseteq \mathbb{R}^{2N})$ äquivalent zur sf-Duplizierbarkeit (DPsfT) des zum Endzeitpunkt $T = 1$ gehörigen Zahlungsprofils $X_1 \in \mathbb{R}^K$ mittels der Abbildung $V_1 = L_1$:

(DPsfT) $X_1 = L_1(h) = V_1(h) \in V_1(\mathcal{H}_N^{sf})$ $(\subseteq \mathbb{R}^K)$.

Da die Bedingung (DPsf) äquivalent zur Bedingung (DPsfT) ist und da die Bedingungen (DPsf) und (DP) jeweils äquivalent zur Bedingung (DP$D^\mathsf{T}$) sind (siehe nachfolgendes Schema), folgt auch, dass im Einperiodenmodell die $L$-Duplizierbarkeit (DP) eines Zahlungsprofils $X = (X_0,X_1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit beliebigem $X_0 \in \mathbb{R}^K$ gleichbedeutend ist zur sf-Duplizierbarkeit (DPsf) des zugehörigen endfälligen Zahlungsprofils $X = (0,X_1)^\mathsf{T} \in \mathcal{W}(1) = O \times \mathbb{R}^K$ und zur sf-Duplizierbarkeit (DPsfT) des zugehörigen Zahlungsprofils $X_1 \in \mathbb{R}^K$. Hinter der Äquivalenz der sf-Duplizierbarkeit (DPsfT) zur $D^\mathsf{T}$-Duplizierbarkeit (DP$D^\mathsf{T}$) von $X_1 \in \mathbb{R}^K$ steht die nachfolgend noch bewiesene Übereinstimmung $V_1(\mathcal{H}_N^{sf}) = D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$. Für $X = (X_0,X_1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{1+K}$ bzw. $X_1 \in \mathbb{R}^K$ sind also die hier aufgeführten Versionen der Duplizierbarkeit im Einperiodenmodell alle zueinander äquivalent:

Unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) gelten die Äquivalenzen:

In $\mathbb{R}^{1+K}$: (DP) $\Leftrightarrow$ (DPsf)

In $\mathbb{R}^K$: (DP$D^\mathsf{T}$) $\Leftrightarrow$ (DPsfT)

Zu beachten ist, dass in den Bedingungen (DPsf) und (DPsfT) der sf-Duplizierbarkeit neben der $D^\mathsf{T}$-Duplizierbarkeit (DP$D^\mathsf{T}$) $X_1 = D^\mathsf{T}h_1$ von $X_1$ auch noch die Selbstfinanzierungsbedingung

(SF) $L_0(h) = V_0(h) - R_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}}h_0 - S_0{}^\mathsf{T}h_1 = 0$

der Handelsstrategie $h = (h_0,h_1)^\mathsf{T} \in \mathcal{H}_N^{sf}$ erfasst ist. Da aber diese Bedingung (SF) $L_0(h) = 0$ und auch die in (DP) verwendete allgemeinere Bedingung $L_0(h) = X_0$ bzw. $S_0^{\delta\mathsf{T}}h_0 = S_0{}^\mathsf{T}h_1 + X_0$ ($X_0 \in \mathbb{R}$ beliebig) bei der Berechnung einer Duplikationsstrategie unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) durch die Wahl von $h_0$ stets erfüllbar ist, können sie im Einperiodenmodell bei der Beschreibung der Duplizierbarkeit außer Acht gelassen werden. Aufgrund der Äquivalenz dieser Duplizierbarkeitsbegriffe im Einperiodenmodell wird meist nur die einfacher handhabbare $D^\mathsf{T}$-Duplizierbarkeit verwendet.

**Spezielle Darstellungen der Unterräume $\mathcal{V}_1$, $\ker V_1^{sf*}$, $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_1{}^\perp$ von $\mathbb{R}^K$**

Es wird nun gezeigt, dass im Einperiodenmodell der Unterraum $\mathcal{V}_1 := V_1(\mathcal{H}_N^{sf})$ $(\subseteq \mathbb{R}^K)$ der mittels $V_1$ sf-duplizierbaren Zahlungsprofile mit dem Unterraum $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ der $D^\mathsf{T}$-duplizier-

baren Zahlungsprofile übereinstimmt. Demzufolge stimmt dann auch der Kern $\ker V_1^{sf*}$ ($\subseteq \mathbb{R}^K$) der adjungierten Abbildung

$$V_1^{sf*} : \mathbb{R}^K \longrightarrow \mathcal{H}_N^{sf}$$

von $V_1^{sf} = V_1 : \mathcal{H}_N^{sf} \longrightarrow \mathbb{R}^K$ mit dem Kern $\ker D$ der Abbildung $D$ überein. Weiter wird begründet, dass auch der Unterraum $\mathcal{M}_1$ ($\subseteq \mathbb{R}^K$) der NE-Zahlungsprofile, der als $V_1$-Bild des Kerns der Abbildung $V_0 = V_0^{sf} : \mathcal{H}_N^{sf} \longrightarrow \mathbb{R}^K$ bzw. $v_0 : \mathcal{H}_N^{sf} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert ist, übereinstimmt mit dem $D^\top$-Bild des Kerns der Abbildung $S_0^\top$. Der Unterraum $\mathcal{V}_0$ ($\subseteq \mathbb{R}^K$) der Startkapitaleinsätze der sf-Handelsstrategien stimmt unter der mathematisch-technischen Voraussetzung

(AWS) $S_0 \neq 0 = (0,\ldots,0)^\top \in \mathbb{R}^N$

(vgl. allgemeinen Fall $T \in \mathbb{N}$ in Abschnitt 5.3.5, Beweisteil c $\mathcal{V}_0 = \mathcal{E}_T$) mit den eindimensionalen Unterräumen $R_0(\mathbb{R}^N)$ und $\mathcal{E}_1 = \operatorname{lin} \mathbf{1}_\Omega$ von $\mathbb{R}^K$ überein.

Stets gilt

a) $\mathcal{M}_1 := V_1(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0) = D^\top(\ker S_0^\top) = D^\top([S_0]^\perp)$,

b) $\mathcal{M}_1^\perp = D^{-1}([S_0])$.

c) $\mathcal{V}_1 := V_1(\mathcal{H}_N^{sf}) = D^\top(\mathbb{R}^N)$,

d) $\mathcal{V}_1^\perp = \ker V_1^{sf*} = \ker D$,

e) $\mathcal{V}_0 := V_0(\mathcal{H}_N^{sf}) = R_0(\mathbb{R}^N)$.

Unter der Voraussetzung (AWS) $S_0 \neq 0$ gilt:

f) $R_0(\mathbb{R}^N) = \operatorname{lin} \mathbf{1}_\Omega =: \mathcal{E}_1$.

**Beweis:**

a) $\mathcal{M}_1 = D^\top(\ker S_0^\top)$: Für eine beliebige Laufzeit $T \in \mathbb{N}$ wird der Unterraum $\mathcal{M}_T$ der NE-Zahlungsprofile in Abschnitt 5.1 bei der Behandlung endfälliger Zahlungsprofile definiert durch das $V_T$-Bild

$$\mathcal{M}_T := V_T(\ker^{sf} V_0)$$

des Kerns der Abbildung $V_0 : \mathcal{H}_N^{sf} \longrightarrow \mathbb{R}$, also des $\mathcal{H}_N$-Unterraums

$$\ker^{sf} V_0 := \mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0 = \{h \in \mathcal{H}_N : L_0(h) = \ldots = L_{T-1}(h) = V_0(h) = 0\}.$$

Es wird jetzt gezeigt, dass speziell im Einperiodenmodell ($T = 1$) der Unterraum $\mathcal{M}_1$ der NE-Zahlungsprofile auch durch das $D^\top$-Bild von $\ker S_0^\top = S_0^\perp$ gegeben ist. Im Einperiodenmodell erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 &= V_1(\{h \in \mathbb{R}^{2N} : L_0(h) = 0 \wedge V_0(h) = 0\}) \\ &= \{V_1(h) = S_1^\delta h_1 = D^\top h_1 : h \in \mathbb{R}^{2N} \text{ mit } R_0(h) = V_0(h) = 0\} \\ &= \{D^\top h_1 : h_1 \in \mathbb{R}^N, S_0^\top h_1 = 0\} \qquad \text{(Begründung folgt)} \\ &= D^\top(\ker S_0^\top).\end{aligned}$$

Begründung der vorletzten Mengengleichung: „$\subseteq$“: Da für den zu einer Handelsstrategie $h = (h_0,h_1)^\top \in \ker^{sf} V_0 = \{R_0(h) = S_0^\top h_1 = 0,\ V_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0 = 0\}$ gehörigen Portfoliovektor $h_1$ die Inzidenz $h_1 \in \{S_0^\top h_1 = 0\}$ gilt und die Funktionswerte $V_1(h)$ und $D^\top h_1$ übereinstimmen, gilt die Inklusion

$$V_1(\{R_0(h) = V_0(h) = 0\}) \subseteq D^\top(\{S_0^\top h_1 = 0\}).$$

„$\supseteq$“: Da es zu jedem Portfoliovektor $h_1 \in \{S_0^\top h_1 = 0\}$ eine Handelsstrategie $h = (h_0,h_1)^\top \in \mathbb{R}^{2N}$ gibt, die neben der Gleichung $R_0(h) = S_0^\top h_1 = 0$ auch der stets lösbaren Gleichung $V_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0 = 0$ (z. B. mit $h_0 = 0$) genügt und dafür $D^\top h_1 = V_1(h)$ ist, gilt auch die Inklusion

$$D^\top(\{S_0^\top h_1 = 0\}) \subseteq V_1(\{R_0(h) = V_0(h) = 0\}).$$

b) $\mathcal{M}_1^{\perp} = D^{-1}([S_0])$: Es ist $Y_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp}$ genau dann, wenn für beliebiges $g_1 \in [S_0]^{\perp}$ bzw. $D^{\mathsf{T}}g_1 \in D^{\mathsf{T}}([S_0]^{\perp}) = \mathcal{M}_1$ (siehe Teil a) die Gleichung

$$(DY_1)^{\mathsf{T}}g_1 = Y_1{}^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}g_1 = 0,$$

erfüllt ist, also für $Y_1 \in \mathbb{R}^K$ die Relation $DY_1 \perp [S_0]^{\perp}$ bzw. $DY_1 \in [S_0]^{\perp\perp} = [S_0]$ und somit $Y_1 \in D^{-1}([S_0])$ gilt. Damit ist $\mathcal{M}_1^{\perp} = D^{-1}([S_0])$.

c1) $\mathcal{V}_1 := V_1(\mathcal{H}_N^{sf}) = D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$: Im Einperiodenmodell erhält man

$$\begin{aligned} V_1(\mathcal{H}_N^{sf}) &= V_1(\{h \in \mathbb{R}^{2N} : L_0(h) = V_0(h) - R_0(h) = 0\}) \\ &= \{V_1(h) = S_1^{\delta}h_1 = D^{\mathsf{T}}h_1 : h \in \mathbb{R}^{2N} \text{ mit } V_0(h) = R_0(h)\} \\ &= \{D^{\mathsf{T}}h_1 : h = (h_0,h_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{2N} \text{ mit } S_0^{\delta\mathsf{T}}h_0 = S_0{}^{\mathsf{T}}h_1\} \\ &= \{D^{\mathsf{T}}h_1 : h_1 \in \mathbb{R}^N\} \qquad \text{(Begründung folgt)} \\ &= D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Begründung der vorletzten Mengengleichung: Zum Nachweis der nichttrivialen Inklusion „$\supseteq$“ werden die beiden Fälle i) $S_0^{\delta} \neq 0$ und ii) $S_0^{\delta} = 0$ unterschieden.

Im Fall i) (AWS$^{\delta}$) $S_0^{\delta} \neq 0$ gibt es zu jedem vorgegebenen Portfoliovektor $h_1 \in \mathbb{R}^N$ einen Portfoliovektor $h_0 \in \mathbb{R}^N$ als Lösung der stets lösbaren Gleichung $S_0^{\delta\mathsf{T}}h_0 = S_0{}^{\mathsf{T}}h_1$ (Voraussetzung $S_0^{\delta} \neq 0$) und damit auch eine Handelsstrategie $h = (h_0,h_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $L_0(h) = 0$ gibt. Damit ist $D^{\mathsf{T}}h_1 = V_1(h) \in V_1(\mathcal{H}_N^{sf})$ und $D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathcal{V}_1$.

Im Sonderfall ii) $S_0^{\delta} = S_0 + \delta_0 = 0$ ist wegen $S_0 \geq 0$, $\delta_0 \geq 0$ auch $S_0 = 0$ und daher

$$L_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}}h_0 - S_0{}^{\mathsf{T}}h_1 = 0 \;\forall\, h \in \mathcal{H}_N.$$

Demnach gilt in diesem Fall $\mathcal{H}_N^{sf} = \mathcal{H}_N$ und mit Beweisteil c2) $V_1(\mathcal{H}_N^{sf}) = V_1(\mathcal{H}_N) = D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$.

c2) $V_1(\mathcal{H}_N) = D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$: Die mittels der Portfoliovektoren $h_1 \in \mathbb{R}^N$ $D^{\mathsf{T}}$-duplizierbaren Zahlungsprofile $X_T \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ liefern nicht nur die mittels der sf-Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ $V_1$-duplizierbaren Zahlungsprofile $V_1(h)$, sondern auch die mittels beliebiger Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N = \mathbb{R}^{2N}$ $V_1$-duplizierbaren Zahlungsprofile $V_1(h)$: „$\subseteq$“: Für jedes $h \in \mathbb{R}^{2N}$ ist nämlich $V_1(h) = D^{\mathsf{T}}h_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$, sodass die Inklusion $V_1(\mathcal{H}_N) \subseteq D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ folgt. „$\supseteq$“: Umgekehrt ist für jedes $h_1 \in \mathbb{R}^N$ und beliebiges $h_0 \in \mathbb{R}^N$ mit $h = (h_0,h_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{2N} = \mathcal{H}_N$ auch $D^{\mathsf{T}}h_1 = V_1(h) \in V_1(\mathcal{H}_N)$ und es folgt die Inklusion $D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) \subseteq V_1(\mathcal{H}_N)$.

d) $\ker V_1^{sf*} = \ker D$: Nach Abschnitt 5.3.5 ist $\ker V_T^{sf*} = V_T(\mathcal{H}_N^{sf})^{\perp}$ für $T \in \mathbb{N}$. Speziell für die Laufzeit $T = 1$ folgt dann mit c1) (auch ohne die Voraussetzung (AWS$^{\delta}$)) und mit der zu Beginn von Kapitel 6 angegebenen orthogonalen Zerlegung von $\mathbb{R}^K$

$$\ker V_1^{sf*} = V_1(\mathcal{H}_N^{sf})^{\perp} = D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)^{\perp} = \ker D.$$

e) $\mathcal{V}_0 = R_0(\mathbb{R}^N)$: Im Einperiodenmodell gilt

$$\begin{aligned} V_0(\mathcal{H}_N^{sf}) &= \{V_0(h) : h \in \mathbb{R}^{2N} \text{ mit } L_0(h) = V_0(h) - R_0(h) = 0\} \\ &= \{R_0(h) : h \in \mathbb{R}^{2N} \text{ mit } V_0(h) = R_0(h)\} \\ &= R_0(\mathcal{H}_N^{sf}) \\ &= \{R_0(h) = \mathbf{1}_{\Omega}S_0{}^{\mathsf{T}}h_1 : h = (h_0,h_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{2N} \text{ mit } S_0^{\delta\mathsf{T}}h_0 = S_0{}^{\mathsf{T}}h_1\} \\ &= \{R_0{\cdot}h_1 = \mathbf{1}_{\Omega}S_0{}^{\mathsf{T}}h_1 : h_1 \in \mathbb{R}^N\} \qquad \text{(Begründung folgt)} \\ &= R_0(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Begründung der vorletzten Mengengleichung: „$\subseteq$“: Da mit dem zu einer Handelsstrategie $h = (h_0,h_1)^{\mathsf{T}} \in \{S_0^{\delta\mathsf{T}}h_0 = S_0{}^{\mathsf{T}}h_1\}$ gehörigen Portfoliovektor $h_1$ die Funktionswerte $R_0(h)$, $R_0{\cdot}h_1 \in \mathbb{R}^K$ übereinstimmen, ist der Bildraum

$$R_0(\mathcal{H}_N^{sf}) = \{R_0(h) \in \mathbb{R}^K : h \in \mathbb{R}^{2N} \text{ mit } S_0^{\delta\mathsf{T}}h_0 = S_0{}^{\mathsf{T}}h_1\}$$

der Abbildung $R_0 : h = (h_0,h_1)^\mathsf{T} \in \mathcal{H}_N^{sf} \mapsto R_0(h) = \mathbf{1}_\Omega S_0^{\,\mathsf{T}} h_1 \in \mathbb{R}^K$ enthalten im Bildraum

$$R_0(\mathbb{R}^N) = \{R_0 h_1 : h_1 \in \mathbb{R}^N\}$$

der durch die Matrix $R_0$ gegebenen Abbildung $R_0 : h_1 \in \mathbb{R}^N \mapsto R_0 \cdot h_1 = \mathbf{1}_\Omega S_0^\mathsf{T} \cdot h_1 \in \mathbb{R}^K$.

„$\supseteq$“: Im Fall i) $S_0^\delta \neq 0$ gibt es zu jedem Portfoliovektor $h_1 \in \mathbb{R}^N$ einen Portfoliovektor $h_0 \in \mathbb{R}^N$ als Lösung der Gleichung $S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = S_0^\mathsf{T} h_1$ und damit auch eine Handelsstrategie $h = (h_0,h_1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{2N}$, welche die Gleichung $S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = S_0^\mathsf{T} h_1$ erfüllt. Da diese Handelsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ den Funktionswert $R_0(h) = \mathbf{1}_\Omega S_0^{\,\mathsf{T}} h_1 = R_0 \cdot h_1$ besitzt, gilt auch die Inklusion

$$R_0(\mathbb{R}^N) \subseteq R_0(\mathcal{H}_N^{sf}).$$

Im Fall ii) $S_0^\delta = 0$ ist nach Beweisteil c1) auch $S_0 = 0$, daher

$$R_0 \cdot h_1 = \mathbf{1}_\Omega S_0^{\,\mathsf{T}} h_1 = 0 \qquad \forall\, h_1 \in \mathbb{R}^N,$$

$$R_0(h) = V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = 0 \;\; \forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf} = \{ S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = S_0^\mathsf{T} h_1 \}$$

und damit $R_0(\mathbb{R}^N) = O = R_0(\mathcal{H}_N^{sf})$.

In den beiden Fällen i) und ii) ist also $V_0(\mathcal{H}_N^{sf}) = R_0(\mathcal{H}_N^{sf}) = R_0(\mathbb{R}^N)$.

f) $R_0(\mathbb{R}^N) = \mathcal{Z}_1$: Es gilt stets $R_0(\mathbb{R}^N) \subseteq \operatorname{lin} \mathbf{1}_\Omega =: \mathcal{Z}_1$, da $R_0 \cdot h_1 = \mathbf{1}_\Omega S_0^{\,\mathsf{T}} h_1 \in \mathcal{Z}_1$ für jedes $h_1 \in \mathbb{R}^N$ gilt. Falls noch (AWS) $S_0 \neq 0$ vorausgesetzt ist, gibt es zu jedem $p \cdot \mathbf{1}_\Omega \in \mathcal{Z}_1$ ein $h_1 \in \mathbb{R}^N$ mit $S_0^{\,\mathsf{T}} h_1 = p$, sodass

$$p \cdot \mathbf{1}_\Omega = \mathbf{1}_\Omega S_0^{\,\mathsf{T}} h_1 = R_0 \cdot h_1 \in R_0(\mathbb{R}^N)$$

gilt. Es ist also auch $\mathcal{Z}_1 \subseteq R_0(\mathbb{R}^N)$ und insgesamt $R_0(\mathbb{R}^N) = \mathcal{Z}_1$. Im Fall $S_0 = 0$ ist dagegen

$$R_0(\mathbb{R}^N) = O \neq \mathcal{Z}_1.$$

Für den Unterraum $\mathcal{V}_0$ werden in Abschnitt 5.3.5 (für beliebige Laufzeit $T \in \mathbb{N}$) unter bestimmten Voraussetzungen die Übereinstimmung

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{Z}_1$$

und die Inklusion

$$\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_1$$

gezeigt. Für die Übereinstimmung $\mathcal{V}_0 = \mathcal{Z}_1$ genügt im Einperiodenmodell nach e) und f) die Voraussetzung (AWS) $S_0 \neq 0$. Für die Inklusion $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_1$ werden die Voraussetzungen (AWS$^\delta$), (AWS) und $\mathbf{1}_\Omega \in \mathcal{V}_1 = D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ oder die Voraussetzung eines deterministischen Numéraires $B$ verwendet. □

**Anmerkung zur Bezeichnung NE-Geschäfte** für die $\hat{Z} = (0,Z_1)^\mathsf{T} \in \mathcal{M}(1)$ in $\mathbb{R}^{1+K}$ und zur Bezeichnung **NE-Zahlungsprofile** für die $Z_1 \in \mathcal{M}_1$ in $\mathbb{R}^K$: Es wird nun ein Zusammenhang zwischen den Zahlungsprofilen $Z_1 \in \mathcal{M}_1$ und den endfälligen Kapitalmarktgeschäften $\hat{Z} \in \mathcal{M}(1) := \mathcal{M} \cap \{X_0 = 0\}$ aufgezeigt und damit die Bezeichnung der $\hat{Z} = (0,Z_1)^\mathsf{T} \in \mathcal{M}(1)$ als Nulleinsatz-Kapitalmarktgeschäfte (NE-Geschäfte) und der $Z_1 \in \mathcal{M}_1$ als Nulleinsatz-Zahlungsprofile (NE-Zahlungsprofile) plausibel gemacht. Zunächst besteht eine bijektive Beziehung zwischen den zum Zeitpunkt $t = 1$ auftretenden Zahlungsprofilen $Z_1 \in \mathbb{R}^K$ und den endfälligen Zahlungsprofilen $\hat{Z} = (0,Z_1)^\mathsf{T} \in \mathcal{W}(1) := \mathbb{R}^{1+K} \cap \{X_0 = 0\}$ mit $Z_0 = 0$:

$$Z_1 \in \mathbb{R}^K \overset{\text{Bijektion}}{\leftrightarrow} \hat{Z} = \hat{Z}(Z_1) := (0,Z_1)^\mathsf{T} \in \mathcal{W}(1) = \mathcal{Z}^\perp \qquad (\mathcal{Z} = \operatorname{lin} \mathbf{1}_{0,\Omega}).$$

Weiter ist $\hat{Z} = (0,Z_1)^\mathsf{T} \in \mathcal{W}(1)$ genau dann $L$-duplizierbar, wenn $Z_1 \in \mathbb{R}^K$ $D^\mathsf{T}$-duplizierbar ist (Äquivalenz von DPsf und DP$D^\mathsf{T}$):

$$\hat{Z} \in L(\mathcal{H}_N^{sf}) = L(\mathbb{R}^{2N}) \cap \{X_0 = 0\} \Leftrightarrow Z_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N).$$

Es besteht also eine bijektive Beziehung zwischen den $D^\mathsf{T}$-duplizierbaren Zahlungsprofilen $Z_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ und den mittels $L$ sf-duplizierbaren Zahlungsprofilen $\hat{Z} \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$:

$$Z_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) \overset{\text{Bijektion}}{\leftrightarrow} \hat{Z} = (0,Z_1)^\mathsf{T} \in L(\mathcal{H}_N^{sf}).$$

Außerdem gilt für $\hat{Z} = (0,Z_1)^\mathsf{T} \in L(\mathbb{R}^{2N}) \cap \{X_0 = 0\}$ die Inzidenz $\hat{Z} \in \mathcal{M}(1) = L(\ker V_0) \cap \{X_0 = 0\}$, d. h.

$$0 = Z_0 = L_0(h) = V_0(h) - R_0(h) \text{ mit } V_0(h) = 0,$$
$$Z_1 = L_1(h) = V_1(h) = D^\mathsf{T}h_1,$$

genau dann, wenn $Z_1 = D^\mathsf{T}h_1$ mit $R_0(h) = S_0^\mathsf{T}h_1 = 0$ ist, also $Z_1 \in \mathcal{M}_1 = D^\mathsf{T}(\ker S_0^\mathsf{T})$ gilt (siehe oben $\mathcal{M}_1 = V_1(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0) = D^\mathsf{T}(\ker S_0^\mathsf{T})$). Es besteht also auch eine bijektive Beziehung zwischen den Zahlungsprofilen $Z_1 \in \mathcal{M}_1$ und den endfälligen Kapitalmarktgeschäften $\hat{Z} = (0,Z_1)^\mathsf{T} \in \mathcal{M}(1)$:

$$Z_1 \in \mathcal{M}_1 \overset{\text{Bijektion}}{\leftrightarrow} \hat{Z} = (0,Z_1)^\mathsf{T} \in \mathcal{M}(1).$$

Ein Zahlungsstrom $\hat{Z} \in \mathcal{M}(1)$ ist ein Kapitalmarktgeschäft, bei dessen Duplizierung zum Zeitpunkt $t = 0$ neben einem Startkapitaleinsatz $V_0(h) = 0$ auch noch der (Re-)Investitionswert $R_0(h) = 0$ ist. Es liegt also zum Zeitpunkt $t = 0_-$ zunächst ein Portfolio $h_0$ mit dem Vermögenswert $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}}h_0 = 0$ vor. Nach der zum Zeitpunkt $t = 0_\delta$ ($0_- < 0_\delta < 0_+$) erfolgenden Dividendenzahlung wird dann zum Zeitpunkt $t = 0_+$ das Portfolio $h_0$ umgeschichtet in ein Portfolio $h_1$, für das auch der Reinvestitionswert $R_0(h) = S_0^\mathsf{T}h_1 = 0$ und damit auch die (Aus-)Zahlung $Z_0 = L_0(h) = V_0(h) - R_0(h) = 0$ ist ($h$ ist eine sog. selbstfinanzierende Handelsstrategie). Demzufolge wird ein $\hat{Z} = (0,Z_1)^\mathsf{T} \in \mathcal{M}$ hier als Nulleinsatz-Kapitalmarktgeschäft (Abk.: NE-Kapitalmarktgeschäft, **NE-Geschäft**) bezeichnet. Weiter wird das bei einem NE-Geschäft $\hat{Z}$ im Zeitpunkt $t = 1$ auftretende stochastische Zahlungsprofil $Z_1 \in \mathcal{M}_1$ hier Nulleinsatz-Zahlungsprofil (Abk.: **NE-Zahlungsprofil**) genannt. Bei gültigem LOP ist der Preis $\pi(Z_1)$ eines NE-Zahlungsprofils $Z_1 \in \mathcal{M}_1$ definitionsgemäß gleich dem Preis des zugehörigen NE-Geschäfts $\hat{Z} = (0,Z_1)^\mathsf{T}$ und somit wegen $\hat{Z} \in \mathcal{M}$ gleich Null:

$$\pi(Z_1) = \pi(\hat{Z}) = 0. \qquad \triangle$$

**Vollständigkeit des Einperiodenmodells**

Im Einperiodenmodell bedeutet die **Vollständigkeit** (VS) des Marktmodells, dass *jedes* Zahlungsprofil $X = (X_0,X_1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{1+K}$ $L$-duplizierbar ist, und die speziellere sf-Vollständigkeit (VSsf), dass jedes endfällige Zahlungsprofil $X = (0,X_1)^\mathsf{T} \in \mathcal{W}(1) = \mathbb{R}^{1+K} \cap \{X_0 = 0\}$ mittels $L$ sf-duplizierbar ist, die sf-Vollständigkeit (VSsfT), dass jedes zum Zeitpunkt 1 auftretende Zahlungsprofil $X_1 \in \mathbb{R}^K$ mittels $V_1$ sf-duplizierbar ist, und die $D^\mathsf{T}$-Vollständigkeit (VS$D^\mathsf{T}$), dass jedes $X_1 \in \mathbb{R}^K$ $D^\mathsf{T}$-duplizierbar ist. Aufgrund der oben für das Einperiodenmodell begründeten Äquivalenz der $L$-Duplizierbarkeit (DP) mit der $D^\mathsf{T}$-Duplizierbarkeit (DP$D^\mathsf{T}$) und der sf-Duplizierbarkeit (DPsf) und (DPsfT) ergibt sich im Einperiodenmodell unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) auch die Äquivalenz der allgemeinen Vollständigkeit (VS) mit der $D^\mathsf{T}$-Vollständigkeit (VS$D^\mathsf{T}$) und der sf-Vollständigkeit (VSsf) bzw. (VSsfT):

$$\begin{aligned}
&\text{(VS)} && L(\mathbb{R}^{2N}) = \mathbb{R}^{1+K} \\
\Leftrightarrow\ &\text{(VS}D^\mathsf{T}\text{)} && D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^K \\
\Leftrightarrow\ &\text{(VSsf)} && L(\mathcal{H}_N^{sf}) = \mathcal{W}(1) = \mathbb{R}^{1+K} \cap \{X_0 = 0\} \\
\Leftrightarrow\ &\text{(VSsfT)} && L_1(\mathcal{H}_N^{sf}) = V_1(\mathcal{H}_N^{sf}) = \mathbb{R}^K.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Äquivalenz dieser Vollständigkeitsbegriffe im Einperiodenmodell wird hier meist nur die einfacher handhabbare speziellere $D^\mathsf{T}$-Vollständigkeit (VS$D^\mathsf{T}$) verwendet. Die

Vollständigkeit des Einperiodenmodells wird in den niedrigerdimensionalen Räumen $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ also charakterisiert durch die **Surjektivität** der linearen Abbildung

$$D^{\mathsf{T}} : h_1 \in \mathbb{R}^N \mapsto D^{\mathsf{T}} h_1 \in \mathbb{R}^K.$$

Wegen der Darstellung von $\mathbb{R}^K$ als direkte Summe

$$\mathbb{R}^K = \operatorname{Im} D^{\mathsf{T}} \oplus \ker D, \qquad (\operatorname{Im} D^{\mathsf{T}})^{\perp} = \ker D,$$

der orthogonalen Komplemente Im $D^{\mathsf{T}}$ und ker $D$ ist die Vollständigkeit (VS) bzw. (VS$D^{\mathsf{T}}$) dann auch noch äquivalent zu ker $D = O = \{0\}$, also zur **Injektivität** der linearen Abbildung

$$D : X_1 \in \mathbb{R}^K \mapsto DX_1 \in \mathbb{R}^N.$$[10]

Im Gegensatz zum Einperiodenmodell liegt im **echten Mehrperiodenmodell** ($T \geq 2$) die Äquivalenz der allgemeinen Vollständigkeit (VS) zur spezielleren sf-Vollständigkeit (VSsf) im Allgemeinen nicht vor. Dies wird durch das Beispiel 5.1 in Abschnitt 5.2.2 gezeigt. Erst unter der zusätzlichen Voraussetzung von (WS1,$T$-1) und dass in allen enthaltenen Einperiodenmodellen das LOP gilt, folgt aus der sf-Vollständigkeit des Mehrperiodenmodells auch die Vollständigkeit (Satz 5.7, b in Abschnitt 5.2.2).

## 6.2.2 Charakterisierungen des Law of One Price

**Unterraum $\mathcal{M}$ der Kapitalmarktgeschäfte und sein orthogonales Komplement $\mathcal{M}^{\perp}$ in $\mathbb{R}^{1+K}$**

Mit der deterministischen Handelsstrategie

$$b := (b_0,0)^{\mathsf{T}} := (S_0^{\delta},0)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{H}_N \text{ bzw. } \in \mathbb{R}^{2N}$$

erhält man den davon aufgespannten eindimensionalen Unterraum $\mathcal{B} := \operatorname{lin}\{b\}$ ($S_0^{\delta} \neq 0$) von $\mathcal{H}_N$ bzw. $\mathbb{R}^{2N}$, die deterministische Linearform

$$v_0 : h \in \mathbb{R}^{2N} \mapsto v_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = b^{\mathsf{T}} h\,,$$

deren Kern

$$\ker v_0 = \ker b^{\mathsf{T}} = \{h \in \mathbb{R}^{2N} : b^{\mathsf{T}} h = 0\} = \mathcal{B}^{\perp}$$

und dessen $L$-Bild

$$\mathcal{M} = L(\ker v_0) = L(\mathcal{B}^{\perp})$$

als den Unterraum der Kapitalmarktgeschäfte in $\mathbb{R}^{1+K}$.[11] Im Einperiodenmodell gibt es für den Unterraum $\mathcal{M}$ und dessen orthogonale Komplement $\mathcal{M}^{\perp}$ die folgende Darstellung:

---

[10] Diese letzten beiden Charakterisierungen der Vollständigkeit (VS) durch die Surjektivität von $D^{\mathsf{T}}$ und die Injektivität von $D$ findet man bei Kremer (2011) auf S. 31 (Satz 1.29), 44f (Satz 1.53), 68 (Tab. 1.1).

[11] Im Mehrperiodenmodell ergibt sich jedes Zahlungsprofil $Z = L(h) \in \mathcal{M} = L(\ker V_0)$ aus einer Handelsstrategie $h$ mit dem Startkapitaleinsatz $V_0(h) = 0$ beim Zeitpunkt $t = 0$, also durch reinen Handel mit den Wertpapieren $S^j$ gemäß der Folge $h_t$ der Portfoliovektoren ($t = 1,\ldots,T$). Der Handel besteht dabei aus dem Kauf des zu $h_t$ gehörigen Portfolios zum Wert $R_{t-1}(h) = S_{t-1}h_t$ im Zeitpunkt $t$-1 und dem Verkauf dieses Portfolios zum zufallsabhängig eingestellten Wert $V_t(h) = S_t^{\delta}h_t$ im Zeitpunkt $t$. In Abschnitt 3.7.2 wird gezeigt, dass jedes $Z \in \mathcal{M}$ eine Linearkombination der Forwardgeschäfte $F^{\tau,j,k} \in \mathcal{M}$ ist, bei denen jeweils das $j$-te Wertpapier $S^j$ genau zum Zeitpunkt $s = t$-1 und im Ereignis $A_{t-1,k}$ zum Preis $S_{t-1}^j(A_{t-1,k})$ gekauft und genau zum darauffolgenden Zeit-

Im Einperiodenmodell gilt

$$\mathcal{M} = \operatorname{Im} L' = L'(\mathbb{R}^N),$$
$$\mathcal{M}^\perp = \ker L'^{\mathsf{T}} = \{Y = (Y_0, Y_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{1+K} : DY_1 = S_0 Y_0\}.$$

**Beweis:** a) $\mathcal{M} = \operatorname{Im} L'$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= L(\ker v_0) = \{L \cdot h = V' \cdot h_0 + L' \cdot h_1 : h \in \mathbb{R}^{2N} \text{ mit } v_0(h) = 0\} \\ &= \{L' \cdot h_1 : h_1 \in \mathbb{R}^N\} \qquad \text{(Begründung folgt)} \\ &= L'(\mathbb{R}^N) = \operatorname{Im} L'.\end{aligned}$$

Begründung der nichttrivialen Inklusion „$\supseteq$“ für die vorletzte Mengengleichung: Da es zu jedem Portfoliovektor $h_1 \in \mathbb{R}^N$ eine Handelsstrategie $h = (h_0, h_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{2N}$ gibt, die auch der stets lösbaren Gleichung $v_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = 0$ (z. B. mit $h_0 = 0$) genügt, gilt

$$L' \cdot h_1 = \begin{pmatrix} -S_0^{\mathsf{T}} \\ D^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} \cdot h_1 = \begin{pmatrix} S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 - S_0^{\mathsf{T}} h_1 \\ D^{\mathsf{T}} h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0^{\delta\mathsf{T}} & -S_0^{\mathsf{T}} \\ 0 & D^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix}$$
$$= L \cdot h \quad \text{mit } v_0(h) = 0,$$

folglich auch die Inzidenz $L' \cdot h_1 \in L(\{v_0(h) = 0\})$ und die Inklusion $L'(\mathbb{R}^N) \subseteq L(\{v_0(h) = 0\}) = \mathcal{M}$.

b) $\mathcal{M}^\perp = \ker L'^{\mathsf{T}}$: Aufgrund der Darstellung des Raums $\mathbb{R}^{1+K}$ als direkte Summe

$$\mathbb{R}^{1+K} = \operatorname{Im} L' \oplus \ker L'^{\mathsf{T}}, \qquad (\operatorname{Im} L')^\perp = \ker L'^{\mathsf{T}},$$

der orthogonalen Komplemente $\operatorname{Im} L'$ und $\ker L'^{\mathsf{T}}$ zu den (zueinander adjungierten) Abbildungen $L' : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{1+K}$ und $L'^{\mathsf{T}} : \mathbb{R}^{1+K} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ erhält man zu $\mathcal{M} = \operatorname{Im} L'$ (nach Teil a) das orthogonale Komplement $\mathcal{M}^\perp$ durch

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^\perp &= (\operatorname{Im} L')^\perp = \ker L'^{\mathsf{T}} \\ &= \{Y \in \mathbb{R}^{1+K} : L'^{\mathsf{T}} Y = (-S_0, D)Y = 0\} \\ &= \{Y = (Y_0, Y_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{1+K} : DY_1 = S_0 Y_0\}.\end{aligned}$$

□

**Anmerkung zur Bezeichnung Kapitalmarktgeschäfte** für die Zahlungsprofile $Z \in \mathcal{M}$ im Einperiodenmodell: Im Einperiodenmodell hat $Z \in \mathcal{M}$ die Darstellung

$$\begin{aligned}Z &= L' \cdot h_1 = (-S_0^{\mathsf{T}} h_1, D^{\mathsf{T}} h_1)^{\mathsf{T}} = \left( -\sum_{j=1}^N S_0^j h_1^j, \sum_{j=1}^N S_1^{\delta,j}(\omega_1) h_1^j, \ldots, \sum_{j=1}^N S_1^{\delta,j}(\omega_K) h_1^j \right)^{\mathsf{T}} \\ &= \sum_{j=1}^N h_1^j \cdot \left( -S_0^j, S_1^{\delta,j}(\omega_1), \ldots, S_1^{\delta,j}(\omega_K) \right)^{\mathsf{T}} = \sum_{j=1}^N h_1^j \cdot F^{1,j} \qquad (h_1 \in \mathbb{R}^N)\end{aligned}$$

und ist $Z$ somit eine Linearkombination der Kassageschäfte

$$\begin{aligned}F^{1,j} &= \left( -S_0^j, S_1^{\delta,j}(\omega_1), \ldots, S_1^{\delta,j}(\omega_K) \right)^{\mathsf{T}} \qquad \text{(Darstellung von } S_1^{\delta,j} \text{ als } K\text{-Tupel)} \\ &= \left( -S_0^j, \sum_{m=1}^K S_1^{\delta,j}(\omega_m) \cdot \mathbf{1}_{\omega_m} \right)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{M} \qquad \text{(Darst. von } S_1^{\delta,j} \text{ als Zustandsfunktion)}\end{aligned}$$

(mit der Bezeichnung $F^{1,j} := F^{1,j,0}$ von Abschnitt 3.7.2, da für $t = 1$ nur das Ereignis $A_{t-1,k} = A_{0,1} = \Omega$ auftritt), bei denen jeweils das $j$-te Wertpapier $S^j$ zum Zeitpunkt $t = 0$ (sicher) zum Preis $S_0^j = S_0^j(\Omega)$ gekauft und zum Zeitpunkt $t = 1$ in einem der dann möglichen Ereignisse $\omega_m \in \Omega$ zum zugehörigen Preis $S_1^{\delta,j}(\omega_m)$ verkauft wird. $Z$ ist also der Zahlungsstrom zu einer Handelsstrategie $h = (h_0, h_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{2N}$, bei der zum Zeitpunkt $t = 0$ der Startkapitaleinsatz $v_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = 0$ ist (wobei $h_0$

---

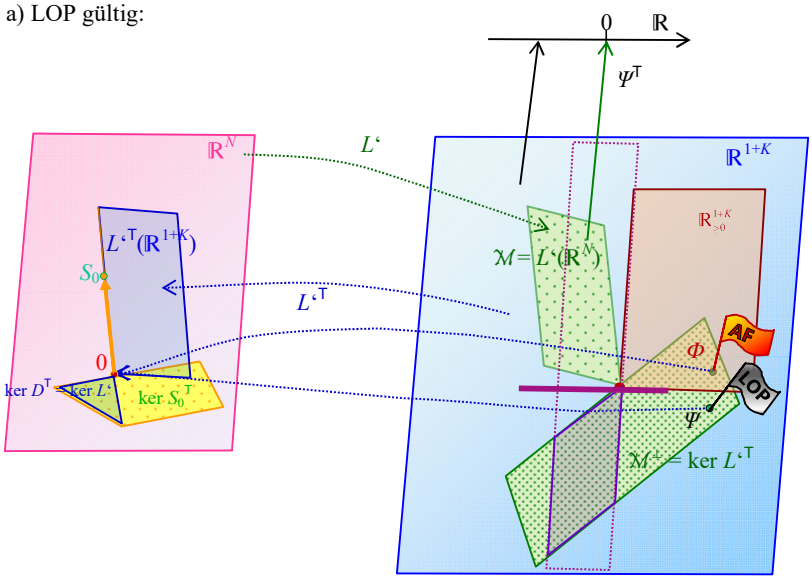
punkt $s = t$ in einem der dann noch möglichen Ereignisse $A_{t,m}$ ($A_{t,m} \subseteq A_{t-1,k}$) zum zugehörigen Preis $S_t^{\delta,j}(A_{t,m})$ verkauft wird. $Z$ ist also der Zahlungsstrom eines Kapitalmarktgeschäfts.

eine beliebige Lösung dieser Gleichung ist) und bei der gemäß dem Portfoliovektor $h_1 \in \mathbb{R}^N$ bei $t = 0$ das Portfolio der Wertpapiere $S^j$ ($j = 1,\ldots,N$) mit dem deterministischen (Re-)Investitionswert $r_0(h) = S_0 \cdot h_1 = S_0^{\mathsf{T}} h_1$ gekauft und bei $t = 1$ das Portfolio mit dem sich zufallsabhängig entwickelten Vermögenswert $V_1(h) = S_1^{\delta} \cdot h_1 = D^{\mathsf{T}} h_1$ verkauft wird, also der Zahlungsstrom eines Kapitalmarktgeschäfts:

$$Z_0 = L_0(h) = v_0(h) - r_0(h) = - S_0^{\mathsf{T}} h_1 ,$$
$$Z_1 = L_1(h) = V_1(h) = S_1^{\delta} h_1 . \qquad \triangle$$

Verschiedene Unterräume im Raum $\mathbb{R}^N$ der Portfoliovektoren $h_1$ und im Raum $\mathbb{R}^{1+K}$ der Zahlungsprofile $X = (X_0,X_1)^{\mathsf{T}}$ und deren Bilder bei den linearen Abbildungen $L' : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{1+K}$ und $L'^{\mathsf{T}} : \mathbb{R}^{1+K} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ sind in der Abbildung 6.3 a) bei gültigem LOP und b) bei ungültigem LOP dargestellt.

a) LOP gültig:




b) LOP ungültig:

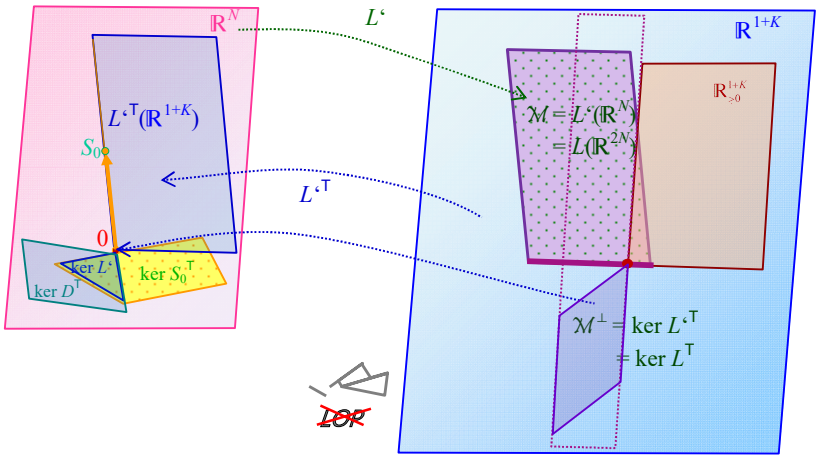



**Abb. 6.3** Die verschiedenen Unterräume von $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^{1+K}$, der schwach positive Orthant $\mathbb{R}^{1+K}_{\geq 0}$ von $\mathbb{R}^{1+K}$ und die linearen Abbildungen $L‘$ und $L‘^{\mathsf{T}}$: a) bei gültigem LOP mit Bewertungsprozess $\Psi$ bzw. bei vorliegender Arbitragefreiheit (AF) mit Diskontierungsprozess $\Phi$; b) bei ungültigem LOP

**Charakterisierungen des** LOP **durch die Existenz eines Bewertungsvektors, die Existenz eines** $D$**-Urbilds von** $S_0$ **und die Lage der Unterräume** $[S_0]$ **und** $D(\mathbb{R}^K)$, $\ker D^\top$ **und** $\ker S_0^\top$ **in** $\mathbb{R}^N$

Im nachfolgenden Satz 6.1 werden einige Charakterisierungen des LOP im Mehrperiodenmodell speziell für das Einperiodenmodell zunächst in den Räumen $\mathbb{R}^{2N}$ und $\mathbb{R}^{1+K}$ formuliert und dann noch in die Schreibweise für die niedrigerdimensionalen Räume $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ übersetzt:[12]

**Satz 6.1 Charakterisierungen des Law of One Price im Einperiodenmodell**

(LOP)

$\Leftrightarrow \exists\ \Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1} \subseteq \mathcal{A}$ (norm. $\mathcal{M}$-Norm.v. = norm. Bew.proz. m. Preisgl.; $\mathcal{A} \cap \{X_0 = 1\} \neq \emptyset$)

$\Leftrightarrow \exists\ \Psi\ \in (L^\top)^{-1}(\{b\}) \cap \{X_0 = 1\}$ (norm. $L^\top$-Urbild von $b$)

$\Leftrightarrow \exists\ \Psi\ \in (L^{\text{`}\top})^{-1}(\{0\}) \cap \{X_0 = 1\}$ (norm. $L^{\text{`}\top}$-Urbild von 0)

$\Leftrightarrow (\mathrm{PG}\Psi_1^\top D^\top)\ \exists\ \Psi_1 \in \mathbb{R}^K : \Psi_1^\top D^\top h_1 = S_0^\top h_1\ \forall\ h_1 \in \mathbb{R}^N$ (Bew.vektor m. Preisgl.; $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$)

$\Leftrightarrow \exists\ \Psi_1 \in D^{-1}(\{S_0\})$, d. h. $\exists\ \Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $D\Psi_1 = S_0$ ($D$-Urbild von $S_0$)

$\Leftrightarrow S_0 \in D(\mathbb{R}^K) = \mathrm{Im}\ D$ ($S_0$ ist $D$-Bild)

$\Leftrightarrow S_0 \perp \ker D^\top$ ($S_0$ orthogonal zu $\ker D^\top$)

$\Leftrightarrow \ker D^\top \subseteq \ker S_0^\top$ (Inklusion der Kerne von $D^\top$ und $S_0^\top$, z. B. bei inj. $D^\top$)

$\Leftrightarrow \ker D^\top = \ker L$' (Übereinstimmung der Kerne von $D^\top$ und $L$')

Zunächst werden hier im nachfolgenden Beweisteil 1 aus den in Abschnitt 3.3.3 für das Mehrperiodenmodell angegebenen Preisgleichungen (PG$\Psi$) eines Bewertungsprozesses $\Psi \in \mathcal{W}$ für die Zahlungsprofile in $L(\mathcal{H}_N)$ entsprechende **Preisgleichungen**[13] (PG$\Psi_1^\top D^\top$) mit einem **Bewertungsvektor** $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ für die Zahlungsprofile in $D^\top(\mathbb{R}^N)$ hergeleitet. Ein analoges Vorgehen wird in Abschnitt 5.3.3 mit Preisgleichungen (PG$\Psi_T$) und einem Bewertungsvektor $\Psi_T \in \mathbb{R}^\Omega$ für die Zahlungsprofile in $V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ durchgeführt.

Die Aussage, dass bei gültigem LOP ein Bewertungsprozess $\Psi$ des Mehrperiodenmodells ein $L^*$-Urbild von $b = (S_0^\delta, 0, \ldots, 0)^\top \in \mathcal{H}_N$ ist (siehe unten Beweisteil 2 a) bzw. gleichbedeutend dazu als ein normierter $\mathcal{M}$-Normalenvektor $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1} = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\}$ gewählt werden kann (siehe Beweisteil 2 b), liefert hier jeweils die Aussage, dass ein Bewertungsvektor $\Psi_1$ des Einperiodenmodells ein $D$-Urbild von $S_0$ ist: $\Psi_1 \in D^{-1}(\{S_0\})$. Die Charakterisierung des LOP durch die Inzidenz $S_0 \in D(\mathbb{R}^K)$ bedeutet auch, dass bei gültigem LOP im Kern

---

[12] Die Charakterisierungen des LOP durch die Existenz eines Bewertungsvektors $\Psi_1$ mit Preisgleichungen (PG$\Psi_1^\top D^\top$), die Existenz eines $D$-Urbilds $\Psi_1$ von $S_0$ bzw. die Inzidenz $S_0 \in D(\mathbb{R}^K)$ und die Orthogonalität von $S_0$ zum Unterraum $\ker D^\top$ gibt Kremer (2011) auf S. 29 (Satz 1.25), 68 (Tab. 1.1).

[13] Eine Plausibilisierung der Bezeichnung Preisgleichung für (PG$\Psi_1^\top D^\top$) und der Bezeichnung Bewertungsvektor für den Vektor $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ folgt auch noch unten im Anschluss an die verschiedenen äquivalenten Formulierungen für das LOP bei der Preisdefinition für die $D^\top$-duplizierbaren Zahlungsprofile. Die Charakterisierung des LOP durch die Preisgleichungen (PG$\Psi_1^\top D^\top$) bzw. (PG$\Psi$) für die duplizierbaren Zahlungsprofile behandelt Kremer (2011) für das Einperiodenmodell auf S. 29, Satz 1.25, 4), S. 30, (1.16), S. 68, Tab. 1.1, und für das Mehrperiodenmodell auf S. 171, Satz 3.48. Bei Kremer werden im Einperiodenmodell nur die speziellen endfälligen Zahlungsprofile $X = (X_0, X_1)^\top \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit $X_0 = 0$, $X_1 = D^\top h_1 \in D^\top(\mathbb{R}^N)$ bzw. die zum Zeitpunkt $t = 1$ gehörigen Zahlungsprofile $X_1$ mit dem Preis $\pi(X_1) = S_0^\top h_1$ behandelt.

von $L'^{\mathsf{T}} = (-S_0, D)$ ein nichttrivialer Vektor $\Psi = (\Psi_0, \Psi_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit der ersten Komponente $\Psi_0 = 1$ existiert. Weiter bedeutet dies, dass die erste Spalte $-S_0$ der Matrix $L'^{\mathsf{T}}$ schon im Spaltenraum der Matrix $D = \left(S_1^{\delta}(\omega_1),...,S_1^{\delta}(\omega_K)\right)$ liegt bzw. dass der zum Zeitpunkt $t = 0$ gehörige deterministische Preisvektor $S_0$ linear abhängig ist von den Kursen $S_1^{\delta}(\omega_k)$ des Preisvektors $S$, die zum Zeitpunkt $t = 1$ und zu den dann möglichen Zuständen $\omega_k \in \Omega$ ($k = 1,\ldots,K$) gehören:

$$S_0 \in \text{lin}\,\{\, S_1^{\delta}(\omega_1), \ldots, S_1^{\delta}(\omega_K)\,\} = D(\mathbb{R}^K).\ ^{14}$$

Zur Inzidenz $S_0 \in D(\mathbb{R}^K)$ wird dann noch die äquivalente Relation $S_0 \perp \ker D^{\mathsf{T}}$, die Inklusion $\ker D^{\mathsf{T}} \subseteq \ker S_0^{\mathsf{T}}$ bzw. die Übereinstimmung $\ker D^{\mathsf{T}} = \ker L'$ mittels der Unterräume $\ker L'$, $\ker D^{\mathsf{T}}$ und $\ker S_0^{\mathsf{T}}$ bewiesen.

Die oben angegebenen Charakterisierungen des LOP im Einperiodenmodell werden zunächst aus dem Mehrperiodenmodell hergeleitet, dann aber auch noch in den Beweisteilen A) und I) von Satz 6.3 innerhalb der Räume $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ bewiesen. Eine grafische Veranschaulichung dieser geometrischen Situation im Raum $\mathbb{R}^N$ der Portfoliovektoren $h_1$ wird in der Abbildung 6.4 gegeben: Bei gültigem LOP liegt $S_0$ im Bildraum $D(\mathbb{R}^K)$ von $D$ und ist $S_0$ orthogonal zum Unterraum $\ker D^{\mathsf{T}} = D(\mathbb{R}^K)^{\perp}$. Weiter ist $\ker D^{\mathsf{T}}$ enthalten in $\ker S_0^{\mathsf{T}}$. Eine entsprechende Darstellung für ein in einem Mehrperiodenmodell enthaltenes Einperiodenmodell liefert die Abbildung 3.3.

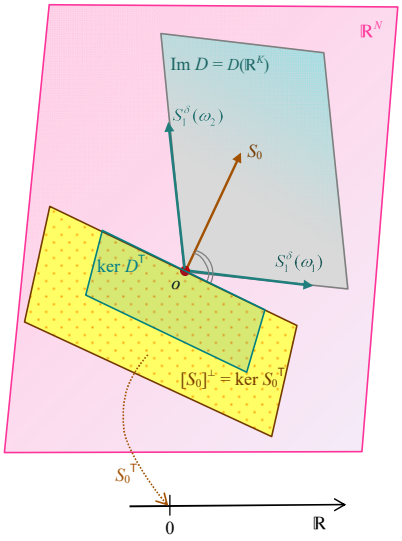



**Abb. 6.4** Die Lage des Vektors $S_0$ und der Unterräume Im $D$ und $\ker D^{\mathsf{T}}$ im $\mathbb{R}^N$ bei gültigem LOP

---

[14] In den Abschnitten 3.2.4 und 3.4.4 (im Beweis von Satz 3.4) wird diese Charakterisierung für ein in einem Mehrperiodenmodell enthaltenes Einperiodenmodell verwendet: Für das zum Ausgangsknoten $A_{t\text{-}1,k}$ gehörige Einperiodenmodell gilt das LOP genau dann, wenn die Preisprozesskomponente $S_{t-1}(A_{t-1,k})$ des Ausgangsknotens $A_{t\text{-}1,k}$ linear abhängig ist von den Preisprozesskomponenten $S_t^{\delta}(A_{t,m})$ seiner Nachfolgerknoten $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$ und somit ein Bewertungsvektor $\psi_t$ für dieses Einperiodenmodell existiert.

**Beweis von Satz 6.1** mit den LOP-Charakterisierungen im Einperiodenmodell durch die Herleitung aus dem Mehrperiodenmodell:

1) (LOP) $\Leftrightarrow$ (PG$\Psi_1{}^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}$):
Das LOP im Mehrperiodenmodell ist nach Abschnitt 3.3.3 stets (auch ohne die Voraussetzung (AWS$^{\delta}$)) äquivalent zur Existenz eines normierten $\mathcal{M}$-Normalenvektors

$$\Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1} \subseteq \mathcal{A}$$

und damit eines normierten Bewertungsprozesses $\Psi \in \mathcal{A}$, mit dem die Preisgleichungen (PG$\Psi$) für die mittels $L$ duplizierbaren (erreichbaren) Zahlungsprofile $X = L(h) \in L(\mathcal{H}_N)$ gelten:

$$\exists\ \Psi \in \mathcal{W} \cap \{X_0 = 1\} \text{ mit (PG}\Psi)\ \Psi^{\mathsf{T}} L(h) = b^{\mathsf{T}} h \quad \forall\ h \in \mathcal{H}_N.$$

Speziell im Einperiodenmodell ist nun die Existenz eines normierten Bewertungsprozesses

$$\Psi = (\Psi_0, \Psi_1)^{\mathsf{T}} = (1, \Psi_1)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{M}^{\perp 1} \subseteq \mathcal{A}$$

mit den Preisgleichungen (PG$\Psi$)

$$\begin{aligned} S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 &= b_0{}^{\mathsf{T}} h_0 = b^{\mathsf{T}} h = \Psi^{\mathsf{T}} L h \\ &= (\Psi_0, \Psi_1) \begin{pmatrix} S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 - S_0{}^{\mathsf{T}} h_1 \\ S_1^{\delta} h_1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 - 1 \cdot S_0{}^{\mathsf{T}} h_1 + \Psi_1{}^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}} h_1 \quad \forall\ h = (h_0, h_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{2N} \qquad (\Psi_0 = 1) \end{aligned}$$

äquivalent zur Existenz eines sog. Bewertungsvektors $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit den Preisgleichungen (PG$\Psi_1{}^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}$) für die $D^{\mathsf{T}}$-duplizierbaren Zahlungsprofile $X_1 = D^{\mathsf{T}} h_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$:
(PG$\Psi_1{}^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}$) $\quad \exists\ \Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $\Psi_1{}^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}} h_1 = S_0{}^{\mathsf{T}} h_1 \quad \forall\ h_1 \in \mathbb{R}^N$.

Im Einperiodenmodell ist also das LOP äquivalent zur

- Existenz eines normierten Bewertungsprozesses $\Psi$ mit den Preisgleichungen (PG$\Psi$),
- Existenz eines Bewertungsvektors $\Psi_1$ mit den Preisgleichungen (PG$\Psi_1{}^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}$) und damit auch zur
- Gültigkeit des unten noch formulierten (LOP$D^{\mathsf{T}}$) für die $X_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$.

Aus einem **normierten Bewertungsprozess** $\Psi = (1, \Psi_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{1+K}$ erhält man mit der Komponente $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ einen **Bewertungsvektor**. Umgekehrt erhält man zu einem Bewertungsvektor $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ im Einperiodenmodell nur durch die Ergänzung um $\Psi_0 = 1$ mit $\Psi = (1, \Psi_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{1+K}$ einen normierten Bewertungsprozess. Das LOP wird also im Einperiodenmodell neben den Preisgleichungen (PG$\Psi$) mit einem Bewertungsprozess $\Psi$ auch noch durch Preisgleichungen (PG$\Psi_1{}^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}$) mit einem Bewertungsvektor $\Psi_1$ charakterisiert.

**Anmerkung** zur Charakterisierung der Arbitragefreiheit im nachfolgenden Abschnitt 6.2.3:
Im obigen Beweis ist ersichtlich, dass die bijektive Beziehung zwischen einem normierten Bewertungsprozess $\Psi$ und einem Bewertungsvektor $\Psi_1$ analog für einen positiven normierten Bewertungsprozess $\Psi$ und einen positiven Bewertungsvektor $\Psi_1$ gilt:

$$\Psi = (1, \Psi_1)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{M}^{\perp 1+} \subseteq \mathcal{A}^{+} \leftrightarrow \Psi_1 \in \mathcal{A}_1{}^{+}, \text{ d. h. } \Psi_1 > 0 \wedge (\text{PG}\Psi_1{}^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}).$$

2) (LOP) $\Leftrightarrow$ $S_0 \in D(\mathbb{R}^K)$: Für diese Charakterisierung des LOP werden zwei Beweise angegeben. Einmal wird von der Existenz eines normierten $L^*$-Urbilds $\Psi$ von $b$ ausgegangen und das andere Mal von der Existenz eines normierten $\mathcal{M}$-Normalenvektors $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1}$.

a) 1. Beweis: Im Mehrperiodenmodell ist das LOP nach Abschnitt 3.3.3 äquivalent zur Existenz eines

$$\Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1} \subseteq \mathcal{A} = L^{*-1}(\{b\}),$$

also eines normierten $L^*$-Urbilds $\Psi$ von $b$. Speziell im Einperiodenmodell bedeutet somit das LOP die Existenz eines $\Psi = (\Psi_0, \Psi_1)^{\mathsf{T}} = (1, \Psi_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit

$$\begin{pmatrix} S_0^{\delta} & 0 \\ -S_0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} = L^{\mathsf{T}} \Psi = b = \begin{pmatrix} S_0^{\delta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw. in der Komponentenschreibweise

$$S_0^{\delta} \cdot 1 = S_0^{\delta},$$
$$-S_0 \cdot 1 + D\Psi_1 = 0,$$

also die Existenz eines $\Psi = (\Psi_0, \Psi_1)^{\mathsf{T}} = (1, \Psi_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit

$$L'^{\mathsf{T}}\Psi = (-S_0, D)\Psi = 0$$

bzw. mit

$$\Psi_0 = 1 \ \wedge \ D\Psi_1 = S_0 .$$

Im Einperiodenmodell ist daher das LOP äquivalent zur Existenz

- eines normierten $L^{\mathsf{T}}$-Urbilds $\Psi = (1, \Psi_1)^{\mathsf{T}}$ von $b$,
- eines normierten $L'^{\mathsf{T}}$-Urbilds $\Psi = (1, \Psi_1)^{\mathsf{T}}$ von 0 und
- eines $D$-Urbilds $\Psi_1$ von $S_0$.

Aus einem normierten $L^{\mathsf{T}}$-Urbild $\Psi = (\Psi_0, \Psi_1)^{\mathsf{T}} = (1, \Psi_1)^{\mathsf{T}}$ von $b$ erhält man mit der Komponente $\Psi_1$ ein $D$-Urbild $\Psi_1$ von $S_0$ und umgekehrt kann ein $D$-Urbild $\Psi_1$ von $S_0$ allein mit der Hinzunahme von $\Psi_0 = 1$ zu einem normierten $L^{\mathsf{T}}$-Urbild $\Psi = (1, \Psi_1)^{\mathsf{T}}$ von $b$ ergänzt werden. Das hier auftretende Gleichungssystem (GS$\Psi A_0$) $D\Psi_1 = S_0$ für den Bewertungsvektor $\Psi_1$ wird auch schon in Abschnitt 3.4.3 bei der Berechnung eines Bewertungsprozesses $\Psi$ für den Zeitpunkt $t = 1$ angegeben.

b) 2. Beweis: Die Charakterisierung des LOP im Einperiodenmodell durch die Inzidenz $S_0 \in D(\mathbb{R}^K)$ bzw. die Existenz eines $D$-Urbilds $\Psi_1$ von $S_0$ ergibt sich auch daraus, dass allgemein im Mehrperiodenmodell nach Abschnitt 3.3.3 das LOP äquivalent ist zur Existenz eines Prozesses $\Psi \in \mathcal{M}^{\perp 1}$, d. h. eines auf $X_0 = 1$ normierten Normalenvektors $\Psi$ von $\mathcal{M}$. Es gilt somit im Einperiodenmodell

$$\begin{aligned}
\text{(LOP)} &\Leftrightarrow \exists\, \Psi \in \mathcal{M}^{\perp} = \ker L'^{\mathsf{T}} \text{ mit } \Psi_0 = 1 \\
&\Leftrightarrow \exists\, \Psi \in \mathbb{R}^{1+K} \text{ mit } \Psi_0 = 1 \ \wedge \ L'^{\mathsf{T}}\Psi = (-S_0, D)\Psi = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists\, \Psi \in \mathbb{R}^{1+K} \text{ mit } \Psi_0 = 1 \ \wedge \ D\Psi_1 = S_0 \\
&\Leftrightarrow \exists\, \Psi_1 \in \mathbb{R}^{K} \text{ mit } D\Psi_1 = S_0 \\
&\Leftrightarrow \exists\, \Psi_1 \in D^{-1}(\{S_0\}) \\
&\Leftrightarrow S_0 \in D(\mathbb{R}^K) = \operatorname{Im} D.
\end{aligned}$$

Im Einperiodenmodell ist also das LOP äquivalent zur Existenz

- eines normierten $\mathcal{M}$-Normalenvektors $\Psi$,
- eines normierten $L'^{\mathsf{T}}$-Urbilds $\Psi$ von 0 und
- eines $D$-Urbilds $\Psi_1$ von $S_0$.

Aus einem **normierten $\mathcal{M}$-Normalenvektor** $\Psi = (\Psi_0, \Psi_1)^{\mathsf{T}} = (1, \Psi_1)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{M}^{\perp 1}$ erhält man mit dessen Komponente $\Psi_1$ ein $D$-**Urbild** $\Psi_1$ von $S_0$ und umgekehrt kann ein $D$-Urbild $\Psi_1$ von $S_0$ allein durch die Hinzunahme von $\Psi_0 = 1$ zu einem normierten $\mathcal{M}$-Normalenvektors $\Psi = (\Psi_0, \Psi_1)^{\mathsf{T}} = (1, \Psi_1)^{\mathsf{T}}$ ergänzt werden.

**Anmerkung** zur Charakterisierung der Arbitragefreiheit in Abschnitt 6.2.3:
Im vorhergehenden Beweis 2a ist ersichtlich, dass die bijektive Beziehung zwischen einem normierten $L^*$-Urbild $\Psi$ von $b$ und einem $D$-Urbild $\Psi_1$ von $S_0$ analog für ein positives normiertes $L^*$-Urbild $\Psi$ von $b$ und ein positives $D$-Urbild $\Psi_1$ von $S_0$ gilt:

$$\Psi = (1, \Psi_1)^{\mathsf{T}} \in L^{*-1}(\{b\}) \cap \{X > 0\} \leftrightarrow \Psi_1 \in D^{-1}(\{S_0\}) \cap \{X_1 > 0\}.$$

Weiter ist in Beweis 2b ersichtlich, dass die bijektive Beziehung zwischen einem normierten $\mathcal{M}$-Normalenvektor $\Psi$ und einem $D$-Urbild $\Psi_1$ von $S_0$ analog für einen positiven normierten $\mathcal{M}$-Normalenvektor $\Psi$ und ein positives $D$-Urbild $\Psi_1$ von $S_0$ gilt:

$$\Psi = (1, \Psi_1)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{M}^{\perp 1+} \leftrightarrow \Psi_1 \in D^{-1}(\{S_0\}) \cap \{X_1 > 0\}.$$

Außerdem wird in den Beweisteilen 2a und 2b deutlich, dass die Existenz eines positiven normierten $L^*$-Urbild $\Psi$ von $b$ bzw. eines positiven normierten $\mathcal{M}$-Normalenvektor $\Psi$ äquivalent ist zur Existenz eines positiven normierten $L'^{\mathsf{T}}$-Urbilds $\Psi$ von 0.

3) (LOP) $\Leftrightarrow \ker D^{\mathsf{T}} \subseteq \ker S_0^{\mathsf{T}} \Leftrightarrow \ker L' = \ker D^{\mathsf{T}}$:
Aufgrund der obigen Charakterisierung des LOP durch die Inzidenz $S_0 \in \operatorname{Im} D$ und wegen der Darstellung des Raums $\mathbb{R}^N$ der Portfoliovektoren $h_1$ als direkte Summe

$$\mathbb{R}^N = \operatorname{Im} D \oplus \ker D^\top, \qquad \operatorname{Im} D = (\ker D^\top)^\perp,$$

der orthogonalen Komplemente Im $D$ und ker $D^\top$ ist das LOP auch äquivalent zur Relation

$$S_0 \perp \ker D^\top$$

bzw. zur Inklusion

$$\ker D^\top \subseteq [S_0]^\perp = \ker S_0^\top$$

und damit zur Übereinstimmung

$$\ker L' = \ker (-S_0^\top, D^\top)^\top = \ker S_0^\top \cap \ker D^\top = \ker D^\top. \qquad \square$$

**Anmerkung zum mathematischen Sonderfall** $S_0 = (0,\ldots,0)^\top = 0 \in \mathbb{R}^N$:
Die mathematischen Sonderfälle $S_0 = 0$ und $U_1 := D^\top S_0 = 0$ werden im nachfolgenden Satz 6.3 ausgeschlossen, um die Äquivalenz des LOP mit dem Auftreten des trivialen Durchschnitts der Unterräume $\mathcal{U}_1 := \operatorname{lin} U_1$ und $\mathcal{M}_1$ zu sichern. Oben wurde bereits gezeigt, dass das LOP äquivalent ist zur Auflösbarkeit des Gleichungssystems $D\Psi_1 = S_0$ nach $\Psi_1$. Im Sonderfall $S_0 = 0$ gibt es für dieses Gleichungssystem stets die triviale Lösung $\Psi_1 = 0 \in \mathbb{R}^K$, die aber als Bewertungsvektor für alle dupliz ierbaren Zahlungsprofile $X_1 = D^\top h_1 \in D^\top(\mathbb{R}^N)$ nur den Preis $\pi_1(X_1) = \Psi_1^\top X_1 = \Psi_1^\top D^\top h_1 = S_0^\top h_1 = 0$, also nur eine nichtssagende Bewertung liefern würde und für einen Vergleich der Zahlungsprofile $X_1$ nicht verwendet werden kann. Eine nichttriviale Lösung $\Psi_1$ von $D\Psi_1 = 0$ würde nur dann existieren, wenn die Spalten $S_1^\delta(\omega_k)$ $(k = 1,\ldots,K)$ der Matrix $D$ linear abhängig sind. $\triangle$

## Äquivalente Formulierungen des LOP

Zunächst erhält man nach den Ergebnissen des Mehrperiodenmodells in den Abschnitten 3.3.2 und 5.3.1, dass insbesondere auch im Einperiodenmodell die folgenden Formulierungen des Law of One Price zueinander äquivalent sind:

(LOP) Für jedes $X = (X_0,X_1)^\top \in L(\mathbb{R}^{2N})$ $(\subseteq \mathbb{R}^{1+K})$ gilt:
$v_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0$ ist konstant $\forall\, h = (h_0,h_1)^\top \in L^{-1}(\{X\})$ $(\subseteq \mathbb{R}^{2N})$.

(LOP1) Für jedes $X = (X_0,X_1)^\top \in L(\mathbb{R}^{2N})$ gilt:
$r_0(h) = S_0^\top h_1$ ist konstant $\forall\, h = (h_0,h_1)^\top \in L^{-1}(\{X\})$.

(LOPsf) Für jedes $X = (0,X_1)^\top \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ $(\subseteq \mathbb{R}^{1+K})$ gilt:
$v_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0$ ist konstant $\forall\, h \in L^{-1}(\{X\})$ $(\subseteq \mathbb{R}^{2N})$.

(LOPsfT) Für jedes $X_1 \in V_1(\mathcal{H}_N^{sf})$ $(\subseteq \mathbb{R}^K;\ \mathcal{H}_N^{sf} = \mathbb{R}^{2N} \cap \{L_0(h) = 0\})$ gilt:
$v_0(h) = S_0^{\delta\top} h_0$ ist konstant $\forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap V_1^{-1}(\{X_1\})$.

(LOP1sf) Für jedes $X = (0,X_1)^\top \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ gilt:
$r_0(h) = S_0^\top h_1$ ist konstant $\forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap V_1^{-1}(\{X_1\})$.

(LOP1sfT) Für jedes $X_1 \in V_1(\mathcal{H}_N^{sf})$ gilt:
$r_0(h) = S_0^\top h_1$ ist konstant $\forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap V_1^{-1}(\{X_1\})$.

In Abschnitt 6.2.1 wurden bei der Begründung der Äquivalenz von (DP) und (DP$D^\top$) noch zwei Aussagen 1) und 2) über die Beziehung der $L$-Duplikationsstrategien $h$ zu den $D^\top$-Duplikationsstrategien $h_1$ festgehalten. Damit kann nun im Einperiodenmodell auch noch die Äquivalenz von (LOP1) zu einer Formulierung (LOP$D^\top$) des Law of One Price für die $D^\top$-duplizierbaren Zahlungsprofile $X_1 \in D^\top(\mathbb{R}^N)$ bewiesen werden:

(LOP$D^{\mathsf{T}}$) Für jedes $X_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ $(\subseteq \mathbb{R}^K)$ gilt:
$S_0{}^{\mathsf{T}} h_1$ ist konstant $\forall\, h_1 \in (D^{\mathsf{T}})^{-1}(\{X_1\})$ $(\subseteq \mathbb{R}^N)$.

**Beweis** für die Äquivalenz von (LOP1) zu (LOP$D^T$):
„(LOP$D^{\mathsf{T}}$) ⇒ (LOP1)“: Für alle $L$-Duplikationsstrategien $h = (h_0,h_1)^{\mathsf{T}}$ eines beliebig vorgegebenen $X = (X_0,X_1)^{\mathsf{T}} \in L(\mathbb{R}^{2N})$ sind nach der Anmerkung zur Äquivalenz von (DP) und (DP$D^{\mathsf{T}}$) in Abschnitt 6.2.1 die Komponenten $h_1$ jeweils $D^{\mathsf{T}}$-Duplikationsstrategien von $X_1$. Bei gültigem Gesetz (LOP$D^{\mathsf{T}}$) ist dann der Wert $S_0{}^{\mathsf{T}} h_1$ konstant für alle $D^{\mathsf{T}}$-Duplikationsstrategien $h_1$ von $X_1$ und damit auch für alle $L$-Duplikationsstrategien $h = (h_0,h_1)^{\mathsf{T}}$ von $X$. Es gilt also auch (LOP1).

„(LOP1) ⇒ (LOP$D^{\mathsf{T}}$)“: 1. Beweis mit der Voraussetzung (AWS$^{\delta}$): Für beliebig vorgegebenes $X_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ kann jede $D^{\mathsf{T}}$-Duplikationsstrategie $h_1$ von $X_1$ mit einer geeignet gewählten Komponente $h_0$ (nämlich einer Lösung von $S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = S_0{}^{\mathsf{T}} h_1 + X_0 = S_0{}^{\mathsf{T}} h_1$, $X_0 = 0$, Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) $S_0^{\delta} \neq 0$) zu einer $L$-Duplikationsstrategie $h = (h_0,h_1)^{\mathsf{T}}$ von $X = (0,X_1)^{\mathsf{T}}$ ergänzt werden. Bei gültigem (LOP1) (oder LOPsf) ist der Wert $S_0{}^{\mathsf{T}} h_1$ konstant für alle $L$-Duplikationsstrategien $h$ von $X = (0,X_1)^{\mathsf{T}} = Lh \in L(\mathbb{R}^{2N})$ und damit auch für alle $D^{\mathsf{T}}$-Duplikationsstrategien $h_1$ von $X_1$. Somit folgt auch das Gesetz (LOP$D^{\mathsf{T}}$).
2. Beweis ohne die Voraussetzung (AWS$^{\delta}$): Bei gültigem (LOP1) bzw. (LOP) existiert nach Satz 6.1 (siehe Beweisteil 1) ein Bewertungsvektor $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit seinen Preisgleichungen (PG$\Psi_1{}^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}}$). Damit ist für alle $D^{\mathsf{T}}$-Duplikationsstrategien $h_1$ eines fest vorgegebenen $X_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ ($D^{\mathsf{T}} h_1 = X_1$) der $S_0{}^{\mathsf{T}}$-Wert konstant und somit (LOP$D^{\mathsf{T}}$) gültig:

$$S_0{}^{\mathsf{T}} h_1 = \Psi_1{}^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}} h_1 = \Psi_1{}^{\mathsf{T}} X_1 \text{ konst. } \forall\, h_1 \in (D^{\mathsf{T}})^{-1}(\{X_1\}). \qquad \square$$

**Preisdefinition für die $D^{\mathsf{T}}$-duplizierbaren Zahlungsprofile**
Aufgrund der Äquivalenz von (LOP1sf) und (LOP$D^{\mathsf{T}}$) kann dann der **Preis** $\pi(X_1)$ des zum Zeitpunkt $T = 1$ auftretenden $D^{\mathsf{T}}$-duplizierbaren Zahlungsprofils

$$X_1 = D^{\mathsf{T}} h_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$$

in Übereinstimmung mit dem Preis

$$\pi(\hat{X}) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = S_0{}^{\mathsf{T}} h_1 + X_0 = S_0{}^{\mathsf{T}} h_1$$

des $L$-duplizierbaren endfälligen Zahlungsprofils

$$\hat{X} = (0,X_1)^{\mathsf{T}} = Lh \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$$

(mit $h \in \mathcal{H}_N^{sf} = \mathbb{R}^{2N} \cap \{L_0(h) = 0\}$, $0 = X_0 = L_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 - S_0{}^{\mathsf{T}} h_1$, $X_1 = L_1(h) = D^{\mathsf{T}} h_1$) mittels einer beliebigen $D^{\mathsf{T}}$-Duplikationsstrategie $h_1 \in \mathbb{R}^N$ von $X_1$ bzw. $L$-Duplikationsstrategie $h \in \mathcal{H}_N^{sf}$ von $\hat{X}$ durch den Reinvestitionswert $S_0{}^{\mathsf{T}} h_1$ definiert werden:

$$\pi(X_1) := \pi(\hat{X}) = S_0{}^{\mathsf{T}} h_1 \quad \text{für } X_1 = D^{\mathsf{T}} h_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N).$$

Bei bekanntem Bewertungsvektor $\Psi_1 \in \mathcal{A}_1 = D^{-1}(\{S_0\})$ erhält man nach obiger Preisgleichung (PG$\Psi_1{}^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}}$) den Preis $\pi(\hat{X})$ von $\hat{X} = (0,X_1)^{\mathsf{T}} \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ und den Preis $\pi(X_1)$ von $X_1 = D^{\mathsf{T}} h_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ auch als das Skalarprodukt von $\Psi_1$ und $X_1$, ohne eine Duplikationsstrategie berechnen zu müssen:

$$\pi(X_1) = \pi(\hat{X}) = S_0{}^{\mathsf{T}} h_1 = \Psi_1{}^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}} h_1 = \Psi_1{}^{\mathsf{T}} X_1 .$$

Demnach kann das Gleichungssystem (PG$\Psi_1{}^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}}$) als das System der **Preisgleichungen** für die mittels $L$ duplizierbaren endfälligen Zahlungsprofile $\hat{X} = (0,X_1)^{\mathsf{T}} = Lh \in L(\mathcal{H}_N^{sf}) \subseteq \mathbb{R}^{1+K}$ bzw. für die mittels $D^{\mathsf{T}}$ duplizierbaren Zahlungsprofile $X_1 = D^{\mathsf{T}} h_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathbb{R}^K$ an-

gesehen und der Vektor $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ als **Bewertungsvektor** für die Zahlungsprofile $X_1 \in D^\top(\mathbb{R}^N)$ bezeichnet werden.

Im Einperiodenmodell bedeutet die Existenz eines Bewertungsvektors $\Psi_1 \in \mathcal{A}_1$ die Gültigkeit beispielsweise von LOP$D^\top$ und LOPsfT für die sf-duplizierbaren Zahlungsprofile $X_1 \in V_1(\mathcal{H}_N^{sf}) = D^\top(\mathbb{R}^N)$ bzw. $X = (0,X_1)^\top \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ und auch die Gültigkeit des LOP für die $L$-duplizierbaren Zahlungsprofile $X = (X_0,X_1)^\top \in L(\mathbb{R}^{2N})$. Dabei kann der Bewertungsvektor $\Psi_1 \in \mathcal{A}_1 = D^{-1}(\{S_0\})$ allein durch die Hinzunahme der einen Komponente $\Psi_0 = 1$ zu einem Bewertungsprozess $\Psi = (1,\Psi_1)^\top$ für die $L$-duplizierbaren Zahlungsprofile $X \in \mathbb{R}^{1+K}$ ergänzt werden.
In einem echten Mehrperiodenmodell mit der Laufzeit $T \geq 2$ ist diese Aussage nicht mehr richtig, da nach Abschnitt 5.3.13 aus einem Bewertungsvektor $Y_T \in \mathcal{A}_T$ im Allgemeinen durch die Hinzunahme von beliebigen $\mathcal{F}_t$-messbaren reellwertigen Zustandsfunktionen $Y_t$ ($t = 0,\ldots,T\text{-}1$) nur ein sog. sf-Bewertungsprozess $Y \in \mathcal{M}(T)^\perp \cap \{X_T \in \mathcal{A}_T\}$ für die endfälligen sf-duplizierbaren Zahlungsprofile und nicht ein Bewertungsprozess für die $L$-duplizierbaren Zahlungsprofile gewonnen werden kann. Aber dennoch folgt aus der Existenz eines Bewertungsvektors $Y_T \in \mathcal{A}_T$ bzw. der Gültigkeit des LOPsfT auch die Gültigkeit des allgemeinen LOP für die Zahlungsprofile $X \in L(\mathcal{H}_N)$ (siehe Abschnitt 5.3.2).

**Vielfalt der Bewertungsvektoren im Einperiodenmodell mit LOP**
Analog zur Existenz und Vielfalt der Bewertungsprozesse und Diskontierungsprozesse für die allgemeinen Zahlungsprofile $X \in \mathcal{W}$ (siehe Abschnitte 3.5.1 und 3.6.1 mit Satz 3.8 und Satz 3.9) und zur Existenz und Vielfalt der Bewertungsvektoren und der Diskontvektoren für die endfälligen sf-duplizierbaren Zahlungsprofile $X \in \mathcal{W}(T)$ (Abschnitte 5.3.8 und 5.3.10) erhält man hier im Einperiodenmodell entsprechende Aussagen.

Für das Mehrperiodenmodell ($T \in \mathbb{N}$) der allgemeinen Zahlungsprofile $X \in \mathcal{W}$ findet man in Abschnitt 3.3.3 die Charakterisierung des LOP durch die Existenz eines Bewertungsprozesses $\Psi$ mit den Preisgleichungen (PG$\Psi$) für die $L$-duplizierbaren Zahlungsprofile $X \in L(\mathcal{H}_N)$ und durch die Existenz eines normierten $\mathcal{M}$-Normalenvektors $\Psi$:

$$\begin{aligned} \text{LOP} &\Leftrightarrow \mathcal{A} = \{\Psi \in \mathcal{W} : (\text{PG}\Psi)\ \Psi^\top L(h) = v_0(h)\ \forall\ h \in \mathcal{H}_N\} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}^{\perp 1} = \mathcal{M}^\perp \cap \{X_0 = 1\} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Für die Menge $\mathcal{A}$ erhält man im Abschnitt 3.3.3 noch die Darstellungen

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} = L^{*-1}(\{b\}), \\ &\mathcal{A} = \mathcal{M}^{\perp 1} \quad \text{im Fall i) (AWS}^\delta\text{)}\ S_0^\delta \neq 0, \\ &\mathcal{A} = \mathcal{M}^\perp\ (\neq \emptyset) \quad \text{im Sonderfall ii)}\ S_0^\delta = 0. \end{aligned}$$

Für das Mehrperiodenmodell der endfälligen Zahlungsprofile $X \in \mathcal{W}(T)$ findet man die Charakterisierung des zu LOP äquivalenten LOPsfT durch die Existenz eines Bewertungsvektors $\Psi_T$ mit den Preisgleichungen (PG$\Psi_T$) für die sf-duplizierbaren Zahlungsprofile $X_T \in \mathcal{V}_T = V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ in Abschnitt 5.3.3. Demnach gilt das LOPsfT in $\mathcal{V}_T$ genau dann, wenn die Menge $\mathcal{A}_T$ der Bewertungsvektoren nichtleer ist:

$$\text{LOPsfT} \Leftrightarrow \mathcal{A}_T = \{\Psi_T \in \mathbb{R}^{\Omega} : (\text{PG}\Psi_T)\ \Psi_T^{\mathsf{T}} V_T(h) = r_0(h)\ \forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf}\} \neq \emptyset.$$

Für die Menge $\mathcal{A}_T$ erhält man in Abschnitt 5.3.8 noch die Darstellung

$$\mathcal{A}_T = \vartheta_T + \ker V_T^{sf*} \qquad (\vartheta_T \in \mathcal{A}_T \subseteq \mathcal{M}_T{}^{\perp})$$

und unter der Voraussetzung (ZVU) die Darstellungen

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_T &= \mathcal{M}_T{}^{\perp\kappa_0} = \mathcal{M}_T{}^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = \kappa_0\} \\ &= V_T^{sf*-1}(\{c\}) \qquad (c := V_T^{sf*}(Y_T) \text{ mit } Y_T \in \mathcal{M}_T{}^{\perp\kappa_0}).\end{aligned}$$

Speziell im Einperiodenmodell ($T = 1$) sind nach Beweisteil 12a des folgenden Hilfssatzes 6.2 für $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ die beiden Gleichungssysteme $(\text{PG}\Psi_1) \equiv (\text{PG}\Psi_1{}^{\mathsf{T}} V_1)$ und $(\text{PG}\Psi_1{}^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}})$ zueinander äquivalent:

$$\begin{aligned}&(\text{PG}\Psi_1) \equiv (\text{PG}\Psi_1{}^{\mathsf{T}} V_1) \qquad \Psi_1{}^{\mathsf{T}} V_1(h) = v_0(h) = r_0(h)\ \forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf} = \{h \in \mathbb{R}^{2N} : L_0(h) = 0\} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \\ &(\text{PG}\Psi_1{}^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}}) \qquad\qquad \Psi_1{}^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}} h_1 = S_0{}^{\mathsf{T}} h_1\ \forall\, h_1 \in \mathbb{R}^N.\end{aligned}$$

Demzufolge wird die **Menge $\mathcal{A}_1$ der Bewertungsvektoren** für die mittels $V_1$ sf-duplizierbaren bzw. für die $D^{\mathsf{T}}$-duplizierbaren Zahlungsprofile $X_1 \in \mathcal{V}_1 = V_1(\mathcal{H}_N^{sf}) = D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ (Begründung von $\mathcal{V}_1 = D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ in Abschnitt 6.2.1) beschrieben durch

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= \{\Psi_1 \in \mathbb{R}^K : (\text{PG}\Psi_1{}^{\mathsf{T}} V_1) \quad \Psi_1{}^{\mathsf{T}} V_1(h) = r_0(h) \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf}\} \\ &= \{\Psi_1 \in \mathbb{R}^K : (\text{PG}\Psi_1{}^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}}) \quad \Psi_1{}^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}} h_1 = S_0{}^{\mathsf{T}} h_1 \quad \forall\, h_1 \in \mathbb{R}^N\}.\end{aligned}$$

Gemäß der oben in Beweisteil 1 bewiesenen Charakterisierung des LOP durch die Existenz eines Bewertungsvektors $\Psi_1$ mit den Preisgleichungen $(\text{PG}\Psi_1{}^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}})$ ist das LOP und auch jede der weiteren unten noch extra für das Einperiodenmodell formulierten Versionen dieses Gesetzes genau dann gültig, wenn die Menge $\mathcal{A}_1$ der Bewertungsvektoren nichtleer ist:

$$\text{LOP} \Leftrightarrow \mathcal{A}_1 \neq \emptyset.$$

Im Einperiodenmodell wird das LOP also wie im Mehrperiodenmodell der endfälligen Zahlungsprofile charakterisiert durch die Existenz eines Bewertungsprozesses ($\mathcal{A} \neq \emptyset$) und durch die Existenz eines Bewertungsvektors ($\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$).

Nach Abschnitt 5.3.8 erhält man für $\mathcal{A}_1$ die Darstellung als Minkowski-Summe eines fest gewählten Bewertungsvektors $\vartheta_1 \in \mathcal{A}_1$ und des linearen Unterraums $\ker V_1^{sf*} = \ker D$ ($\subseteq \mathcal{M}_1{}^{\perp}$), wobei diese Darstellung auch ohne die Voraussetzung $(\text{AWS}^{\delta})$ gilt.
Außerdem ist $\mathcal{A}_1$ nach Beweisteil I „24) $D\Psi_1 = S_0 \Leftrightarrow$ 11) $(\text{PG}\Psi_1{}^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}})$" des nachfolgenden Satzes 6.3 auch die $D$-Urbildmenge von $S_0$: $\mathcal{A}_1 = D^{-1}(\{S_0\}) \subseteq D^{-1}([S_0]) = \mathcal{M}_1{}^{\perp}$.
Weiter folgt mit der **Voraussetzung** (ZVU) von Abschnitt 5.3.5 hier für $T = 1$:

$(\text{AWS}^{\delta})$ $\quad S_0^{\delta} \neq 0 = (0,\ldots,0)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^N$ [15] $\wedge$

$(\text{AWS})$ $\quad S_0 \neq 0 = (0,\ldots,0)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^N \wedge$

[15] Die Voraussetzung $(\text{AWS}^{\delta})$ $S_0^{\delta} \neq 0$ bzw. $S_0^{\delta} = S_0 + \delta_0 \gneq 0$ folgt wegen $\delta_0 \geq 0$ auch schon aus der Voraussetzung (AWS) $S_0 \neq 0$ bzw. $S_0 \gneq 0$.

$$(\text{DPsfT}\mathbf{1}_\Omega^+) \quad \mathbf{1}_\Omega = V_1(k) \in \mathcal{V}_1 \text{ mit } k \in \mathcal{H}_N^{sf} = \mathbb{R}^{2N} \cap \{L_0(h) = 0\}$$
$$\text{und } \kappa_0 := v_0(k) = r_0(k) > 0$$

oder mit der stärkeren Voraussetzung[16] der Existenz eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T = B_1$, d. h. hier eines insgesamt deterministischen Numéraires $B = (B_0,B_1)^\mathsf{T}$, nach Abschnitt 5.3.8 für die Menge $\mathcal{A}_1$ noch die Übereinstimmung mit dem affinen Unterraum $\mathcal{M}_1^{\perp\kappa_0}$. Diese Übereinstimmung ergibt sich auch aus der Unterraumidentität $D^{-1}(\{S_0\}) = \mathcal{M}_1^{\perp\kappa_0}$ nach dem folgenden Hilfssatz 6.2, 12 unter der Voraussetzung (ZVU).

Außerdem ergibt sich unter der Voraussetzung (ZVU) bei gültigem LOP nach Hilfssatz 5.11, I, 11 von Abschnitt 5.3.6 ($T = 1$) aus der Unterraumidentität $V_1^{sf*-1}(\{c\}) = \mathcal{M}_1^{\perp\kappa_0}$ ($c = (c_0,c_1)^\mathsf{T} := V_1^{sf*}(Y_1) \in \mathcal{H}_N^{sf}$ mit $Y_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp\kappa_0}$) für $\mathcal{A}_1$ noch eine weitere Urbilddarstellung.

**Darstellungen der Menge $\mathcal{A}_1$ der Bewertungsvektoren:**

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{G}_1 + \ker V_1^{sf*} = \mathcal{G}_1 + \ker D \ (\subseteq \mathcal{M}_1^\perp) \qquad \text{(aff. Unterr. m. add. Zerleg.)}$$
$$\mathcal{A}_1 = D^{-1}(\{S_0\}) \ (\subseteq \mathcal{M}_1^\perp) \qquad (D\text{-Urbild-Darstellung}).$$

Unter der Voraussetzung (ZVU) gilt noch

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{M}_1^{\perp\kappa_0} = \mathcal{M}_1^\perp \cap \{\kappa(X_1) = \kappa_0\} \qquad \text{(Gleichungsdarstellung)}$$
$$= V_1^{sf*-1}(\{c\}) \qquad (V_1^{sf*}\text{-Urbild-Darstellung}).$$

Die Berechnung eines Bewertungsvektors $\Psi_1$ erfolgt durch die Lösung des linearen Gleichungssystems $D\Psi_1 = S_0$ mit der $N \times K$-Koeffizientenmatrix $D$. Die Menge $\mathcal{A}_1$ aller Bewertungsvektoren $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ ist als Lösungsmenge[17] $D^{-1}(\{S_0\})$ des inhomogenen linearen Gleichungssystems $D\Psi_1 = S_0$ ein affiner Unterraum des $\mathbb{R}^K$, der gegeben ist durch die oben bereits angegebene Minkowski-Summe

$$\mathcal{A}_1 = \Psi_1\text{‘} + \ker D$$

mit einem speziellen Bewertungsvektor $\Psi_1$‘ und dem Kern $\ker D = \{DX_1 = 0\}$ der linearen Abbildung $D : \mathbb{R}^K \longrightarrow \mathbb{R}^N$. Die zu diesem nichtleeren affinen Unterraum gehörige Richtung (der Translationsunterraum mit den Verbindungsvektoren des affinen Unterraums) ist der lineare Unterraum $\ker D$. Demnach gilt folgende Aussage hinsichtlich der Maximalanzahl affin unabhängiger[18] Bewertungsvektoren (siehe entsprechende Aussage in Abschnitt 5.3.8 für das Mehrperiodenmodell der endfälligen Zahlungsprofile):

**Die Maximalzahl affin unabhängiger Bewertungsvektoren** im Einperiodenmodell mit LOP ist $p + 1$, wenn $p := \dim \ker D = K$ - Rang $D$ die Dimension des Unterraums $\ker D$ ist.

**Charakterisierung eines vollständigen Einperiodenmodells mit LOP**

In einem Einperiodenmodell mit gültigem LOP ist eine Lösung $\Psi_1$ von $D\Psi_1 = S_0$, d. h. ein

$$\Psi_1 \in \Psi_1\text{‘} + \ker D$$

---

[16] Dass die Existenz eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ auch die Bedingung (ZVU) beinhaltet, wird in Abschnitt 5.3.5 bei den Ausführungen zum Preis von $\mathbf{1}_\Omega$ gezeigt.

[17] Literatur zur Struktur der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems: Wagner (1981), S. 99–104. Der Rang der Koeffizientenmatrix ist definiert durch die Dimension des Spaltenraums.

[18] Literatur zur Definition der affinen Unabhängigkeit, linearen Unabhängigkeit, einer Basis und der Dimension eines Vektorraums: Lexikon der Mathematik, Bd. 1 (2000), S. 29, 169, 419, Bd. 3 (2001), S.287f.

mit einer speziellen Lösung $\Psi_1$‘ von $D\Psi_1$‘ $= S_0$, genau dann eindeutig bestimmt, wenn $p := \dim \ker D = 0$, also nach der obigen Charakterisierung der Vollständigkeit (VS) in Abschnitt 6.2.1 das Marktmodell auch noch vollständig ist:[19]

$$\begin{aligned}(\text{LOP}) \wedge (\text{VS}) \quad &\Leftrightarrow \exists_1\, \Psi_1 \in \mathbb{R}^K \text{ mit } D\Psi_1 = S_0\\ &\Leftrightarrow |\mathcal{A}_1| = 1.\end{aligned}$$

Eine grafische Darstellung der Unterraumstrukturen in den Räumen $\mathbb{R}^{2N}$ und $\mathbb{R}^{1+K}$ bzw. in $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ für ein vollständiges Marktmodell mit gültigem LOP wird in Abbildung 6.2 b in Abschnitt 6.1 und Abbildung 6.6 b in Abschnitt 6.2.2 gegeben.

**Spezielle Unterräume von $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$**

Zur Formulierung und Begründung weiterer Charakterisierungen der Begriffe Law of One Price und Arbitragefreiheit in den niedrigerdimensionalen Räumen $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{R}^K$ und $\mathbb{R}$ werden noch die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^N$ bzw. $\mathbb{R}^K$ und Orthanten von $\mathbb{R}^K$ verwendet und der Hilfssatz 6.2 mit Beziehungen für diese Unterräume hergeleitet:

$$\begin{aligned}
&[S_0] := \text{lin}\,\{S_0\}, && [S_0]^\perp = \ker S_0^\mathsf{T};\\
&\mathcal{M}_1 := D^\mathsf{T}(\ker S_0^{\,\mathsf{T}}) \subseteq D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N), && \mathcal{M}_1^\perp \supseteq D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)^\perp = \ker D,\\
&\mathcal{U}_1 := [U_1] = \text{lin}\,\{U_1\} \subseteq D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) \text{ mit } U_1 := D^\mathsf{T}S_0, && \mathcal{U}_1^\perp \supseteq D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)^\perp = \ker D,\\
&\mathbb{R}^K_{\gneq 0} = \{X_1 \in \mathbb{R}^K : X_1 \geq 0 \wedge X_1 \neq 0\}, && \mathbb{R}^K_{>0} = \{X_1 \in \mathbb{R}^K : X_1 > 0\}.
\end{aligned}$$

Im nachfolgenden Satz 6.3 wird dabei noch die mathematisch-technische Voraussetzung

$$U_1 := D^\mathsf{T}S_0 \neq 0$$

bzw. $S_0 \notin \ker D^\mathsf{T}$ verwendet, um die Äquivalenz des LOP mit dem Auftreten des trivialen Durchschnitts der Unterräume $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{M}_1$ beweisen zu können (siehe Beweisteil C von Satz 6.3). Eine alternative Aussage könnte auch den eindimensionalen Unterraum $\mathcal{V}_0 = V_0(\mathcal{H}_N^{sf}) = \mathcal{E}_1 = \text{lin}\,\mathbf{1}_\Omega$ (Voraussetzung (AWS$^\delta$)) anstelle von $\mathcal{U}_1$ verwenden.

**Hilfssatz 6.2 Lagebeziehungen einiger Unterräume von $\mathbb{R}^K$ und $\mathbb{R}^N$**

Im Marktmodell sei für die Aussage 7) die mathematisch-technische Voraussetzung

(AWS) $\quad S_0 \neq 0 = (0,\ldots,0)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^N$

erfüllt. Für die Aussage 11) sei die Voraussetzung

(DPsfT$\mathbf{1}_\Omega$+) $\quad \mathbf{1}_\Omega = D^\mathsf{T}k_1$ mit $k_1 \in \mathbb{R}^N$ und $\kappa_0 := S_0^\mathsf{T}k_1 > 0$

von Abschnitt 5.3.5 gesichert. Für die Aussage 12) seien (AWS), (AWS$^\delta$), (DPsfT$\mathbf{1}_\Omega$+), also insgesamt insgesamt die Voraussetzung (ZVU) oder spezieller die Voraussetzung eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_1$ gesichert. Für die oben angegebenen Unterräume in $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ gelten dann die folgenden Beziehungen:

1) $\mathcal{U}_1^\perp = D^{-1}([S_0]^\perp)$
2) $\ker D \subseteq \mathcal{U}_1^\perp$
3) $D(\mathcal{U}_1^\perp) = [S_0]^\perp \cap D(\mathbb{R}^K) = \ker S_0^\mathsf{T} \cap D(\mathbb{R}^K)$
4) $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{U}_1 + \mathcal{M}_1$
5) $D^{-1}([S_0]) = \mathcal{M}_1^\perp$

[19] Diese Charakterisierung eines vollständigen Marktmodells mit gültigem LOP findet man bei Kremer (2011), S. 31 (Satz 1.29).

6) $D(\mathcal{M}_1^{\perp}) \subseteq [S_0]$

7) $S_0 \notin D(\mathcal{M}_1)$ (Vorauss. $S_0 \neq 0$)

8) $D(\mathbb{R}^K) = D(\mathcal{M}_1) \oplus D(\mathcal{M}_1^{\perp})$

9) $D(\mathcal{M}_1^{\perp}) = [S_0] \cap D(\mathbb{R}^K)$

10) $\ker D = \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \mathcal{U}_1^{\perp}$

11) $\ker D = \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \{\kappa(X_1) = 0\} =: \mathcal{M}_1^{\perp 0}$ (DPsfT$\mathbf{1}_\Omega$+)

12) $D^{-1}(\{S_0\}) = \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \{\kappa(X_1) = \kappa_0\} =: \mathcal{M}_1^{\perp \kappa_0}$ (ZVU)

**Beweis des Hilfssatzes**:

1) $\mathcal{U}_1^{\perp} = D^{-1}([S_0]^{\perp})$:

Für die Hyperebene $\mathcal{U}_1^{\perp}$ gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1^{\perp} &= \{X_1 \in \mathbb{R}^K : U_1^{\mathsf{T}} X_1 = S_0^{\mathsf{T}} D X_1 = 0\}\\ &= \{X_1 \in \mathbb{R}^K : DX_1 \in \ker S_0^{\mathsf{T}}\}\\ &= D^{-1}(\ker S_0^{\mathsf{T}}) = D^{-1}([S_0]^{\perp}).\end{aligned}$$

2) $\ker D \subseteq \mathcal{U}_1^{\perp}$:

Wegen $O \subseteq \ker S_0^{\mathsf{T}} = [S_0]^{\perp}$ gilt auch $\ker D = D^{-1}(O) \subseteq D^{-1}([S_0]^{\perp}) = \mathcal{U}_1^{\perp}$, also stets die Inklusion

$$\ker D \subseteq \mathcal{U}_1^{\perp}.$$

Ein 2. Beweis schließt aus der Inklusion $\mathcal{U}_1 = [U_1] = [D^{\mathsf{T}} S_0] = D^{\mathsf{T}}([S_0]) \subseteq D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ die umgekehrte Inklusion der orthogonalen Komplemente $\ker D = D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)^{\perp} \subseteq \mathcal{U}_1^{\perp}$.

3) $D(\mathcal{U}_1^{\perp}) = [S_0]^{\perp} \cap D(\mathbb{R}^K) = \ker S_0^{\mathsf{T}} \cap D(\mathbb{R}^K)$:

Aufgrund der in 1) bewiesenen Darstellung $\mathcal{U}_1^{\perp} = D^{-1}([S_0]^{\perp})$ gilt die triviale Inklusion $D(\mathcal{U}_1^{\perp}) \subseteq [S_0]^{\perp} \cap D(\mathbb{R}^K)$. Für die umgekehrte nichttriviale Inklusion „$\supseteq$“ schließt man für jedes $h_1 = DX_1 \in [S_0]^{\perp} \cap D(\mathbb{R}^K)$, $X_1 \in \mathbb{R}^K$, die Gleichung

$$0 = S_0^{\mathsf{T}} h_1 = S_0^{\mathsf{T}} D X_1 = U_1^{\mathsf{T}} X_1,$$

also $X_1 \in \mathcal{U}_1^{\perp}$ und $h_1 \in D(\mathcal{U}_1^{\perp})$. Demnach gilt auch die Inklusion $[S_0]^{\perp} \cap D(\mathbb{R}^K) \subseteq D(\mathcal{U}_1^{\perp})$ und insgesamt

$$D(\mathcal{U}_1^{\perp}) = [S_0]^{\perp} \cap D(\mathbb{R}^K).$$

4) $D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{U}_1 + \mathcal{M}_1$:

Aus der Darstellung $\mathbb{R}^N = [S_0] \oplus [S_0]^{\perp}$ folgt mit Hilfssatz 5.10, a von Abschnitt 5.3.6, $D^{\mathsf{T}}([S_0]) = [D^{\mathsf{T}} S_0] = [U_1] = \mathcal{U}_1$ und $D^{\mathsf{T}}([S_0]^{\perp}) = \mathcal{M}_1$ die Inklusion

$$\begin{aligned}D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) &= D^{\mathsf{T}}([S_0]) + D^{\mathsf{T}}([S_0]^{\perp})\\ &= \mathcal{U}_1 + \mathcal{M}_1 \qquad \subseteq D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N),\end{aligned}$$

also die Übereinstimmung $D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{U}_1 + \mathcal{M}_1$. Dabei ist $\mathcal{U}_1 = \operatorname{lin} U_1$ ein eindimensionaler Unterraum, wenn wie in Satz 6.3 $U_1 := D^{\mathsf{T}} S_0 \neq 0$ vorausgesetzt wird.

Anmerkung: Bei der alternativen additiven Zerlegung

$$D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{V}_0 + \mathcal{M}_1$$

mit dem eindimensionalen Unterraum $\mathcal{V}_0 := V_0(\mathcal{H}_N^{sf}) = \mathcal{Z}_1 = \operatorname{lin} \mathbf{1}_\Omega$ werden die Voraussetzungen (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$, (AWS) $S_0 \neq 0$ und $\mathbf{1}_\Omega \in \mathcal{V}_1 = D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ oder die Voraussetzung eines Numéraires $S^N = B > 0$ mit deterministischem $B_1$, also hier eines deterministischen Numéraires $B$ verwendet (siehe Abschnitt 5.3.5, Beweisteil f).

5) $\mathcal{M}_1^{\perp} = D^{-1}([S_0])$ und 6) $D(\mathcal{M}_1^{\perp}) \subseteq [S_0]$:
Nach Beweisteil b von Abschnitt 6.2.1 ist 5) $\mathcal{M}_1^{\perp} = D^{-1}([S_0])$, damit 6)

$$D(\mathcal{M}_1^{\perp}) \subseteq [S_0]$$

und dim $D(\mathcal{M}_1^{\perp}) \leq 1$.

7) a) $[S_0] \cap D(\mathcal{M}_1) = O$ bzw. b) $S_0 \notin D(\mathcal{M}_1)$:
Für jedes $h_1 \in D(\mathcal{M}_1) \cap [S_0]$ ist $h_1 \in [S_0]$, $h_1 = DZ_1$ mit $Z_1 = D^{\mathsf{T}} g_1 \in \mathcal{M}_1 = D^{\mathsf{T}}(\ker S_0^{\mathsf{T}})$, $g_1 \in \ker S_0^{\mathsf{T}} = [S_0]^{\perp}$,

$$0 = h_1^{\mathsf{T}} g_1 = (DZ_1)^{\mathsf{T}} g_1 = Z_1^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}} g_1 = Z_1^{\mathsf{T}} Z_1,$$

also wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts $Z_1 = 0$ und $h_1 = DZ_1 = 0$. Demnach ist stets a) $D(\mathcal{M}_1) \cap [S_0] = O$ und mit der Voraussetzung (AWS) $S_0 \neq 0$ dann noch b) $S_0 \notin D(\mathcal{M}_1)$.

8) $D(\mathbb{R}^K) = D(\mathcal{M}_1) \oplus D(\mathcal{M}_1^{\perp})$:
Aus $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_1^{\perp} = \mathbb{R}^K$ folgt nach Hilfssatz 5.10 a von Abschnitt 5.3.6

$$D(\mathbb{R}^K) = D(\mathcal{M}_1) + D(\mathcal{M}_1^{\perp}),$$

aus 6) $D(\mathcal{M}_1^{\perp}) \subseteq [S_0]$ und 7a) $[S_0] \cap D(\mathcal{M}_1) = O$ (ohne die Voraussetzung AWS) folgt

$$D(\mathcal{M}_1) \cap D(\mathcal{M}_1^{\perp}) \subseteq D(\mathcal{M}_1) \cap [S_0] = O,$$

also insgesamt

$$D(\mathbb{R}^K) = D(\mathcal{M}_1) \oplus D(\mathcal{M}_1^{\perp}).$$

9) $D(\mathcal{M}_1^{\perp}) = [S_0] \cap D(\mathbb{R}^K)$:
Nach 6) $D(\mathcal{M}_1^{\perp}) \subseteq [S_0]$ gilt $D(\mathcal{M}_1^{\perp}) \subseteq [S_0] \cap D(\mathbb{R}^K)$. Es ist also nur noch die umgekehrte Inklusion „$\supseteq$“ zu zeigen. Dazu werden zwei Fälle unterschieden:
Im Fall i) $S_0 \in D(\mathbb{R}^K)$ hat man wegen 8) $D(\mathbb{R}^K) = D(\mathcal{M}_1) \oplus D(\mathcal{M}_1^{\perp})$ für $S_0$ die Darstellung

$$S_0 = h_1 + g_1 \text{ mit } h_1 \in D(\mathcal{M}_1) \text{ und } g_1 \in D(\mathcal{M}_1^{\perp}).$$

Nach 6) $D(\mathcal{M}_1^{\perp}) \subseteq [S_0]$ ist $g_1 = \lambda S_0$ mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$, somit nach 7a)

$$h_1 = S_0 - g_1 = (1 - \lambda) S_0 \in [S_0] \cap D(\mathcal{M}_1) = O,$$

$h_1 = 0$, $S_0 = g_1 \in D(\mathcal{M}_1^{\perp})$, $[S_0] \subseteq D(\mathcal{M}_1^{\perp})$ und insgesamt $[S_0] = D(\mathcal{M}_1^{\perp})$. Daraus ergibt sich auch

$$D(\mathcal{M}_1^{\perp}) = [S_0] = [S_0] \cap D(\mathbb{R}^K).$$

In diesem Fall ist dann mit 8) noch $D(\mathbb{R}^K) = D(\mathcal{M}_1) \oplus [S_0]$. Unter der Voraussetzung (AWS) $S_0 \neq 0$ ist dann $D(\mathcal{M}_1)$ eine Hyperebene des $D$-Bildraums $D(\mathbb{R}^K)$.

Im Fall ii) $S_0 \notin D(\mathbb{R}^K)$ gilt neben der Inklusion $D(\mathcal{M}_1^{\perp}) \subseteq [S_0] \cap D(\mathbb{R}^K)$ auch noch die umgekehrte Inklusion $[S_0] \cap D(\mathbb{R}^K) = O \subseteq D(\mathcal{M}_1^{\perp})$, also insgesamt

$$D(\mathcal{M}_1^{\perp}) = [S_0] \cap D(\mathbb{R}^K) = O.$$

In diesem Fall gilt dann noch wegen 8) $D(\mathbb{R}^K) = D(\mathcal{M}_1)$, sodass $D(\mathcal{M}_1)$ mit dem gesamten $D$-Bildraum $D(\mathbb{R}^K)$ übereinstimmt. Anzumerken ist hier noch, dass gemäß der Charakterisierung des LOP von Satz 6.1 der Fall i) $S_0 \in D(\mathbb{R}^K)$ die Gültigkeit des LOP und der komplementäre Fall ii) $S_0 \notin D(\mathbb{R}^K)$ die Ungültigkeit des LOP bedeutet.

10) $\ker D = \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \mathcal{U}_1^{\perp}$:
„$\subseteq$“: Aus der Inklusion $\mathcal{M}_1 := D^{\mathsf{T}}(\ker S_0^{\mathsf{T}}) \subseteq D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ folgt die umgekehrte Inklusion für die orthogonalen Komplemente: $\ker D = D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)^{\perp} \subseteq \mathcal{M}_1^{\perp}$. Außerdem gilt nach 2) $\ker D \subseteq \mathcal{U}_1^{\perp}$. Insgesamt folgt dann $\ker D \subseteq \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \mathcal{U}_1^{\perp}$.
„$\supseteq$“: Die umgekehrte Inklusion ergibt sich aus 6) $D(\mathcal{M}_1^{\perp}) \subseteq [S_0]$ und 3) $D(\mathcal{U}_1^{\perp}) \subseteq [S_0]^{\perp}$, da daraus mit Hilfssatz 5.10 a von Abschnitt 5.3.6

$$D(\mathcal{M}_1^{\perp} \cap \mathcal{U}_1^{\perp}) \subseteq D(\mathcal{M}_1^{\perp}) \cap D(\mathcal{U}_1^{\perp}) \subseteq [S_0] \cap [S_0]^{\perp} = O$$

und somit $\mathcal{M}_1^{\perp} \cap \mathcal{U}_1^{\perp} \subseteq \ker D$ folgt. Insgesamt folgt dann die Übereinstimmung der Unterräume

ker $D$ und $\mathcal{M}_1^{\perp} \cap \mathcal{U}_1^{\perp}$.

Zum Beweis der nächsten beiden Aussagen 11) und 12) werden Ergebnisse von Abschnitt 6.2.1 und von Kapitel 5 (Hilfssatz 5.11, 7c und Satz 5.12, 20 u. 27) verwendet und daher weitere Voraussetzungen benötigt. Für 11) wird (AWS$^{\delta}$) und (DPsfT$\mathbf{1}_{\Omega}$+) verwendet, für 12) (ZVU).

11) ker $D = \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \mathcal{E}_1^{\perp} = \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \{\kappa(X_1) = 0\}$:

In Abschnitt 5.3.6 (Hilfssatz 5.11, 7c, Beweisteil D) wird für beliebiges $T \in \mathbb{N}$ die Übereinstimmung

$$\ker V_T^{sf\,*} = \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \mathcal{E}_T^{\perp} = \mathcal{M}_T^{\perp} \cap \{\kappa(X_T) = 0\} =: \mathcal{M}_T^{\perp 0}$$

begründet: Für deren Beweis wird die Voraussetzung (DPsfT$\mathbf{1}_{\Omega}$+) $\mathbf{1}_{\Omega} = V_T(k) \in \mathcal{V}_T$ mit $\kappa_0 := v_0(k) > 0$ oder die Voraussetzung eines Numéraires mit deterministischem $B_T$ verwendet. Für $T = 1$ lautet die Voraussetzung

$$\text{(DPsfT}\mathbf{1}_{\Omega}\text{+)}: \mathbf{1}_{\Omega} = V_1(k) = D^{\mathsf{T}}k_1 \in \mathcal{V}_1 = D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) \text{ mit } \kappa_0 := v_0(k) = r_0(k) = S_0^{\mathsf{T}}k_1 > 0.$$

In Abschnitt 6.2.1 wird in Beweisteil c1) für das Einperiodenmodell außerdem die Übereinstimmung

$$\ker D = \ker V_1^{sf\,*}$$

begründet. Insgesamt ergibt sich damit für das Einperiodenmodell

$$\begin{aligned}\ker D = \ker V_1^{sf\,*} &= \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \mathcal{E}_1^{\perp} \\ &= \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \{\kappa(X_1) = 0\} =: \mathcal{M}_1^{\perp 0}.\end{aligned}$$

12) $D^{-1}(\{S_0\}) = \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \{\kappa(X_1) = \kappa_0\}$:

a) Äquivalenz der beiden Preisgleichungssysteme (PG$\Psi_1^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}$) und (PG$\Psi_1^{\mathsf{T}}V_1$):

Zur besseren Unterscheidung der in Kapitel 5 und Kapitel 6 verwendeten Preisgleichungssysteme mit dem Bewertungsvektor $Y_1 = \Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ wird das Gleichungssystem (PG$Y_T$) von Abschnitt 5.3.12 (Satz 5.12, 27) für sf-Handelsstrategien $h$ jetzt mit (PG$\Psi_1^{\mathsf{T}}V_1$) bezeichnet und das Gleichungssystem von Abschnitt 6.2.2 für die Portfoliovektoren $h_1$ mit (PG$\Psi_1^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}$). Es wird nun im Einperiodenmodell für $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ die Äquivalenz der beiden Gleichungssysteme gezeigt:

$$\begin{aligned}&\text{(PG}\Psi_1^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}\text{)} \quad \Psi_1^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}h_1 = S_0^{\mathsf{T}}h_1 \quad \forall\, h_1 \in \mathbb{R}^N \quad \Leftrightarrow \\ &\text{(PG}\Psi_1^{\mathsf{T}}V_1\text{)} \quad \Psi_1^{\mathsf{T}}V_1(h) = v_0(h) \quad \forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf}\,.\end{aligned}$$

„⇒“: Es sei (PG$\Psi_1^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}$) gültig. Für eine beliebige sf-Handelsstrategie $h = (h_0,h_1)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{H}_N^{sf} = \{h \in \mathbb{R}^{2N} : L_0(h) = 0\}$ gilt $S_0^{\mathsf{T}}h_1 = r_0(h) = v_0(h) = S_0^{\delta\,\mathsf{T}}h_0$ und wegen (PG$\Psi_1^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}$) dann

$$\Psi_1^{\mathsf{T}}V_1(h) = \Psi_1^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}h_1 = S_0^{\mathsf{T}}h_1 = v_0(h),$$

also (PG$\Psi_1^{\mathsf{T}}V_1$). Es gilt also stets die Schlussfolgerung (PG$\Psi_1^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}$) ⇒ (PG$\Psi_1^{\mathsf{T}}V_1$).

„⇐“: Es sei (PG$\Psi_1^{\mathsf{T}}V_1$) gültig. Für diese Beweisrichtung (PG$\Psi_1^{\mathsf{T}}V_1$) ⇒ (PG$\Psi_1^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}$) werden die beiden Fälle i) $S_0^{\delta} \neq 0$ und ii) $S_0^{\delta} = 0$ unterschieden.

Im Fall i) $S_0^{\delta} \neq 0$ kann ein beliebig vorgegebener Portfoliovektor $h_1 \in \mathbb{R}^N$ mit einem Portfoliovektor $h_0$ als Lösung der stets lösbaren Gleichung $L_0(h) = 0$ bzw. $S_0^{\delta\,\mathsf{T}}h_0 = S_0^{\mathsf{T}}h_1$ (Voraussetzung $S_0^{\delta} \neq 0$) zu einer sf-Handelsstrategie $h = (h_0,h_1)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{H}_N^{sf} = \{L_0(h) = 0\}$ ergänzt werden. Mit (PG$\Psi_1^{\mathsf{T}}V_1$) folgt dann

$$\Psi_1^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}h_1 = \Psi_1^{\mathsf{T}}V_1(h) = v_0(h) = S_0^{\delta\,\mathsf{T}}h_0 = S_0^{\mathsf{T}}h_1,$$

also (PG$\Psi_1^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}$).

Im Sonderfall ii) $S_0^{\delta} = S_0 + \delta_0 = 0$ ist wegen $S_0 \geq 0$, $\delta_0 \geq 0$ auch $S_0 = 0$ und daher

$$L_0(h) = v_0(h) - r_0(h) = S_0^{\delta\,\mathsf{T}}h_0 - S_0^{\mathsf{T}}h_1 = 0 \;\forall\, h \in \mathcal{H}_N = \mathbb{R}^{2N}.$$

Demnach gilt in diesem Fall $\mathcal{H}_N^{sf} = \mathcal{H}_N \cap \{L_0(h) = 0\} = \mathbb{R}^{2N}$, sodass ein beliebig vorgegebener Portfoliovektor $h_1 \in \mathbb{R}^N$ zusammen mit einem beliebigen Portfoliovektor $h_0 \in \mathbb{R}^N$ eine sf-Handelsstrategie $h = (h_0,h_1)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{H}_N^{sf}$ liefert. Mit dieser sf-Handelsstrategie $h$ und mit (PG$\Psi_1^{\mathsf{T}}V_1$) folgt dann

$$\Psi_1^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}} h_1 = \Psi_1^{\mathsf{T}} V_1(h) = v_0(h) = r_0(h) = S_0^{\mathsf{T}} h_1,$$

also (PG$\Psi_1^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}}$).

b) Beweis der Mengenidentität $D^{-1}(\{S_0\}) = \mathcal{M}_1^{\perp\kappa_0}$ :

Die Inzidenz

$$\Psi_1 \in D^{-1}(\{S_0\})$$

ist äquivalent zur Preisgleichung (PG$\Psi_1^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}}$): Dies ergibt sich aus der oben in Satz 6.1 angegebenen Äquivalenz des LOP zur Inzidenz und zur Preisgleichung oder nach Beweisteil I „11) ⇔ 24)“ vom nachfolgenden Satz 6.3. Die Preisgleichung (PG$\Psi_1^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}}$) ist nach dem vorhergehenden Beweisteil 12 a) äquivalent zur Preisgleichung (PG$\Psi_1^{\mathsf{T}} V_1$). Letztere ist nach Beweisteil J, b) „27) ⇔ 20)“ ($T = 1$) von Satz 5.12 in Abschnitt 5.3.12 unter Voraussetzung von (ZVU) oder eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_1$ wiederum äquivalent zur Inzidenz

$$\Psi_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp\kappa_0} = \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \{\kappa(X_1) = \kappa_0\},$$

wobei $\kappa_0 = v_0(k) > 0$ der Startkapitaleinsatz einer sf-Duplikationsstrategie $k$ von $\mathbf{1}_\Omega = (1,\ldots,1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^K$ ist. Es ist also $D^{-1}(\{S_0\}) = \mathcal{M}_1^{\perp\kappa_0}$ und dann auch $D(\mathcal{M}_1^{\perp\kappa_0}) = \{S_0\}$. □

### Weitere Charakterisierungen des LOP

**Satz 6.3 Weitere Charakterisierungen des Law of One Price im Einperiodenmodell mit den Räumen $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$**

Für die Aussagen mit den Bedingungen 22), 25 – 27) sei die mathematisch-technische Voraussetzung

(AWS) $\quad S_0 \neq (0,\ldots,0)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^N$

erfüllt. Für die Aussagen zu den Bedingungen 12) – 18) sei die stärkere Voraussetzung

$$U_1 := D^{\mathsf{T}} S_0 \neq (0,\ldots,0)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^K$$

gesichert. Für die Aussage mit der Bedingung 28) sei neben (AWS), (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$ noch die Voraussetzung

(DPsfT$\mathbf{1}_\Omega$+) $\quad \mathbf{1}_\Omega = D^{\mathsf{T}} k_1$ mit $k_1 \in \mathbb{R}^N$ und $\kappa_0 := S_0^{\mathsf{T}} k_1 > 0$,

also insgesamt (ZVU) von Abschnitt 5.3.5, oder spezieller die Existenz eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_1$ erfüllt. Weiter sei $\mathcal{H}_N^{sf} = \mathbb{R}^{2N} \cap \{L_0(h) = 0\}$ der Unterraum der selbstfinanzierenden Handelsstrategien. Das Law of One Price gilt im Einperiodenmodell genau dann, wenn eine der folgenden zueinander äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1) (LOP) $\quad \forall\, X \in L(\mathbb{R}^{2N})$ ist $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0$ konstant $\forall\, h \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $Lh = X$
2) (LOP1) $\quad \forall\, X \in L(\mathbb{R}^{2N})$ ist $R_0(h) = S_0^{\mathsf{T}} h_1$ konstant $\forall\, h \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $Lh = X$
3) (LOPsf) $\quad \forall\, X = (0,X_1)^{\mathsf{T}} \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ ist $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0$ konst. $\forall\, h \in L^{-1}(\{X\})$
4) (LOP1sf) $\quad \forall\, X = (0,X_1)^{\mathsf{T}} \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ ist $R_0(h) = S_0^{\mathsf{T}} h_1$ konst. $\forall\, h \in L^{-1}(\{X\})$
5) (LOPsfT) $\quad \forall\, X_1 \in V_1(\mathcal{H}_N^{sf})$ ist $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0$ konst. $\forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap V_1^{-1}(\{X_1\})$
6) (LOP1sfT) $\quad \forall\, X_1 \in V_1(\mathcal{H}_N^{sf})$ ist $R_0(h) = S_0^{\mathsf{T}} h_1$ konst. $\forall\, h \in \mathcal{H}_N^{sf} \cap V_1^{-1}(\{X_1\})$
7) (LOP$D^{\mathsf{T}}$) $\quad \forall\, X_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ : $S_0^{\mathsf{T}} h_1$ konstant $\forall\, h_1 \in \mathbb{R}^N$ mit $D^{\mathsf{T}} h_1 = X_1$
8) $\quad \exists\, X_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$: $S_0^{\mathsf{T}} h_1$ konstant $\forall\, h_1 \in \mathbb{R}^N$ mit $D^{\mathsf{T}} h_1 = X_1$
9) $\ker D^{\mathsf{T}} \subseteq \ker S_0^{\mathsf{T}} = [S_0]^{\perp}$ (Inklusion der Kerne, z. B. bei injektivem $D^{\mathsf{T}}$)
10) $S_0 \perp \ker D^{\mathsf{T}}$ (Orthogonalität von $S_0$ u. $\ker D^{\mathsf{T}}$)
11) $S_0 \in D(\mathbb{R}^K) = (\ker D^{\mathsf{T}})^{\perp}$ ($S_0$ ist $D$-Bild)
12) $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 = O$ (trivialer Durchschnitt von $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{M}_1$)

| | | |
|---|---|---|
| 13) | $\mathcal{U}_1 \not\subseteq \mathcal{M}_1$ | (Nichtinklusion) |
| 14) | $\mathcal{M}_1^{\perp} \not\subseteq \mathcal{U}_1^{\perp}$ | (Nichtinklusion) |
| 15) | $\mathcal{M}_1$ ist eine Hyperebene von $D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ | (Unterraumstruktur von $D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$) |
| 16) | $D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{M}_1$ | ($D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ als direkte Summe) |
| 17) | $\ker D$ ist eine Hyperebene von $\mathcal{M}_1^{\perp}$ | (Unterraumstruktur von $\mathcal{M}_1^{\perp}$) |
| 18) | $\exists\, \Psi_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp} \setminus \ker D$ mit $\mathcal{M}_1^{\perp} = \ker D \oplus \operatorname{lin} \Psi_1$ | (nichtleere Differenz) |
| 19) | $\exists\, \Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $D\Psi_1 = S_0$ | ($D$-Urbild von $S_0$) |
| 20) | $\exists_1\, \vartheta_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ mit $D\vartheta_1 = S_0$ | ($D^{\mathsf{T}}$-duplizierbares $D$-Urbild von $S_0$) |
| 21) | $\exists\ \ \vartheta_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{M}_1^{\perp} \setminus \ker D$ | ($D^{\mathsf{T}}$-duplizierbarer $\mathcal{M}_1$-Normalenvektor) |
| 22) | $D(\mathcal{M}_1^{\perp}) = [S_0] \neq O$ | (Eindimensionalität von $D(\mathcal{M}_1^{\perp})$) |
| 23) | $D(\mathbb{R}^K) = [S_0] \oplus D(\mathcal{M}_1)$ | ($D(\mathbb{R}^K)$ als direkte Summe) |
| 24) | (PG$\Psi_1{}^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}$) $\exists\, \Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $\Psi_1{}^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}h_1 = S_0{}^{\mathsf{T}}h_1\ \forall\, h_1 \in \mathbb{R}^N$ | (Bew.vekt. m. Preisgl.) |
| 25) | (KPG$\Psi_1{}^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}$) $\exists\, \Psi_1 \in \mathbb{R}^K \setminus \ker D$ mit $\Psi_1{}^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}g_1 = 0\ \forall\, g_1 \in [S_0]^{\perp}$ | ($\mathcal{M}_1$-Norm.vekt.) |
| 26) | $\exists\, \Psi_1 \in \mathbb{R}^K \setminus \ker D$ mit $\Psi_1{}^{\mathsf{T}}Z_1 = 0\ \forall\, Z_1 \in \mathcal{M}_1$ | ($\mathcal{M}_1$-Norm.vekt.) |
| 27) | $\exists\, \Psi_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp} \setminus \ker D$ | (nichtleere Differenz) |
| 28) | $\exists\, \Psi_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \{\kappa(X_1) = \kappa_0\} =: \mathcal{M}_1^{\perp\kappa_0}$ | ($\kappa$-norm. $\mathcal{M}_1$-Normalenvekt.) |

**Erläuterungen zum Satz 6.3 und den nachfolgenden Abbildungen**

Der Beweis des Satzes 6.3 erfolgt im Anschluss an diese Erläuterungen und die Abbildungen. Bei den im Satz aufgeführten Charakterisierungen des Law of One Price werden nicht nur lineare Gleichungen für die Portfoliovektoren $h_1 \in \mathbb{R}^N$ und $h_1 \in \ker S_0{}^{\mathsf{T}}$ bzw. Preisgleichungen für die zugehörigen duplizierten Zahlungsprofile, sondern auch Struktur und Lagebeziehungen für bestimmte Unterräume von $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ angegeben. Der Vorteil der Charakterisierungen mittels der Vektorunterräume besteht darin, dass sie beispielsweise durch die nachfolgende Abbildung 6.5 geometrisch visualisiert werden können. Andererseits kann eine geometrische Veranschaulichung auch eine Quelle für Vermutungen über weitere neue Ergebnisse liefern.

Allgemein lässt sich der Vektorraum $\mathbb{R}^K$ der stochastischen Zahlungsprofile $X_1$ darstellen als direkte Summe der Unterräume $D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ und $\ker D$ und als direkte Summe von $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_1^{\perp}$. Dabei liegt stets $\mathcal{M}_1$ in $D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ und $\ker D$ in $\mathcal{M}_1^{\perp}$. In der Abbildung 6.5 b) ist dargestellt, dass bei ungültigem LOP sowohl der Unterraum $\mathcal{M}_1$ der NE-Zahlungsprofile mit dem Unterraum $D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ der $D^{\mathsf{T}}$-duplizierbaren Zahlungsprofile $X_1$ als auch der Unterraum $\mathcal{M}_1^{\perp}$ mit dem Unterraum $\ker D$ zusammenfällt. Jedes $D^{\mathsf{T}}$-duplizierbare Zahlungsprofil $X_1 = D^{\mathsf{T}}h_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ ist dann auch ein NE-Zahlungsprofil (Nulleinsatz-Zahlungsprofil) $Z_1 \in \mathcal{M}_1$ und entspricht somit bijektiv einem NE-Geschäft $\hat{Z} = (0, Z_1)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{M}(1) = \mathcal{M} \cap \{X_0 = 0\}$, bei dessen $L$-Duplizierung sowohl der Startkapitaleinsatz $V_0(h)$ als auch der Reinvestitionswert $R_0(h)$ den Wert Null haben.

In der Abbildung 6.5 a) sieht man dagegen, dass mit der Einstellung des LOP im Marktmodell der Unterraum $\mathcal{M}_1$ um eine Dimension kleiner ausfällt als der Unterraum $D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ und der Unterraum $\mathcal{M}_1^{\perp}$ um eine Dimension größer wird als $\ker D$. Der $D^{\mathsf{T}}$-Bildraum $D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ ist dann die direkte Summe des Unterraums $\mathcal{M}_1$ und des eindimensionalen Unterraums $\mathcal{U}_1$:

$$D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{M}_1.$$

Im nachfolgenden Beweisteil C, b von Satz 6.3 wird erklärt, dass der triviale Durchschnitt $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 = O$ der Unterräume $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{M}_1$ bedeutet, dass jedes $D^{\mathsf{T}}$-duplizierbare Zahlungsprofil $X_1 = D^{\mathsf{T}}h_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ nur eine einzige additive Zerlegung

$$X_1 = Y_1 + Z_1 \in \mathcal{U}_1 + \mathcal{M}_1$$

mit $Y_1 \in \mathcal{U}_1$ und $Z_1 \in \mathcal{M}_1$ besitzt. Ebenfalls wird dort gezeigt, dass die Einzigkeit dieser additiven Zerlegung von $X_1$ bedeutet, dass der Wert $S_0{}^{\mathsf{T}}h_1$ für alle Duplikationsstrategien $h_1$ von $X_1$ eindeutig bestimmt, also das (LOP$D^{\mathsf{T}}$) gilt. $X_1$ wird somit zerlegt in ein indifferentes (mit dem Preis Null neutral bewertetes) NE-Zahlungsprofil $Z_1 \in \mathcal{M}_1$ und ein im eindimensionalen Unterraum $\mathcal{U}_1 = [U_1]$ gelegenes Bewertungs-Zahlungsprofil

$$Y_1 = \lambda U_1 = (\pi(X_1)/\pi(U_1))\cdot U_1,$$

das den Preis $\pi(X_1)$ von $X_1$ liefert. Diese Eigenschaft wird auch noch in Abschnitt 4.2 bei der Interpretation der Bewertung mittels des Duplizierungskonzeptes (mit Beurteilungskurve und indifferentem Supplement) verwendet.

Mit der Einengung von $\mathcal{M}_1$ auf eine Hyperebene des Raums $D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ vergrößert sich im Gegenzug das orthogonale Komplement $\mathcal{M}_1{}^{\perp}$ ausgehend von $\ker D$ genau um eine Dimension und enthält dann einen Vektor

$$\Psi_1 \in \mathcal{M}_1{}^{\perp} \setminus \ker D.$$

sodass $\mathcal{M}_1{}^{\perp}$ die direkte Summe des Unterraums $\ker D$ und des eindimensionalen Unterraums $\operatorname{lin} \Psi_1$ ist:

$$\mathcal{M}_1{}^{\perp} = \ker D \oplus \operatorname{lin} \Psi_1.$$

Der Unterraum $\ker D$ ist dann eine Hyperebene von $\mathcal{M}_1{}^{\perp}$. Für diesen Vektor $\Psi_1$ kann nach Beweisteil G o. E. $D\Psi_1 = S_0$ angenommen werden. Für jedes feste Zahlungsprofil $X_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ berechnet sich dann für alle $D^{\mathsf{T}}$-Duplikationsstrategien $h_1$ von $X_1$ (mit $D^{\mathsf{T}}h_1 = X_1$) der Wert der auf $\mathbb{R}^N$ definierten deterministischen linearen Nutzenfunktion $h_1 \mapsto S_0{}^{\mathsf{T}}h_1$ als das Skalarprodukt $\Psi_1{}^{\mathsf{T}}X_1$ von $\Psi_1$ und $X_1$, also nur abhängig von $X_1$ und unabhängig von der Wahl einer speziellen Duplikationsstrategie $h_1$:

$$S_0{}^{\mathsf{T}}h_1 = (D\Psi_1)^{\mathsf{T}}h_1 = \Psi_1{}^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}h_1 = \Psi_1{}^{\mathsf{T}}X_1 .$$

Da dieser Wert $S_0{}^{\mathsf{T}}h_1$ mit dem Preis $\pi(\hat{X})$ des zugehörigen endfälligen $L$-duplizierbaren Zahlungsprofils $\hat{X} = (0,X_1)^{\mathsf{T}} \in L(\mathbb{R}^{2N})$ übereinstimmt, wird er auch als Preis $\pi(X_1)$ von $X_1$ bezeichnet. Durch die Linksmultiplikation mit dem Zeilenvektor $\Psi_1{}^{\mathsf{T}}$ kann also aus der eindeutigen additiven Zerlegung

$$X_1 = (\pi(X_1)/S_0{}^{\mathsf{T}}S_0)\cdot U_1 + Z_1 \qquad (U_1 = D^{\mathsf{T}}S_0,\ Z_1 \in \mathcal{M}_1)$$

(siehe Beweisteil C, b) von $X_1$ der Preis $\pi(X_1)$ von $X_1$ gewonnen werden:

$$\begin{aligned} \Psi_1{}^{\mathsf{T}}X_1 &= (\pi(X_1)/S_0{}^{\mathsf{T}}S_0)\cdot\Psi_1{}^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}S_0 + \Psi_1{}^{\mathsf{T}}Z_1 \\ &= (\pi(X_1)/S_0{}^{\mathsf{T}}S_0)\cdot S_0{}^{\mathsf{T}}S_0 + 0 \qquad (\Psi_1{}^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}} = S_0{}^{\mathsf{T}}) \\ &= \pi(X_1). \end{aligned}$$

Demzufolge ist die mit dem **Bewertungsvektor** $\Psi_1$ auf ganz $\mathbb{R}^K$ definierte Linearform (das lineare Funktional) $\pi(X_1) = \Psi_1{}^{\mathsf{T}}X_1$ eine lineare Nutzenfunktion, die aber nur auf $D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ den Preis von $X_1 = D^{\mathsf{T}}h_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ gemäß der **Preisgleichung**[20]

[20] Preisgleichungen werden verwendet bei Kremer (2011), S. 29, 171, 175, 176; (2017), S. 31, 72.

(PG$\Psi_1{}^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}$) $\qquad \Psi_1{}^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}h_1 = S_0{}^{\mathsf{T}}h_1$

liefert. Die dabei indifferent mit dem Preis $\pi(Z_1) = 0$ bewerteten Zahlungsprofile sind genau die NE-Zahlungsprofile $Z_1 \in \mathcal{M}_1 = D^{\mathsf{T}}(S_0{}^{\perp})$. Der Wert $\pi(X_1) = \Psi_1{}^{\mathsf{T}}X_1$ des Preisfunktionals $\pi$ ist auf $D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ auch unabhängig von der Wahl des Lösungsvektors des Gleichungssystems $D\Psi_1 = S_0$. Für einen beliebigen Bewertungsvektor

$$\Psi_1 \in D^{-1}(\{S_0\}) = \Psi_1{}' + \ker D$$

(mit einer speziellen Lösung $\Psi_1{}'$ von $D\Psi_1 = S_0$) ist nämlich der Wert $\pi(X_1) = \Psi_1{}^{\mathsf{T}}X_1$ eines Zahlungsprofils $X_1 = D^{\mathsf{T}}h_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ gleich dem Wert $\Psi_1{}'{}^{\mathsf{T}}X_1$, der mit dem speziellen Bewertungsvektor $\Psi_1{}'$ berechnet wird: Für $\Psi_1 = \Psi_1{}' + \chi_1$, $\chi_1 \in \ker D$, gilt

$$\begin{aligned}\Psi_1{}^{\mathsf{T}}X_1 &= \Psi_1{}^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}h_1 = (D\Psi_1)^{\mathsf{T}}h_1\\ &= (D\Psi_1{}' + D\chi_1)^{\mathsf{T}}h_1\\ &= (D\Psi_1{}')^{\mathsf{T}}h_1 = \Psi_1{}'{}^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}h_1\\ &= \Psi_1{}'{}^{\mathsf{T}}X_1.\end{aligned}$$

Bei gültigem LOP erhält man also durch $\pi(X_1) = \Psi_1{}^{\mathsf{T}}X_1$ mit beliebigem $\Psi_1 \in D^{-1}(\{S_0\})$ ein auf $D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ eindeutig bestimmtes **Bewertungsfunktional**

$$\pi : D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Weiter ist in den Abbildungen 6.5 b) und a) ersichtlich, dass mit der Einstellung des LOP sich im Vektorraum $\mathbb{R}^N$ das $D$-Bild $D(\mathcal{M}_1{}^{\perp})$ vergrößert. Durch die Hinzunahme des Vektors

$$D\Psi_1 = S_0 \ (\neq 0)$$

wächst es vom Nullraum $O$ aus auf den eindimensionalen Unterraum $[S_0] = \operatorname{lin} S_0$. Mit der Aufnahme von $[S_0]$ als $D(\mathcal{M}_1{}^{\perp})$ in den $D$-Bildraum $D(\mathbb{R}^K)$ verkleinert sich im Gegenzug wegen der Dimensionserhaltung von $D(\mathbb{R}^K)$ und wegen des stets gültigen Verdrängungseffekts von $[S_0]$ auf $D(\mathcal{M}_1)$) (Hilfssatz 6.2, 7: $[S_0] \cap D(\mathcal{M}_1) = O$) das $D$-Bild $D(\mathcal{M}_1)$ ausgehend von $D(\mathbb{R}^K)$ genau um eine Dimension auf eine Hyperebene von $D(\mathbb{R}^K)$. Der gesamte $D$-Bildraum $D(\mathbb{R}^K)$ ist dann die direkte Summe des Unterraums $D(\mathcal{M}_1)$ und des eindimensionalen Unterraums $[S_0]$:

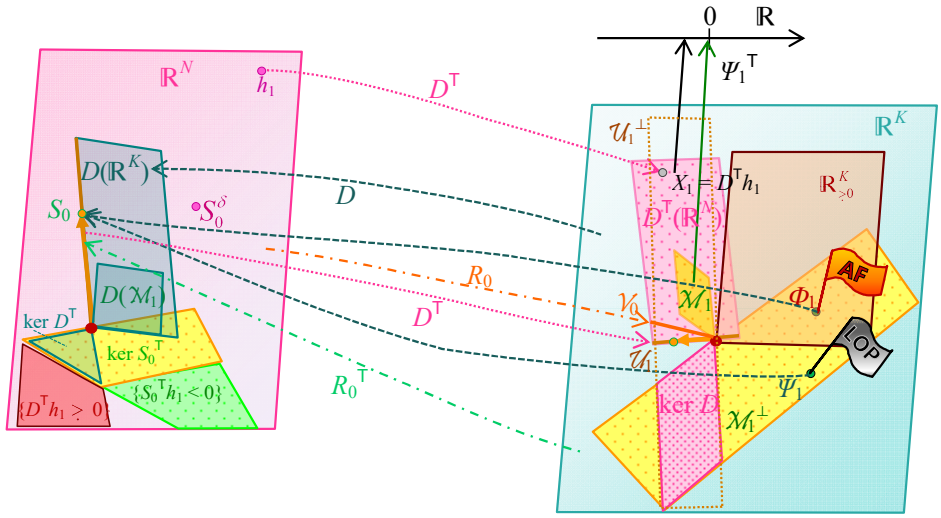
$$D(\mathbb{R}^K) = D(\mathcal{M}_1) \oplus [S_0].$$

Der damit vorliegenden Inklusion $[S_0] \subseteq D(\mathbb{R}^K)$ entspricht die umgekehrte Inklusion der zugehörigen orthogonalen Komplemente:

$$\ker D^{\mathsf{T}} = D(\mathbb{R}^K)^{\perp} \subseteq [S_0]^{\perp} = \ker S_0{}^{\mathsf{T}}.$$

Diese Bedingung $\ker D^{\mathsf{T}} \subseteq \ker S_0{}^{\mathsf{T}}$ bedeutet, dass das spezielle Null-Zahlungsprofil $X_1 = D^{\mathsf{T}}g_1 = 0 \in \mathbb{R}^K$ ($g_1 \in \ker D^{\mathsf{T}}$) nur als ein NE-Zahlungsprofil $D^{\mathsf{T}}g_1 \in D^{\mathsf{T}}(\ker S_0{}^{\mathsf{T}}) = \mathcal{M}_1$ nachgebildet werden kann, also nur mittels einer Handelsstrategie $g_1$ mit dem Reinvestitionswert $S_0{}^{\mathsf{T}}g_1 = 0$ dupliziert werden kann ($g_1 \in \ker S_0{}^{\mathsf{T}}$). Ein Spezialfall für die Gültigkeit des LOP ist der Fall, dass die lineare Abbildung $D^{\mathsf{T}}$ injektiv ist: Aus $\ker D^{\mathsf{T}} = O$ folgt nämlich $\ker D^{\mathsf{T}} = O \subseteq \ker S_0{}^{\mathsf{T}}$ und damit das LOP. In diesem Spezialfall besitzt jedes $D^{\mathsf{T}}$-duplizierbare Zahlungsprofil $X_1 = D^{\mathsf{T}}h_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ nur eine einzige Duplikationsstrategie $h_1$.

a) LOP gültig:




b) LOP ungültig:

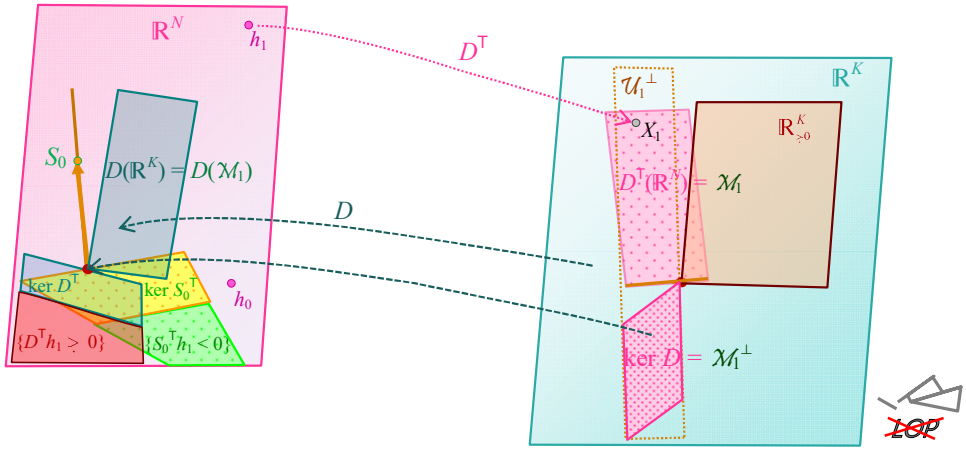
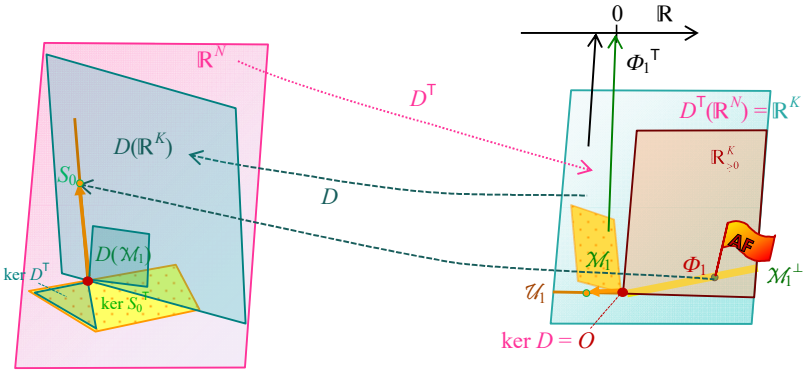
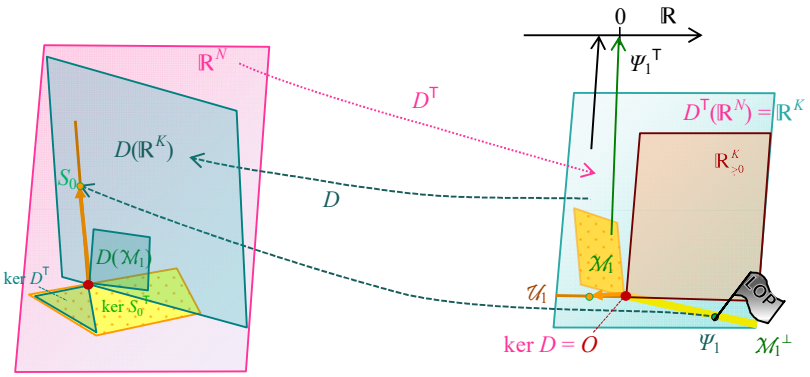



**Abb. 6.5** Die verschiedenen Unterräume und Urbildmengen in $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$, der schwach positive Orthant $\mathbb{R}^K_{\gneq 0}$ von $\mathbb{R}^K$ und die linearen Abbildungen $D^\top$, $D$, $S_0^\top$ und $S_0$: a) bei gültigem LOP mit Bewertungsvektor $\Psi_1$ bzw. bei vorliegender Arbitragefreiheit (AF) mit Diskontvektor $\Phi_1$; b) bei ungültigem LOP

a) VS und AF gültig:




b) VS und LOP gültig:




c) VS gültig und LOP ungültig:

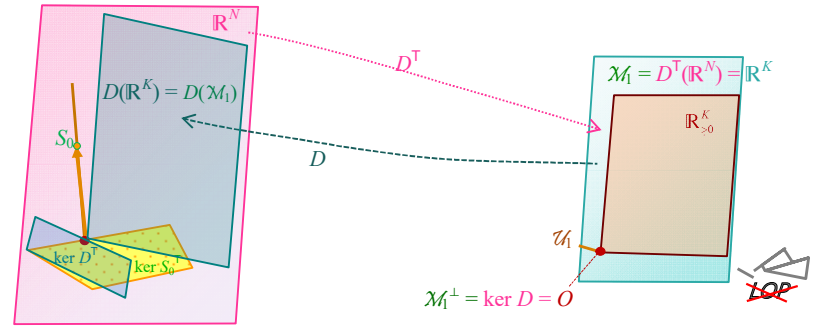



**Abb. 6.6** Die verschiedenen Unterräume und Urbildmengen in $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$, der schwach positive Orthant $\mathbb{R}^K_{\geq 0}$ von $\mathbb{R}^K$ und die linearen Abbildungen $D^\top$ und $D$ bei vollständigem Marktmodell und a) bei vorliegender Arbitragefreiheit (AF) mit Diskontvektor $\Phi_1$, b) bei gültigem LOP mit Bewertungsvektor $\Psi_1$, c) bei ungültigem LOP

**Beweis des Satzes 6.3** mit den Charakterisierungen des LOP:
Die Äquivalenz der verschiedenen Formulierungen 1) – 7) des LOP wurde im vorhergehenden Text schon begründet.

A) 7) (LOP$D^\mathsf{T}$) $\Leftrightarrow$ 8) $\Leftrightarrow$ 9) $\ker D^\mathsf{T} \subseteq \ker S_0^\mathsf{T} \Leftrightarrow$ 10) $S_0 \perp \ker D^\mathsf{T} \Leftrightarrow$ 11) $S_0 \in D(\mathbb{R}^K)$:
Die Äquivalenz der Bedingungen 7), 9), 10) und 11) wurde oben schon aus den entsprechenden Aussagen des Mehrperiodenmodells abgeleitet. Es wird jetzt noch eine Begründung innerhalb der Räume $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ des Einperiodenmodells angegeben.

a) 7) (LOP$D^\mathsf{T}$) $\Rightarrow$ 8) $\Rightarrow$ 9) $\ker D^\mathsf{T} \subseteq \ker S_0^\mathsf{T}$:
Das (LOP$D^\mathsf{T}$) bedeutet, dass für jedes $X_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ für alle $D^\mathsf{T}$-Duplikationsstrategien $k_1 \in (D^\mathsf{T})^{-1}(\{X_1\})$ von $X_1$ der Wert $S_0^\mathsf{T} k_1$ konstant ist. Insbesondere existiert dann auch ein festes $X_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ ($\neq \emptyset$), sodass der Wert $S_0^\mathsf{T} k_1$ aller seiner Duplikationsstrategien $k_1$ konstant ist (Bed. 8).
Mit einer speziellen Duplikationsstrategie $h_1$ für dieses feste $X_1$ ist die Gesamtheit der Duplikationsstrategien von $X_1$ durch

$$k_1 = h_1 + f, f \in \ker D^\mathsf{T},$$

gegeben. Die Bedingung 8)

$$S_0^\mathsf{T} h_1 = S_0^\mathsf{T} k_1 = S_0^\mathsf{T} h_1 + S_0^\mathsf{T} f \;\forall\; k_1 \in (D^\mathsf{T})^{-1}(\{X_1\})$$

ist gleichbedeutend zur Bedingung

$$S_0^\mathsf{T} f = 0 \text{ bzw. } f \in \ker S_0^\mathsf{T} \;\forall\, f \in \ker D^\mathsf{T}$$

und somit zur Inklusion $\ker D^\mathsf{T} \subseteq \ker S_0^\mathsf{T}$ (Bed. 9).
Eine weitere Begründung für 7) $\Rightarrow$ 9): Wählt man speziell $X_1 = 0 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$, so ist wegen (LOP$D^\mathsf{T}$) $S_0^\mathsf{T} k_1$ konstant für alle $k_1 \in (D^\mathsf{T})^{-1}(\{0\}) = \ker D^\mathsf{T}$, wegen $0 \in \ker D^\mathsf{T}$ dann

$$S_0^\mathsf{T} k_1 = S_0^\mathsf{T} 0 = 0 \;\forall\; k_1 \in \ker D^\mathsf{T}$$

und somit $\ker D^\mathsf{T} \subseteq \ker S_0^\mathsf{T}$.
b) 9) $\ker D^\mathsf{T} \subseteq \ker S_0^\mathsf{T} \Rightarrow$ 7) (LOP$D^\mathsf{T}$): Umgekehrt folgt aus dieser Inklusion $\ker D^\mathsf{T} \subseteq \ker S_0^\mathsf{T}$ auch, dass für ein beliebiges $X_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ die Duplikationsstrategien $h_1$ und $k_1 = h_1 + f, f \in \ker D^\mathsf{T}$, wegen $f \in \ker D^\mathsf{T} \subseteq \ker S_0^\mathsf{T}$ denselben $S_0^\mathsf{T}$-Wert aufweisen:

$$S_0^\mathsf{T} k_1 = S_0^\mathsf{T} h_1 + S_0^\mathsf{T} f = S_0^\mathsf{T} h_1 + 0 = S_0^\mathsf{T} h_1.$$

Dies bedeutet die Gültigkeit von (LOP$D^\mathsf{T}$) und insbesondere auch die Aussage 8).

c) 9) $\ker D^\mathsf{T} \subseteq \ker S_0^\mathsf{T} \Leftrightarrow$ 10) $S_0 \perp \ker D^\mathsf{T} \Leftrightarrow$ 11) $S_0 \in D(\mathbb{R}^K)$:
Die Inklusion $\ker D^\mathsf{T} \subseteq \ker S_0^\mathsf{T} = [S_0]^\perp$ ist gleichbedeutend zur Inklusion

$$[S_0] = [S_0]^{\perp\perp} \subseteq (\ker D^\mathsf{T})^\perp = D(\mathbb{R}^K),$$

also zur Relation $S_0 \perp \ker D^\mathsf{T}$ (Bed. 10) und zur Inzidenz $S_0 \in D(\mathbb{R}^K)$ (Bed. 11).

B) a) LOP gültig $\Leftrightarrow$ 22) $D(\mathcal{M}_1^\perp) = [S_0]$ $\Leftrightarrow$ 23) $D(\mathbb{R}^K) = D(\mathcal{M}_1) \oplus [S_0]$.
b) LOP ungültig $\Leftrightarrow D(\mathcal{M}_1^\perp) = O$ $\Leftrightarrow D(\mathbb{R}^K) = D(\mathcal{M}_1)$:

Der Beweis dieser Aussagen ergibt sich aus der in A) begründeten Äquivalenz von (LOP$D^\mathsf{T}$) zur Inzidenz $S_0 \in D(\mathbb{R}^K)$ (Bed. 11) und der Behandlung der beiden Fälle i) $S_0 \in D(\mathbb{R}^K)$ und ii) $S_0 \notin D(\mathbb{R}^K)$ im Beweis von Hilfsatz 6.2, 9).

C) 7) (LOP$D^\mathsf{T}$) $\Leftrightarrow$ 12) $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 = O$:

a) „$\Rightarrow$“: Für die Beweisrichtung 7) $\Rightarrow$ 12) wird verwendet, dass nach A) das (LOP$D^\mathsf{T}$) äquivalent zur Inklusion 9) $\ker D^\mathsf{T} \subseteq \ker S_0^\mathsf{T}$ ist. Für jedes $Z_1 \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1$ ($\mathcal{U}_1 = \operatorname{lin} D^\mathsf{T} S_0$, $\mathcal{M}_1 = D^\mathsf{T}(\ker S_0^\mathsf{T})$) gibt es die beiden Darstellungen

$$Z_1 = \lambda D^\mathsf{T} S_0 \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ und}$$
$$Z_1 = D^\mathsf{T} g_1 \text{ mit } g_1 \in \ker S_0^\mathsf{T} = [S_0]^\perp.$$

Daraus folgt

$$D^\mathsf{T}(\lambda S_0 - g_1) = D^\mathsf{T} \lambda S_0 - D^\mathsf{T} g_1 = Z_1 - Z_1 = 0,$$

mit 9)

$$\lambda S_0 - g_1 \in \ker D^\mathsf{T} \subseteq \ker S_0^\mathsf{T}$$

und schließlich

$$0 = S_0^{\mathsf{T}}(\lambda S_0 - g_1) = \lambda S_0^{\mathsf{T}} S_0.$$

Wegen der Voraussetzung (AWS)

$$S_0 \neq 0 = (0,\ldots,0)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^N$$

(dies folgt auch aus der weiter unten noch benötigten stärkeren mathematisch-technischen Voraussetzung $U_1 := D^{\mathsf{T}} S_0 \neq 0$) ergibt sich hieraus $\lambda = 0$, $Z_1 = 0$ und $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 = O$.

b) „⇐": Für die Beweisrichtung 12) ⇒ 7) wird verwendet, dass der triviale Durchschnitt $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 = O$ äquivalent ist zur Aussage, dass es für jedes $X_1 \in \mathcal{U}_1 + \mathcal{M}_1$ genau eine additive Zerlegung

$$X_1 = Y_1 + Z_1 \text{ mit } Y_1 \in \mathcal{U}_1, Z_1 \in \mathcal{M}_1$$

gibt. Diese Aussage gilt allgemein für die Summe zweier Unterräume eines Vektorraums mit trivialem Durchschnitt. Eine derartige Summe wird dann direkte Summe der Unterräume genannt.[21] Es sei $X_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ und $h_1 \in \mathbb{R}^N$ eine beliebige $D^{\mathsf{T}}$-Duplikationsstrategie von $X_1$. Für $h_1 \in \mathbb{R}^N = [S_0] \oplus [S_0]^{\perp}$ hat man die Darstellung $h_1 = \lambda S_0 + g_1$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $g_1 \in [S_0]^{\perp}$ und damit für $X_1$ die Darstellung

$$X_1 = D^{\mathsf{T}} h_1 = \lambda D^{\mathsf{T}} S_0 + D^{\mathsf{T}} g_1 = Y_1 + Z_1 \in \mathcal{U}_1 + \mathcal{M}_1$$

mit $Y_1 = \lambda U_1 \in \mathcal{U}_1$, $Z_1 = D^{\mathsf{T}} g_1 \in D^{\mathsf{T}}([S_0]^{\perp}) = \mathcal{M}_1$. Aufgrund der Einzigkeit dieser additiven Zerlegung von $X_1$ und wegen der mathematisch-technischen Voraussetzung

$$U_1 := D^{\mathsf{T}} S_0 \neq 0 = (0,\ldots,0)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^K$$

($S_0 \notin \ker D^{\mathsf{T}}$ bzw. $S_1^{\delta}(\omega_k)^{\mathsf{T}} S_0 \neq 0$ für mindestens einen Index $k \in \{1,\ldots,K\}$) ist $\lambda = \lambda(X_1)$ durch $X_1$ eindeutig bestimmt. Demnach ist auch der Wert

$$S_0^{\mathsf{T}} h_1 = \lambda S_0^{\mathsf{T}} S_0 + S_0^{\mathsf{T}} g_1 = \lambda S_0^{\mathsf{T}} S_0 + 0 = \lambda S_0^{\mathsf{T}} S_0$$

durch $X_1$ für alle Duplikationsstrategien $h_1$ von $X_1$ eindeutig bestimmt. Es gilt also das (LOP$D^{\mathsf{T}}$). Diese einzige Zerlegung von $X_1 = D^{\mathsf{T}} h_1$ erhält man also durch

$$X_1 = \lambda U_1 + Z_1$$

mit dem eindeutig bestimmten $\lambda = S_0^{\mathsf{T}} h_1 / S_0^{\mathsf{T}} S_0 = \pi(X_1)/S_0^{\mathsf{T}} S_0 = \pi(X_1)/\pi(U_1)$ und dem ebenfalls eindeutigen $Z_1 = X_1 - \lambda U_1 \in \mathcal{M}_1$.

c) **Anmerkung** zur LOP-Charakterisierung durch den trivialen Durchschnitt $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 = O$: In Satz 5.12, I 7) (hier für $T = 1$) wird eine alternative LOP-Charakterisierung durch

$$\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{M}_1 = O$$

gegeben, bei welcher der eindimensionale Unterraum $\mathcal{V}_0 = \mathcal{E}_1 = \text{lin } \mathbf{1}_{\Omega}$ die Stelle von $\mathcal{U}_1 = \text{lin } U_1$ einnimmt. Es wird dort die Voraussetzung von (ZVU) (= AWS$^{\delta}$, AWS und DPsfT$\mathbf{1}_{\Omega}$+) oder die Existenz eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_T$ verwendet.

D) 12) $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 = O \Leftrightarrow$ 13) $\mathcal{U}_1 \not\subseteq \mathcal{M}_1 \Leftrightarrow$ 14) $\mathcal{M}_1^{\perp} \not\subseteq \mathcal{U}_1^{\perp}$:

a) 12) ⇔ 13): Der Durchschnitt $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 = O$ bedeutet wegen der Voraussetzung $U_1 \neq 0$ und der Eindimensionalität von $\mathcal{U}_1 = \text{lin } U_1$, dass $\lambda U_1 \notin \mathcal{M}_1$ für alle $\lambda \neq 0$ gilt bzw. dass $\lambda U_1 \in \mathcal{M}_1$ nur für $\lambda = 0$ gilt. Dies ist gleichbedeutend dazu, dass es ein $\lambda_1 \neq 0$ mit $\lambda_1 U_1 \notin \mathcal{M}_1$ gibt, dass also die Relation $\mathcal{U}_1 \not\subseteq \mathcal{M}_1$ gilt.

b) 13) ⇔ 14): Aus $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{M}_1$ folgt $\mathcal{U}_1^{\perp} \supseteq \mathcal{M}_1^{\perp}$ und umgekehrt aus $\mathcal{U}_1^{\perp} \supseteq \mathcal{M}_1^{\perp}$ auch $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1^{\perp\perp} \subseteq \mathcal{M}_1^{\perp\perp} = \mathcal{M}_1$.[22] Damit ist auch die Relation $\mathcal{U}_1 \not\subseteq \mathcal{M}_1$ äquivalent zu $\mathcal{M}_1^{\perp} \not\subseteq \mathcal{U}_1^{\perp}$.

---

[21] Literaturhinweise zur eindeutigen elementweisen additiven Zerlegung der direkten Summe sind in Beweisteil E) zu Satz 3.3 und Beweisteil E) zu Satz 5.12 angegeben. Ein Beweis wird in Beweisteil E) von Satz 3.3 durchgeführt.

[22] Die involutorische Eigenschaft für die Bildung des orthogonalen Komplements und Literatur hierzu wird bereits in einer Fußnote von Abschnitt 3.4.1 angegeben.

E) 12) $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 = O \Leftrightarrow$ 15) $\mathcal{M}_1$ ist eine Hyperebene von $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) \Leftrightarrow$ 16) $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{M}_1$:

Mit dem Dimensionssatz[23]

$$\dim (\mathcal{U}_1 + \mathcal{M}_1) + \dim (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1) = \dim \mathcal{U}_1 + \dim \mathcal{M}_1$$

für die endlichdimensionalen Unterräume $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{M}_1$ eines Vektorraums erhält man hier wegen

$$D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{U}_1 + \mathcal{M}_1$$

(siehe Hilfssatz 6.2, 4) und wegen der mathematisch-technischen Voraussetzung $U_1 = D^\mathsf{T} S_0 \neq 0$ bzw. $\dim \mathcal{U}_1 = 1$ die Dimensionsgleichung

$$\dim D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) + \dim (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1) = 1 + \dim \mathcal{M}_1.$$

Demnach ist $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 = O$ äquivalent zu $\dim \mathcal{M}_1 = \dim D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) - 1$, also wegen der Inklusion $\mathcal{M}_1 = D^\mathsf{T}(\ker S_0^\mathsf{T}) \subseteq D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ zur Hyperebenenstruktur von $\mathcal{M}_1$ in $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$. Im Fall $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 = O$ ist $U_1 = D^\mathsf{T} S_0 \notin \mathcal{M}_1$ und $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{M}_1$.

Im Fall $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 \neq O$ dagegen gilt nach D) die Inklusion $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{M}_1$ und dann die Übereinstimmung $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{M}_1$.

F) 12) $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 = O \Leftrightarrow$ 17) $\ker D$ ist eine Hyperebene von $\mathcal{M}_1^\perp$
$\Leftrightarrow$ 18) $\exists\, \Psi_1 \in \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D \subseteq \mathbb{R}^K$ mit $\mathcal{M}_1^\perp = \ker D \oplus [\Psi_1]$:

a) 12) $\Leftrightarrow$ 17): Für die direkten Summen $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_1^\perp = \mathbb{R}^K$ und $\ker D \oplus D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^K$ erhält man mit dem oben angegebenen Dimensionssatz die Dimensionsgleichungen

$$\dim \mathbb{R}^K = \dim \mathcal{M}_1 + \dim \mathcal{M}_1^\perp,$$
$$\dim \mathbb{R}^K = \dim \ker D + \dim D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$$

und zusammen mit der in E) unter der Voraussetzung $U_1 \neq 0$ angegebenen Dimensionsgleichung

$$\dim D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) - \dim \mathcal{M}_1 = 1 - \dim (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1)$$

schließlich

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{M}_1^\perp &= \dim \mathbb{R}^K - \dim \mathcal{M}_1 \\ &= \dim \ker D + \dim D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) - \dim \mathcal{M}_1 \\ &= \dim \ker D + 1 - \dim (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1). \end{aligned}$$

Wegen $\dim (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1) \leq \dim \mathcal{U}_1 = 1$ kann die Dimension des Durchschnitts $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1$ nur den Wert 0 oder 1 annehmen. Dies bedeutet aufgrund der Dimensionsgleichung auch, dass für die Dimension von $\ker D$ nur die Werte $\dim \mathcal{M}_1^\perp - 1$ oder $\dim \mathcal{M}_1^\perp$ möglich sind, also der Unterraum $\ker D$ von $\mathcal{M}_1^\perp$ eine (lineare) Hyperebene von $\mathcal{M}_1^\perp$ ist oder mit $\mathcal{M}_1^\perp$ zusammenfällt. Dabei ist $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 = O$ äquivalent zur Dimensionsgleichung $\dim \ker D = \dim \mathcal{M}_1^\perp - 1$ für die Unterräume $\ker D$ und $\mathcal{M}_1^\perp$, also wegen der in Hilfssatz 6.2, 10) angegebenen Inklusion $\ker D \subseteq \mathcal{M}_1^\perp$ zur Hyperebenenstruktur von $\ker D$ in $\mathcal{M}_1^\perp$.

b) 17) $\Leftrightarrow$ 18): Die Hyperebenenstruktur von $\ker D$ in $\mathcal{M}_1^\perp$ ist wiederum äquivalent dazu, dass ein Vektor $\Psi_1 \in \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D$ existiert, mit dem $\mathcal{M}_1^\perp$ die direkte Summe von $\ker D$ und dem eindimensionalen Unterraum $[\Psi_1] = \operatorname{lin} \Psi_1$ ist:

$$\mathcal{M}_1^\perp = \ker D \oplus [\Psi_1] \text{ mit einem } \Psi_1 \in \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D.$$

Aus der Hyperebenenstruktur von $\ker D$ in $\mathcal{M}_1^\perp$ folgt nämlich schon mit einem einzigen $\Psi_1 \in \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D$ für die Unterraumsumme $\ker D \oplus [\Psi_1]$ mittels der Dimensionsgleichung die Übereinstimmung mit $\mathcal{M}_1^\perp$. Umgekehrt folgt aus der Darstellung von $\mathcal{M}_1^\perp$ durch diese direkte Summe mittels der Dimensionsgleichung auch die Hyperebenenstruktur von $\ker D$ in $\mathcal{M}_1^\perp$.

---

[23] Literaturhinweise zum Dimensionssatz für endlich erzeugbare Unterräume eines Vektorraums sind in einer Fußnote von Abschnitt 2.10.1 angegeben.

G) 11) $S_0 \in D(\mathbb{R}^K)$ bzw. 19) $\exists\ \Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $D\Psi_1 = S_0$
$\Leftrightarrow$ 18) $\exists\ \Psi_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp} \setminus \ker D$ (mit $\mathcal{M}_1^{\perp} = \ker D \oplus [\Psi_1]$)
$\Leftrightarrow$ 20) $\exists_1\ \vartheta_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ mit $D\vartheta_1 = S_0$
$\Leftrightarrow$ 21) $\exists\ \vartheta_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{M}_1^{\perp} \setminus \ker D$:

a) 11) bzw. 19) $\Rightarrow$ 18): Falls ein $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $D\Psi_1 = S_0$ existiert, gilt nach Hilfssatz 6.2, 5) $\Psi_1 \in D^{-1}([S_0]) = \mathcal{M}_1^{\perp}$. Da nach Voraussetzung (AWS) $S_0 \neq 0$ ist, gilt noch $\Psi_1 \notin \ker D$ und insgesamt $\Psi_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp} \setminus \ker D$. Da nach Beweisteil F) unter der Voraussetzung $U_1 \neq 0$ der Unterraum $\ker D$ entweder Hyperebene von $\mathcal{M}_1^{\perp}$ ist oder mit $\mathcal{M}_1^{\perp}$ zusammenfällt, folgt hier noch, dass $\ker D$ eine Hyperebene von $\mathcal{M}_1^{\perp}$ und $\mathcal{M}_1^{\perp}$ die direkte Summe von $\ker D$ und $[\Psi_1]$ ist.

b) 18) $\Rightarrow$ 19): Für ein $\Psi_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp} \setminus \ker D$ gilt nach Hilfssatz 6.2, 6) $D\Psi_1 = \mu S_0$ mit einem reellen $\mu \neq 0$. Daher ist $S_0 = D\Psi_1/\mu = D\Psi_1$‘ mit $\Psi_1$‘$= \Psi_1/\mu \in \mathcal{M}_1^{\perp} \setminus \ker D$. Ohne Einschränkung kann also $\mu = 1$ und $D\Psi_1 = S_0$ angenommen werden.
Ein zweiter Beweis für die Aussage „19) $\Leftrightarrow$ 18)“ verläuft mittels I) und J).

c) 19) $\Leftrightarrow$ 20): „$\Rightarrow$“: Existenz: Falls es ein $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $D\Psi_1 = S_0$ gibt, erhält man wegen der orthogonalen Zerlegung $\mathbb{R}^K = D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) \oplus \ker D$ von $\mathbb{R}^K$ für $\Psi_1$ die additive Zerlegung

$$\Psi_1 = \vartheta_1 + Y_1 \quad \text{mit } \vartheta_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N),\ Y_1 \in \ker D$$

und für das zugehörige $D$-Bild die Gleichung

$$S_0 = D\Psi_1 = D\vartheta_1 + DY_1 = D\vartheta_1.$$

Somit ist $S_0$ auch das $D$-Bild eines $\vartheta_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$.
Unität: Dieses $D$-Urbild $\vartheta_1$ von $S_0$ in $D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ ist eindeutig bestimmt: Für zwei $D$-Urbilder $\vartheta_1$, $\vartheta_1$‘ $\in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ von $S_0$ und deren Differenz $\Delta := \vartheta_1 - \vartheta_1$‘ $\in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ gilt nämlich

$$D\Delta = D\vartheta\text{‘} - D\vartheta = S_0 - S_0 = 0,$$

also $\Delta \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) \cap \ker D = O$ und $\vartheta_1 = \vartheta_1$‘.
„$\Leftarrow$“: Umgekehrt ist ein $D$-Urbild $\vartheta_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ ($\subseteq \mathbb{R}^K$) von $S_0$ auch ein in $\mathbb{R}^K$ liegendes $D$-Urbild $\Psi_1$ von $S_0$.

d) 20) $\Rightarrow$ 21): Für dieses eindeutig bestimmte $D$-Urbild $\vartheta_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ ($\subseteq \mathbb{R}^K$) von $S_0$ gilt wie für die anderen $D$-Urbilder von $S_0 \neq 0$ in $\mathbb{R}^K$ nach Hilfssatz 6.2, 5) auch $\vartheta_1 \in D^{-1}([S_0]) \setminus \ker D = \mathcal{M}_1^{\perp} \setminus \ker D$, also insgesamt

$$\vartheta_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{M}_1^{\perp} \setminus \ker D.$$

e) 21) $\Rightarrow$ 20): Ein beliebiges $\vartheta_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{M}_1^{\perp} \setminus \ker D$ liefert nach b) bzw. Hilfssatz 6.2, 6) im Allgemeinen als $D$-Bild nur $D\vartheta_1 = \mu S_0$ mit $\mu \neq 0$. Erst nach der Normierung $\vartheta_1$‘ $= \vartheta_1/\mu$ erhält man ein $\vartheta_1$‘ $\in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{M}_1^{\perp} \setminus \ker D$ mit dem $D$-Bild $D\vartheta_1$‘ $= S_0$. Die Einzigkeit dieses $\vartheta_1$‘ wurde bereits in c) gezeigt.

f) **Anmerkung:** Bei der weiter unten in Abschnitt 6.2.3 noch folgenden Charakterisierung der Arbitragefreiheit (AF) durch die Existenz eines *positiven* $D$-Urbilds $\Psi_1$ von $S_0$ kann aber bei der additiven Zerlegung von $\Psi_1$ im Allgemeinen nicht auf die Positivität des eindeutig bestimmten $D^{\mathsf{T}}$-duplizierbaren $D$-Urbild $\vartheta_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ von $S_0$ geschlossen werden.

H) 18) $\exists\ \Psi_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp} \setminus \ker D \Leftrightarrow$ 22) $D(\mathcal{M}_1^{\perp}) = [S_0] \neq O \Leftrightarrow$ 23) $D(\mathbb{R}^K) = D(\mathcal{M}_1) \oplus [S_0]$:

a) 18) $\Leftrightarrow$ 22): Da nach Hilfssatz 6.2, 6) die Inklusion $D(\mathcal{M}_1^{\perp}) \subseteq [S_0]$ gilt, ist die Übereinstimmung $D(\mathcal{M}_1^{\perp}) = [S_0] \neq O$ (Vorauss. $S_0 \neq 0$) gleichbedeutend zur Existenz eines $\Psi_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp}$ mit $D\Psi_1 \neq 0$:
„$\Rightarrow$“: Mit einem derartigen $\Psi_1$ folgen nämlich aus den Inklusionen

$$O \neq [D\Psi_1] \subseteq D(\mathcal{M}_1^{\perp}) \subseteq [S_0]$$

die Dimensionsungleichungen

$$1 = \dim [D\Psi_1] \leq \dim D(\mathcal{M}_1^{\perp}) \leq \dim [S_0] \leq 1,$$

also $D(\mathcal{M}_1^{\perp}) = [S_0] \neq O$.

"⇐": Umgekehrt folgt aus der Übereinstimmung der Unterräume $D(\mathcal{M}_1^{\perp})$ und $[S_0] \neq O$ die Existenz eines $\Psi_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp}$ mit $D\Psi_1 = S_0 \neq 0$, somit die Existenz eines $\Psi_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp} \setminus \ker D$.

b) 22) ⇔ 23): Diese Äquivalenz wurde schon in B) bewiesen.

I) 11) $S_0 \in D(\mathbb{R}^K)$ bzw. $\exists\ \Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $D\Psi_1 = S_0$ ⇔ 24) $\exists\ \Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit (PG$\Psi_1^{\top}D^{\top}$) $\Psi_1^{\top}D^{\top}h_1 = S_0^{\top}h_1$ $\forall\ h_1 \in \mathbb{R}^N$:

a) 11) ⇒ 24): Aus der der Existenz eines $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $D\Psi_1 = S_0$ folgt durch Multiplikation dieser Gleichung mit $h_1$ das Gleichungssystem (PG$\Psi_1^{\top}D^{\top}$) der Preisgleichungen für die duplizierbaren Zahlungsprofile $X_1 = D^{\top}h_1$ ($h_1 \in \mathbb{R}^N$):

$$\Psi_1^{\top}D^{\top}h_1 = (D\Psi_1)^{\top}h_1 = S_0^{\top}h_1 .$$

b) 24) ⇒ 11): Umgekehrt folgt aus der Existenz eines $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K$, für welches die Preisgleichungen (PG$\Psi_1^{\top}D^{\top}$) erfüllt sind, zunächst die Bedingung $(D\Psi_1 - S_0)^{\top}h_1 = 0\ \ \forall\ h_1 \in \mathbb{R}^N$ und wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts (indem man $h_1 = D\Psi_1 - S_0$ einsetzt) dann die Existenz eines $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $D\Psi_1 - S_0 = 0$ bzw.

$$D\Psi_1 = S_0.$$

Wegen der Voraussetzung $S_0 \neq 0$ folgt damit aus (PG$\Psi_1^{\top}D^{\top}$) auch $D\Psi_1 = S_0 \neq 0$ bzw. $\Psi_1 \notin \ker D$.

c) **Anmerkung** zur Charakterisierung der Arbitragefreiheit im nächsten Abschnitt 6.2.3: Die „inhomogenen" Bedingungen 19) [$\exists\ \Psi_1 \in D^{-1}(\{S_0\})$] und 28) [$\exists\ \Psi_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp\kappa_0}$ ] mit einem positiven Vektor $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K$, d. h. die Existenz eines *positiven* $D$-Urbilds $\Psi_1$ von $S_0$ bzw. eines *positiven* $\kappa$-normierten $\mathcal{M}_1$-Normalenvektors $\Psi_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp\kappa_0} = D^{-1}(\{S_0\})$, sind auch äquivalent zur Existenz eines *positiven* Bewertungsvektors $\Psi_1$, mit dem die Preisgleichungen (PG$\Psi_1^{\top}D^{\top}$) gelten, und damit zur Arbitragefreiheit (AF).

J) 24) (PG$\Psi_1^{\top}D^{\top}$) ⇔ 25) (KPG$\Psi_1^{\top}D^{\top}$): $\exists\ \Psi_1 \in \mathbb{R}^K \setminus \ker D$ mit $\Psi_1^{\top}D^{\top}g_1 = 0\ \ \forall\ g_1 \in [S_0]^{\perp}$
⇔ 26) $\exists\ \Psi_1 \in \mathbb{R}^K \setminus \ker D$ mit $\Psi_1^{\top}Z_1 = 0\ \forall\ Z_1 \in \mathcal{M}_1$
⇔ 27) $\exists\ \Psi_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp} \setminus \ker D$:

a) 24) ⇒ 25): Aus (PG$\Psi_1^{\top}D^{\top}$) folgt unter der Voraussetzung (AWS) $S_0 \neq 0$ speziell für $h_1 = S_0 \neq 0$ die Ungleichung

$$(D\Psi_1)^{\top}S_0 = \Psi_1^{\top}D^{\top}S_0 = S_0^{\top}S_0 > 0$$

und somit $D\Psi_1 \neq 0$ bzw. $\Psi_1 \notin \ker D$. Weiter erhält man aus (PG$\Psi_1 D^{\top}$) speziell für die $h_1 = g_1 \in [S_0]^{\perp}$ die Preisgleichungen für die NE-Zahlungsprofile $Z_1 = D^{\top}g_1 \in \mathcal{M}_1 = D^{\top}([S_0]^{\perp})$ mit dem Preis $\pi(Z_1) = S_0^{\top}g_1 = 0$, also (KPG$\Psi_1^{\top}D^{\top}$).

b) 25) ⇒ 26) und 27) : Mit dem vorgegebenen $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K \setminus \ker D$ folgt aus 25) (KPG$\Psi_1^{\top}D^{\top}$)

$$\Psi_1^{\top}D^{\top}g_1 = 0\ \ \forall\ g_1 \in [S_0]^{\perp}$$

die Bedingung 26)

$$\Psi_1^{\top}Z_1 = 0\ \ \forall\ Z_1 = D^{\top}g_1 \in \mathcal{M}_1 = D^{\top}([S_0]^{\perp})$$

und die Inzidenz $\Psi_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp} \setminus \ker D$ (Bed. 27).

c) 27) ⇒ 26) ⇒ 25): Für ein $\Psi_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp} \setminus \ker D$ (Bedingung. 27) gilt auch die in der Bed. 26) angegebene Gleichung

$$\Psi_1^{\top}Z_1 = 0\ \forall\ Z_1 \in \mathcal{M}_1 = D^{\top}([S_0]^{\perp})$$

und dann auch die in der Bed. 25) (KPG$\Psi_1^{\top}D^{\top}$) angegebene Gleichung

$$\Psi_1^{\top}D^{\top}g_1 = 0\ \ \forall\ g_1 \in [S_0]^{\perp}.$$

d) 25) ⇒ 24): Aus der in (KPG$\Psi_1^{\top}D^{\top}$) angegebenen Gleichung

$$(D\Psi_1)^{\top}g_1 = \Psi_1^{\top}D^{\top}g_1 = 0$$

für die Portfoliovektoren $g_1 \in [S_0]^\perp$ folgt auch $D\Psi_1 \perp [S_0]^\perp$ bzw.

$$D\Psi_1 \in [S_0]^{\perp\perp} = [S_0],$$

wegen der Voraussetzung $\Psi_1 \notin \ker D$ bzw. $D\Psi_1 \neq 0$ dann $D\Psi_1 = \lambda S_0$ mit $\lambda \neq 0$ und o. E. (ggf. durch Übergang von $\Psi_1$ zu $\Psi_1' = \Psi_1/\lambda$)

$$D\Psi_1 = S_0$$

bzw. ${\Psi_1}^\mathsf{T} D^\mathsf{T} = {S_0}^\mathsf{T}$ und daraus die Gültigkeit von (PG${\Psi_1}^\mathsf{T} D^\mathsf{T}$).

e) **Anmerkung**: Hinsichtlich der Charakterisierung der Arbitragefreiheit im nächsten Abschnitt 6.2.3 ist hier schon anzumerken, dass aus der Positivität des Vektors $\Psi_1 = \Phi_1 > 0$ bei einem $D$-Bild

$$D\Psi_1 = \lambda S_0 \in [S_0]$$

im Falle $\lambda < 0$ durch den Übergang zu $\Psi_1' = \Psi_1/\lambda$ kein positives Urbild $\Psi_1'$ von $S_0$ erhalten wird. Somit kann bei einem positiven $\Psi_1$, das eine der „homogenen" Bedingungen 25) ≡ (KPG${\Psi_1}^\mathsf{T} D^\mathsf{T}$), 26) [$\exists\ \Psi_1 \in \mathbb{R}^K \setminus \ker D$ mit ${\Psi_1}^\mathsf{T} Z_1 = 0\ \forall\ Z_1 \in \mathcal{M}_1$], 27) bzw. 18) [$\exists\ \Psi_1 \in \mathcal{M}_1^\perp \setminus \ker D$] mit ihren homogenen Gleichungen erfüllt, nicht auf auf ein positives Urbild $\Phi_1$ von $S_0$ und die Arbitragefreiheit (AF) geschlossen werden. Daher sind bei Vorliegen eines positiven Urbilds $\Phi_1$ von $S_0$ bzw. eines Diskontvektors (positiven Bewertungsvektors) $\Phi_1$ mit (PG${\Psi_1}^\mathsf{T} D^\mathsf{T}$) diese Bedingungen 25), 26), 27) nur notwendige Bedingungen für $\Phi_1$ und nicht charakteristisch für (AF).

K) 19) $\exists\ \Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $D\Psi_1 = S_0 \Leftrightarrow$ 28) $\exists\ \Psi_1 \in\ {\mathcal{M}_1}^{\perp\kappa_0}$ :

Diese Aussage folgt nach Hilfssatz 6.2, 12) unter der Voraussetzung (ZVU) (spezielle Formulierung für das Einperiodenmodell in Abschnitt 6.2.2) oder der Voraussetzung eines Numéraires $B$ mit deterministischem $B_1$ unmittelbar aus der Übereinstimmung der affinen Unterräume $D^{-1}(\{S_0\})$ und ${\mathcal{M}_1}^{\perp\kappa_0}$ $= \mathcal{M}_1^\perp \cap \{\kappa(X_1) = \kappa_0\}$.

**Anmerkung** zur Charakterisierung der Arbitragefreiheit im nächsten Abschnitt 6.2.3: Nach dieser Übereinstimmung gilt auch die Übereinstimmung der Teilmengen

$$D^{-1}(\{S_0\}) \cap\ \mathbb{R}^K_{>0} = {\mathcal{M}_1}^{\perp\kappa_0} \cap \mathbb{R}^K_{>0} =: {\mathcal{M}_1}^{\perp\kappa_0+},$$

sodass die Existenz eines positiven $D$-Urbilds $\Phi_1$ von $S_0$ äquivalent ist zur Existenz eines positiven $\kappa$-normierten $\mathcal{M}_1$-Normalenvektors in ${\mathcal{M}_1}^{\perp\kappa_0+}$.

Es werden jetzt noch zwei Charakterisierungen für das gleichzeitige Auftreten der Vollständigkeit und einer Zusatzbedingung (LOP oder $N = K$) bewiesen, die auch in der Tabelle 6.2 in Abschnitt 6.2.4 aufgeführt werden.

L) 29) (VS) ∧ LOP ⇔ 30) $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^K = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_1^\perp$ mit dim $\mathcal{M}_1^\perp = 1$:

29) ⇒ 30): Aus der Vollständigkeit (VS) des Marktmodells folgt $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^K = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_1^\perp$ und aus dem LOP nach 15) unter der Voraussetzung $U_1 \neq 0$ die Hyperebenenstruktur von $\mathcal{M}_1$ in $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$. Mit dem Dimensionssatz folgt dann die Eindimensionalität von $\mathcal{M}_1^\perp$:

$$\dim \mathcal{M}_1^\perp = \dim D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) - \dim \mathcal{M}_1 = \dim D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) - (\dim D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) - 1) = 1.$$

30) ⇒ 29): Aus $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_1^\perp = \mathbb{R}^K \wedge \dim \mathcal{M}_1^\perp = 1$ folgt unmittelbar die Vollständigkeit $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^K$, mit dem Dimensionssatz die Hyperebenenstruktur von $\mathcal{M}_1$ in $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$,

$$\dim \mathcal{M}_1 = \dim D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) - \dim \mathcal{M}_1^\perp = \dim D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) - 1$$

und daraus gemäß 15) unter der Voraussetzung $U_1 \neq 0$ das LOP.

M) 31) (VS) ∧ $N = K \Leftrightarrow$ 32) $D^\mathsf{T}$ isomorph ⇔ 33) $D$ isomorph

a) 31) ⇒ 32): Die Vollständigkeit (VS) bedeutet die Surjektivität der Abbildung $D^\mathsf{T}$, also $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^K$ und dim $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = K$. Aus der Dimensionsgleichung dim $\mathbb{R}^N = N = K =$ dim $\mathbb{R}^K$ folgt mit dem Dimensionssatz für die lineare Abbildung $D^\mathsf{T} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^K$

$$\dim \ker D^\mathsf{T} = \dim \mathbb{R}^N - \dim D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = N - K = 0,$$

$\ker D^\mathsf{T} = O$ und somit auch die Injektivität von $D^\mathsf{T}$. Insgesamt ist dann $D^\mathsf{T}$ ein Isomorphismus, d. h. eine bijektive lineare Abbildung.

b) 32) ⇒ 31): Falls $D^\mathsf{T}$ ein Isomorphismus ist, bedeutet die Surjektivität von $D^\mathsf{T}$ die Vollständigkeit des Marktmodells ($D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^K$) und die Injektivität von $D^\mathsf{T}$ zunächst $\ker D^\mathsf{T} = O$ und mit dem Dimensionssatz für die lineare Abbildung $D^\mathsf{T} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^K$ dann

$$K = \dim \mathbb{R}^K = \dim D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \dim \mathbb{R}^N - \dim \ker D^\mathsf{T} = N - 0 = N,$$

also die Dimensionsgleichung $N = K$.

c) 32) ⇔ 33): Aus den zu Beginn des Kapitels 6 angegebenen direkten Zerlegungen der Vektorräume $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ in orthogonale Komplemente folgt, dass $D^\mathsf{T}$ genau dann injektiv ist ($\ker D^\mathsf{T} = O$), wenn $D$ surjektiv ist ($D(\mathbb{R}^K) = \mathbb{R}^N$) und analog dass $D$ genau dann injektiv ist ($\ker D = O$), wenn $D^\mathsf{T}$ surjektiv ist ($D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^K$). Insgesamt ist die lineare Abbildung $D^\mathsf{T}$ genau dann bijektiv (isomorph), wenn $D$ bijektiv ist. □

### 6.2.3 Charakterisierungen der Arbitragefreiheit (AF)

Die in den Räumen $\mathcal{H}_N = \mathbb{R}^{2N}$ und $\mathcal{W} = \mathbb{R}^{1+K}$ des Einperiodenmodells mit den Abbildungen $V_0$ und $L$ formulierte Aussage der Arbitragefreiheit (AF) wird nun in entsprechende Aussagen in den niedrigerdimensionalen Räumen $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ mit den Abbildungen $S_0^\mathsf{T}$ und $D^\mathsf{T}$ übersetzt. Für die Begründung der nachfolgenden Äquivalenz der AF-Bedingung für die Handelsstrategien $h \in \mathbb{R}^{2N}$ zu einer AF-Bedingung für die Portfoliovektoren $h_1 \in \mathbb{R}^N$ wird verwendet, dass die Startkapital-Bedingung $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = 0$ mit einem $h_0 \in \mathbb{R}^N$ stets erfüllbar ist: Für die nichttriviale Beweisrichtung kann nämlich zu einem Portfoliovektor $h_1 \in \mathbb{R}^N$ mit schwach positivem Zahlungsprofil $L'h_1 \gtrdot 0$ noch ein Portfoliovektor $h_0 \in \mathbb{R}^N$ mit $S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = 0$ gewählt werden (z. B. $h_0 = 0$), sodass dann die damit gebildete Handelsstrategie $h = (h_0,h_1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{2N}$ eine Arbitragegelegenheit ist: $V_0(h) = 0 \wedge Lh = L'h_1 \gtrdot 0$. Für die triviale Beweisrichtung kann aus einer Arbitragegelegenheit $h = (h_0,h_1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{2N}$ (mit $V_0(h) = 0$ und $Lh \gtrdot 0$) auf den in $h$ enthaltenen Portfoliovektor $h_1 \in \mathbb{R}^N$ mit der Bedingung

$$(-S_0^\mathsf{T} h_1, D^\mathsf{T} h_1)^\mathsf{T} = L'h_1 = Lh \gtrdot 0$$

geschlossen werden. Diese Ungleichung bedeutet für eine Arbitragegelegenheit $h \in \mathbb{R}^{2N}$, dass das Negative des Reinvestitionswerts $R_0(h) = S_0^\mathsf{T} h_1$ bei $t = 0$ zusammen mit dem Vermögenswert $V_1(h) = D^\mathsf{T} h_1$ bei $t = 1$ schwach positiv ist. Die in dieser Beschreibung von (AF) auftretende Vektorungleichung $L'h_1 \gtrdot 0$ wird nun durch äquivalente Ungleichungen für die Teilvektoren $-S_0^\mathsf{T} h_1$ und $D^\mathsf{T} h_1$ umformuliert und anschließend geometrisch interpretiert.

**Äquivalente Formulierungen der Arbitragefreiheit** (AF) **mit Ungleichungen für die Teilvektoren von** $L'h_1$

(AF)

$$:\Leftrightarrow \nexists\, h = (h_0,h_1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{2N} \text{ mit } V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = 0 \wedge Lh = \begin{pmatrix} S_0^{\delta\mathsf{T}} & -S_0^\mathsf{T} \\ 0 & D^\mathsf{T} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 - S_0^\mathsf{T} h_1 \\ D^\mathsf{T} h_1 \end{pmatrix} \gtrdot 0$$

$$\Leftrightarrow \nexists\, h_1 \in \mathbb{R}^N \text{ mit } L'h_1 = \begin{pmatrix} -S_0^\mathsf{T} h_1 \\ D^\mathsf{T} h_1 \end{pmatrix} \gtrdot 0$$

$$\Leftrightarrow [\text{AF0:} \quad \nexists\, h_1 \in \mathbb{R}^N\colon S_0^\mathsf{T} h_1 < 0 \wedge D^\mathsf{T} h_1 \geq 0] \wedge [\text{AF1:} \quad \nexists\, h_1 \in \mathbb{R}^N\colon S_0^\mathsf{T} h_1 \leq 0 \wedge D^\mathsf{T} h_1 \gtrdot 0]$$

$$\Leftrightarrow [\text{AF0.0:} \quad \nexists\, h_1 \in \mathbb{R}^N\colon S_0^\mathsf{T} h_1 < 0 \wedge D^\mathsf{T} h_1 = 0] \wedge [\text{AF1:} \quad \nexists\, h_1 \in \mathbb{R}^N\colon S_0^\mathsf{T} h_1 \leq 0 \wedge D^\mathsf{T} h_1 \gtrdot 0]$$

$$\Leftrightarrow [\text{AF0:} \quad \nexists\, h_1 \in \mathbb{R}^N\colon S_0^\mathsf{T} h_1 < 0 \wedge D^\mathsf{T} h_1 \geq 0] \wedge [\text{AF1.0:} \quad \nexists\, h_1 \in \mathbb{R}^N\colon S_0^\mathsf{T} h_1 = 0 \wedge D^\mathsf{T} h_1 \gtrdot 0]$$

Die hier als Teilbedingung AF1.0 auftretende speziellere Arbitragefreiheit stimmt mit der nachfolgend in Abschnitt 6.2.4 noch ausführlicher behandelten sf-Arbitragefreiheit (AFsf) überein. Geometrisch bedeutet die Arbitragefreiheit (AF), dass im Raum $\mathbb{R}^N$ der Portfoliovektoren $h_1$ bestimmte verallgemeinerte polyedrische Kegel leer sind. Beispielsweise ist für die Bedingung (AF0) der halboffene konvexe lineare Kegel $\{S_0^\mathsf{T} h_1 < 0 \wedge D^\mathsf{T} h_1 \geq 0\}$ leer und für (AF1) der punktierte konvexe lineare Kegel $\{S_0^\mathsf{T} h_1 \leq 0 \wedge D^\mathsf{T} h_1 \gtrdot 0\}$ leer.[24]

[24] Es wird hier eine Kurzschreibweise für Mengen verwendet. Beispielsweise ist $\{D^\mathsf{T} h_1 \geq 0\}$ $:= \{h_1 \in \mathbb{R}^N : D^\mathsf{T} h_1 \geq 0\}$ ein abgeschlossener polyedrischer Kegel und $H^{\leq}_{S_0,0} := \{S_0^\mathsf{T} h_1 \leq 0\}$

**Geometrische Interpretation der Arbitragefreiheit** (AF) **durch die Lage von $S_0^\mathsf{T}$-Bildern in $\mathbb{R}$ bzw. von $D^\mathsf{T}$-Bildern in $\mathbb{R}^K$**

Die Arbitragefreiheit (AF) kann geometrisch in $\mathbb{R}$ durch die Lage der $S_0^\mathsf{T}$-Bilder von $\{D^\mathsf{T}h_1 \geq 0\}$, $\{D^\mathsf{T}h_1 \gneq 0\}$ und $\{D^\mathsf{T}h_1 = 0\} = \ker D^\mathsf{T}$ zur negativen Halbachse $\mathbb{R}_{<0}$, nichtpositiven Halbachse $\mathbb{R}_{\leq 0}$, nichtnegativen Halbachse $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und zur positiven Halbachse $\mathbb{R}_{>0}$ und in $\mathbb{R}^K$ durch die Lage der $D^\mathsf{T}$-Bilder von $\{S_0^\mathsf{T}h_1 < 0\}$, $\{S_0^\mathsf{T}h_1 \leq 0\}$ und $\{S_0^\mathsf{T}h_1 = 0\} = \ker S_0^\mathsf{T}$ bezüglich des nichtnegativen Orthanten $\mathbb{R}^K_{\geq 0}$, des schwach positiven Orthanten $\mathbb{R}^K_{\gneq 0}$ und des Nullpunkts $O \in \mathbb{R}^K$ beschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
\text{(AF)} \Leftrightarrow \text{(AF0)} \quad & S_0^\mathsf{T}(\{D^\mathsf{T}h_1 \geq 0\}) \cap \mathbb{R}_{<0} = \varnothing \quad \wedge \quad \text{(AF1)} \quad S_0^\mathsf{T}(\{D^\mathsf{T}h_1 \gneq 0\}) \cap \mathbb{R}_{\leq 0} = \varnothing \\
\Leftrightarrow \text{(AF0.0)} \; & S_0^\mathsf{T}(\{D^\mathsf{T}h_1 = 0\}) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \wedge \quad \text{(AF1)} \quad S_0^\mathsf{T}(\{D^\mathsf{T}h_1 \gneq 0\}) \subseteq \mathbb{R}_{>0} \\
\Leftrightarrow \text{(AF0)} \quad & D^\mathsf{T}(\{S_0^\mathsf{T}h_1 < 0\}) \cap \mathbb{R}^K_{\geq 0} = \varnothing \quad \wedge \quad \text{(AF1)} \quad D^\mathsf{T}(\{S_0^\mathsf{T}h_1 \leq 0\}) \cap \mathbb{R}^K_{\gneq 0} = \varnothing \\
\Leftrightarrow \text{(AF0.0)} \; & D^\mathsf{T}(\{S_0^\mathsf{T}h_1 < 0\}) \cap O = \varnothing \quad \wedge \quad \text{(AF1)} \quad D^\mathsf{T}(\{S_0^\mathsf{T}h_1 \leq 0\}) \cap \mathbb{R}^K_{\gneq 0} = \varnothing \\
\Leftrightarrow \text{(AF0)} \quad & D^\mathsf{T}(\{S_0^\mathsf{T}h_1 < 0\}) \cap \mathbb{R}^K_{\geq 0} = \varnothing \quad \wedge \quad \text{(AF1.0)} \; D^\mathsf{T}(\{S_0^\mathsf{T}h_1 = 0\}) \cap \mathbb{R}^K_{\gneq 0} = \varnothing \; .
\end{aligned}
$$

Die Arbitragefreiheit (AF) bedeutet, dass es in $\mathbb{R}^{1+K}$ kein Kapitalmarktgeschäft $Z = (Z_0,Z_1)^\mathsf{T} \in \mathcal{M} = L'(\mathbb{R}^N)$ gibt, das schwach positiv ist ($Z \gneq 0$). Sie kann aber in $\mathbb{R}^K$ beispielsweise nicht allein durch die spezielle Arbitragefreiheit (AF1.0) gesichert werden, nach der es kein schwach positives NE-Zahlungsprofil $Z_1 \in \mathcal{M}_1 = D^\mathsf{T}([S_0]^\perp) = D^\mathsf{T}(\{S_0^\mathsf{T}h_1 = 0\})$ gibt. Vielmehr muss hier im Allgemeinen in $\mathbb{R}^K$ auch noch die spezielle Arbitragefreiheit (AF0) erfüllt sein, nach der auch kein nichtnegatives duplizierbares Zahlungsprofil $X_1 = D^\mathsf{T}h_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ existiert, für dessen Duplikationsstrategie $h_1$ der Reinvestitionswert $R_0(h) = S_0^\mathsf{T}h_1$ negativ ist.

Im nachfolgenden Abschnitt 6.2.4 wird aber mit der Bedingung (GI), d. h. mit der Existenz einer gewinnbringenden Investition auf dem Kapitalmarkt $\mathcal{M}$, noch eine Zusatzvoraussetzung an das Einperiodenmodell angegeben, unter der die spezielle sf-Arbitragefreiheit (AF1.0) äquivalent ist zur allgemeinen Arbitragefreiheit (AF), also inklusive (AF0). Eine grafische Darstellung der Unterraumstrukturen in $\mathbb{R}^{2N}$ und $\mathbb{R}^{1+K}$ bzw. in $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^K$ für ein arbitragefreies Einperiodenmodell wird in den Abbildungen 6.1 a, 6.2 a, 6.3 a, 6.5 a und 6.6 a gegeben.

**Fundamentalsatz der Preistheorie im Mehrperiodenmodell**

Im zeitdiskreten Mehrperiodenmodell besagt der Fundamentalsatz der Preistheorie[25] (erste Hauptsatz der Preistheorie mit der Charakterisierung der Arbitragefreiheit, siehe Satz 3.8 in Abschnitt 3.6.1), dass die Arbitragefreiheit

(AF$\mathcal{M}$) $\qquad \mathcal{M} \cap \mathcal{U}_{\gneq 0} = \emptyset$

des Marktmodells äquivalent ist zur Existenz eines stochastischen Prozesses

(N+) $\qquad \Phi \in \mathcal{M}^{\perp +} := \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{U}_{>0}$ ,

---

$:= \{h_1 \in \mathbb{R}^N : S_0^\mathsf{T}h_1 \leq 0\}$ ein abgeschlossener linearer Halbraum. Weiter gilt $\{D^\mathsf{T}h_1 \gneq 0\} = \{D^\mathsf{T}h_1 \geq 0\} \setminus \ker D^\mathsf{T}$ und $H^<_{S_0,0} := \{S_0^\mathsf{T}h_1 < 0\} := \{S_0^\mathsf{T}h_1 \leq 0\} \setminus \ker S_0^\mathsf{T}$.

[25] Kremer behandelt den Fundamentsatz der Preistheorie für das Einperiodenmodell auf (2011) S. 40, (2017) S. 23, 24, 37 und für das Mehrperiodenmodell auf (2011) S. 175, 176.

also eines positiven $\mathcal{M}$-Normalenvektors bzw. eines sogenannten Zustands(preis)prozesses[26] des Marktmodells:

$$(\mathrm{AF}\,\mathcal{M}) \Leftrightarrow \exists\, \Phi \in \mathcal{M}^{\perp +}.$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar (ohne den Umweg über einen Trennungssatz) aus dem Alternativsatz 3.7 von Abschnitt 3.6.1 über die Disjunktheit des linearen Unterraums $\mathcal{M} = L(\ker V_0)$ zum schwach positiven (punktierten nichtnegativen) Orthanten $\mathcal{W}_{\gneq 0} = \{X \in \mathcal{W} : X \gneq 0\}$. Der dabei verwendete Alternativsatz entspricht dem Alternativsatz von Stiemke über die Lösbarkeit von homogenen linearen Ungleichungssystemen. O. E. kann für den deterministischen Wert $\Phi_0(A_0) = \Phi_0(\Omega) \in ]0,\infty[$ der Wert $\Phi_0 = 1$, also der Prozess $\Phi$ als normierter positiver Normalenvektor (normierter Zustandspreisprozess) von $\mathcal{M}$ gewählt werden. Für die Menge

$$\mathcal{M}^{\perp +} := \mathcal{M}^{\perp} \cap \{X > 0\}$$

der positiven $\mathcal{M}$-Normalenvektoren, die Menge

$$\mathcal{M}^{\perp 1+} := \mathcal{M}^{\perp} \cap \{X_0 = 1, X > 0\}$$

der in $X_0$ normierten und positiven $\mathcal{M}$-Normalenvektoren und die Menge

$$\mathcal{A}^{+} = \{\Phi \in \mathcal{W} : \Phi > 0 \wedge (\mathrm{PG}\Phi)\ \Phi^{\mathsf{T}} L(h) = v_0(h)\ \forall\, h \in \mathcal{H}_N\} = \mathcal{A} \cap \{X > 0\}$$

der positiven Bewertungsprozesse (der Diskontierungsprozesse) gelten nach Abschnitt 3.6.1 die Inklusionen

$$\mathcal{M}^{\perp 1+} \subseteq \mathcal{A}^{+} \subseteq \mathcal{M}^{\perp +}$$

($\mathcal{M}^{\perp 1+} \neq \mathcal{M}^{\perp +}$) und die Übereinstimmungen

$$\mathcal{A}^{+} = L^{*-1}(\{b\}) \cap \{X > 0\},$$

$$\mathcal{A}^{+} = \mathcal{M}^{\perp 1+} \qquad \text{im Fall i) } (\mathrm{AWS}^{\delta}) \quad S_0^{\delta} \neq 0,$$

$$\mathcal{A}^{+} = \mathcal{M}^{\perp +} \qquad \text{im Sonderfall ii)} \quad S_0^{\delta} = 0.$$

Damit erhält man mit diesen Mengen die Charakterisierungen der Arbitragefreiheit (AF) im Mehrperiodenmodell durch die Existenz

- eines positiven $\mathcal{M}$-Normalenvektors $\Phi$,
- eines normierten positiven $\mathcal{M}$-Normalenvektors $\Phi$,
- eines normierten positiven Bewertungsprozesses (eines Diskontierungsprozesses) $\Phi$ und
- eines normierten positiven $L^*$-Urbilds $\Phi$ von $b$.

Die **Plausibilisierung der Bezeichnungen Zustandspreisprozess und Diskontierungsprozess** erfolgt für das Mehrperiodenmodell in den Abschnitten 3.6.1, 3.8.1 und 4.3 unter der zusätzlichen Voraussetzung der Vollständigkeit (VS) des Marktmodells: Der normierte positive $\mathcal{M}$-Normalenvektor $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1+}$ besitzt bezüglich der $\mathcal{W}$-Basis $\mathbf{1}_{t,A_{t,k}}$ ($t \in I, A_{t,k} \in \mathcal{P}_t$) die Koordinaten $\Phi_t(A_{t,k}) = \pi(\mathbf{1}_{t,A_{t,k}})$, welche die Preise der AD-Papiere $\mathbf{1}_{t,A_{t,k}}$ sind und daher salopp auch als Preise der Ereignisse $A_{t,k}$ bezeichnet werden können. Speziell für den Zeitindex $t = T$ sind die Koordinaten $\Phi_T(\omega_k) = \pi(\mathbf{1}_{T,\omega_k})$ die Preise der AD-Papiere $\mathbf{1}_{T,\omega_k}$ bzw. der Zustände $\omega_k \in \Omega$. Außerdem ist der Prozess $\Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1+} \subseteq \mathcal{A}^{+}$ nach Abschnitt 3.6.1 ein positiver

---

[26] Die Bezeichnung Zustands(preis)prozess findet man bei Kremer (2011) auf S. 41, 175, die Bezeichnung normierter Zustandsprozess auf S. 177 und die Bezeichnung Diskontierungsprozess bei Kremer (2017) auf S. 55.

Bewertungsprozess, sodass die Preise $\pi(X)$ der Zahlungsprofile $X \in L(\mathbb{R}^{2N})$ mit dem stochastischen Diskontierungsvektor $\Phi$ bzw. mit den Diskontierungsfaktoren $\Phi_t(A_{t,k})$ durch Diskontierung (Abzinsung, Barwertberechnung) der Zahlungskomponenten $X_t(A_{t,k})$ auf den Zeitpunkt 0 berechnet werden. Die Diskontierung kann dabei tatsächlich als Glattstellung (additive Ergänzung, Replizierung) mit einem Ergänzungsgeschäft vom Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ durchgeführt werden.

**Charakterisierungen der Arbitragefreiheit** (AF) **im Einperiodenmodell**
Mit dem Unterraum

$$\mathcal{M} = L(\ker V_0) = L'(\mathbb{R}^N)$$

der Kapitalmarktgeschäfte in $\mathbb{R}^{1+K}$ (der Beweis der zweiten Darstellung von $\mathcal{M}$ erfolgt in Abschnitt 6.2.2) ist die Arbitragefreiheit (AF) in der Mengenschreibweise definiert durch leeren Durchschnitt

(AF$\mathcal{M}$) $\qquad \mathcal{M} \cap \mathbb{R}^{1+K}_{\gneq 0} = \emptyset$

und mittels des Fundamentalsatzes der Preistheorie charakterisiert durch die Existenz eines positiven $\mathcal{M}$-Normalenvektors $\Phi$:

(N+) $\qquad \exists\, \Phi \in \mathcal{M}^{\perp +} = \mathcal{M}^{\perp} \cap \mathbb{R}^{1+K}_{>0}$ .

Die oben für das Mehrperiodenmodell angegebenen Inklusionen für $\mathcal{M}^{\perp 1+}$, $\mathcal{A}^{+}$ und $\mathcal{M}^{\perp +}$ gelten insbesondere auch im Einperiodenmodell, wobei hier nach Abschnitt 6.2.2 noch $\mathcal{M}^{\perp +} = \ker L'^{\mathsf{T}} \cap \{X > 0\}$ gilt:

$$\mathcal{M}^{\perp 1+} \subseteq \mathcal{A}^{+} \subseteq \mathcal{M}^{\perp +} = \ker L'^{\mathsf{T}} \cap \{X > 0\}.$$

Als Folgerung aus diesen Inklusionen ist die Arbitragefreiheit (AF) charakterisiert durch die Existenz

- eines positiven $\mathcal{M}$-Normalenvektors $\Phi$,
- eines normierten positiven $\mathcal{M}$-Normalenvektors $\Phi$,
- eines normierten positiven Bewertungsprozesses (eines Diskontierungsprozesses) $\Phi$,
- eines normierten positiven $L^{\mathsf{T}}$-Urbilds $\Phi$ von $b$ und
- eines normierten positiven $L'^{\mathsf{T}}$-Urbilds $\Phi$ von 0.

Gemäß den Anmerkungen im Beweis von Satz 6.1 in Abschnitt 6.2.2 wird dann die Arbitragefreiheit (AF) auch noch charakterisiert durch die Existenz eines

- positiven Bewertungsvektors (eines Diskontvektors) $\Phi_1 \in \mathcal{A}_1^{+} := \mathcal{A}_1 \cap \{X_1 > 0\}$[27]

mit seinen Preisgleichungen (PG$\Phi_1{}^{\mathsf{T}}D^{\mathsf{T}}$) $\Phi_1{}^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}} h_1 = S_0{}^{\mathsf{T}} h_1$ für die $D^{\mathsf{T}}$-duplizierbaren Zahlungsprofile $X_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N)$ und durch die Existenz eines

- positiven $D$-Urbilds $\Phi_1$ von $S_0$.

Aus einem normierten Diskontierungsprozess $\Phi = (1, \Phi_1)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{A}^{+}$ $(\subseteq \mathbb{R}^{1+K})$ erhält man nämlich mit der Komponente $\Phi_1 \in \mathcal{A}_1^{+}$ $(\subseteq \mathbb{R}^K)$ einen Diskontvektor und umgekehrt erhält man zu einem Diskontvektor $\Phi_1 \in \mathcal{A}_1^{+}$ im Einperiodenmodell nur durch die Ergänzung um $\Phi_0 = 1$ mit $\Phi = (1, \Phi_1)^{\mathsf{T}} \in \mathcal{A}^{+}$ auch einen normierten Diskontierungsprozess und damit die Gültigkeit

---

[27] Die Definition und verschiedene Darstellungen findet man für $\mathcal{A}$ in Abschnitt 3.3.3, für $\mathcal{A}^{+}$ in Abschnitt 3.6.1, für $\mathcal{A}_T$ in den Abschnitten 5.3.3 und 5.3.8, für $\mathcal{A}_T{}^{+}$ in Abschnitt 5.3.10, für $\mathcal{A}_1$ in Abschnitt 6.2.2 und für $\mathcal{A}_1{}^{+}$ in Abschnitt 6.2.3.

der Arbitragefreiheit (AF). Aus einem positiven normierten $L^\top$-Urbild $\Phi = (1,\Phi_1)^\top$ von $b$ bzw. aus einem positiven normierten $\mathcal{M}$-Normalenvektor $\Phi = (1,\Phi_1)^\top \in \mathcal{M}^{\perp 1+}$ erhält man mit der Komponente $\Phi_1$ ein positives $D$-Urbild $\Phi_1$ von $S_0$ und umgekehrt kann ein positives $D$-Urbild $\Phi_1$ von $S_0$ allein mit der Hinzunahme von $\Phi_0 = 1$ zu einem positiven normierten $L^\top$-Urbild $\Phi = (1,\Phi_1)^\top$ von $b$ bzw. einem positiven normierten $\mathcal{M}$-Normalenvektor $\Phi = (1,\Phi_1)^\top \in \mathcal{M}^{\perp 1+}$ ergänzt werden.
In einem arbitragefreien Einperiodenmodell ist $S_0$ das $D$-Bild eines Vektors $\Phi_1 > 0$. Dies heißt, dass der zum Zeitpunkt $t = 0$ gehörige deterministische Preisvektor $S_0$, der in der Nutzenfunktion $S_0^\top$ den Bewertungsvektor für die Portfoliovektoren $h_1$ darstellt, eine Positivkombination (positive Linearkombination) der Spalten $S_1^\delta(\omega_k)$ von $D$, also der zum Zeitpunkt $t = 1$ und zu den verschiedenen möglichen Zuständen $\omega_k \in \Omega$ gehörigen Kursen des Preisvektors $S$. [28]

Weiter wird unter der Voraussetzung (ZVU) (die spezielle Formulierung für das Einperiodenmodell erfolgt in Abschnitt 6.2.2) nach Hilfssatz 6.2, 12 $D^{-1}(\{S_0\}) = \mathcal{M}_1^{\perp\kappa_0}$ oder nach von Satz 6.3, 28 mit der Anmerkung im zugehörigen Beweisteil K) die Arbitragefreiheit (AF) noch charakterisiert durch die Existenz eines

- positiven $\kappa$-normierten $\mathcal{M}_1$-Normalenvektors $\Phi_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp\kappa_0+}$.

Die Charakterisierungen von (AF) werden im nachfolgenden Satz zusammengefasst.

**Satz 6.4 Charakterisierungen der Arbitragefreiheit** (AF) **im Einperiodenmodell**

(AF)

$\Leftrightarrow \exists\, \Phi \in \mathcal{M}^{\perp+} = \mathcal{M}^{\perp} \cap \{X > 0\}$ (pos. $\mathcal{M}$-Normalenvektor)

$\Leftrightarrow \exists\, \Phi \in \mathcal{M}^{\perp 1+} = \mathcal{M}^{\perp} \cap \{X_0 = 1, X > 0\}$ (norm. pos. $\mathcal{M}$-Normalenvektor)

$\Leftrightarrow \exists\, \Phi \in \mathcal{A}^+$, d. h. $\Phi > 0$ mit (PG$\Phi$) (pos. Bew.proz. m. Preisgl. = Diskontierungsproz.)

$\Leftrightarrow \exists\, \Phi \in (L^\top)^{-1}(\{b\}) \cap \{X > 0\}$ (positives $L^\top$-Urbild von $b$)

$\Leftrightarrow \exists\, \Phi \in (L^{\prime\top})^{-1}(\{0\}) \cap \{X_0 = 1, X > 0\}$ (norm. pos. $L^{\prime\top}$-Urbild von 0)

$\Leftrightarrow \exists\, \Phi_1 \in \mathcal{A}_1^+$, d. h. $\Phi_1 > 0$ mit (PG$\Phi_1^\top D^\top$) (pos. Bew.vekt. m. Preisgl. = Diskontvektor)

$\Leftrightarrow \exists\, \Phi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $\Phi_1 > 0$ und $D\Phi_1 = S_0$ (positives $D$-Urbild von $S_0$)

$\Leftrightarrow S_0 \in D(\mathbb{R}^K_{>0})$ ($S_0$ ist $D$-Bild eines $\Phi_1 > 0$)

$\Leftrightarrow \exists\, \Phi_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp\kappa_0+} := \mathcal{M}_1^{\perp\kappa_0} \cap \mathbb{R}^K_{>0}$ (pos. $\kappa$-norm. $\mathcal{M}_1$-Normalenv. bei ZVU)

Die **Plausibilisierung der Bezeichnungen Diskontvektor und Zustands(preis)vektor**[29] für einen positiven Bewertungsvektor $\Phi_1$ ergibt sich aufgrund der Gültigkeit der Preisgleichungen (PG$\Phi_1^\top D^\top$), nach denen der Preis $\pi(X_1) = S_0^\top h_1$ eines $D^\top$-duplizierbaren Zahlungs-

---

[28] In Abschnitt 3.6.3 wird beim Beweis von Satz 3.10 diese Aussage auf ein in einem Mehrperiodenmodell enthaltenes Einperiodenmodell übertragen: Für ein im Mehrperiodenmodell enthaltenes Einperiodenmodell liegt die Arbitragefreiheit (AF) genau dann vor, wenn die Preisprozesskomponente $S_{t-1}(A_{t-1,k})$ des Ausgangsknotens $A_{t\text{-}1,k}$ eine Positivkombination der Preisprozesskomponenten $S_t^\delta(A_{t,m})$ seiner Nachfolgerknoten $A_{t,m} \subseteq A_{t\text{-}1,k}$ ist und somit ein Diskontvektor $\varphi_t$ für das Einperiodenmodell existiert.

[29] Die Bezeichnung Zustands(preis)vektor findet man bei Kremer (2011), S. 36, 45, die Bezeichnung Diskontvektor bei Kremer (2017), S. 26.

profils $X_1 = D^\mathsf{T} h_1 \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$ durch die Barwertberechnung für das Zahlungsprofil $X_1$ bzw. die Diskontierung der Zahlungskomponenten $X_{1,k}$ mittels der positiven Diskontierungsfaktoren $\Phi_{1,k}$ berechnet wird ($k = 1,\ldots,K$; vergleiche die Interpretation der Preisberechnung mittels eines Diskontvektors des Mehrperiodenmodells in Abschnitt 5.3.11 für $T \in \mathbb{N}$). Die ökonomische Interpretation als spezielle Glattstellung (additive Ergänzung, Replizierung) mit einer Linearkombination von Ergänzungsgeschäften $\widehat{\xi}^{1,k} = -\, d_{1,k} \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} + \mathbf{1}_{1,\omega_k} \in \mathcal{M}$ ($d_{1,k} = \Phi_{1,k}$) kann unter der zusätzlichen Voraussetzung der sf-Vollständigkeit (VSsf) $\mathbf{1}_{T,\omega_k} \in \mathcal{W}(T)$ für $k = 1,\ldots,K$ wie in Abschnitt 5.3.11, 1) erfolgen.
Weiter sind nach den Abschnitten 3.6.1 und 5.3.11 bei vorliegender sf-Vollständigkeit (VSsfT) die Komponenten $\Phi_{1,k}$ des Diskontvektors $\Phi_1$ auch die Preise der AD-Papiere $\mathbf{1}_{T,\omega_k} = (0,\ldots,0,\mathbf{1}_{\omega_k})^\mathsf{T} \in \mathcal{W}(T)$ bzw. der AD-Zahlungsprofile $\mathbf{1}_{\omega_k} = \mathbf{e_k} \in \mathbb{R}^K$ zu den Zuständen $\omega_k \in \Omega$, sodass diese Komponenten salopp auch als Zustandspreise und der Diskontvektor auch als Zustandspreisvektor bezeichnet werden.

**Eine Besonderheit des Einperiodenmodells** im Gegensatz zum echten Mehrperiodenmodell ist, dass die allgemeine Arbitragefreiheit (AF) sowohl äquivalent zur Existenz eines Diskontierungsprozesses $\Phi \in \mathcal{A}^+$ als auch äquivalent zur Existenz eines Diskontvektors $\Phi_1 \in \mathcal{A}_1{}^+$ ist. Aus einem normierten Diskontierungsprozess $\Phi = (1, \Phi_1)^\mathsf{T}$ erhält man nämlich mit der Komponente $\Phi_1$ einen Diskontvektor und umgekehrt erhält man speziell hier im Einperiodenmodell zu einem Diskontvektor $\Phi_1$ nur durch die alleinige Hinzunahme der Komponente $\Phi_0 = 1$ mit $\Phi = (1, \Phi_1)^\mathsf{T}$ auch einen normierten Diskontierungsprozess und dadurch die Gültigkeit der Arbitragefreiheit (AF).
In einem echten Mehrperiodenmodell mit einer Laufzeit $T \geq 2$ dagegen wird nach Satz 5.6, c) auch unter der zusätzlichen Voraussetzung (ZVU) oder der stärkeren Voraussetzung eines Numéraires $S^N = B > 0$ mit deterministischem $B_T$ (siehe Abschnitt 5.3.5 bei den Anmerkungen zum Preis von $\mathbf{1}_\Omega$) durch die Existenz eines Diskontvektors $Y_T$ nur die speziellere sf-Arbitragefreiheit (AFsf) und nicht die allgemeine Arbitragefreiheit (AF) charakterisiert. Nach Abschnitt 5.3.13 erhält man aus einem Diskontvektor $Y_T$ durch die Hinzunahme weiterer Komponenten nur die sf-Diskontierungsprozesse $Y$ für die Bewertung der endfälligen sf-duplizierbaren Zahlungsprofile $X \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ und im Allgemeinen nicht einen Diskontierungsprozess für die Bewertung der allgemeinen Zahlungsprofile $X \in L(\mathcal{H}_N)$. Demnach kann von einem Diskontvektor nicht auf die Existenz eines Diskontierungsprozesses und auf die allgemeine Arbitragefreiheit (AF) geschlossen werden. Nach einer Feststellung in Abschnitt 5.1.9, die sich als Folgerung aus Satz 3.10 und Satz 5.3 ergibt, ist ein Mehrperiodenmodell mit Numéraire genau dann sf-arbitragefrei und nicht arbitragefrei, wenn alle enthaltenen Einperiodenmodelle sf-arbitragefrei sind und mindestens eines dieser Einperiodenmodelle nicht arbitragefrei ist.

**Notwendige Bedingungen für die Arbitragefreiheit** (AF)
Die in Satz 6.3 angegebenen „homogenen“ LOP-Charakterisierungen 25) KPG$\Psi_1 D^\mathsf{T}$, 26), 27), 18) mittels homogener Gleichungssysteme sind im Gegensatz zu den „inhomogenen“ LOP-Charakterisierungen 24) PG$\Psi_1 D^\mathsf{T}$, 19) $\exists\ \Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $D\Psi_1 = S_0$, 28) $\exists\ \Psi_1 \in \mathcal{M}_1{}^{\perp \kappa_0 +}$ mit einem positiven Vektor $\Psi_1 = \Phi_1$ aber nur notwendige Folgerungen aus der Arbitragefreiheit (AF) für einen Diskontvektor (positiven Bewertungsvektor) $\Phi_1$ und nicht charakteristisch für (AF). Wie in Beweisteil J des Satzes 6.3 schon angemerkt wird, kann nämlich umgekehrt aus

der Gültigkeit dieser Bedingungen mit einem *positiven* Vektor $\Psi_1$ nicht auf die Existenz eines positiven $D$-Urbildes $\Phi_1$ von $S_0$ bzw. eines positiven Bewertungsvektors mit den Preisgleichungen $PG\Psi_1 D^\top$ und damit nicht auf die Arbitragefreiheit (AF) geschlossen werden.
Aus der Arbitragefreiheit (AF) erhält man beispielsweise die folgende notwendige Aussage: Zunächst gibt es einen positiven Vektor $\Phi_1 \in \mathbb{R}^K$, der ein Diskontvektor und dann insbesondere auch ein Bewertungsvektor ist (Bed. 24 von Satz 6.3). Mit diesem ist nach der LOP-Charakterisierung 18) von Satz 6.3 der Unterraum $\mathcal{M}_1^\perp$ die direkte Summe von $\ker D$ und dem eindimensionalen Unterraum $\operatorname{lin} \Phi_1$ ist:

$$\mathcal{M}_1^\perp = \ker D \oplus \operatorname{lin} \Phi_1.$$

Für die $D^\top$-duplizierbaren Zahlungsprofile $X_1 \in D^\top(\mathbb{R}^N) = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{M}_1$ hat man die Darstellung

$$X_1 = \lambda U_1 + Z_1$$

mit dem eindeutig bestimmten Beurteilungsparameter $\lambda \in \mathbb{R}$, dem NE-Zahlungsprofil $Z_1 \in \mathcal{M}_1$ und dem Preis

$$\pi(X_1) = \Phi_1^\top X_1 = \lambda \Phi_1^\top U_1 + \Phi_1^\top Z_1 = \lambda \pi(U_1).$$

Demnach ist

$$X_1 = (\pi(X_1)/\pi(U_1))U_1 + Z_1$$

mit $\pi(X_1) = \Phi_1^\top X_1$ und $\pi(U_1) = \Phi_1^\top U_1$.

**Charakterisierung eines arbitragefreien vollständigen Einperiodenmodells**
Nach der Charakterisierung der Vollständigkeit (VS) in Abschnitt 6.2.1 durch die Injektivität der Abbildung $D$ folgt, dass das gleichzeitige Auftreten der Arbitragefreiheit (AF) und der Vollständigkeit (VS) äquivalent dazu ist, dass $S_0$ ein positives $D$-Urbild $\Phi_1$ besitzt und $S_0$ wegen $\ker D = O$ höchstens ein $D$-Urbild aufweist. Das einzige $D$-Urbild $\Phi_1$ von $S_0$ ist also positiv:

$$(\mathrm{AF}) \wedge (\mathrm{VS}) \Leftrightarrow [\exists_1\ \Phi_1 \in \mathbb{R}^K \text{ mit } D\Phi_1 = S_0] \wedge \Phi_1 > 0.$$

Für den Fall (AF) ∧ (VS) folgt noch mittels der LOP-Charakterisierungen von Satz 6.3, 19) und 18) mit dem einzigen und positiven $D$-Urbild $\Phi_1$ notwendig

$$\mathcal{M}_1^\perp = \ker D \oplus [\Phi_1] = [\Phi_1]$$

und dann

$$D^\top(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^K = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_1^\perp \text{ mit } \mathcal{M}_1^\perp = [\Phi_1],\ \Phi_1 > 0.$$

Diese Darstellung von $D^\top(\mathbb{R}^N)$ ist aber nicht hinreichend für (AF), da ein positiver Vektor $\Phi_1 \in \mathcal{M}_1^\perp = D^{-1}([S_0])$ im Allgemeinen kein positives $D$-Urbild von $S_0$ und damit nicht (AF) liefert.

**Vielfalt der Diskontvektoren im arbitragefreien Einperiodenmodell**
Analog zur Vielfalt der Diskontierungsprozesse für die allgemeinen Zahlungsprofile $X \in \mathcal{W}$ (Satz 3.9 von Abschnitt 3.6.1) und zur Vielfalt der Diskontvektoren für die endfälligen Zahlungsprofile $X \in \mathcal{W}(T)$ (Satz 5.8, c in Abschnitt 5.2.4 und Satz 5.9, b in Abschnitt 5.2.5) erhält man hier im Einperiodenmodell eine entsprechende Aussage. Zunächst existiert bei gültiger Arbitragefreiheit (AF) im Einperiodenmodell nach Satz 6.4 zumindest ein Diskontvektor (positiver Bewertungsvektor) $\Phi_1$ mit der Gültigkeit der Preisgleichungen $(PG\Phi_1^\top D^\top)$ bzw. zumindest ein positives $D$-Urbild $\Phi_1$ von $S_0$. Die Berechnung eines Diskontvektors $\Psi_1 = \Phi_1$ erfolgt durch die Lösung des linearen Gleichungssystems $D\Psi_1 = S_0$ mit der $N \times K$-Koeffizientenmatrix $D$. Die Menge

$$\mathcal{A}_1 = \{\Psi_1 \in \mathbb{R}^\Omega : (PG\Psi_1^\top D^\top)\ \ \Psi_1^\top D^\top h_1 = S_0^\top h_1\ \ \forall\, h_1 \in \mathbb{R}^N\}$$

aller Bewertungsvektoren $\Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ ist als Lösungsmenge $D^{-1}(\{S_0\})$ des inhomogenen linearen Gleichungssystems $D\Psi_1 = S_0$ ein affiner Unterraum des $\mathbb{R}^K$, der gegeben ist durch die Minkowski-Summe

$$\mathcal{A}_1 = D^{-1}(\{S_0\}) = \Phi_1 + \ker D \ (\subseteq \mathcal{M}_1{}^{\perp})$$

mit einem speziellen Bewertungsvektor $\Phi_1$ und dem Kern $\ker D = \{DX_1 = 0\}$ der linearen Abbildung $D : \mathbb{R}^K \longrightarrow \mathbb{R}^N$. Die zu diesem affinen Unterraum gehörige Richtung ist der lineare Unterraum $\ker D$.

Unter der Voraussetzung (ZVU) oder der stärkeren Voraussetzung der Existenz eines deterministischen Numéraires $B = (B_0,B_1)^{\mathsf{T}}$ hat man nach Hilfssatz 6.2, 12 für $\mathcal{A}_1$ noch die Gleichungsdarstellung

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{M}_1{}^{\perp\kappa_0} = \mathcal{M}_1{}^{\perp} \cap \{\kappa(X_1) = \kappa_0\}.$$

Die Menge der Diskontvektoren (positiven Bewertungsvektoren) ist die Teilmenge

$$\mathcal{A}_1{}^{+} := \mathcal{A}_1 \cap \{X_1 > 0\}$$

von $\mathcal{A}_1$, also als Durchschnitt des (abgeschlossenen) affinen Unterraums $\mathcal{A}_1$ und des offenen linearen Halbraums $\{X_1 > 0\}$ ein teilweise offenes konvexes Polyeder. Für $\mathcal{A}_1{}^{+}$ hat man die $D$-Urbild-Darstellung und unter der Voraussetzung (ZVU) noch eine Gleichungsdarstellung:

**Darstellungen der Menge $\mathcal{A}_1{}^{+}$ der Diskontvektoren:**

$$\mathcal{A}_1{}^{+} = D^{-1}(\{S_0\}) \cap \{X_1 > 0\} \ (\subseteq \mathcal{M}_1{}^{\perp+});$$

$$\mathcal{A}_1{}^{+} = \mathcal{M}_1{}^{\perp\kappa_0} \cap \{X_1 > 0\} = \mathcal{M}_1{}^{\perp\kappa_0+} \text{ bei (ZVU).}$$

Hinsichtlich der Maximalanzahl affin unabhängiger Diskontvektoren von $\mathcal{A}_1{}^{+}$ wird jetzt die folgende Aussage bewiesen:

**Die Maximalzahl affin unabhängiger Diskontvektoren** im arbitragefreien Einperiodenmodell ist $p + 1$, wenn $p := \dim \ker D = K$ - Rang $D$ die Dimension des Unterraums $\ker D$ ist. Im Spezialfall $p = 0$ liegt ein vollständiges arbitragefreies Einperiodenmodell vor und existiert genau ein Diskontvektor.

**Beweis:** Es gelte die Arbitragefreiheit (AF), es sei $\Phi_1 \in D^{-1}(\{S_0\}) \cap \mathbb{R}^K_{>0} \subseteq \mathcal{M}_1{}^{\perp}$ ein Diskontvektor (positiver Bewertungsvektor) und $p := \dim \ker D$.

a) Aufgrund der Definition der Dimension eines Unterraums gibt es höchstens $p$ linear unabhängige Vektoren im Unterraum $\ker D$. Aufgrund der Definition der affinen Unabhängigkeit[30] gibt es dann höchstens $p + 1$ affin unabhängige Vektoren im nichtleeren affinen Unterraum $\mathcal{A}_1 = \Phi_1 + \ker D$, dessen Richtung (Translationsunterraum der Verbindungsvektoren) der lineare Unterraum $\ker D$ ist. Insbesondere gibt es dann auch nur höchstens $p + 1$ affin unabhängige Diskontvektoren in $\mathcal{A}_1$.

b) Es ist jetzt noch zu zeigen, dass es mindestens $p + 1$ affin unabhängige Diskontvektoren in $\mathcal{A}_1$ gibt. Wegen $p = \dim \ker D$ gibt es zunächst (maximal) $p$ linear unabhängige Vektoren im linearen Unterraum $\ker D$:

$$Z_1^i \in \ker D \qquad (i = 1,\ldots,p).$$

[30] Die Definition der affinen Unabhängigkeit und ein Literaturhinweis wird in einer Fußnote von Abschnitt 5.2.4 gegeben.

Setzt man für den Index $i = 0$ noch $Z_1^0 := 0$ ($\in \mathbb{R}^K$), so erhält man aufgrund der Definition der affinen Unabhängigkeit die Maximalzahl von $p + 1$ affin unabhängigen Vektoren im affinen Unterraum $\mathcal{A}_1$:

$$\Phi_1^i := \Phi_1 + \lambda_i Z_1^i \in \Phi_1 + \ker D = \mathcal{A}_1$$

($\Phi_1 \in D^{-1}(\{S_0\}) \cap \mathbb{R}^K_{>0}$, $\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = 0,\ldots,p$). Durch die passende Wahl der Skalare $\lambda_i$,

$$0 < \lambda_i < \min \{q_k / |z_k^i| : k \text{ mit } z_k^i < 0\} \qquad (q_k := \Phi_1(\omega_k),\ z_k^i := Z_1^i(\omega_k)),$$

kann noch die Positivität der $p + 1$ Zustandsfunktionen $\Phi_1^i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ gesichert werden (vergleiche Beweis von Satz 3.9, Beweisteil b und Satz 5.8). Aus der Arbitragefreiheit (AF) bzw. aus der Existenz eines Diskontvektors $\Phi_1$ folgt also auch die Existenz von mindestens $p + 1$ affin unabhängigen Diskontvektoren in $\mathcal{A}_1$. Insgesamt ist dann die Existenz von maximal $p + 1$ affin unabhängigen Diskontvektoren gezeigt. □

## 6.2.4 Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit (AFsf)

Die oben in Abschnitt 6.2.3 bei den verschiedenen äquivalenten Formulierungen der Arbitragefreiheit (AF) des Einperiodenmodells auftretende Teilbedingung

(AF1.0) $\quad \nexists\, h_1 \in \mathbb{R}^N\colon\ S_0^{\mathsf{T}} h_1 = 0 \wedge D^{\mathsf{T}} h_1 \gneq 0$

ist äquivalent zur sf-Arbitragefreiheit

(AFsf) $\quad \nexists\, h = (h_0,h_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $V_0(h) = 0 \wedge L_0(h) = 0 \wedge V_1(h) \gneq 0$.

**Beweis:** Aus einer sf-Arbitragegelegenheit $h = (h_0,h_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{2N}$ (mit $V_0(h) = 0$, $R_0(h) = V_0(h)$ und $V_1(h)$ $S_1^\delta h_1 = D^{\mathsf{T}} h_1 \gneq 0$) ergibt sich nämlich auch ein Portfoliovektor $h_1 \in \mathbb{R}^N$ mit $S_0^{\mathsf{T}} h_1 = R_0(h) = 0$ und $D^{\mathsf{T}} h_1$ $\gneq 0$. Umgekehrt kann zu einem Portfoliovektor $h_1 \in \mathbb{R}^N$ mit $S_0^{\mathsf{T}} h_1 = 0$ und $D^{\mathsf{T}} h_1 \gneq 0$ noch ein Portfoliovektor $h_0 \in \mathbb{R}^N$ mit $S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = 0$ (z. B. $h_0 = 0$) gewählt werden, sodass dann die damit gebildete Handelsstrategie $h = (h_0,h_1)^{\mathsf{T}}$ eine sf-Arbitragegelegenheit ist: $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = 0$, $L_0(h) = V_0(h) - R_0(h)$ $= - S_0^{\mathsf{T}} h_1 = 0$ und $V_1(h) = D^{\mathsf{T}} h_1 \gneq 0$. □

Diese sf-Arbitragefreiheit (AFsf) wird in Abschnitt 5.1.2 allgemein im Mehrperiodenmodell ($T \in \mathbb{N}$) für die mit sog. selbstfinanzierenden Handelsstrategien duplizierten endfälligen Zahlungsprofile definiert. Im Einperiodenmodell ($T = 1$) lautet ihre mengentheoretische Beschreibung mit dem Unterraum

$$\mathcal{M}_1 = V_1(\mathcal{H}_N^{sf} \cap \ker V_0) = D^{\mathsf{T}}(\{S_0^{\mathsf{T}} h_1 = 0\})$$

der NE-Zahlungsprofile (Beweis der Darstellung von $\mathcal{M}_1$ in Beweisteil a von Abschnitt 6.2.1) und dem schwach positiven Orthanten $\mathbb{R}^K_{\gneq 0} = \{X_1 \in \mathbb{R}^K : X_1 \gneq 0\}$ folgendermaßen:

(AFsf$\mathcal{M}_1$) $\quad \mathcal{M}_1 \cap \mathbb{R}^K_{\gneq 0} = \emptyset$.

In einem Einperiodenmodell mit gültiger sf-Arbitragefreiheit (AF1.0) ≙ (AFsf) sind also die selbstfinanzierenden Arbitragegelegenheiten ausgeschlossen. Diese spezielle sf-Arbitragefreiheit bzw. die Disjunktheit des linearen Unterraums $\mathcal{M}_1$ von $\mathbb{R}^K$ zum schwach positiven Orthanten $\mathbb{R}^K_{\gneq 0}$ ist nach dem Alternativsatz 3.7 von Abschnitt 3.6.1 äquivalent zur Existenz eines positiven $\mathcal{M}_1$-Normalenvektors

$$Q_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp} = D^{-1}([S_0])$$

bzw. eines positiven $D$-Urbildes von $[S_0] = \operatorname{lin} S_0$ (zur Darstellung von $\mathcal{M}_1^{\perp}$ als $D$-Urbild-

menge siehe Beweisteil b von Abschnitt 6.2.1):

**Charakterisierung der sf-Arbitragefreiheit** (AFsf) **im Einperiodenmodell durch die Existenz eines positiven $\mathcal{M}_1$-Normalenvektors bzw. positiven $D$-Urbilds von** $[S_0]$

$$\begin{aligned}(\text{AFsf}) \quad &\Leftrightarrow \exists\, Q_1 \in \mathcal{M}_1{}^{\perp +} := \mathcal{M}_1{}^{\perp} \cap \mathbb{R}^K_{>0} \\ &\Leftrightarrow \exists\, Q_1 \in \mathbb{R}^K \text{ mit } Q_1 > 0 \wedge DQ_1 = \lambda S_0,\ \lambda = \lambda(Q_1) \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Bei Vorliegen der sf-Arbitragefreiheit gilt dann für beliebige Portfoliovektoren $h_1 \in \mathbb{R}^N$ bzw. für beliebige $D^\top$-duplizierbare Zahlungsprofile $X_1 = D^\top h_1 \in D^\top(\mathbb{R}^N)$ die Gleichung

(PG$Q_1{}^\top D^\top\lambda$) $\quad Q_1{}^\top D^\top h_1 = \lambda S_0{}^\top h_1$.

Nur wenn $\lambda(Q_1) = 1$ ist, ist $Q_1$ ein Urbild von $S_0$ und auch ein Diskontvektor, der für die Preisberechnung der Zahlungsprofile $X_1 \in D^\top(\mathbb{R}^N)$ verwendet werden kann, und das Einperiodenmodell auch arbitragefrei ($\mathcal{A}_1 = D^{-1}(\{S_0\})$ nach Abschnitt 6.2.2).

Analog zur Abbildung 5.8 in Abschnitt 5.3.2 zu LOP und LOPsfT und zur Abbildung 5.11 in Abschnitt 5.3.10 zu AF und AFsf für das Mehrperiodenmodell wird jetzt in der nachfolgenden Abbildung 6.7 für das Einperiodenmodell der Zusammenhang zwischen den Versionen LOP, LOP$D^\top$ des Law of One Price und der Existenz eines Bewertungsprozesses $\Psi$ oder Bewertungsvektors $\Psi_1$, der Zusammenhang zwischen den Versionen AF und AFsf der Arbitragefreiheit und der Existenz eines Diskontierungsprozesses $\Phi$, eines Diskontvektors (positiven Bewertungsvektors) $\Phi_1$ oder eines positiven $\mathcal{M}_1$-Normalenvektors $Q_1$ beschrieben.

Die Definition der Menge $\mathcal{A}$ der Bewertungsprozesse für die allgemeinen $L$-duplizierbaren Zahlungsprofile $X \in L(\mathcal{H}_N)$ im Mehrperiodenmodell wird in Abschnitt 3.3.3 angegeben. Dort wird auch die Übereinstimmung von $\mathcal{A}$ mit der $L^*$-Urbildmenge $L^{*-1}(\{b\})$ und unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) noch mit dem affinen Unterraum $\mathcal{M}^{\perp 1}$ gezeigt. Die Definition der Menge $\mathcal{A}_T$ der Bewertungsvektoren im Mehrperiodenmodell der sf-duplizierbaren (endfälligen) Zahlungsprofile $X_T \in V_T(\mathcal{H}_N^{sf})$ erfolgt in Abschnitt 5.3.3. Verschiedene Darstellungen von $\mathcal{A}_T$ werden in Abschnitt 5.3.8 gegeben und zwar als Minkowskisumme $\vartheta_T + \ker V_T^{sf*}$, unter der Voraussetzung (ZVU) als affiner Unterraum $\mathcal{M}_T{}^{\perp\kappa_0} = \mathcal{M}_T{}^{\perp} \cap \{\kappa(X_1) = \kappa_0\}$ und als Urbildmenge $V_T^{sf*-1}(\{c\})$. Die Definition der Menge $\mathcal{A}_1$ der Bewertungsvektoren im Einperiodenmodell wird in Abschnitt 6.2.2 angegeben. Dort wird auch die Übereinstimmung von $\mathcal{A}_1$ mit der $D$-Urbildmenge $D^{-1}(\{S_0\})$ und unter der Voraussetzung (ZVU) noch mit dem affinen Unterraum $\mathcal{M}_1{}^{\perp\kappa_0} = \mathcal{M}_1{}^{\perp} \cap \{\kappa(X_1) = \kappa_0\}$ begründet.

Die Definition der Menge $\mathcal{A}^+ := \mathcal{A} \cap \{X > 0\}$ der positiven Bewertungsprozesse (Diskontierungsprozesse) im Mehrperiodenmodell und ihre Übereinstimmung mit $L^{*-1}(\{b\}) \cap \{X > 0\}$ und unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) mit $\mathcal{M}^{\perp 1+} = \mathcal{M}^{\perp} \cap \{X_0 = 1, X > 0\}$ findet man in Abschnitt 3.6.1. Die Definition der Menge $\mathcal{A}_T{}^+ := \mathcal{A}_T \cap \{X_T > 0\}$ der positiven Bewertungsvektoren (Diskontvektoren) im Mehrperiodenmodell der sf-duplizierbaren Zahlungsprofile erfolgt in Abschnitt 5.3.10. Dort findet man auch unter der Voraussetzung (ZVU) die Darstellung als konvexes Polyeder $\mathcal{M}_T{}^{\perp\kappa_0+} = \mathcal{M}_T{}^{\perp} \cap \{\kappa(X_1) = \kappa_0, X_1 > 0\}$. Die Definition der Menge $\mathcal{A}_1^+ := \mathcal{A}_1 \cap \{X_1 > 0\}$ der positiven Bewertungsvektoren (Diskontvektoren) im Einperiodenmodell wird in Abschnitt 6.2.3 angegeben, ebenso ihre Übereinstimmung mit $D^{-1}(\{S_0\}) \cap \{X_1 > 0\}$ und unter der Voraussetzung (ZVU) mit $\mathcal{M}_1{}^{\perp\kappa_0+} = \mathcal{M}_1{}^{\perp} \cap \{\kappa(X_1) = \kappa_0, X_1 > 0\}$.

Die Äquivalenz des LOP zur Existenz eines Bewertungsprozesses $\Psi$ und zur Existenz eines Bewertungsvektors $\Psi_1$ wird in Abschnitt 6.2.2 in Beweisteil 1) von Satz 6.1 aus dem Mehrperiodenmodell abgeleitet und dann noch innerhalb der niedrigerdimensionalen Räume des Einperiodenmodells beim Beweis von Satz 6.3 in Teil A) 7) (LOP$D^\top$) $\Leftrightarrow$ 11) $\exists\ \Psi_1 \in D^{-1}(\{S_0\})$ und Teil I) 11) $\Leftrightarrow$ 24) (PG$\Psi_1 D^\top$) begründet.
Die Äquivalenz der sf-Arbitragefreiheit (AFsf) zur Existenz eines positiven Normalenvektors $Q_1$ von $\mathcal{M}_1$ wird in Abschnitt 6.2.4 begründet und im Mehrperiodenmodell im Beweis von Satz 5.6, a) in Abschnitt 5.1.12. Die Folgerung der sf-Arbitragefreiheit (AFsf) aus der Existenz eines Diskontvektors $\Phi_1 \in \mathcal{A}_1^+ \subseteq \mathcal{M}_1^{\perp+}$ erhält man, da dieser Diskontvektor (positiver Bewertungsvektor) ebenfalls ein positiver $\mathcal{M}_1$-Normalenvektor ist. Die umgekehrte Schlussweise von der sf-Arbitragefreiheit (AFsf) auf die Existenz eines Diskontvektors $Y_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp\kappa_0+} = \mathcal{A}_1^+$ wird ausgehend von einem $\kappa$-normierten positiven $\mathcal{M}_1{}^\perp$-Normalenvektor $Y_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp\kappa_0+}$ unter der Voraussetzung (ZVU) mittels der Darstellung $\mathcal{A}_T = \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0}$ von Abschnitt 5.3.8 und der daraus resultierenden Darstellung $\mathcal{A}_T^+ = \mathcal{M}_T^{\perp\kappa_0+}$ von Abschnitt 5.3.10 bewiesen. Die Äquivalenz der spezielleren sf-Arbitragefreiheit (AFsf) zur allgemeinen Arbitragefreiheit (AF) kann im Einperiodenmodell nachfolgend unter der Voraussetzung (GI), nämlich der Existenz einer gewinnbringenden Investition im Kapitalmarkt des Einperiodenmodells, gezeigt werden.

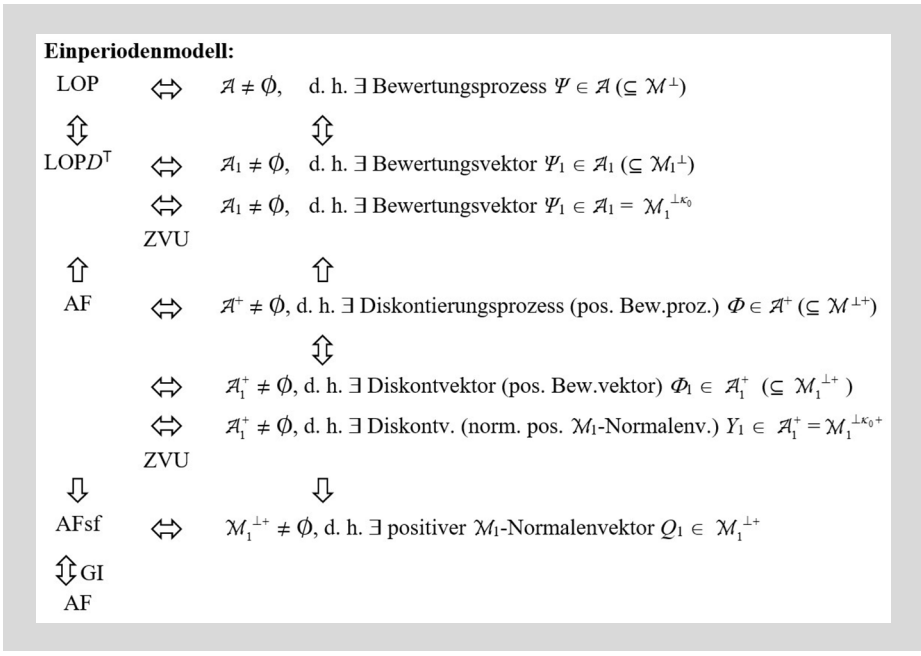



**Abb. 6.7** Zusammenhang der verschiedenen Aussagen zum Law of One Price LOP bzw. LOP$D^\top$, zur Arbitragefreiheit AF bzw. AFsf und zur Existenz eines Bewertungsprozesses, Bewertungsvektors, Diskontierungsprozesses $\Phi$, Diskontvektors $\Phi_1$ und positiven $\mathcal{M}_1$-Normalenvektors $Q_1$

Nachfolgend wird jetzt noch eine Voraussetzung (GI) angegeben, unter der im sf-arbitragefreien Einperiodenmodell zum positiven $\mathcal{M}_1$-Normalenvektor $Q_1$ auch ein Diskontvektor $\Phi_1$ und damit ein Diskontierungsprozess $\Phi = (1,\Phi_1)^\top$ existiert, sodass das Einperiodenmodell auch arbitragefrei ist.

**Hinreichende Bedingung** (GI) **für die Äquivalenz der spezielleren sf-Arbitragefreiheit** (AF1.0) **zur allgemeinen Arbitragefreiheit** (AF)

Es wird nun gezeigt, dass unter der nachfolgenden Voraussetzung (GI)[31] in einem sf-arbitragefreien Einperiodenmodell auch die zweite Bedingung (AF0) für die allgemeine Arbitragefreiheit (AF) = (AF0) ∧ (AF1.0) gesichert ist. Bei dieser Voraussetzung (GI) wird für das Einperiodenmodell gefordert, dass es zum Zeitpunkt $t = 1$ ein schwach positives Zahlungsprofil $Y_1 \in \mathbb{R}^K$ gibt, welches $D^\top$-duplizierbar ($Y_1 = D^\top k_1 \gneq 0$ mit $k_1 \in \mathbb{R}^N$) ist mit einem positiven Startkapitaleinsatz $S_0^\top k_1$. Nach Abschnitt 6.2.1 ist dies gleichbedeutend zur sf-Duplizierbarkeit von $Y = (0,Y_1)^\top \in \mathbb{R}^{1+K}$ ($Y = Lk \in L(\mathcal{H}_N^{sf})$ bzw. $Y_1 = V_1(k) = D^\top k_1$ mit $k \in \mathcal{H}_N^{sf} = \{L_0(h) = 0\}$) mit positivem Startkapitaleinsatz $V_0(k) = R_0(k) = S_0^\top k_1$. Nach Abschnitt 3.7.3 oder nach Abschnitt 6.2.2 ($\mathcal{M} = L'(\mathbb{R}^N)$) ist dies wiederum äquivalent zur Inzidenz

$$\begin{aligned} Z &= (Z_0,Z_1)^\top := \widehat{Y} = -V_0(k)\mathbf{1}_{0,\Omega} + Y \\ &= (-S_0^\top k_1, D^\top k_1)^\top = L'k_1 \\ &\in L'(\mathbb{R}^N) = \mathcal{M} \end{aligned}$$

mit

$$Z_0 = -S_0^\top k_1 < 0,\ Z_1 = D^\top k_1 \gneq 0,$$

also zur Existenz einer **gewinnbringenden Kapitalmarktinvestition** $Z$. Bei dieser Investition $Z \in \mathcal{M}$ soll also zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Auszahlung $Z_0 < 0$, zum Zeitpunkt $t = 1$ in jedem Zustand $\omega_k \in \Omega$ eine nichtnegative Zahlung $Z_1(\omega_k)$ und in mindestens einem Zustand $\omega_{k'}$ eine positive Zahlung $Z_1(\omega_{k'})$ erfolgen:

(GI) $$\exists\, k_1 \in \mathbb{R}^N : Z_0 = -S_0^\top k_1 < 0,\ Z_1 = D^\top k_1 \gneq 0.$$

Die Voraussetzung (GI) bedeutet geometrisch, dass in $\mathbb{R}^N$ die Menge

$$\{S_0^\top h_1 > 0,\ D^\top h_1 \gneq 0\}$$

nichtleer, in $\mathbb{R}^K$ die Menge

$$D^\top(\{S_0^\top h_1 > 0\}) \cap \mathbb{R}^K_{\gneq 0}$$

nichtleer bzw. in $\mathbb{R}^{1+K}$ die Menge

$$\mathcal{M} \cap \{X \in \mathbb{R}^{1+K} : X_0 < 0,\ X_1 \gneq 0\}$$

nichtleer ist.

Unter der Voraussetzung (GI) der Existenz einer gewinnbringenden Investition auf dem Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Einperiodenmodells kann aus der speziellen Arbitragefreiheit (AF1.0), d. h. beim Fehlen der speziellen Arbitragegelegenheiten $h_1 \in \mathbb{R}^N$ mit $S_0^\top h_1 = 0 \wedge D^\top h_1 \gneq 0$, auf

---

[31] Bei Kremer (2011), S. 35f, Satz 1.37, wird für ein Marktmodell mit gültiger Bedingung (GI) als Beispiel ein Marktmodell mit einer festverzinslichen (deterministischen) Kapitalanlage $S^j$ ($\delta^j = 0$) angegeben, bei der $S_0^j > 0$ und $S_1^{\delta,j}(\omega_k) = S_1^j(\omega_k) = qS_0^j > 0\ \forall\, k \in \{1,\ldots,K\}$ mit einem deterministischen Zinsfaktor $q > 0$ ist. Dieser Fall ist im unten angegebenen Spezialfall 2) enthalten. Beispielsweise kommt bei einer möglichen Kassenhaltung von Bargeld der Zinsfaktor $q = 1$ zum Einsatz.

die allgemeine Arbitragefreiheit (AF) (inklusive (AF0)) geschlossen werden (Beweis folgt unten nach den Spezialfällen). Es fehlen dann also auch die allgemeinen Arbitragegelegenheiten $h_1 \in \mathbb{R}^N$ mit $L'h_1 = (-S_0^{\mathsf{T}}h_1, D^{\mathsf{T}}h_1)^{\mathsf{T}} \gneq 0$. Umgekehrt folgt unter der Voraussetzung (GI) aus der Existenz einer allgemeinen Arbitragegelegenheit $h_1 \in \mathbb{R}^N$ mit $L'h_1 \gneq 0$ auch die Existenz einer speziellen Arbitragegelegenheit $h_1 \in \mathbb{R}^N$ mit $S_0^{\mathsf{T}}h_1 = 0 \wedge D^{\mathsf{T}}h_1 \gneq 0$. Damit erhält man den folgenden Satz mit einer hinreichenden Bedingung für die Äquivalenz der beiden Versionen (AF1.0) und (AF) der Arbitragefreiheit. Dass die Bedingung (NM) ein Spezialfall von (GI) ist, wird nachfolgend als Spezialfall 3) begründet.

**Satz 6.5 Äquivalenz von** (AF1.0) **und** (AF)
Im Einperiodenmodell ist unter der Voraussetzung (GI) die spezielle Arbitragefreiheit

(AF1.0) $\quad \nexists\, h_1 \in \mathbb{R}^N\colon\ S_0^{\mathsf{T}}h_1 = 0 \wedge D^{\mathsf{T}}h_1 \gneq 0$

äquivalent zur allgemeinen Arbitragefreiheit

(AF) $\quad \nexists\, h \in \mathbb{R}^{2N}\colon\ V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}}h_0 = 0 \wedge Lh = L'h_1 = (S_0^{\mathsf{T}}h_1, D^{\mathsf{T}}h_1) \gneq 0.$

**Spezialfälle von** (GI)**:**

1) (DPsfT$\mathbf{1}_\Omega$+) **sf-Duplizierbarkeit von $\mathbf{1}_\Omega$** mit positivem Startkapitaleinsatz:
Einen Spezialfall von (GI) liefert die Voraussetzung (DPsfT$\mathbf{1}_\Omega$+), bei der das spezielle positive konstante Zahlungsprofil $Z_1 = \mathbf{1}_\Omega = (1,\ldots,1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^K_{>0}$ $D^{\mathsf{T}}$-duplizierbar ($\mathbf{1}_\Omega = D^{\mathsf{T}}k_1$, $k_1 \in \mathbb{R}^N$) ist mit einem positiven Startkapitaleinsatz $\kappa_0 = S_0^{\mathsf{T}}k_1$ bzw. die gewinnbringende Investition

$$Z = (Z_0, Z_1)^{\mathsf{T}} = (-\kappa_0, \mathbf{1}_\Omega)^{\mathsf{T}} = (-S_0^{\mathsf{T}}k_1, D^{\mathsf{T}}k_1)^{\mathsf{T}} = L'k_1$$

auf dem Kapitalmarkt $\mathcal{M} = L'(\mathbb{R}^N)$ existiert.
Demzufolge ist im Einperiodenmodell auch die stärkere Voraussetzung

$$\text{(ZVU)} = (\text{AWS}^\delta) \wedge (\text{AWS}) \wedge (\text{DPsfT}\mathbf{1}_\Omega\text{+})$$

hinreichend für die Äquivalenz von (AF1.0) und (AF).

Anwendung: Da in einem relativen Marktmodell nach Abschnitt 5.3.5 stets die Bedingung (ZVUrel) und damit insbesondere (DPsfT$\mathbf{1}_\Omega$+rel) erfüllt ist, ist speziell im relativen Einperiodenmodell die Bedingung (GI) gültig und dann (AFsf) äquivalent zu (AF). Aufgrund der jeweiligen Äquivalenz von (AFsf) bzw. (AF) im ursprünglichen und im relativen Marktmodell nach Satz 5.1 und Satz 3.11, 1) ist dann auch im ursprünglichen Marktmodell (AFsf) äquivalent zu (AF). Sobald also im ursprünglichen Einperiodenmodell ein
Numéraire $B$ existiert
(siehe Spezialfall 3) und damit das relative Marktmodell definiert ist, sind die beiden Versionen (AFsf) und (AF) der Arbitragefreiheit äquivalent.

2) (PF) **Finanzinstrument $S^j = (S_0^j, S_1^j)^{\mathsf{T}}$ mit positivem Anfangswert $S_0^j > 0$ und schwach positivem Endwert $S_1^{\delta,j} \gneq 0$** (für ein festes $j \in \{1,\ldots,N\}$): [32]
Bei Vorliegen eines derartigen Finanzinstruments $S^j$ gelten mit dem Portfoliovektor $k_1$

[32] Diesen Spezialfall mit dem bei $t = 0$ positiven und bei $t = 1$ schwach positiven Finanzinstrument $S^j$ für die Bedingung (GI) gibt Kremer (2011), S. 36, in Folgerung 1.38 an. Als Beispiel führt er noch eine festverzinsliche Kapitalanlage $S^j$ ($\delta^j = 0$) mit $S_0^j > 0$, $S_1^j = qS_0^j > 0$ und deterministischem Zinsfaktor $q > 0$ an.

$= \mathbf{e}_j = (0,..,0,1,0,..,0)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^N$ die Ungleichungen $S_0^\mathsf{T} k_1 = S_0^\mathsf{T} \mathbf{e}_j = S_0^j > 0$ und $D^\mathsf{T} k_1 = D^\mathsf{T} \mathbf{e}_j = S_1^{\delta,j} \geq 0$, sodass

$$Z := (-S_0^j, S_1^{\delta,j})^\mathsf{T} = (-S_0^\mathsf{T} k_1, D^\mathsf{T} k_1)^\mathsf{T} = L' k_1 \in L'(\mathbb{R}^N) = \mathcal{M}$$

eine gewinnbringende Investition im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Einperiodenmodells ist und somit (GI) gilt.

3) (NM) **Numéraire** $S^N = B = (B_0, B_1)^\mathsf{T} > 0$:
Ein Spezialfall von 2) wiederum ist die Existenz eines Numéraires $S^N = B = (B_0, B_1)^\mathsf{T}$ im Marktmodell, also eines Finanzinstruments $S^N = B$ mit $\delta^N = 0$, $B_0 > 0$ und $B_1 > 0$. Damit hat man zusätzlich zur obigen Anwendung in Spezialfall 1) eine Begründung dafür, dass in einem Einperiodenmodell mit Numéraire $B$ die beiden Versionen (AFsf) und (AF) der Arbitragefreiheit äquivalent sind.
Eine weitere Begründung für (GI) bei Vorliegen eines Numéraires $S^N = B$ erhält man, da die gewinnbringende Investition $Z := (-B_0, B_1)^\mathsf{T} = (-S_0^N, S_1^N)^\mathsf{T} = T^{1,N}$ ($Z_0 = -B_0 < 0$, $Z_1 = B_1 > 0$) nach Beispiel 3.1 (in Abschnitt 3.1: $t = T = 1$, $\delta = 0$, $j = N$) ein Kapitalmarktgeschäft ist und mit $Z \in \mathcal{M}$ die Bedingung (GI) gilt.

**Beweis** für Satz 6.5:

a) „(AF1.0) mit $\lambda = \lambda(Q_1) \neq 0 \Rightarrow$ (LOP)“:
Zu dem bei gültiger spezieller Arbitragefreiheit (AF1.0) existierenden positiven Vektor

$$Q_1 \in \mathcal{M}_1^\perp = D^{-1}([S_0])$$

(Darstellung von $\mathcal{M}_1^\perp$ nach Beweisteil d in Abschnitt 6.2.1) erhält man wegen der Voraussetzung $DQ_1 = \lambda S_0$ mit $\lambda = \lambda(Q_1) \neq 0$ für den Vektor $\Psi_1 = Q_1/\lambda$ die Gleichung

$$D\Psi_1 = S_0,$$

also mit $\Psi_1$ ein $D$-Urbild von $S_0$, sodass nach Satz 6.1 von Abschnitt 6.2.2 zumindest das LOP gilt. Über die Arbitragefreiheit kann aber bei $\lambda(Q_1) \neq 0$ noch nichts ausgesagt werden. Nur im Fall $\lambda > 0$ liegt mit $\Psi_1$ ein positives $D$-Urbild von $S_0$ und nach Satz 6.4 von Abschnitt 6.2.3 die Arbitragefreiheit (AF) vor.

b) „(AF1.0) mit $\lambda = \lambda(Q_1) > 0 \Rightarrow$ (AF)“:
Bei gültiger Bedingung (AF1.0) existiert nach der Überlegung in Teil a) im Fall $\lambda = \lambda(Q_1) > 0$ ein positives $D$-Urbild von $S_0$,

$$\Phi_1 = Q_1/\lambda \in D^{-1}(\{S_0\}) \cap \mathbb{R}^K_{>0},$$

sodass nach der in Satz 6.4 erfolgten Charakterisierung die Arbitragefreiheit (AF) im Einperiodenmodell vorliegt. Der Fall $\lambda(Q_1) > 0$ für zumindest einen positiven Vektor $Q_1 \in \mathcal{M}_1^\perp$ ist also hinreichend für (AF) und insbesondere auch für (AF0).
Dies kann auch noch mit der oben im Anschluss an die Charakterisierung von (AFsf) angegebenen notwendigen Gleichung (PG$Q_1^\mathsf{T} D^\mathsf{T} \lambda$)

$$Q_1^\mathsf{T} D^\mathsf{T} h_1 = \lambda S_0^\mathsf{T} h_1 \quad \forall\, h_1 \in \mathbb{R}^N$$

verdeutlicht werden, da in dieser hier wegen $Q_1 > 0$ und $\lambda = \lambda(Q_1) > 0$ der in (AF0) betrachtete Fall eines $h_1 \in \mathbb{R}^N$ mit $S_0^\mathsf{T} h_1 < 0$ und $D^\mathsf{T} h_1 \geq 0$ nicht eintreten kann.

c) „(AF1.0) $\wedge$ (GI) $\Rightarrow$ (AF)“:
Es werden zwei Beweiswege angegeben. Im ersten Beweisweg wird von (AFsf) bzw. einem positiven $D$-Urbild von $[S_0]$ mittels der Voraussetzung (GI) auf ein positives $D$-Urbild von $S_0$ und damit auf (AF) geschlossen. Im zweiten Beweisweg wird von einer allgemeinen Arbitragegelegenheit mittels (GI) auf eine speziellere Arbitragegelegenheit geschlossen, sodass (AFsf) nicht vorliegen kann.
1. Beweis: Bei Gültigkeit der speziellen Arbitragefreiheit (AF1.0) $\triangleq$ (AFsf) $\mathcal{M}_1 \cap \mathbb{R}^K_{>0} = \emptyset$ existiert ein positives $D$-Urbild $Q_1$ von $[S_0]$:

$$\exists\, Q_1 \in \mathcal{M}_1^{\perp} \cap \mathbb{R}^K_{>0} = D^{-1}([S_0]) \cap \mathbb{R}^K_{>0}\,.$$

Für diesen Vektor $Q_1 > 0$ gilt also $DQ_1 = \lambda S_0$ mit $\lambda = \lambda(Q_1) \in \mathbb{R}$. Durch Einsetzen des in (GI) vorausgesetzten Portfoliovektors $h_1 = k_1$ mit $S_0^{\mathsf{T}} k_1 > 0$ und $D^{\mathsf{T}} k_1 \gtrdot 0$ in die notwendige Gleichung (PG$Q_1^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}} \lambda$) erhält man

$$Q_1^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}} k_1 = \lambda S_0^{\mathsf{T}} k_1$$

und wegen $Q_1^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}} k_1 > 0$ und $S_0^{\mathsf{T}} k_1 > 0$ die Bedingung $\lambda = \lambda(Q_1) > 0$, die nach b) hinreichend für (AF0) und für (AF) ist.

2. Beweis:[33] Es genügt zu zeigen, dass aus einer beliebigen Arbitragegelegenheit $g_1 \in \mathbb{R}^N$ (mit $(-S_0^{\mathsf{T}} g_1, D^{\mathsf{T}} g_1)^{\mathsf{T}} = L' g_1 \gtrdot 0 \wedge L' g_1 \in \mathcal{M}$) mit Hilfe von (GI) auch eine spezielle Arbitragegelegenheit $h_1 \in \mathbb{R}^N$ mit $S_0^{\mathsf{T}} h_1 = 0$ und $D^{\mathsf{T}} h_1 \gtrdot 0$ konstruiert werden kann. Für die Arbitragegelegenheit $g_1$ gilt $S_0^{\mathsf{T}} g_1 \le 0$, $D^{\mathsf{T}} g_1 \ge 0$ und im Fall $S_0^{\mathsf{T}} g_1 = 0$ noch $D^{\mathsf{T}} g_1 \gtrdot 0$. Man definiert nun mit der Arbitragegelegenheit $g_1$ und dem in (GI) vorausgesetzten Portfoliovektor $k_1 \in \mathbb{R}^N$ (mit $S_0^{\mathsf{T}} k_1 > 0$ und $D^{\mathsf{T}} k_1 \gtrdot 0$) den Portfoliovektor

$$h_1 = h_1(\mu) := g_1 + \mu k_1$$

und wählt speziell $\mu = -\, S_0^{\mathsf{T}} g_1 / S_0^{\mathsf{T}} k_1\ (\ge 0)$, sodass

$$S_0^{\mathsf{T}} h_1 = S_0^{\mathsf{T}} g_1 + \mu S_0^{\mathsf{T}} k_1 = 0$$

ist. Im Fall i) $\mu = 0$ ist $S_0^{\mathsf{T}} g_1 = 0$ und damit schon $h_1 = g_1$ eine spezielle Arbitragegelegenheit mit $S_0^{\mathsf{T}} g_1 = 0$ und $D^{\mathsf{T}} g_1 \gtrdot 0$. Im Fall ii) $\mu > 0$ ist wegen $D^{\mathsf{T}} g_1 \ge 0$, $D^{\mathsf{T}} k_1 \gtrdot 0$ auch

$$D^{\mathsf{T}} h_1 = D^{\mathsf{T}} g_1 + \mu D^{\mathsf{T}} k_1 \ge \mu D^{\mathsf{T}} k_1 \gtrdot 0$$

und somit $h_1$ eine derartige spezielle Arbitragegelegenheit. □

In der Tabelle 6.2 werden für einen Überblick die Charakterisierungen der Begriffe Duplizierbarkeit, Vollständigkeit, Law of One Price und Arbitragefreiheit auch in der speziellen Formulierung des Einperiodenmodells aufgelistet.

**Tab. 6.2** Die Charakterisierungen der Duplizierbarkeit, der Vollständigkeit, des Law of One Price und der Arbitragefreiheit für das Einperiodenmodell in der speziellen Formulierung mit den Abbildungen $D$, $D^{\mathsf{T}}$ und $S_0^{\mathsf{T}}$ der niedrigerdimensionalen Räume $\mathbb{R}^K$ und $\mathbb{R}^N$

| | |
|---|---|
| Duplizierbarkeit (DP) | $X = (X_0, X_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{1+K}$ ist $L$-duplizierbar<br>$\Leftrightarrow \exists\, h \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $X = Lh$<br>$\Leftrightarrow \exists\, h = (h_0, h_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{2N}\colon\ S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = S_0^{\mathsf{T}} h_1 + X_0 \ \wedge\ D^{\mathsf{T}} h_1 = X_1$<br>$\Leftrightarrow X \in L(\mathbb{R}^{2N}) = (\ker L^{\mathsf{T}})^{\perp}$ ($X$ ist $L$-Bild)<br>$\Leftrightarrow X \perp \ker L^{\mathsf{T}}$ (Orthogonalität von $X$ u. $\ker L^{\mathsf{T}}$)<br>$\Leftrightarrow$ (DP$D^{\mathsf{T}}$) $X_1 \in \mathbb{R}^K$ ist $D^{\mathsf{T}}$-duplizierbar ($\exists\, h_1 \in \mathbb{R}^N\colon D^{\mathsf{T}} h_1 = X_1$)<br>$\Leftrightarrow X_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^N) = (\ker D)^{\perp}$ ($X_1$ ist $D^{\mathsf{T}}$-Bild)<br>$\Leftrightarrow X_1 \perp \ker D$ (Orthogonalität von $X_1$ u. $\ker D$) |

[33] Dieser Beweisweg wird bei Kremer (2011), S. 35, Satz 1.37, angegeben.

| | |
|---|---|
| Vollständigkeit (VS) | Marktmodell ist vollständig<br>$\Leftrightarrow \mathbb{R}^{1+K} = L(\mathbb{R}^{2N}) = (\ker L^{\mathsf{T}})^{\perp}$ ($L$ surjektiv)<br>$\Leftrightarrow \ker L^{\mathsf{T}} = O$ ($L^{\mathsf{T}}$ injektiv)<br>$\Leftrightarrow$ (VS$D^{\mathsf{T}}$) $\mathbb{R}^{K} = D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^{N}) = (\ker D)^{\perp}$ ($D^{\mathsf{T}}$ surjektiv)<br>$\Leftrightarrow \ker D = O$ ($D$ injektiv) |
| Law of One Price (LOP) | $\forall X \in L(\mathbb{R}^{2N})$: $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0$ konst. $\forall h \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $Lh = X$<br>$\Leftrightarrow$ (LOP1) $\forall X \in L(\mathbb{R}^{2N})$ : $S_0{}^{\mathsf{T}} h_1$ konstant $\forall h \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $Lh = X$<br>$\Leftrightarrow$ (LOP$D^{\mathsf{T}}$) $\forall X_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^{N})$: $S_0{}^{\mathsf{T}} k_1$ konstant $\forall k_1 \in \mathbb{R}^{N}$ mit $D^{\mathsf{T}} k_1 = X_1$<br>$\Leftrightarrow$ $\exists X_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^{N})$: $S_0{}^{\mathsf{T}} k_1$ konstant $\forall k_1 \in \mathbb{R}^{N}$ mit $D^{\mathsf{T}} k_1 = X_1$<br>$\Leftrightarrow \ker D^{\mathsf{T}} \subseteq \ker S_0^{\mathsf{T}} = [S_0]^{\perp}$ (Inklusion der Kerne, z. B. bei inj. $D^{\mathsf{T}}$)<br>$\Leftrightarrow S_0 \perp \ker D^{\mathsf{T}}$ (Orthogonalität von $S_0$ u. ker $D^{\mathsf{T}}$)<br>$\Leftrightarrow S_0 \in D(\mathbb{R}^{K}) = (\ker D^{\mathsf{T}})^{\perp}$ ($S_0$ ist $D$-Bild)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{M}_1 = O$ (trivialer Durchschnitt)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{U}_1 \not\subseteq \mathcal{M}_1$ (Nichtinklusion)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}_1{}^{\perp} \not\subseteq \mathcal{U}_1{}^{\perp}$ (Nichtinklusion)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}_1$ ist eine Hyperebene von $D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^{N})$ (Unterraumstruktur von $D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^{N})$)<br>$\Leftrightarrow D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^{N}) = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{M}_1$ ($D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^{N})$ als direkte Summe)<br>$\Leftrightarrow \ker D$ ist eine Hyperebene von $\mathcal{M}_1{}^{\perp}$ (Unterraumstruktur von $\mathcal{M}_1{}^{\perp}$)<br>$\Leftrightarrow \exists \Psi_1 \in \mathcal{M}_1{}^{\perp} \setminus \ker D$ mit $\mathcal{M}_1{}^{\perp} = \ker D \oplus \operatorname{lin} \Psi_1$ (nichtleere Differenz)<br>$\Leftrightarrow \exists \Psi_1 \in \mathbb{R}^{K}$ mit $D\Psi_1 = S_0$ ($D$-Urbild von $S_0$)<br>$\Leftrightarrow \exists_1 \vartheta_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^{N})$ mit $D\vartheta_1 = S_0$ ($D^{\mathsf{T}}$-duplizierb. $D$-Urbild von $S_0$)<br>$\Leftrightarrow \exists \vartheta_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^{N}) \cap \mathcal{M}_1{}^{\perp} \setminus \ker D$<br>$\Leftrightarrow D(\mathcal{M}_1{}^{\perp}) = [S_0]$ (Eindimensionalität von $D(\mathcal{M}_1{}^{\perp})$)<br>$\Leftrightarrow D(\mathbb{R}^{K}) = [S_0] \oplus D(\mathcal{M}_1)$ ($D(\mathbb{R}^{K})$ als direkte Summe)<br>$\Leftrightarrow$ (PG$\Psi_1 D^{\mathsf{T}}$) $\exists \Psi_1 \in \mathbb{R}^{K}$ mit $\Psi_1{}^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}} h_1 = S_0{}^{\mathsf{T}} h_1$ $\forall h_1 \in \mathbb{R}^{N}$ (Bew.vekt. m. Preisgl.)<br>$\Leftrightarrow$ (KPG$\Psi_1 D^{\mathsf{T}}$) $\exists \Psi_1 \in \mathbb{R}^{K} \setminus \ker D$ mit $\Psi_1{}^{\mathsf{T}} D^{\mathsf{T}} g_1 = 0$ $\forall g_1 \in [S_0]^{\perp}$<br>$\Leftrightarrow$ $\exists \Psi_1 \in \mathbb{R}^{K} \setminus \ker D$ mit $\Psi_1{}^{\mathsf{T}} Z_1 = 0$ $\forall Z_1 \in \mathcal{M}_1$ ($\mathcal{M}_1$-Norm.v.)<br>$\Leftrightarrow$ $\exists \Psi_1 \in \mathcal{M}_1{}^{\perp} \setminus \ker D$ (nichtleere Differenz)<br>$\Leftrightarrow$ $\exists \Psi_1 \in \mathcal{M}_1{}^{\perp\kappa_0} = \mathcal{M}_1{}^{\perp} \cap \{\kappa(X_1) = \kappa_0\}$ ($\kappa$-nor. $\mathcal{M}_1$-Normalenv.) |
| LOP nicht gültig | $\exists X \in L(\mathbb{R}^{2N})$: $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0$ nicht konstant für alle $h \in L^{-1}(\{X\})$<br>$\Leftrightarrow \exists X \in L(\mathbb{R}^{2N})$: $S_0{}^{\mathsf{T}} h_1$ nicht konstant $\forall h \in L^{-1}(\{X\})$<br>$\Leftrightarrow \exists X_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^{N})$: $S_0{}^{\mathsf{T}} k_1$ nicht konstant $\forall k_1 \in (D^{\mathsf{T}})^{-1}(\{X_1\})$<br>$\Leftrightarrow \forall X_1 \in D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^{N})$ ist $S_0{}^{\mathsf{T}} k_1$ nicht konstant $\forall k_1 \in (D^{\mathsf{T}})^{-1}(\{X_1\})$<br>$\Leftrightarrow \ker D^{\mathsf{T}} \not\subseteq \ker S_0^{\mathsf{T}}$ (Nichtinklusion der Kerne)<br>$\Leftrightarrow S_0 \notin D(\mathbb{R}^{K})$ (Nichtinzidenz von $S_0$ u. $D(\mathbb{R}^{K})$)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{M}_1$ (Inklusion)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}_1{}^{\perp} \subseteq \mathcal{U}_1{}^{\perp}$ (Inklusion)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}_1 = D^{\mathsf{T}}(\mathbb{R}^{N})$ (Maximalität von $\mathcal{M}_1$)<br>$\Leftrightarrow \ker D = \mathcal{M}_1{}^{\perp}$ (Maximalität von ker $D$)<br>$\Leftrightarrow D(\mathcal{M}_1{}^{\perp}) = O$ (Trivialität von $D(\mathcal{M}_1{}^{\perp})$) |

| | |
|---|---|
| | $\Leftrightarrow D(\mathbb{R}^K) = D(\mathcal{M}_1)$ (Maximalität von $D(\mathcal{M}_1)$) |
| (VS) $\wedge$ LOP | $L(\mathbb{R}^{2N}) = \mathbb{R}^{1+K} \ \wedge \ \mathcal{M}$ ist Hyperebene von $L(\mathbb{R}^{2N})$<br>$\Leftrightarrow L(\mathbb{R}^{2N}) = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ mit dim $\mathcal{M}^\perp = 1$<br>$\Leftrightarrow D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^K \ \wedge \ \mathcal{M}_1$ ist eine Hyperebene von $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$<br>$\Leftrightarrow D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^K = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_1{}^\perp$ mit dim $\mathcal{M}_1{}^\perp = 1$<br>$\Leftrightarrow \exists_1 \ \Psi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $D\Psi_1 = S_0$ (Ex. u. Einz. e. $D$-Urbilds von $S_0$) |
| (VS) $\wedge$ $2N = 1+K$ | $L$ surjektiv $\wedge$ $2N = 1+K$<br>$\Leftrightarrow L$ ist ein Isomorphismus<br>$\Leftrightarrow L^\mathsf{T}$ ist ein Isomorphismus |
| (VS) $\wedge$ $N = K$ | $D^\mathsf{T}$ surjektiv $\wedge$ $N = K$<br>$\Leftrightarrow D^\mathsf{T}$ ist ein Isomorphismus<br>$\Leftrightarrow D$ ist ein Isomorphismus |
| (VS) $\wedge$ LOP ungültig | $\mathcal{M}^\perp = \ker L^\mathsf{T} \ \wedge \ \ker L^\mathsf{T} = O$<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}^\perp = \ker L^\mathsf{T} = O$ (Trivialität von $\mathcal{M}^\perp$)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M} = L(\mathbb{R}^{2N}) = \mathbb{R}^{1+K}$ (Maxim. von $\mathcal{M}$ u. $L(\mathbb{R}^{2N})$)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}_1{}^\perp = \ker D \ \wedge \ \ker D = O$<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}_1{}^\perp = \ker D = O$ (Trivialität von $\mathcal{M}_1{}^\perp$)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}_1 = D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^K$ (Maxim. von $\mathcal{M}_1$ u. $D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$) |
| Arbitragefreiheit (AF) | $\nexists \, h \in \mathbb{R}^{2N}$ mit $V_0(h) = S_0^{\delta\mathsf{T}} h_0 = 0 \wedge Lh \gneq 0$ (keine Arbitragegelegenheit)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M} \cap \mathbb{R}^{1+K}_{\gneq 0} = \emptyset$ (leerer Durchschnitt)<br>$\Leftrightarrow \exists \, \Phi \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit $\Phi \in \mathcal{M}^\perp = \ker L^{\prime\mathsf{T}}, \quad \Phi > 0$ (pos. $\mathcal{M}$-Normalenvektor)<br>$\Leftrightarrow \exists \, \Phi \in \mathbb{R}^{1+K}$ mit $L^{\prime\mathsf{T}}\Phi = 0, \quad \Phi > 0$ (pos. $L^{\prime\mathsf{T}}$-Urb. v. 0)<br>$\Leftrightarrow \exists \, \Phi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $D\Phi_1 = S_0, \quad \Phi_1 > 0$ (pos. $D$-Urbild v. $S_0$)<br>$\Leftrightarrow \exists \, \Phi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit (PG$\Phi_1 D^\mathsf{T}$) $\Phi_1{}^\mathsf{T} D^\mathsf{T} h_1 = S_0{}^\mathsf{T} h_1 \ \forall \, h_1 \in \mathbb{R}^N, \ \Phi_1 > 0$ (Diskontvektor m. Preisgl.)<br>$\Leftrightarrow \exists \, \Phi_1 \in \mathcal{M}_1{}^{\perp\kappa_0 +} = \mathcal{M}_1{}^{\perp\kappa_0} \cap \{X_1 > 0\}$ (pos. $\kappa$-norm. $\mathcal{M}_1$-Normalenv.) |
| (VS) $\wedge$ (AF) | $L(\mathbb{R}^{2N}) = \mathbb{R}^{1+K} \ \wedge \ \exists \, \Phi \in \mathcal{M}^\perp \cap \mathbb{R}^{1+K}_{\gneq 0}$<br>$\Leftrightarrow [\exists_1 \ \Phi_1 \in \mathbb{R}^K$ mit $D\Phi_1 = S_0] \wedge \Phi_1 > 0$ |
| sf-Arbitragefreiheit (AFsf) | $\nexists \, h_1 \in \mathbb{R}^N$ mit $S_0{}^\mathsf{T} h_1 = 0 \wedge D^\mathsf{T} h_1 \gneq 0$ (keine sf-Arbitragegelegenheit)<br>$\Leftrightarrow \mathcal{M}_1 \cap \mathbb{R}^K_{\gneq 0} = \emptyset$ (leerer Durchschnitt)<br>$\Leftrightarrow \exists \, Q_1 \in \mathcal{M}_1{}^\perp = D^{-1}([S_0])$ mit $Q_1 > 0$ (pos. $\mathcal{M}_1$-Normalenvektor)<br>$\Leftrightarrow \exists \, Q_1 \in \mathbb{R}^K_{>0}$ mit $DQ_1 = \lambda S_0 \ (\lambda = \lambda(Q_1) \in \mathbb{R})$ (pos. $D$-Urbild von $[S_0]$) |

### 6.2.5 Formales W-Maß, Preismaß, Martingalmaß und risikoneutrales W-Maß

Für die folgenden Betrachtungen sei die Arbitragefreiheit (AF) vorausgesetzt. Es werden nun einige in der Literatur vielzitierte Begriffe im Einperiodenmodell erläutert. Es sind dies die in der Überschrift aufgeführten Bezeichnungen und außerdem die Begriffe Arrow-Debreu-Preis, Ereignispreis, Zustandspreis, Zustandspreisvektor, stochastischer Diskontierungsfaktor, deterministischer Diskontierungsfaktor und risikoneutrale Bewertung. Mittels der Duplizierbarkeit bestimmter Arrow-Debreu-Zahlungsprofile $\mathbf{1}_C$ ($C \subseteq \Omega$) werden dabei auch die meist weniger beachteten impliziten Prämissen dargestellt, unter denen die genannten Begriffe erst einen Sinn haben. Bei der Behandlung des Martingalmaßes tritt an die Stelle der beim Mehrperiodenmodell verwendeten bedingten Erwartung hier beim Einperiodenmodell nur der Erwartungswert. Im Einperiodenmodell sind die impliziten Prämissen für das auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ von $\Omega$ definierte formale W-Maß $Q_1$ die Arbitragefreiheit (AF), für das Martingalmaß $Q_1$, das risikoneutrale bzw. risikolose Wahrscheinlichkeitsmaß $Q_1$ und die risikoneutrale Bewertung die Arbitragefreiheit (AF) und die Voraussetzung (DP$D^\top \mathbf{1}_\Omega$+). Die impliziten Prämissen für das Preismaß $Q_1$ sind die Arbitragefreiheit (AF) und die Vollständigkeit (VS). Die Voraussetzung (DP$D^\top \mathbf{1}_\Omega$+) der $D^\top$-Duplizierbarkeit des Zahlungsprofils $\mathbf{1}_\Omega \in \mathbb{R}^K$ mit positivem Startkapitaleinsatz entspricht hier der Voraussetzung (FH) der Existenz einer festverzinslichen Handelsstrategie (Beweis folgt noch).

**Formales Wahrscheinlichkeitsmaß**

Die Arbitragefreiheit (AF) ist im Einperiodenmodell nach Satz 6.4 von Abschnitt 6.2.3 äquivalent zur Existenz eines Diskontvektors bzw. eines positiven $D$-Urbilds $\Phi_1$ von $S_0$:

$$\exists\ \Phi_1 \in \mathbb{R}^K \text{ mit } \Phi_1 > 0 \text{ und } \Phi_1^\top D^\top h_1 = S_0^\top h_1 \ \forall\ h_1 \in \mathbb{R}^N \text{ bzw.}$$

$$\exists\ \Phi_1 \in \mathbb{R}^K \text{ mit } \Phi_1 > 0 \text{ und } D\Phi_1 = S_0.$$

Dieses $K$-Tupel $\Phi_1 = (\Phi_{1,1},\ldots,\Phi_{1,K})$ entspricht einer Zustandsfunktion $\Phi_1 : \Omega \longrightarrow ]0,\infty[$ auf $\Omega$ bzw. einer Funktion

$$\Phi_1 : \{\omega_k\} \in \mathcal{P}_1 \mapsto \Phi_{1,k} = \Phi_1(\omega_k) \in ]0,\infty[$$

auf der Partition $\mathcal{P}_1 = \{\{\omega_1\},\ldots,\{\omega_K\}\}$ von $\Omega$, die zu einem Maß

$$\Phi_1 : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow ]0,\infty[$$

auf der $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_1 = \sigma(\mathcal{P}_1) = \mathcal{P}(\Omega)$ in $\Omega$ fortgesetzt werden kann:

$$\Phi_1(C) := \sum_{\omega_k \in C} \Phi_1(\omega_k) = \sum_{\omega_k \in C} \Phi_{1,k} \quad \text{für } C \subseteq \Omega.$$

Auf $\mathcal{P}(\Omega)$ ist $\Phi_1$ eine nichtnegative und $\sigma$-additive Funktion mit $\Phi_1(\emptyset) = 0$ und $\Phi_1(\Omega) = \Phi_{1,1} + \ldots + \Phi_{1,K} < \infty$ ($|\Omega| = K < \infty$), also ein endliches Maß. Das zugehörige normierte Maß

$$Q_1 := \Phi_1/\Phi_1(\Omega)$$

ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß, $Q_1(\Omega) = 1$) $Q_1 : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ auf $\mathcal{P}(\Omega)$. Dieses innerhalb des Marktmodells aus dem Diskontvektor $\Phi_1$ entwickelte **formale (synthetische) W-Maß**[34] hat nichts mit den tatsächlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten der Zustände $\omega_k \in \Omega$ zu tun.

---

[34] Die Bezeichnung formales oder synthetisches Wahrscheinlichkeitsmaß für das W-Maß $Q_1$ findet man bei Kremer (2011), S. 47 und (2006), S. 206.

**Preismaß**

Im Einperiodenmodell ($T = 1$, $I = \{0,1\}$, $\Omega = \{\omega_1,\ldots,\omega_K\}$) werden die Handelsstrategien $h \in \mathcal{H}_N = \mathbb{R}^{2N}$ mit ihren Koordinaten-$2N$-Tupeln bezüglich der $\mathcal{H}_N$-Basis $h_{t,\Omega,j} = \mathbf{1}_t\mathbf{e}_j$ ($t = 0, 1$; $j \in J = \{1,\ldots,N\}$) identifiziert und die $\mathcal{F}$-adaptierten Zahlungsprofile $X \in \mathcal{W} = \mathbb{R}^{1+K}$ mit ihren Koordinaten-$(1+K)$-Tupeln bezüglich der $\mathcal{W}$-Basis $w_{t,A_t}$ ($t = 0, 1$; $A_t \in \mathcal{P}_t$: $w_{0,\Omega} = \mathbf{1}_0 = (1,0)^\mathsf{T}$, $w_{1,\omega_k} = \mathbf{1}_1 \cdot \mathbf{1}_{\omega_k} = (0,\mathbf{1}_{\omega_k})^\mathsf{T} = (0,\mathbf{e}_k)^\mathsf{T}$, $k = 1,\ldots,K$). Demzufolge entspricht das zum Zeitpunkt $t = 1$ und zu einem Ereignis $C \subseteq \Omega$ gehörige **Arrow-Debreu-Papier**[35] (Abk.: AD-Papier)

$$\xi^{1,C} := \mathbf{1}_{1,C} = (0,\mathbf{1}_C)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{1+K}$$

($\xi_s^{1,C}(\omega) = 1$ für $s = 1 \wedge \omega \in C$, $\xi_s^{1,C}(\omega) = 0$ für $s = 0$ oder $s = 1 \wedge \omega \notin C$) seinem Koordinaten-$(1+K)$-Tupel

$$(0,\mathbf{1}_C)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{1+K} \text{ mit } \mathbf{1}_C = \sum_{\omega_k \in C} \mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^K.$$

Nach Abschnitt 6.2.1 ist die $L$-Duplizierbarkeit (DP) bzw. genauer die sf-Duplizierbarkeit (DPsf) des AD-Papiers $\xi^{1,C} = (0,\mathbf{1}_C)^\mathsf{T}$ äquivalent zur $D^\mathsf{T}$-Duplizierbarkeit (DP$D^\mathsf{T}$) des Zahlungsprofils $\mathbf{1}_C$, also zur Bedingung

(DP$D^\mathsf{T}\mathbf{1}_C$) $\quad \mathbf{1}_C \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$.

Das zum Zeitpunkt $t = 1$ und Ereignis $C \subseteq \Omega$ gehörige stochastische Zahlungsprofil $\mathbf{1}_C$ wird hier als **AD-Zahlungsprofil** bezeichnet.

Im Spezialfall $C = \Omega$ ist das deterministische AD-Papier

$$\zeta^1 := \xi^{1,\Omega} = \mathbf{1}_{1,\Omega} = (0,\mathbf{1}_\Omega)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{1+K}$$

($\zeta_s^1(\omega) = 1$ für $s = 1$ und alle $\omega \in \Omega$, $\zeta_s^1(\omega) = 0$ für $s = 0$) mit seinem Koordinaten-$(1+K)$-Tupel $(0,\mathbf{1}_\Omega)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{1+K}$ genau dann $L$-duplizierbar, wenn das deterministische AD-Zahlungsprofil $\mathbf{1}_\Omega = (1,\ldots,1)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^K$ $D^\mathsf{T}$-duplizierbar ist:

(DP$D^\mathsf{T}\mathbf{1}_\Omega$) $\quad \mathbf{1}_\Omega \in D^\mathsf{T}(\mathbb{R}^N)$.

Unter Voraussetzung von (DP$D^\mathsf{T}\mathbf{1}_C$) und der Arbitragefreiheit (AF) (mit einem Diskontvektor $\Phi_1$) besitzen nach Abschnitt 5.3.2 das AD-Papier $\xi^{1,C} = (0,\mathbf{1}_C)^\mathsf{T}$ und das AD-Zahlungsprofil $\mathbf{1}_C$ den gleichen Preis:

$$\pi(\xi^{1,C}) = \pi(\mathbf{1}_C) = \Phi_1{}^\mathsf{T}\mathbf{1}_C = \sum_{\omega_k \in C} \Phi_{1,k} = \Phi_1(C) =: d_{1,C} \ (> 0 \text{ für } C \neq \emptyset).$$

Insbesondere gilt für $C = \Omega$ unter Voraussetzung von (DP$D^\mathsf{T}\mathbf{1}_\Omega$) und (AF)

$$\pi(\zeta^1) = \pi(\xi^{1,\Omega}) = \pi(\mathbf{1}_\Omega) = \Phi_1{}^\mathsf{T}\mathbf{1}_\Omega$$
$$= \sum_{k=1}^{K} \Phi_{1,k} = \Phi_1(\Omega) =: d_{1,\Omega} =: d_1 \ (> 0).$$

Das theoretische Maß $\Phi_1(C)$ von $C$ wird somit als Preis des AD-Papiers $\xi^{1,C} = (0,\mathbf{1}_C)^\mathsf{T}$ bzw. des AD-Zahlungsprofils $\mathbf{1}_C$ realisiert und daher als Arrow-Debreu-Preis (AD-Preis), **Zu-**

[35] Weitere Bezeichnungen für das AD-Papier werden in Abschnitt 3.8.1 angeführt.

**standspreis**[36] oder besser Ereignispreis von $C$ bezeichnet. Das Maß $\Phi_1(C)$ von $C$ kann daher auch als (nicht normiertes) **Preismaß** von $C$ bezeichnet werden. Die Bezeichnung des nachfolgenden W-Maßes $Q_1(C)$ von $C$ als normiertes oder relatives Preismaß von $C$ wird unten mit den Voraussetzungen (AF), (DP$D^\top\mathbf{1}_C$) und (DP$D^\top\mathbf{1}_\Omega$) noch begründet.
Speziell für ein Elementarereignis $C = \{\omega_k\}$ ($k \in \{1,\ldots,K\}$) ist unter der Voraussetzung
(DP$D^\top\mathbf{e}_k$) $\quad \mathbf{e}_k \in D^\top(\mathbb{R}^N)$
der Preis der charakteristischen Funktion $\mathbf{1}_{1,\omega_k} = \xi^{1,\omega_k} = (0,\mathbf{e}_k)^\top$ bzw. $\mathbf{1}_{\omega_k} = \mathbf{e}_k$ des $k$-ten Zustands $\omega_k \in \Omega$ gleich der $k$-ten Komponente $\Phi_{1,k}$ des Zustandsvektors $\Phi_1$:

$$\pi(\xi^{1,\omega_k}) = \pi(\mathbf{e}_k) = \Phi_1{}^\top\mathbf{e}_k = \Phi_{1,k} = \Phi_1(\omega_k) =: d_{1,k}\ (> 0).$$

Daher wird die Komponente $\Phi_{1,k}$ als Zustandspreis des $k$-ten Zustands $\omega_k \in \Omega$ und der Diskontvektor $\Phi_1$ als **Zustandspreisvektor**[37] des Endzeitpunkts $T = 1$ bezeichnet.

**Stochastische Diskontierungsfaktoren und deterministischer Diskontierungsfaktor**
Der zum Zeitpunkt $t = 0$ durchgeführte Kauf des AD-Papiers $\xi^{t,C}$ liefert insgesamt zu den beiden Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$ den Zahlungsstrom

$$\widehat{\xi}^{1,C} := -d_{1,C}\cdot\mathbf{1}_{0,\Omega} + \xi^{1,C} = \left(-d_{1,C},\mathbf{1}_C\right)^\top.$$

Da das Zahlungsprofil $-d_{1,C}\cdot\mathbf{1}_{0,\Omega} = (-d_{1,C},0)^\top$ unter der Voraussetzung (AWS$^\delta$) $S_0^\delta \neq 0$ stets $L$-duplizierbar ist (nach dem Beweis von $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{Z}$ in Abschnitt 2.8.4 oder weil das zugehörige Gleichungssystem (DP) $D^\top h_1 = 0$, $S_0^{\delta\top}h_0 = S_0{}^\top h_1 - d_{1,C}$ von Abschnitt 6.2.1 stets lösbar ist, z. B. mit $h_1 = 0$ und $h_0$ mit $v_0(h) = S_0^{\delta\top}h_0 = -d_{1,C}$) und den Preis $-d_{1,C}$ besitzt und da mit der $D^\top$-Duplizierbarkeit von $\mathbf{1}_C$ nach Abschnitt 6.2.1 ((DP) $\Leftrightarrow$ (DP$D^\top$)) auch $\xi^{1,C} = (0,\mathbf{1}_C)^\top$ $L$-duplizierbar ist, folgt auch die $L$-Duplizierbarkeit von $\widehat{\xi}^{1,C}$ mit dem Preis

$$\pi(\widehat{\xi}^{1,C}) = -d_{1,C} + \pi(\xi^{1,C}) = 0.$$

Daher gilt $\widehat{\xi}^{1,C} \in \mathcal{M}$. Das Kapitalmarktgeschäft $\widehat{\xi}^{1,C}$ wird hier als Arrow-Debreu-Kassageschäft (**AD-Kassageschäft**) bezeichnet und die dabei für $C \neq \emptyset$ zum Zeitpunkt $t = 0$ auftretende positive Konstante

$$d_{1,C} = \Phi_1(C)$$

als der zum Zeitintervall [0,1] und Ereignis $C \subseteq \Omega$ gehörige **stochastische Diskontierungsfaktor**. Weiter ist

$$a_{1,C} = 1/d_{1,C}$$

der zugehörige stochastische Aufzinsungsfaktor und

$$i_{1,C} = a_{1,C} - 1 = 1/d_{1,C} - 1$$

der zugehörige stochastische Zinssatz.
Zur Plausibilisierung der Bezeichnung Diskontierungsfaktor ist anzumerken, dass der Diskontierungsfaktor $d_{1,C}$ im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells in dem Sinne existiert, dass mit Hilfe des zugehörigen Kapitalmarktgeschäfts $\widehat{\xi}^{t,C} \in \mathcal{M}$ eine zum Zeitpunkt $t = 1$ und im Er-

---

[36] Die Bezeichnung Zustandspreis ist streng genommen nur für die Elementarereignisse $C = \{\omega_k\}$ bzw. Zustände $\omega_k \in \Omega$ mit ihren AD-Papieren $\xi^{1,\omega_k} = (0,\mathbf{e}_k)^\top$ und deren Preisen $\Phi_1(\{\omega_k\}) = \Phi_1(\omega_k) = \Phi_{1,k}$ exakt.

[37] Die Bezeichnungen Zustandspreis und Zustandspreisvektor samt Plausibilisierung findet man bei Kremer (2011), S. 45.

eignis $C \subseteq \Omega$ stattfindende Zahlung $\gamma \mathbf{1}_C$ ($\gamma \in \mathbb{R}$) tatsächlich auf eine gleichwertige sichere Zahlung $\gamma d_{1,C}$ im Zeitpunkt $s = 0$ transponiert bzw. abgezinst werden kann: Aus dem Zahlungsprofil $X = (0,\gamma \mathbf{1}_C)^\top$ mit dem Preis $\pi(X) = \gamma d_{1,C}$ erhält man nämlich durch Kombination (additive Ergänzung, Glattstellung, Replizierung) mit dem Kapitalmarktgeschäft $Z = -\gamma \widehat{\xi}^{1,C}$ $= (\gamma d_{1,C}, -\gamma \mathbf{1}_C)^\top \in \mathcal{M}$ das Zahlungsprofil $Y = X + Z = (\gamma d_{1,C},0)^\top$ mit dem gleichen Preis $\pi(Y)$ $= \gamma d_{1,C} = \pi(X)$.
Ebenso steht auch der Aufzinsungsfaktor $a_{1,C}$ ($C \neq \emptyset$) im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ zur Verfügung, da mittels $Z' = \gamma a_{1,C} \widehat{\xi}^{1,C} = (-\gamma, \gamma a_{1,C} \mathbf{1}_C)^\top \in \mathcal{M}$ eine im Zeitpunkt $s = 0$ (sicher) stattfindende Zahlung $\gamma = X_0 = X_0(\Omega) \in \mathbb{R}$ auf eine gleichwertige zum Zeitpunkt $t = 1$ und im Ereignis $C \subseteq \Omega$ stattfindende Zahlung $\gamma a_{1,C}$ transponiert bzw. aufgezinst werden kann.

Speziell unter der Voraussetzung (DP$D^\top \mathbf{1}_\Omega$) ($C = \Omega$) ist die Konstante $d_1 = \Phi_1(\Omega) = \pi(\zeta^1)$ als Preis des deterministischen AD-Papiers $\zeta^1 = (0,\mathbf{1}_\Omega)^\top$ realisiert und als zum Zeitintervall [0,1] gehöriger **deterministischer Diskontierungsfaktor** des deterministischen AD-Kassageschäfts $\widehat{\zeta}^1 = \widehat{\xi}^{1,\Omega} = \left(-d_1, \mathbf{1}_\Omega\right)^\top$ auf dem Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ vorhanden. Der zugehörige deterministische Aufzinsungsfaktor ist

$$a_1 = 1/d_1$$

und der deterministische Zinssatz

$$i_1 = a_1 - 1 = 1/d_1 - 1.$$

**Normiertes Preismaß**
Sind beide Voraussetzungen (DP$D^\top \mathbf{1}_C$) und (DP$D^\top \mathbf{1}_\Omega$) erfüllt, so ist der normierte Ereignispreis

$$Q_1(C) = \Phi_1(C)/d_1 = \Phi_1(C)/\Phi_1(\Omega) = \pi(\xi^{1,C}) / \pi(\zeta^1)$$

von $C$ der Anteil des Ereignispreises $\Phi_1(C)$ am Ereignispreis $\Phi_1(\Omega)$, also der relative Ereignispreis zu $t = 1$ und Ereignis $C \subseteq \Omega$ in Bezug auf den deterministischen Ereignispreis $\Phi_1(\Omega)$ des Zeitpunkts $t = 1$. Daher kann dann das W-Maß $Q_1(\Omega)$ des Ereignisses $C$ auch als das zum Zeitpunkt $t = 1$ gehörige (relative bzw. normierte) Preismaß von $C$ bezeichnet werden. Das für alle $C \subseteq \Omega$ definierte und innerhalb des Marktmodell entwickelte formale W-Maß $Q_1 : \mathfrak{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ wird nach erfolgter Plausibilisierung meist auch ohne Vorliegen der entsprechenden Voraussetzungen (DP$D^\top \mathbf{1}_\Omega$) und (DP$D^\top \mathbf{1}_C$) $\forall\ C \subseteq \Omega$ salopp als das zum Zeitpunkt $t = 1$ gehörige (relative, normierte) **Preismaß**[38] bezeichnet.

**Vollständigkeit des Einperiodenmodells**
Liegt die Voraussetzung (DP$D^\top \mathbf{1}_C$) für alle $C \subseteq \Omega$ vor, so bedeutet dies die Vollständigkeit (VS) des Marktmodells: Speziell für die $C = \{\omega_k\}$ ist dann nämlich $\mathbf{1}_{\omega_k} = \mathbf{e}_k \in D^\top(\mathbb{R}^N)$ für alle $k = 1,\ldots,K$, daher

$$\mathbb{R}^K = \text{lin}\ \{\mathbf{e}_k : k = 1,\ldots,K\} \subseteq D^\top(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathbb{R}^K$$

und $D^\top(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^K$. Es ist dann insbesondere auch die Bedingung (DP$D^\top \mathbf{1}_\Omega$) erfüllt: $\mathbf{1}_\Omega$ $= (1,1,\ldots,1)^\top \in D^\top(\mathbb{R}^N)$.

---

[38] Die Bezeichnung Preismaß für das W-Maß $Q_1$ findet man bei Kremer (2011), S. 48, 69, 199.

**Äquivalenz von** (DP$D^{\mathsf{T}}\mathbf{1}_{\Omega}$+) **bzw.** (DP$\mathbf{1}_{1,\Omega}$+) **zur Existenz einer sog. festverzinslichen Handelsstrategie**

Es sei die Arbitragefreiheit (AF) und (AWS$^{\delta}$) vorausgesetzt. Zur Bedingung (DP$D^{\mathsf{T}}\mathbf{1}_{\Omega}$+) wird jetzt gezeigt, dass die $D^{\mathsf{T}}$-Duplizierbarkeit des deterministischen AD-Zahlungsprofils $\mathbf{1}_{\Omega}$ zusammen mit der Positivität des Startkapitaleinsatzes $S_0{}^{\mathsf{T}}\eta_1$ der Duplikationsstrategie $\eta_1$ von $\mathbf{1}_{\Omega}$ hier der im Mehrperiodenmodell verwendeten Voraussetzung (FH) der Existenz von festverzinslichen Handelsstrategien entspricht (Definition in Abschnitt 3.9.1).

**Beweis**: „⇒“: Es sei die Arbitragefreiheit (AF) für das Marktmodell und die $D^{\mathsf{T}}$-Duplizierbarkeit (DP$D^{\mathsf{T}}$) des deterministischen AD-Zahlungsprofils $\mathbf{1}_{\Omega}$ vorausgesetzt,

$$D^{\mathsf{T}}\eta_1 = \mathbf{1}_{\Omega} \text{ mit einem } \eta_1 \in \mathbb{R}^N,$$

die nach Abschnitt 6.2.1 äquivalent ist zur $L$-Duplizierbarkeit (DP) von $\chi = (\chi_0,\mathbf{1}_{\Omega})^{\mathsf{T}}$ mit beliebig wählbarem $\chi_0 \in \mathbb{R}$. Setzt man jetzt noch gemäß der Bedingung (DP$D^{\mathsf{T}}\mathbf{1}_{\Omega}$+) einen Startkapitaleinsatz $S_0{}^{\mathsf{T}}\eta_1 > 0$ für die Duplikationsstrategie $\eta_1$ von $\mathbf{1}_{\Omega}$ voraus und wählt man $\chi_0 := -S_0{}^{\mathsf{T}}\eta_1 = -\pi(\mathbf{1}_{\Omega}) = -\Phi_1(\Omega) =: -d_1 =: -\rho_1$, so erfüllt die Handelsstrategie $\eta := (0,\eta_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{2N}$ die Gleichungen

$$\chi_0 = L_0(\eta) = V_0(h) - R_0(\eta) \quad = S_0^{\delta\mathsf{T}}\eta_0 - S_0{}^{\mathsf{T}}\eta_1 \quad = -\rho_1,$$

$$\chi_1 = L_1(\eta) = V_1(\eta) = S_1^{\delta}\eta_1 \quad = \qquad D^{\mathsf{T}}\eta_1 \quad = \mathbf{1}_{\Omega}.$$

Mit diesem $\eta = (0,\eta_1)^{\mathsf{T}}$ existiert also eine zum Zeitintervall [0,1] gehörige sogenannte festverzinsliche Handelsstrategie bzw. eine Duplikationsstrategie für das einperiodische festverzinsliche AD-Kassageschäft

$$\chi = L(\eta) = (-\rho_1,\mathbf{1}_{\Omega})^{\mathsf{T}} = (-d_1,\mathbf{1}_{\Omega})^{\mathsf{T}} = \hat{\xi}^{1,\Omega} \in \mathcal{M}:$$

Wegen der Arbitragefreiheit kann nämlich der Preis $\pi(\chi)$ von $\chi$ berechnet werden zu $\pi(\chi) = V_0(\eta) = S_0^{\delta\mathsf{T}}\eta_0 = S_0^{\delta\mathsf{T}}0 = 0$, sodass $\chi$ nach Abschnitt 3.7.1 in $\mathcal{M}$ liegt. Es ist dann also die Eigenschaft (FH) für das Einperiodenmodell erfüllt.

„⇐“: Umgekehrt kann bei Voraussetzung von (AF), (FH) und (AWS$^{\delta}$) im Einperiodenmodell auch die Eigenschaft (DP$D^{\mathsf{T}}\mathbf{1}_{\Omega}$+) gezeigt werden: Mit der in (FH) vorausgesetzten sog. festverzinslichen Handelsstrategie $\eta = (0,\eta_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{2N}$ und den Bezeichnungen $\rho_1 = S_0{}^{\mathsf{T}}\eta_1 > 0$ und $d_1 = \rho_1$ der Abschnitte 3.9.1 und 3.9.2 ergibt sich für das einperiodische deterministische AD-Kassageschäft $\chi = L(\eta)$ nach Abschnitt 3.9.1 oder Abschnitt 3.8.2 die Inzidenz

$$\chi = \chi^1 = L(\eta) = (-S_0{}^{\mathsf{T}}\eta_1, D^{\mathsf{T}}\eta_1)^{\mathsf{T}} = (-\rho_1,\mathbf{1}_{\Omega})^{\mathsf{T}} = (-d_1,\mathbf{1}_{\Omega})^{\mathsf{T}} = \hat{\zeta}^1 \in \mathcal{M}.$$

Damit ist $\mathbf{1}_{\Omega} = D^{\mathsf{T}}\eta_1$ mit $S_0{}^{\mathsf{T}}\eta_1 > 0$, also die Bedingung (DP$D^{\mathsf{T}}\mathbf{1}_{\Omega}$+) erfüllt.

Für das deterministische AD-Papier $\zeta^1$ gilt nach Abschnitt 3.9.2 unter der Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) die Inzidenz

$$\zeta^1 = \hat{\zeta}^1 + d_1 \cdot \mathbf{1}_{0,\Omega} = (0,\mathbf{1}_{\Omega})^{\mathsf{T}} = \mathbf{1}_{1,\Omega} \in L(\mathbb{R}^{2N}).$$

Die $L$-Duplizierbarkeit von $\zeta^1 = \mathbf{1}_{1,\Omega}$ ergibt sich auch nach Abschnitt 3.6.1 aus der $D^{\mathsf{T}}$-Duplizierbarkeit von $\mathbf{1}_{\Omega}$, da die Bedingung (DP$\mathbf{1}_{1,\Omega}$) [$Lh = \mathbf{1}_{1,\Omega} = (0,\mathbf{1}_{\Omega})^{\mathsf{T}}$ für ein $h = (h_0,h_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{2N}$] äquivalent ist zur Bedingung (DP$D^{\mathsf{T}}\mathbf{1}_{\Omega}$) [$D^{\mathsf{T}}h_1 = \mathbf{1}_{\Omega}$ für ein $h_1 \in \mathbb{R}^N$] zusammen mit der unter der Voraussetzung (AWS$^{\delta}$) stets erfüllbaren Gleichung $S_0^{\delta\mathsf{T}}h_0 = S_0{}^{\mathsf{T}}h_1$ für ein $h_0 \in \mathbb{R}^N$. Demnach ist auch die Bedingung (DP$D^{\mathsf{T}}\mathbf{1}_{\Omega}$+), bei der noch $S_0{}^{\mathsf{T}}h_1 > 0$ für den Duplikationsportfoliovektor $h_1$ gefordert wird, äquivalent zur Bedingung (DP$\mathbf{1}_{1,\Omega}$+), bei der noch ein Startkapitaleinsatz $S_0^{\delta\mathsf{T}}h_0 > 0$ für die Duplikationsstrategie $h$ gefordert wird. □

**Anmerkung**: Zur Sicherung der Voraussetzung (FH) im Mehrperiodenmodell kann in der Praxis das Marktmodell mit einem festverzinslichen (deterministischen) Finanzinstrument $S^1$ ausgestattet werden (Bedingung (FF) in Abschnitt 3.9.1). Hier im Einperiodenmodell bedeutet dies die Existenz des dividendenlosen Finanzinstruments $S^1$ ($\delta^1 = 0$) mit

$$S_0^1 = a_0 = 1,\ S_1^1 = a_1 = a_1\mathbf{1}_{\Omega}$$

($a_1 \in ]0,\infty[$ unabhängig von den $\omega \in \Omega$). Mit $d_1 := 1/a_1$, $\eta_1 := d_1\mathbf{e}_1 = (d_1,0,\ldots,0)^\top \in \mathbb{R}^N$ und $\eta = (0,\eta_1)^\top \in \mathbb{R}^{2N}$ ist dann

$$D^\top\eta_1 = d_1 S_1^{\delta,1} = d_1 S_1^1 = d_1 a_1 \mathbf{1}_\Omega = \mathbf{1}_\Omega,$$

also die Bedingung (DP$D^\top\mathbf{1}_\Omega$) erfüllt. Weiter ist

$$S_0^\top\eta_1 = S_0^1 d_1 = a_0 d_1 = d_1 > 0,$$

daher (DP$D^\top\mathbf{1}_\Omega$+) und nach obigem Beweisteil „⇒“ auch (FH) erfüllt. Bei einer möglichen Kassenhaltung von Bargeld kommt der Zinssatz $i_1 = 0$, der Zinsfaktor $a_1 = 1$ und das konstante Finanzinstrument (der konstante Numéraire) $S_0^1 = S_1^1 = 1$ zum Einsatz.

**Martingalmaß**

Im Einperiodenmodell ist bei vorausgesetzter Arbitragefreiheit (AF) ein beliebiger $\mathcal{F}$-adaptierter[39] stochastischer Prozess $X = (X_0,X_1)^\top \in \mathbb{R}^{1+K}$ genau dann ein Martingal bezüglich des formalen W-Maßes $Q_1$ und der Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_1) = (\{\emptyset,\Omega\},\mathfrak{P}(\Omega))$, wenn der $Q_1$-Erwartungswert der Zustandsfunktion $X_1$, der hier an die Stelle der bedingten Erwartung tritt (Begründung in Abschnitt 3.9.4 für den Spezialfall $\mathcal{F}_0$), gleich dem Wert $X_0$ ist:

$$E_{Q_1}(X_1) = E_{Q_1}(X_1|\mathcal{F}_0) = X_0.$$

Wird auch noch die Bedingung (DP$D^\top\mathbf{1}_\Omega$+) vorausgesetzt, so steht nach den obigen Überlegungen im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ tatsächlich das deterministische AD-Kassageschäft $\bar{\zeta}^1 = \bar{\xi}^{1,\Omega} = (-d_1,\mathbf{1}_\Omega)^\top$ mit seinem deterministischen Diskontierungsfaktor $d_1$ zur Verfügung. Wie oben bereits begründet wurde, ist im Einperiodenmodell die Voraussetzung (DP$D^\top\mathbf{1}_\Omega$+) äquivalent zur Voraussetzung (FH), der Existenz einer festverzinslichen Handelsstrategie. Damit ist dann nach Abschnitt 3.9.4 für jedes dividendenlose Finanzinstrument $S^i$ ($\delta^i = 0$, $i \in \{1,\ldots,N\}$) der diskontierte Preisprozess

$$(S_0^i, d_1 S_1^i)^\top$$

ein **Martingal**: Für das duplizierbare Zahlungsprofil $S_1^i = S_1^{\delta,i} = D^\top\mathbf{e}_i \in D^\top(\mathbb{R}^N)$ ist nämlich der Erwartungswert des mit $d_1 = \Phi_1(\Omega)$ diskontierten Zahlungsprofils $d_1 S_1^i$ gleich seinem Preis und dieser ist nach (PG$\Phi_1{}^\top D^\top$) gleich $\pi(S_1^i) = S_0{}^\top\mathbf{e}_i = S_0^i$:

$$\begin{aligned} E_{Q_1}(d_1 S_1^i) &= \sum_{k=1}^K d_1 S_1^i(\omega_k) Q_1(\omega_k) = \sum_{k=1}^K S_{1,k}^i \Phi_{1,k} \\ &= \Phi_1{}^\top S_1^i = \pi(S_1^i) \\ &= S_0^i. \end{aligned}$$

Die entsprechende Aussage im Mehrperiodenmodell wird in Abschnitt 3.9.4 behandelt. Aufgrund der Martingaleigenschaft der diskontierten Preisprozesse der dividendenlosen Finanzinstrumente wird das formale (synthetische) W-Maß $Q_1$ auch **Martingalmaß**[40] genannt. Der Zusammenhang zwischen der Arbitragefreiheit und der Martingaleigenschaft der dividendenlosen diskontierten Preisprozesse wurde im Jahr 1979 von Harrison und Kreps entdeckt.[41]

---

[39] Im Einperiodenmodell ist der stochastische Prozess $X = (X_0,X_1)^\top$ genau dann adaptiert an die Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0,\mathcal{F}_1) = (\{\emptyset,\Omega\},\mathfrak{P}(\Omega))$, wenn $X_0 = X_0(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ konstant ist und $X_1 = X_1(\omega)$ eine beliebige Zustandsfunktion auf $\Omega$ ist.

[40] Die Bezeichnung Martingalmaß findet man bei Kremer (2011), S. 50, 69, 205, 215, 411.

[41] Trautmann (2007), S. 361 und Bäuerle u. Rieder (2017), S. 44.

**Risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß**
Bei vorliegender Arbitragefreiheit (AF) und der Voraussetzung (DP$D^{\mathsf{T}}\mathbf{1}_{\Omega}$+) folgt für *jedes* dividendenlose Finanzinstrument $S^i$ ($\delta^i = 0$, $i \in \{1,\ldots,N\}$) aus der oben angegebenen Martingaleigenschaft die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= [\, E_{Q_1}(d_1 S_1^i) \;-\; S_0^i \,]/d_1 \\ &= E_{Q_1}(S_1^i) \;-\; (1 + i_1)\, S_0^i && \text{(Lin. d. Erw.werts, } 1/d_1 = a_1 = 1 + i_1) \\ &= E_{Q_1}(S_1^i - S_0^i) \;-\; i_1 S_0^i && \text{(determinist. } S_0^i \text{ herausziehen)} \end{aligned}$$

und daraus im Fall $S_0^i \neq 0$ für die erwartete Rendite von $S^i$ im Zeitintervall [0,1] der gleiche Wert

$$E_{Q_1}\left(\frac{S_1^i - S_0^i}{S_0^i}\right) = i_1 \qquad (S_0^i \text{ deterministisch}).$$

Für *alle* dividendenlosen Finanzinstrumente $S^i$ mit $S_0^i \neq 0$ ist also im Zeitintervall [0,1] der $Q_1$-Erwartungswert der stochastischen Rendite

$$r_1^i := (S_1^i - S_0^i) / S_0^i$$

bezüglich des formalen W-Maßes $Q_1$ gleich und stimmt mit dem risikolosen (deterministischen) Zinssatz $i_1$ überein: $E_{Q_1}\left(r_1^i\right) = i_1$. Aus diesem Grund wird das formale W-Maß $Q_1$ auch **risikoneutrales bzw. risikoloses Wahrscheinlichkeitsmaß**[42] genannt. Für die obige Herleitung der Übereinstimmung der stochastischen Rendite $r_1^i$ mit dem deterministischen Zinssatz $i_1$ für alle $S^i$ mit $\delta^i = 0$ und $S_0^i \neq 0$ ist (DP$D^{\mathsf{T}}\mathbf{1}_{\Omega}$+) vorausgesetzt, sodass im Kapitalmarkt $\mathcal{M}$ des Marktmodells das AD-Kassageschäfts $\widehat{\xi}^{1,\Omega}$ mit dem deterministischen Diskontierungsfaktor $d_1$ bzw. deterministischen Zinssatz $i_1 = a_1 - 1 = 1/d_1 - 1$ tatsächlich vorhanden ist.

**Risikoneutrale Bewertung**
Unter der Voraussetzung der Arbitragefreiheit (AF) und der impliziten Prämisse (DP$D^{\mathsf{T}}\mathbf{1}_{\Omega}$+) erfolgt die Bewertung aller duplizierbaren Zahlungsprofile $X = (X_0, X_1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{1+K}$ durch die Barwertberechnung bzw. Diskontierung mit dem deterministischen (risikolosen) Preisvektor $P := (d_0, d_1)^{\mathsf{T}}$, $d_0 = \Phi_0(\Omega) = 1$, $d_1 = \Phi_1(\Omega)$, für die $Q_1$-Erwartungswerte $E_{Q_1}(X_t)$ der Zustandsfunktionen $X_0$ und $X_1$ bezüglich des sog. risikoneutralen W-Maßes $Q_1$:

$$\begin{aligned} \pi(X) &= \Phi^{\mathsf{T}} X = \Phi_0 X_0 + \Phi_1{}^{\mathsf{T}} X_1 \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{K} d_1 Q_1(\omega_k) X_1(\omega_k) \\ &= X_0 + d_1 \cdot \sum_{k=1}^{K} Q_1(\omega_k) X_1(\omega_k) \\ &= d_0 \cdot E_{Q_1}(X_0) + d_1 \cdot E_{Q_1}(X_1) && (d_0 = 1,\ E_{Q_1}(X_0) = X_0) \\ &= B_1(E_{Q_1}(X), P). \end{aligned}$$

Die entsprechende Interpretation der Bewertung im Mehrperiodenmodell erfolgt in Abschnitt 4.5. Diese sogenannte **risikoneutrale Bewertung** mit dem risikoneutralen W-Maß $Q_1$

[42] Die Erklärung der Bezeichnung risikoloses Wahrscheinlichkeitsmaß gibt Kremer (2011) auf S. 50.

wurde bei der Untersuchung des zeitkontinuierlichen Black-Scholes-Merton-Modells von Cox und Ross im Jahr 1976 entdeckt.[43]

Abschließend sei nach einem Zitat von Paul Valéry[44] angemerkt, dass eine Arbeit nicht beendet, sondern nur die Beschäftigung mit ihr eingestellt wird.

[43] Trautmann (2007), S. 331.

[44] Das Zitat des französischen Schriftstellers, Dichters und Philosophen Paul Valéry (1871–1945) „On ne finit pas une œuvre, on l'abandonne" stammt aus seinem Brief an den Dichter André Gide vom 20.11.1897 und wurde 1928 in dem Buch "Correspondance 1889-1900" veröffentlicht.

# Literaturverzeichnis

**Finanzmathematik**


Bäuerle N., Rieder U. (2017), Finanzmathematik in diskreter Zeit, Springer Spektrum, Berlin.

Deck T. (2006), Der Itô-Kalkül, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

Deutsch H.-P. (2008), Derivate und Interne Modelle, Schäffer-Poeschel Verlag, Stuttgart, 4. Auflage.

Hausmann W., Diener K., Käsler J. (2002), Derivate, Arbitrage und Portfolio-Selection, Vieweg Verlag, Braunschweig Wiesbaden.

Hull J.C. (2012), Optionen, Futures und andere Derivate, Pearson Deutschland, München, 8. Auflage.

Irle A. (1998), Finanzmathematik, Die Bewertung von Derivaten, Teubner Verlag, Stuttgart, 1. Auflage.

Kainhofer R. (2007), Einführung in die Finanzmathematik: Diskrete Modelle, Vorlesungsskript der Technischen Universität Wien; http://reinhold.kainhofer.com/files/Lehre/Skriptum_DiskreteModelle.pdf. Zugegriffen am 14.06.2014.

Kallsen J. (2009), Einführung in die zeitdiskrete Finanzmathematik, Vorlesungsskript der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel; http://www.math.uni-kiel.de/numerik/kallsen/lehre/ws-2009-2010/math-fin/MaFin_2008_WS_Skript.pdf. Zugegriffen am 04.07.2014.

Knispel T., Stahl G., Weber S. (2011), Black-Scholes, marktkonsistente Bewertung und Risikomaße, Skript der Leibniz Universität Hannover; http://www.stochastik.uni-hannover.de/fileadmin/institut/pdf/Tagungsband_KVW.pdf. Zugegriffen am 14.06.2014.

Korn R., Korn E. (1999), Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung, Vieweg Verlag, Braunschweig Wiesbaden.

Korn R. (2014), Moderne Finanzmathematik – Theorie und praktische Anwendung, Springer Spektrum, Wiesbaden.

Kremer J. (2006), Einführung in die Diskrete Finanzmathematik, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1. Auflage.

Kremer J. (2011), Portfoliotheorie, Risikomanagement und die Bewertung von Derivaten, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2. Auflage.

Kremer J. (2017), Preise in Finanzmärkten, Replikation und verallgemeinerte Diskontierung, Springer Gabler Verlag, Berlin.

Kruschwitz L. (1999), Finanzierung und Investition, Oldenbourg Verlag, München Wien, 2. Auflage.

Kühn Ch. (2016), Stochastische Finanzmathematik, Vorlesungsskript der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main; http://www.math.uni-frankfurt.de/~ismi/kuehn/stochfinance.pdf. Zugegriffen am 15.08.2016.

Kummer S., Pauletto C. (2012), The History of Derivatives: A Few Milestones, EFTA Seminar on Regulation of Derivatives Markets, Zurich. pdf bei file:///F:/_Download/HistoryofDerivatives.AfewMilestonesKummerandPauletto.pdf. Zugegriffen am 13.06.2023.

Mansuy R. (2009), The Origins of the Word "Martingale", Journ@l électronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique/ Electronic Journal for History of Probability and Statistics . Vol. 5, n°1. Juin/June 2009. http://www.jehps.net/juin2009/Mansuy.pdf. Zugegriffen am 16.02.2018.

Pfeifer D. (2014), Diskrete Stochastische Finanzmathematik, Carl von Ossietzky-Universität Oldenburg; https://www.staff.uni-oldenburg.de/dietmar.pfeifer/Monographien/DStoFi.pdf. Zugegriffen am 11.03.2018.

Pleier R. (2021), Finanzmathematik, Bewertung von Zahlungsströmen, Tredition, Hamburg, 2. Auflage.

Reitz S. (2011), Mathematik in der modernen Finanzwelt, Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden.

Rudolph B., Schäfer K. (2010), Derivate Finanzinstrumente, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2. Auflage.

Sandmann K. (2010), Einführung in die Stochastik der Finanzmärkte, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. 3. Auflage.

Swan E. J. (2000), Building the Global Market: A 4000 Year History of Derivatives, Kluwer Law International, Den Haag London Boston.

Trautmann S. (2007), Investitionen, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2. Auflage.

Weber E. J. (2008), A Short History of Derivative Security Markets, Working Paper, Business School University of Western Australia, Crawley. pdf-Datei bei https://www.web.uwa.edu.au/__data/assets/pdf_file/0003/94260/08_10_Weber.pdf. Zugegriffen am 13.06.2023.

Whaley R. E. (2006), Derivatives: Markets, Valuation and Risk Management, John Wiley & Sons, Hoboken New Jersey. Blick ins Buch: http://bit.ly/2L4MyKB.

**Mathematik**

Bauer H. (1992), Maß- und Integrationstheorie, Walter de Gruyter Verlag, Berlin New York, 2. Auflage.

Bauer H. (2002), Wahrscheinlichkeitstheorie, Walter de Gruyter Verlag, Berlin New York, 5. Auflage.

Borgwardt K.H. (2001), Optimierung, Operations Research, Spieltheorie, Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin.

Bröcker T. (2004), Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Birkhäuser Verlag, Basel, 2. Auflage.

Erwe F. (1967), Differential- und Integralrechnung I, Bibliographisches Institut, Mannheim.

Grauert H., Lieb I. (1967), Differential- und Integralrechnung I, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

Hildebrandt S. (2006), Analysis 1, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2. Auflage.

Jungnickel D. (2008), Optimierungsmethoden, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2. Auflage.

Kowalsky H.-J. (1967), Lineare Algebra, Walter de Gruyter Verlag, Berlin, 3. Auflage.

Kowalsky H.-J., Michler G.O. (2003), Lineare Algebra, Walter de Gruyter Verlag, Berlin New York, 12. Auflage.

Lexikon der Mathematik (2000–2003), Band 1–6, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin.

Mangoldt H.v., Knopp K. (1974), Einführung in die Höhere Mathematik, Band 2, Hirzel Verlag, Stuttgart, 14. Auflage.

Rockafellar R.T. (1970), Convex Analysis, Princeton University Press, Princeton New Jersey.

Stoer J., Witzgall C. (1970), Convexity and Optimization in Finite Dimensions I, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

Teubner-Taschenbuch der Mathematik (1996 u. 1995), Teil 1 und 2, Teubner Verlag, Stuttgart Leipzig.

Wagner R. (1981), Grundzüge der linearen Algebra, Teubner Verlag, Stuttgart.

# Sachverzeichnis


## #

σ-Additivität 12
σ-Algebra 8
  erzeugte 9, 14, 15

## A

Abbildung
  adjungierte 51, 299, 349
  bijektive 53
  epimorphe 53
  injektive 52, 365
  isomorphe 53, 131
  monomorphe 52
  orthogonale 49
  surjektive 53, 365
Abbildungsmatrix 41, 349
Abschreibung V
Abstand, orientierter 81, 110, 203, 321, 322
Abstandsfunktion 111
Abstandsmessung X, 111, 112, 204, 322
Abzinsungsfaktor, stochastischer 160
Abzinsungspapier 164
AD (Arrow-Debreu)
  -Kassageschäft 159, 162, 165, 170, 414
  -Papier 158, 166, 172
  -Preis 160, 162, 167
  -Preis, nicht normierter 176, 413
  -Preis, normierter 176
  -Termingeschäft 166, 168, 170, 172
  -Zahlungsprofil 413
Adaptive-Mesh-Modell 3
Additivität
  abzählbare 12
  endliche 12
AD-Preis, normierter 179
Algebra 8, 12
Algorithmus VIII, 2
almost sure 63
Alternativsatz aus der konvexen Geometrie IX, XI, XII, 84, 92, 93, 106, 125, 128, 136, 148, 397
Anfangswertbedingung 5, 16
Anleihe, gesamtfällige 164
Anteil
  deterministischer 42
  stochastischer 42
Arbitrage IX
  Einperioden- 245
  lokale 245
Arbitragefreiheit VIII, IX, X, 80, 92, 134, 135, 143, 340, 352
Arbitragegelegenheit 47, 97, 135
  selbstfinanzierende 219
Aristoteles VI
Arrow K.J. 158
Arrow-Debreu
  -Kassageschäft 159, 170
  -Papier X, 92, 158, 172, 211, 413
  -Preis IX, 158, 160, 162
  -Preisvektor IX, 158, 163
  -Termingeschäft 166
Atom 10, 157, 179, 182, 185
Atomarität 11
Aufspaltungsfunktion 67
Aufspaltungsindex 67, 200
Aufspaltungswert 38, 67
Aufzinsungsfaktor
  deterministischer 165, 173, 195, 415
  stochastischer 160, 162, 167, 414
Aufzinsungspapier 164
Ausübungspreis VII
Auswahlaxiom 10
Auszahlung, kumulierte 224
Auszahlungsprozess 36, 222
Auszahlungswert 34
Automorphismus 240, 321
Autorenwebsite XII, 92, 111, 127, 136

## B

Bachelier L. VII
Bachelier-Modell 2
Barriere 215
Bartter B. 2
Barwert 210, 212, 214, 327, 328
Barwertberechnung, verallgemeinerte X, 211, 213, 214
Basis eines Vektorraums 26, 130, 278, 315, 377
Basispreis 215
Bauer H. 1, 5, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 19, 26, 36, 50, 63, 83, 156, 183, 184, 187, 192, 193, 195, 246, 249, 251, 253, 258
Bäuerle N. VII, 6, 181, 193, 215, 226, 234, 244, 245, 249, 255, 276, 279, 417

Baum (der Graphentheorie) 20
Baummodell 3
Beckers S. 3
bedingte Erwartung 179, 181
bedingte Wahrscheinlichkeit 184
Begriff, w-theoretischer VIII, X, 83, 260, 276, 281
Berechnung
des diskontierten Preises 180, 191
des Preises 83
des Startkapitaleinsatzes 81
einer Duplikationsstrategie 65, 73, 217, 264
eines äquivalenten Martingalmaßes 347
eines Bewertungsprozesses 112, 146
eines Bewertungsvektors 343, 346, 377, 401
eines Diskontierungsprozesses 146
eines Diskontvektors 347
Betragssummennorm 257
Beurteilungskurve 203, 206, 207, 322, 323
homogene 207
inhomogene 207
Beurteilungsparameter 208
Bewertung
numerische VII, 2
risikoneutrale 92, 194
Bewertungsfunktion 209
Bewertungsfunktional 99, 142, 335, 385
Bewertungsprozess IX, 1, 90, 286, 375
der Handelsstrategien 82
der sf-Handelsstrategien 336
der Zahlungsprofile 99
duplizierbarer 85, 87
Bewertungsprozesse, affin unabhängige 130
Bewertungsvektor 120, 286, 288, 319, 334, 335, 369, 371, 375, 384
positiver 324
sf-duplizierbarer 317
Bewertungsvektoren
affin unabhängige positive 326
Bildmaß 8, 83
Bildraum einer linearen Abbildung 51, 351, 352
Bilinearform 48
Binomial(baum)modell 2, 3, 6
Black F.S. VII, VIII, 2, 4, 63
Black-Scholes-Modell 2
Blatt des Informationsbaums 20
Blockbidiagonalmatrix, obere 41, 67
Blockdiagonalmatrix 38, 39, 40, 67
Blocksupradiagonalmatrix 40
Bollerslev T. 3
Bolzano B. 208
Bond 164
Borel É. 8
Borelsche Menge 8, 12, 13, 15
Borgwardt K.H. 136
Briefkurs 73
Bröcker T. 45, 51, 53, 103, 104, 130, 131, 278, 301, 338
Brücke
von deterministischer zu stochastischer Finanzmathematik 204, 207, 211, 213, 214
von zeitdiskreter zu zeitstetiger Finanzmathematik 201
BSM-Modell 2
Bündel 6

## C

Call-Option VI, VII, 215
Carr P.P. 3
CEV-Modell 2
CGMY-Modell 3
Chang E.C. 3
charakteristische Funktion 25, 27
Chicago Board of Trade VI
Chicago Mercantile Exchange VI
Codex von Hammurapi V
Commenda VI
complete market model 63, 129
contingent claim V
Cox J.C. 2, 194
Cox-Ross-Rubinstein-Modell 2, 6
CRR-Modell 2, 6
cum-dividende-Kurs 30

## D

Darstellungsmatrix 37, 41, 349
Debenture 164
Debreu G. 158
Deck T. 4, 6, 184, 192, 193, 251
Defekt einer linearen Abbildung 131
Definitheit, positive 55, 58, 87, 89, 113, 300, 349, 392
Derivat V
Derman E. 3
Deutsch H.-P. 4, 6, 160
Diener K. 6
Differenzialgleichung, stochastische 3
Diffusion-Modell 3
Dimension eines Unterraums 338
Dimension eines Vektorraums 130, 278, 315, 377
Dimensionsgleichung XI, 312, 390

Dimensionssatz
für lineare Abbildung 53, 131, 197, 242, 243, 393
für Unterräume IX, 53, 104, 105, 301, 390, 393
Disjunktheit 128
Diskontfaktor, deterministischer 172, 173
diskontiertes Marktmodell mit Numéraire 196
Diskontierung, verallgemeinerte X, 211, 213, 214
Diskontierungsfaktor 92
deterministischer X, 158, 165, 173, 174, 195, 211, 415
stochastischer IX, 158, 160, 162, 167, 209, 327, 414
Diskontierungsoperator 113, 167, 187
Diskontierungsprozess IX, 1, 99, 139, 158, 163, 187, 208, 375, 397, 401
Diskontierungsprozesse, affin unabhängige 142, 143
Diskontierungsvektor IX, 163
deterministischer X, 166, 204, 210, 212, 214
stochastischer 210
Diskontvektor IX, 147, 158, 163, 254, 257, 261, 262, 278, 324, 328, 375, 401
deterministischer 158
relativer 256
stochastischer 327
diskrete stochastische Analysis 200
diskretes stochastisches Integral 200
Dividende 3, 6
Dividendenprozess 1, 6
Dividendenzahlung 32
Dojima-Reisbörse VI
Doob J.L. 200
Doob-Zerlegung 200
Dreiecksungleichung 192, 251
$D^{\mathrm{T}}$-Duplizierbarkeit 74, 264, 359, 360
$D^{\mathrm{T}}$-Vollständigkeit 364
Dupire B. 3
Duplikationsprinzip VIII, X, 1, 8, 32, 63, 69, 83, 84, 92, 203, 205, 284, 322, 323
Duplikationsstrategie VIII, 1, 63, 82
Duplizierbarkeit X, 69, 74, 83, 143, 217, 340, 353, 359
Duplizierung 1, 216, 322, 323
Duplizierungskonzept X, 98, 203, 322, 384

## E

Effektivzinsberechnung V
Eigenschaften der bedingten Erwartung 192, 251
Einperiodenmodell VII, IX, XI, 4, 177
Einperioden-sf-Arbitragefreiheit 245
Elementar-Claim 158
Elementarereignis 5
Elementarfunktion 26
Endomorphismus 240
Entnahmeprozess 36
Ereignis
beobachtbares 19
-preis IX, 158, 160, 162, 167
-preisvektor IX, 158, 163
theoretisch mögliches 19
Ereignispreis 414, 415
Ereignispreisvektor 210
Ergänzungsgeschäft 203, 206, 323
Ertragsprozess 222
Erwartung, bedingte 179, 181, 192, 251
Erwartung, diskontierte bedingte 190
Erwartungstreue der bedingten Erwartung 184, 192, 193, 251, 252, 253
Erwartungswert 83, 211
bedingter 181, 183, 184
Erwe F. 208
Erzeugendensystem eines linearen Unterraums 112, 151
Erzeuger einer $\sigma$-Algebra 10, 11, 14
ex-dividende-Kurs 32
Existenz
eines äquivalenten Martingalmaßes 255
eines Bewertungsvektors 286
eines Diskontvektors 255
eines Normalenvektors 255
Exponential, stochastisches 200

## F

faires Spiel 186, 199
Fälligkeitszeitpunkt VII
Farkas J. 136
Faserung 9
fast sicher 63, 184, 187, 193
Figlewski S. 3
Filtration 8
kanonische 8, 15
minimale 8, 15
natürliche 7, 8, 15
von $\sigma$-Algebren VIII, 15, 19, 248
von Partitionen VIII, 9, 15, 17, 19
Finanzinnovation V
Finanzinstrument 1, 5
derivatives V
dividendenloses 181

festverzinsliches X, 92, 172
Finanzmarkt VII
Finanzmathematik
klassische V
stochastische V, VII
zeitdiskrete 201
zeitstetige 201
Finite-Differenzen-Methode 3
Forwardgeschäft 64, 150, 154
Forward-Kontrakt 215
Fundamentalsatz der Preistheorie 134, 140, 396
Funktion
charakteristische 25, 27
Indikator- 25
integrierbare 183
messbare 12
Funktional
lineares 81, 85, 98, 334, 384
positives lineares 142
Future VI, 215

## G

Gao B. 3
GARCH-Modell 3
Geldkurs 73
Geman H. 3
Gesetz des eindeutig bestimmten Preises VIII, 1, 32, 43, 84
Gewinn, kumulierter 223
Gewinnprozess 222
Gide A. 419
Girsanov I.V., Satz von 200
Gleichungssystem
endliches 146
gestaffeltes lineares 65, 73, 206
inhomogenes lineares 45, 377, 402
unendliches 146
Globex VII
Grauert H. 208

## H

Halbraum
affiner 254, 262
linearer 93, 128, 137, 138, 254, 262
Hammurapi V
Handelsprozess 7
Handelsstrategie VIII, 1, 7, 63, 83
deterministische 29
festverzinsliche X, 92, 166, 170, 179, 213
selbstfinanzierende X, 74, 200, 216, 359
sf- 216
Harrison J.M. 181
Hauptdiagonale einer Matrix 40
Hauptsatz der Preistheorie
Erster 140, 256, 261, 396
Zweiter 142, 276, 281
Hausmann W. VII, 1, 4, 5, 6, 8, 9, 63, 184
Hedging VII
Hedging-Strategie 63
Heston S.L. 3
Heston-Modell 3
Hildebrandt St. 208
Hull J.C. VII, 3, 4, 6, 193
Hyperebene
affine 129, 138, 254, 262
lineare 81, 93, 94, 95, 110, 111, 126, 128, 130, 134, 137, 166, 302, 321, 390, 391

## I

Implementierung VIII, 2
Indikatorfunktion 25
Informationsbaum 3, 9, 16, 20, 21, 22, 66
Informationspfad 9, 20, 22
Informationszunahme 15, 23
Innovation 200
Integral 183
diskretes stochastisches 200, 225
Integrand 200, 225
Integration nach Maß mit Dichte 184
Integrator 200, 225
Integrierbarkeit 183
Interpretation der Bewertung 98, 111, 157, 384
Interpretation des Preises 166
Investition, gewinnbringende 406
Investitionsprozess 36
Investitionsrechnung V
involutorische Eigenschaft IX, XI, 51, 90
Inzidenz 369
Irle A. 4
Isomorphie 29, 50, 93, 136
Isomorphismus 29, 131
Iterationseigenschaft 189, 192, 251
Itô K. 200
Itô-Integral 200
IVF-Modell 3

## J

Jevons W.S. 84
Jump-Diffusion-Modell 3
Jump-Modell 3
Jungnickel D. 136

# K

Kainhofer R. 160
Kalibrierung VII, 2
Kallsen J. VII, 2, 6, 30, 184, 199, 215, 234, 255, 276
Kani I. 3
Kante 20, 21
Kantenfolge 20
Kantenzug 20
Kapitalmarkt
  realer VII
  unvollkommener 73
  vollkommener VII, 6, 208
Kapitalmarktgeschäft 149, 365, 366, 396, 414
  endfälliges 218
Käsler J. 6
Kassenhaltung 173, 195, 227, 230, 406, 417
Kaufoption 215
Kegel
  konvexer linearer 92, 125, 127, 136, 148
  linearer 52
  polarer 52, 93
  polyedrischer 125
Kern einer linearen Abbildung IX, 51, 90, 351, 352
KG-Zahlungsprofil 226
Klasseneinteilung 9
Knispel T. VII, 2
Knock-In-Option 215
Knock-Out-Option 215
Knopp K. 9
Knoten 20, 21
Koeffizientenmatrix 377
Kompensator 200
Komplement
  lineares 51
  orthogonales IX, 47, 48, 51, 90, 91, 93, 101, 134, 257, 261
Komponentensumme 250
Koordinaten
  -darstellung 26, 151, 299
  -Isomorphismus 49
Korn R. 4, 6, 215
Korn R. u. E. VII, 63
Kovariations-Prozess 200
  vorhersehbarer 200
Kowalsky H.-J. 45, 46, 47, 49, 51, 52, 53, 59, 101, 103, 104, 131, 299, 301, 337, 338
Kremer J. VII, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 22, 26, 30, 36, 51, 52, 53, 63, 67, 69, 80, 85, 92, 99, 113, 119, 121, 131, 139, 140, 147, 157, 160, 163, 177, 179, 181, 182, 183, 184, 187, 188, 189, 192, 193, 196, 199, 200, 209, 212, 214, 215, 224, 231, 234, 251, 288, 299, 350, 353, 365, 378, 384, 396, 397, 399, 406, 407, 409, 412, 414, 415, 417, 418
Kreps D.M. 181
Kruschwitz L. 6
Kühn C. 8, 215, 234, 245, 255
Kummer S. V
Kupon 164
Kurs 3, 32
  cum-dividende- 30
  ex-dividende- 32
  relativer (modifizierter, diskontierter) 195, 227
Kurs- und Renditerechnung V
Kursartindex 73

# L

Längenmessung 48
Law of One Price (LOP) VIII, IX, X, 1, 32, 43, 53, 54, 56, 69, 77, 80, 84, 92, 94, 143, 150, 266, 284, 340, 352, 365
Lebesgue H. 8
Lebesgue-Borelsches Maß (L-B-Maß) 8, 13, 15
Leistungen des Skalarprodukts 48
Lieb I. 208
Linearform 81, 85, 98, 142, 203, 273, 334, 384
Linearität 85, 192, 251, 288
Lokalisierung eines Zahlungsprofils 92
Lösungsmenge IX, 90, 101
Lotfußpunkt 110

# M

Madan D.B. 3
Mangoldt H.v. 9
Mansuy R. 187
Margenzahlungsstrom VIII, 207
Marginzahlung eines Futures 215
Markt, vollkommener 84
Marktmodell VII, 1, 18
  arbitragefreies 135, 196
  relatives (modifiziertes, diskontiertes) 195, 196, 227, 228
  sf-vollständiges 265
  vollständiges IX, 63, 196
  zeitdiskretes VII, 1, 2
  zeitkontinuierliches VII, 1, 2, 4
Martingal 181, 186, 187, 199, 249, 417
  -Darstellungssatz 200

-eigenschaft 92, 186
erzeugtes 200
-maß X, 181, 194, 199, 227, 249, 417
-maß, äquivalentes XI, 199, 249, 256
Martingale als Spielstrategie 187
Martingalmaße, affin unabhängige 277
Maß 156
endliches 157
formales (synthetisches) IX
mit Dichte 184
Maß- und Integrationstheorie XII
Maßraum 15
Matrix
Blockdiagonal- 38
Blocksupradiagonal- 40
Darstellungs- 51
obere Blockbidiagonal- 41
transponierte 51
Mehrperiodenmodell VII, VIII, IX, 4
Menge
atomare 10
der Bewertungsprozesse 85
der Bewertungsvektoren 286, 376
der Diskontierungsprozesse 397
der relativen Bewertungsvektoren 318
polyedrische 138
zusammenhängende 208
Merton R.C. VII, VIII, 3, 4, 63
Messbares Herausziehen 192, 251
Messraum 25, 156, 248
gefilterter 18, 27
Michler G.O. 51, 53, 103, 299, 301, 338
Minkowski H. 129, 136, 324
Minkowski-Farkas-Lemma 136
Minkowski-Summe 129, 279, 283, 315
Mischung 6
Mittelwert
arithmetischer 216
geometrischer 216
Molekül 10, 157
Molekülstruktur 11, 179, 182
Moment
absolutes $p$-tes 83
zentrales $p$-tes 83
Monotonie 192, 251
Monte-Carlo-Simulation 3
Monti-Aktie VI
Motzkin T., Satz von 136

## N

Nachbildung 322, 323
NE-Geschäft 218, 363
NE-Zahlungsprofil 219, 226, 361, 363
relatives 238
No-Arbitrage 135
Nobelpreis VII, 158
Norm
Betragssummen- 257
eines Vektorraums 257
euklidische 321
Normaldarstellung 26
Normalenvektor
einer Hyperebene IX, 93, 110, 128, 321
einer Hyperebene, positiver 137
positiver normierter XI, 261
Nukleon 10
Nullkuponanleihe 164
Null-Preisfunktion 88, 90
Nullstellensatz 208
Numéraire 194, 227
deterministischer 276
stochastischer 227
Nutzenfunktion 1, 82, 84, 85, 111, 209

## O

Obligation 164
Option VII
asiatische 216
digitale Barriere- 215
digitale Call- 215
digitale Put- 215
europäische Call- VII, 215
europäische Put- 215
Optionsanleihe VI
Optionsschein VI
Orthant
nichtnegativer 135
positiver 125, 128, 257, 262
schwach positiver 125, 127, 135, 220, 256, 259, 261
Orthogonalität 369
Orthonormalbasis 49, 50, 51, 80, 86, 299
Osaka VI

## P

Partition 9
induzierte 10
Pauletto C. V
Pfad 1, 5, 16, 20
Pfeifer D. VII
Plausibilitätsbetrachtung zur bedingten Erwartung 184
Polarkegel 52
Polyeder, konvexes 138, 250, 254, 256, 257, 261, 262, 324

Portfolio 1, 6
Positivität 192, 251
Positivkombination 147, 399
Potenzmenge 8, 63
Präferenzkurve 322
Präferenzordnung 82, 111, 209
  abgeschlossene 82, 85
Prämaß 156
Preis
  eines Zahlungsprofils IX, 69, 82, 284, 374
  fairer 155, 156
  relativer, eines relativen Zahlungsprofils 290
Preisdifferenz
  dividendenlose 251
  dividendenversehene 222, 251
Preisfunktion 85, 111, 318
Preisgleichung IX, XI, 85, 95, 99, 286, 288, 331, 334, 369, 371, 384
Preismaß X, 92, 157, 179, 194, 214, 414
  einheitliches 177
  normiertes 176, 415
  relatives 176
Preisprozess 1, 5, 16
  diskontierter 181
  dividendenloser 199
Preisvektor
  Arrow-Debreu- 163
  deterministischer X, 158, 166, 204, 210, 212, 214
  Ereignis- X, 163
  Zustands- 163, 414
Pricing by Duplication VIII, 83, 284
Prinzip der vollständigen Induktion 178, 189
Produkt von Zustandsfunktionen 31, 50
Programmcode VIII, 2
Projektion, orthogonale 110
Prozess 1
Punkte, affin unabhängige 130, 278
Put-Option VI, 215

# R

Rang
  einer linearen Abbildung 131
  einer Matrix 377
Raum, affiner 78
Raum, messbarer 156, 248
Realisation 1, 5, 16
Reinvestitionsprozess 1, 36, 222
Reinvestitionswert 7, 33
Reitz S. VII, 3, 4, 6
Rendite, stochastische 192
Rendleman R. 2
Rentenpapier 164
Rentenrechnung V
Restklasse 314
Richtung
  eines affinen Unterraums 279, 283, 314, 315, 343, 377, 402
Rieder U. VII, 6, 181, 193, 215, 226, 234, 244, 245, 249, 255, 276, 279, 417
Riesz F. 85, 288
Rieszscher Darstellungssatz IX, 85, 286, 287, 288, 314, 317, 318
risikoneutrale Bewertung 194, 418
Rockafellar R.T. 136
Ross S.A. 2, 194
Rubinstein M. 2, 3
Rudolph B. VII, 2, 3, 4, 6, 63

# S

Samuelson P.A. VII, 2
Sandmann K. VII, 1, 2, 4, 6, 160, 350
Satz
  von Girsanov 200
  von Motzkin 136
  von Stiemke 136
Schäfer K. VII, 2, 3, 4, 6, 63
Scholes M.S. VII, VIII, 2, 4, 63
selbstfinanzierende
  Arbitragegelegenheit 219
  Handelsstrategie 216
Selbstfinanzierungsbedingung 222, 224, 232, 264
sf-Arbitragefreiheit 219
  lokale 245
sf-Arbitragegelegenheit 333
sf-Bewertungsprozess 344
sf-Diskontvektor 328
sf-Duplizierbarkeit 74, 216, 264, 359
sf-Handelsstrategie 216
sf-Vollständigkeit 75, 265, 364
Sharpe W. 2
sicher 63
Skalarprodukt IX, 48
Skalarprodukt als Erwartungswert 200
Sofortentnahme 203, 206, 322, 323
Sonderfall, mathematischer 46, 47, 56, 90
Spaltenraum einer Matrix 377
Spekulationsblase VI
Spiel, faires 186, 199
Standardbasis 26
Standardskalarprodukt 50
Startkapital 35
Startkapitaleinsatz 35, 43, 81, 82

state contingent claim 158
Stiemke E., Satz von 136, 397
stochastische Prozesse
  modifizierte 63
  ununterscheidbare 63
stochastischer Prozess V, 1
  $\mathbb{R}^N$-wertiger 5
  adaptierter 7, 8
  reellwertiger 28, 37
  vorhersehbarer 7
Stoer J. 52, 136
Strahl 93
Streckung, zentrische 321
strike VII
Strike-Preis 215
Struktur der Lösungsmenge IX, 90, 377
Stückzahl 6
Summe
  direkte 43, 51, 97, 98, 103, 134, 333, 334, 383, 384, 389
  orthogonale 52, 110, 352
Summendarstellung einer messbaren Funktion 25
Supplement 203, 206, 323
Supradiagonale einer Matrix 40, 41
Swan E.J. V
Synthetisierung 322, 323
Szenario 5, 16

## T

Termingeschäft 64, 150, 154
  einseitig bindendes V
  zweiseitig bindendes V
Thales von Milet VI
Tilgungsrechnung V
Tower-Property 189
Trajektorie 1, 5, 16
Transaktionskosten 3
Translation 79
Translationsunterraum 314, 315, 343, 377
Translationsvektorraum 78
Trautmann S. VII, 2, 3, 4, 6, 63, 160, 181, 186, 194, 417, 419
Treppenfunktion, nichtnegative 26
Trinomialbaum-Modell 3
Tulpenmanie VI
Tupel-Schreibweise 26
Turmeigenschaft 189, 192, 251

## U

Überdeckung, schlichte 9
Unabhängigkeit
  affine 377
  lineare 377
underlying V
Unterraum
  affiner 129, 278, 283, 310, 314, 315
  komplementärer 51
  linearer 30, 129, 138, 217, 254, 262, 278, 282, 315
Unterraum-Eigenschaften 16
Untervektorraum 16, 78

## V

Valéry P. 419
Varianz 83
Varianz-Gamma-Modell 3
Vektoren
  affin unabhängige 278, 282, 403
  linear unabhängige 278, 282, 402
Vektorraum, euklidischer 48
Verbindungsvektor 78
Verkaufsoption 215
Vermögensprozess 1, 36, 222
Vermögenswert 7, 30
Verschiebungsvektor 79
Verteilung 8, 83
Vielfalt
  der Bewertungsvektoren 129, 375
Volatilität 2
  implizite 2
  stochastische 3
Vollständigkeit des Marktmodells VIII, IX, X, 63, 75, 80, 92, 129, 143, 157, 163, 168, 188, 340, 352, 364
Voraussetzung, mathematisch-technische 44, 45, 56, 57, 58, 74, 89, 101, 102, 143, 156, 159, 160, 165, 175, 219, 236, 291, 295, 301, 358, 361, 378, 389, 390

## W

Wagner R. 45, 47, 51, 53, 101, 103, 104, 130, 131, 278, 301, 314, 337, 338, 377
Wahrscheinlichkeit, bedingte 184
Wahrscheinlichkeitsdichte, bedingte 200
Wahrscheinlichkeitsmaß X, 8, 156, 157, 248
  äquivalentes 199, 248, 256, 261, 262
  diskretes 181, 252
  formales (synthetisches) IX, 157, 176, 194, 412
  risikoloses (risikoneutrales) X, 192, 249, 418
Wahrscheinlichkeitsraum (W-Raum) 8, 15, 19, 183

gefilterter 8, 18, 181, 248
Wahrscheinlichkeitstheorie (W-Theorie) XII
Weber E.J. V
Wechsel VI
Weg 20
Weierstraß K. 208
Wert einer Handelsstrategie 81, 82
Wertpapier 1, 5
fest verzinsliches 164
reines (elementares, primitives) 158
Wertpapierportfolio 1, 63, 83
Wertprozess 1, 36
Weyl H.K.H. 324
W-Gesetz 8, 83
Whaley R.E. V, VI
Wiederanlageprozess 36
Winkelmessung 48
Wissenszuwachs 7, 9, 15, 16, 19, 23
Witzgall C. 52, 136
W-Maß (Wahrscheinlichkeitsmaß) 8, 156, 157
(zu $P$) äquivalentes 249
formales 255, 260
W-Theorie 63, 181
Wurzel des Informationsbaums 20

## Y

Yor M. 3

## Z

Zahlung, endfällige stochastische 215
Zahlungsanspruch V, 215
Zahlungsprofil V, VIII, 1, 63, 215
$D^{\mathrm{T}}$-duplizierbares 264, 359
duplizierbares (erreichbares) 63, 358
endfälliges 200, 215
KG- 226
NE- 219
schwach positives 352
sf-duplizierbares (sf-erreichbares) 264, 359
Zahlungsstrom
zeitdiskreter VII
zustandsdiskreter VII
Zeitparametermenge 1
Zeitpräferenz 207
Zerlegung
additive 42, 224, 232, 299, 350
additive, einer Zustandsfunktion 230
additive, eines Zahlungsstroms 322, 323
direkte, eines Vektorraums IX, XI, 52
disjunkte 9
orthogonale additive 110
Zero-Bond 164
Zinsfaktor
deterministischer 172, 173, 195
Zinsrechnung V
Zinssatz
deterministischer 415
deterministischer (risikoloser) 165, 172, 173, 192, 195
konstanter 198
stochastischer 160, 162, 167, 414
Zinsschein 164
Zufallsprozess 1
Zufallsvariable 8, 83
Zustand 5
Zustands-Claim 158
Zustandsfunktion 5, 8, 31
messbare 7, 8, 9, 12, 15, 21, 25
Zustandsfunktionen, affin unabhängige 278, 282
Zustandspreis IX, 158, 160, 162, 167, 414
Zustandspreisprozess IX, 139, 158, 163, 397
normierter 139, 397
Zustandspreisvektor IX, 158, 163, 399, 414
Zustandsraum VIII, 1, 5, 248
Zwischenwertsatz 208